Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Королёв, О кратных нулях дзета-функции Римана, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2006, том 70, выпуск 3, 3–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/im723>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 11:49:33

УДК 511

М. А. Королёв

О кратных нулях дзета-функции Римана

Получена новая верхняя оценка количества нулей дзета-функции Римана, имеющих заданную кратность и лежащих в заданном прямоугольнике критической полосы.

Библиография: 11 наименований.

§ 1. Введение

Приведем два определения, необходимые для дальнейшего.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Для положительного T , отличного от мнимой части нуля дзета-функции Римана $\zeta(s)$, через $N(T)$ обозначим число нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$, $0 < \operatorname{Im} s \leq T$. Если T совпадает с ординатой нуля $\zeta(s)$, то положим

$$N(T) = 0.5(N(T+0) + N(T-0)).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Обозначая через $k(\rho)$ кратность нуля ρ , для целого $j \geq 1$ величину $N_j(T)$ положим равной числу различных нулей ρ дзета-функции с условием $k(\rho) = j$, ордината которых положительна и не превосходит T .

Важную роль при изучении распределения комплексных нулей функции $\zeta(s)$ играет формула Римана–Мангольдта, согласно которой

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} + S(T) + \delta(T), \quad (1)$$

где $S(T) = \pi^{-1} \arg \zeta(0.5 + iT)$, а $\delta(T)$ – гладкая функция порядка T^{-1} (доказательство этого равенства, определение и основные свойства $S(T)$ см. в работе [1]).

Из формулы (1) следует, что если точка $T = \gamma$ является ординатой нулей $\rho_1, \dots, \rho_m$, то при переходе через эту точку функции $N(T)$ и $S(T)$ совершают скачок на величину, равную сумме кратностей этих нулей:

$$N(\gamma+0) - N(\gamma-0) = S(\gamma+0) - S(\gamma-0) = k(\rho_1) + \dots + k(\rho_m).$$

Таким образом, кратность любого нуля $\rho = \beta + i\gamma$ не превосходит разности $S(\gamma+0) - S(\gamma-0)$. Пользуясь тем, что модуль $S(T)$ при достаточно больших T не превосходит $8.9 \ln T$ (см. [1]), нетрудно заключить, что функция $\zeta(s)$ не имеет нулей с ординатой γ , кратность которых была бы выше $18 \ln |\gamma|$.

Предположение справедливости гипотезы Римана позволяет заменить в приведенных рассуждениях величину $8.9 \ln T$ более точной границей $1.2(\ln T) \times (\ln \ln T)^{-1}$ (см. [2]), что влечет отсутствие нулей $\rho = \beta + i\gamma$ функции $\zeta(s)$, имеющих кратность, большую, чем $2.5(\ln |\gamma|)(\ln \ln |\gamma|)^{-1}$.

Существует ряд утверждений, как условных, так и безусловных, указывающих на то, что кратные нули составляют лишь незначительную часть в общем числе комплексных нулей дзета-функции.

Так, с помощью гипотезы Римана можно доказать [3], что при неограниченном возрастании T справедливо неравенство $N_1(T) \geq (c + o(1))N(T)$, $c = \frac{2}{3}$, означающее, что простыми являются не менее двух третей всех нулей $\zeta(s)$. В работе [4] доказано, что это неравенство выполняется и при $c = 0.672753 \dots$ (см. также [5]). Если предположить (наряду с гипотезой Римана) справедливость обобщенной гипотезы Линделёфа, то в качестве c можно взять величину $\frac{19}{27} = \frac{2}{3} + \frac{1}{27}$. Этот результат принадлежит Дж. Конри, А. Гошу и С. Гонеку [6].

Более сильные утверждения о поведении величины $N_1(T)$ опираются на недоказанную гипотезу Монтгомери. Согласно этой гипотезе предел при $T \rightarrow +\infty$ суммы

$$\frac{1}{N(T)} \sum_{0 < \gamma, \gamma' \leq T} T^{i\alpha(\gamma - \gamma')} \frac{4}{4 + (\gamma - \gamma')^2}$$

существует и равен меньшему из чисел α и 1 для любого фиксированного положительного α (здесь γ, γ' – ординаты нулей функции $\zeta(s)$).

Из гипотезы Монтгомери следует [3], что

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{N_1(T)}{N(T)} = 1,$$

т. е. “почти все” нули дзета-функции являются простыми. Другим следствием этой гипотезы является неравенство

$$\sum_{0 < \gamma \leq T} k^2(\rho) \leq \left(\frac{4}{3} + o(1) \right) N(T),$$

где ρ принимает значения различных нулей функции $\zeta(s)$ (см. [5]).

Существует, наконец, предположение, что простыми являются все нули функции $\zeta(s)$, т. е. $N_1(T) = N(T)$.

А. Фуджи в 1975 г. доказал [7] неравенство $N_j(T) \leq N(T) \exp\{-c\sqrt{j}\}$, в котором c – положительная абсолютная постоянная, j – достаточно большое целое число, $T > T_0(j) > 0$.

В настоящей статье доказывается ряд утверждений, уточняющих неравенство Фуджи. Одним из них является следующая

ТЕОРЕМА А. *При любом $j \geq 1$ и $T \geq T_0 > 0$ справедлива оценка*

$$N_j(T) \leq c_1 N(T) \exp\{-cj\},$$

где $c_1 = e^{7.3}$, $c = e^{-30.3}$.

В статье используются следующие обозначения: ε – сколь угодно малое фиксированное число, $0 < \varepsilon < 0.001$, T – растущий параметр, $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$, $h = \frac{\pi}{3} \left(\ln \frac{T}{2\pi} \right)^{-1}$. Через θ обозначены комплексные числа, по абсолютной величине не превосходящие единицы, в разных соотношениях, вообще говоря, разные.

§ 2. Вспомогательные утверждения

В этом параграфе помещен ряд определений и вспомогательных утверждений, необходимых для доказательства основных лемм и теорем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Для положительного числа T и σ с условием $0.5 \leq \sigma \leq 1$ через $N(\sigma, T)$ обозначим число нулей дзета-функции Римана $\zeta(s)$ в прямоугольнике $\sigma < \operatorname{Re} s \leq 1$, $0 < \operatorname{Im} s \leq T$.

ЛЕММА 1 (плотностная теорема Карацубы). Пусть $H = T^{27/82+\varepsilon}$, $x = T^{0.1\varepsilon}$. Тогда для любого σ из промежутка $0.5 \leq \sigma \leq 1$ справедливо неравенство

$$N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T-H) \leq 13H(\ln T)x^{1-2\sigma}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в работе [8].

ЛЕММА 2. Пусть $X \geq X_0(\varepsilon) > 0$, $H = X^\varepsilon$, $x = H^{0.01}$. Тогда на промежутке $X < T < 2X$ можно указать такое множество $\mathcal{E}$, мера которого не превосходит $X^{1-0.01\varepsilon}$ и на дополнении к которому до полного промежутка $(X, 2X)$ для любого σ с условием $0.5 \leq \sigma \leq 1$ справедливо неравенство

$$N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T-H) \leq 13H(\ln T)x^{1-2\sigma}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в работе [9].

ЛЕММА 3. Пусть $B > 0$, $0 < c \leq 1$, $\varkappa \geq \exp\{e^3 c^{-1}\}$, m – целое число, $m \geq 1$, $\xi = \varkappa^{c/m} > \exp\{e^2\}$, и пусть $a_1(n)$, $a_2(n)$ – последовательности комплексных чисел, у которых члены с номерами, равными простым числам p , $p \leq \xi$, удовлетворяют условиям $|a_1(p)| \leq B(\ln p) \ln^{-1} \xi$, $|a_2(p)| \leq B$. Тогда для интегралов

$$I_r = \int_0^\varkappa \left| \sum_{p \leq \xi} a_r(p) \left(\frac{p^{it}}{\sqrt{p}} \right)^r \right|^{2m} dt, \quad r = 1, 2,$$

справедливы неравенства

$$I_1 \leq 13(2B^2 m)^m \varkappa, \quad I_2 \leq (B^2 m)^m \varkappa.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала оценим I_1 . Определим функцию $b_1(n)$ равенством

$$b_1(n) = \sum_{\substack{p_1 \dots p_m = n \\ p_1, \dots, p_m \leq \xi}} a_1(p_1) \dots a_1(p_m)$$

в случае, когда каноническое разложение n содержит ровно m простых сомножителей (не обязательно различных), не превосходящих ξ . Для остальных n положим $b_1(n) = 0$. Определенная таким образом функция удовлетворяет при $n \leq \xi^m$ неравенству

$$|b_1(n)| \leq B^m \sum_{p_1 \dots p_m = n} 1 \leq m! B^m \leq (mB)^m.$$

Оценивая интеграл I_1 , получим

$$I_1 \leq \varkappa S_1 + \Sigma_1,$$

где

$$S_1 = \sum_{n \leq \xi^m} \frac{|b_1(n)|^2}{n}, \quad \Sigma_1 = 2 \left| \sum_{2 \leq n \leq \xi^m} \sum_{l < n} \frac{b_1(l) \bar{b}_1(n)}{\sqrt{ln}} \frac{(nl^{-1})^{i\kappa} - 1}{\ln(nl^{-1})} \right|.$$

К первой сумме применим оценку величины $|b_1(n)|$:

$$\begin{aligned} S_1 &\leq (Bm)^m \sum_{n \leq \xi^m} \frac{|b_1(n)|}{n} \leq (Bm)^m \left(\sum_{p \leq \xi} \frac{|a_1(p)|}{p} \right)^m \\ &\leq (Bm)^m \left(\frac{B}{\ln \xi} \sum_{p \leq \xi} \frac{\ln p}{p} \right)^m \leq (2B^2m)^m. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} |\Sigma_1| &\leq 4 \sum_{2 \leq n \leq \xi^m} \sum_{l < n} \frac{|b_1(l)b_1(n)|}{\sqrt{ln}} \left(\ln \frac{n}{l} \right)^{-1} \\ &\leq 4(Bm)^m \sum_{2 \leq n \leq \xi^m} \frac{|b_1(n)|}{\sqrt{n}} \sum_{l < n} \frac{1}{\sqrt{l}} \left(\ln \frac{n}{l} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Сумму по $l < n$ рассмотрим отдельно. Разбивая промежуток изменения l на два, будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{l < n} \frac{1}{\sqrt{l}} \left(\ln \frac{n}{l} \right)^{-1} &\leq (\ln 2)^{-1} \sum_{1 \leq l \leq n/2} \frac{1}{\sqrt{l}} + \sum_{1 \leq r \leq n/2} \frac{1}{\sqrt{n-r}} \left(\ln \frac{n}{n-r} \right)^{-1} \\ &\leq \frac{(1 + \sqrt{2n} - 2)}{\ln 2} + \sqrt{2n} \sum_{1 \leq r \leq n/2} \frac{1}{r} < \frac{\sqrt{2n} - 1}{\ln 2} + \sqrt{2n} \ln(n+1) \\ &< \sqrt{2n} \left(\ln n + \frac{1}{\ln 2} \right) = \alpha \sqrt{n} \ln n, \end{aligned}$$

где $\alpha \leq 4.4$ при $n = 2$, $\alpha \leq 3.3$ при $n = 3$ и $\alpha \leq 3$ для любого $n \geq 4$. Пользуясь неравенством $\kappa^c \geq \exp\{e^2\}$, нетрудно заметить, что при любом $n \geq 2$ величина $\alpha \ln n$ не превосходит $3c \ln \kappa$. Таким образом, мы приходим к следующей цепочке неравенств:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &\leq 12c(\ln \kappa)(Bm)^m \sum_{2 \leq n \leq \xi^m} |b_1(n)| \leq 12c(\ln \kappa)(Bm)^m \left(\sum_{p \leq \xi} |a_1(p)| \right)^m \\ &\leq 12c(\ln \kappa)(Bm)^m \left(\frac{B}{\ln \xi} \sum_{p \leq \xi} \ln p \right)^m \leq \frac{12m}{(\ln \xi)^{m-1}} (2B^2m)^m \xi^m \\ &\leq \frac{12m}{2^{m-1}} (2B^2m)^m \kappa \leq 12\kappa(2B^2m)^m. \end{aligned}$$

Следовательно, верхней границей интеграла I_1 служит величина

$$\kappa(2B^2m)^m + 12\kappa(2B^2m)^m = 13\kappa(2B^2m)^m.$$

Чтобы оценить интеграл I_2 , положим

$$b_2(n) = \sum_{\substack{p_1 \dots p_m = n \\ p_1, \dots, p_m \leq \xi}} a_2(p_1) \dots a_2(p_m)$$

для n , состоящих из m простых сомножителей, не превосходящих ξ , и возьмем $b_2(n) = 0$ для остальных n . Тогда

$$I_2 \leq \varkappa S_2 + \Sigma_2,$$

где

$$S_2 = \sum_{n \leq \xi^m} \frac{|b_2(n)|^2}{n^2}, \quad \Sigma_2 = 2 \sum_{2 \leq n \leq \xi^m} \sum_{l < n} \frac{|b_2(l)b_2(n)|}{ln} \left(\ln \frac{n}{l} \right)^{-1}.$$

Воспользовавшись неравенством $|b_2(n)| \leq (Bm)^m$, находим

$$\begin{aligned} S_2 &\leq (Bm)^m \sum_{n \leq \xi^m} \frac{1}{n^2} \sum_{p_1 \dots p_m = n} |a_2(p_1)| \dots |a_2(p_m)| \leq (Bm)^m \left(\sum_{p \leq \xi} \frac{|a_2(p)|}{p^2} \right)^m \\ &\leq (B^2m)^m \left(\sum_{p \geq 2} \frac{1}{p^2} \right)^m < (0.7B^2m)^m. \end{aligned}$$

Оценивая сумму Σ_2 , будем иметь

$$|\Sigma_2| \leq 2(Bm)^m \sum_{2 \leq n \leq \xi^m} \frac{|b_2(n)|}{n} \sum_{1 \leq l \leq n-1} \frac{1}{l} \left(\ln \frac{n}{l} \right)^{-1}.$$

Поскольку вклад во внутреннюю сумму от слагаемых при $1 \leq l \leq n/2$ не превосходит величины

$$(\ln 2)^{-1} \sum_{1 \leq l \leq n/2} l^{-1} < (\ln 2)^{-1} \ln(n+1),$$

а от слагаемых при $n/2 < l \leq n-1$ – величины

$$\sum_{1 \leq r \leq n/2} \frac{1}{n-r} \left(\ln \frac{n}{n-r} \right)^{-1} \leq \frac{2}{n} \sum_{1 \leq r \leq n/2} \frac{n}{r} < 2 \ln(n+1),$$

то неравенство для Σ_2 принимает вид

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &\leq 2(Bm)^m \sum_{2 \leq n \leq \xi^m} \frac{b_2(n)}{n} 3.5 \ln(n+1) < 14c(\ln \varkappa)(Bm)^m \left(\sum_{p \leq \xi} \frac{|a_2(p)|}{p} \right)^m \\ &\leq 14c(\ln \varkappa)(B^2m)^m \left(\sum_{p \leq \xi} p^{-1} \right)^m \leq 14c(\ln \varkappa)(B^2m)^m (1.5 \ln \ln \xi)^m. \end{aligned}$$

Поскольку $1 \leq m \leq ce^{-2} \ln \varkappa$, то $m = c\lambda^{-1} \ln \varkappa$, где $\lambda \geq e^2$. Тогда $\xi = \varkappa^{c/m} = \exp\{\lambda\}$, $(1.5 \ln \ln \xi)^m = (1.5 \ln \lambda)^m = \exp\{c(\ln \varkappa)\lambda^{-1} \ln(1.5 \ln \lambda)\}$. Поскольку $\lambda \geq e^2$, то множитель $\lambda^{-1} \ln(1.5 \ln \lambda)$ в показателе экспоненты не

превосходит 0.5, так что $(1.5 \ln \ln \xi)^m \leq \varkappa^{0.5c} \leq \sqrt{\varkappa}$. Пользуясь неравенством $\varkappa \geq \exp\{e^3\}$, заключаем, что сумма Σ_2 ограничена сверху величиной $14(\ln \varkappa)(B^2 m)^m \sqrt{\varkappa} < 0.3(B^2 m)^m \varkappa$. Следовательно,

$$I_2 \leq (0.7B^2 m)^m \varkappa + 0.3(B^2 m)^m \varkappa \leq (B^2 m)^m \varkappa.$$

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Лемма 3 представляет собой уточненный вариант леммы 3 из статьи [10].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $2 \leq z \leq t^2$. Положим $\sigma_{z,t} = 0.5 + 2 \max(|\beta - 0.5|, (\ln z)^{-1})$, где β принимает значения вещественных частей нулей $\rho = \beta + i\gamma$ дзета-функции Римана, которые удовлетворяют условию $|t - \gamma| \leq z^{3|\beta - 0.5|} (\ln z)^{-1}$. Обозначим

$$r(z, t) = \sum_{n \leq z^3} \Lambda_z(n) n^{-\sigma_{z,t} - it},$$

где

$$\Lambda_z(n) = \begin{cases} \Lambda(n), & \text{если } 1 \leq n \leq z, \\ \Lambda(n) \frac{\ln^2(z^3/n) - 2 \ln^2(z^2/n)}{2 \ln^2 z}, & \text{если } z < n \leq z^2, \\ \Lambda(n) \frac{\ln^2(z^3/n)}{2 \ln^2 z}, & \text{если } z^2 < n \leq z^3. \end{cases}$$

ЛЕММА 4 (А. Сельберг). Пусть $e^{16} < z \leq t^2$. Тогда справедливо равенство

$$S(t) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n \leq z^3} \frac{\Lambda_z(n)}{n^{\sigma_{z,t}}} \frac{\sin(t \ln n)}{\ln n} + 15\theta(\sigma_{z,t} - 0.5)(|r(z, t)| + \ln |t|).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения см. в работах [1], [11].

При доказательстве утверждений настоящего и следующего параграфов будем предполагать, что $H = T^{27/82+\varepsilon}$, $x = T^{0.1\varepsilon}$ либо $H = X^\varepsilon$, $x = H^{0.01} = T^{0.01\varepsilon}$, причем в последнем случае T принимает значения из промежутка $(X, 2X)$, не принадлежащие “исключительному” множеству $\mathcal{E}$ из леммы 2. Согласно леммам 1 и 2 для определенных таким образом T , H и x при любом σ с условием $0.5 \leq \sigma \leq 1$ справедливо неравенство

$$N(\sigma, T + H) - N(\sigma, T - H) \leq 13H(\ln T)x^{1-2\sigma}.$$

ЛЕММА 5. Пусть m и ν – целые числа, $m \geq 1$, $0 \leq \nu \leq 8m$, $z \geq 2$, $1 \leq \xi \leq z^{4m}$, $z^3 \xi^2 \leq x$. Тогда справедлива оценка

$$I = \int_T^{T+H} (\sigma_{z,t} - 0.5)^\nu \xi^{\sigma_{z,t} - 0.5} dt < H \frac{(2e)^{8m}}{(\ln z)^\nu} \left(1 + \frac{\nu!}{32} \left(\frac{\ln z}{\ln x} \right)^\nu \frac{\ln T}{\ln z} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем следовать рассуждениям А. Сельберга [11]. Обозначим подынтегральную функцию через $\psi(t)$. Точку t промежутка $(T, T + H]$ отнесем ко множеству A_1 , если для всех нулей $\rho = \beta + i\gamma$ функции $\zeta(s)$, удовлетворяющих условию $|t - \gamma| \leq z^{3|\beta - 0.5|} (\ln z)^{-1}$, имеют место неравенства

$|\beta - 0.5| \leq 2(\ln z)^{-1}$. В противном случае точку t отнесем ко множеству A_2 . Получаем

$$I = \left(\int_{A_1} + \int_{A_2} \right) \psi(t) dt = I_1 + I_2.$$

Если t содержится в A_1 , то $\sigma_{z,t} = 0.5 + 2(\ln z)^{-1}$ и $\psi(t) = (0.5 \ln z)^{-\nu} \xi^{2/\ln z}$. Поскольку $\xi \leq z^{4m}$, то $\psi(t) \leq (2e)^{8m} (\ln z)^{-\nu}$ и $I_1 \leq (2e)^{8m} H(\ln z)^{-\nu}$. Если же t принадлежит множеству A_2 , то для некоторого нуля $\rho = \beta + i\gamma$, ордината γ которого отстоит от t не далее чем на $z^{3|\beta-0.5|} (\ln z)^{-1}$, справедливо равенство $\psi(t) = 2^\nu |\beta - 0.5|^\nu \xi^{2|\beta-0.5|}$. Поскольку $z^{3|\beta-0.5|} \leq z^{1.5} \leq \sqrt{x}$, то γ содержится в промежутке $(T - \sqrt{x}, T + H + \sqrt{x}]$. Окружив каждую из ординат γ , попавших в этот промежуток, окрестностью вида

$$\left(\gamma - \frac{z^{3|\beta-0.5|}}{\ln z}, \gamma + \frac{z^{3|\beta-0.5|}}{\ln z} \right),$$

мы покроем все множество A_2 . Поэтому интеграл I_2 оценится сверху суммой

$$\sum_{T-\sqrt{x} < \gamma \leq T+H+\sqrt{x}} \int_{\gamma - z^{3|\beta-0.5|} (\ln z)^{-1}}^{\gamma + z^{3|\beta-0.5|} (\ln z)^{-1}} 2^\nu |\beta - 0.5|^\nu \xi^{2|\beta-0.5|} dt,$$

которая, в свою очередь, не превосходит

$$\frac{2^{\nu+2}}{\ln z} \sum_{\substack{T-\sqrt{x} < \gamma \leq T+H+\sqrt{x} \\ \beta > 0.5}} (\beta - 0.5)^\nu (\xi^2 z^3)^{\beta-0.5}.$$

Воспользовавшись тождеством

$$\begin{aligned} & (\beta - 0.5)^\nu (z^3 \xi^2)^{\beta-0.5} \ln^{-1} z = \\ & = \int_{0.5}^{\beta} \left(\frac{\ln(z^3 \xi^2)}{\ln z} (u - 0.5)^\nu + \frac{\nu}{\ln z} (u - 0.5)^{\nu-1} \right) (z^3 \xi^2)^{u-0.5} du, \end{aligned}$$

которое доказывается интегрированием по частям, находим

$$\begin{aligned} I_2 \leq 2^{\nu+2} \sum_{\substack{T-\sqrt{x} < \gamma \leq T+H+\sqrt{x} \\ \beta > 0.5}} \int_{0.5}^{\beta} \left(\frac{\ln(z^3 \xi^2)}{\ln z} (u - 0.5)^\nu \right. \\ \left. + \frac{\nu}{\ln z} (u - 0.5)^{\nu-1} \right) (z^3 \xi^2)^{u-0.5} du. \end{aligned}$$

Чтобы поменять местами суммирование и интегрирование, положим

$$g(\rho; u) = g(\beta + i\gamma; u) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq u < \beta, \\ 0, & \text{если } \beta \leq u \leq 1. \end{cases}$$

Тогда неравенство для I_2 примет вид

$$\begin{aligned}
 I_2 &\leq 2^{\nu+2} \sum_{\substack{T-\sqrt{x} < \gamma \leq T+H+\sqrt{x} \\ \beta > 0.5}} \int_{0.5}^1 g(\rho; u) \left(\frac{\ln(z^3 \xi^2)}{\ln z} (u-0.5)^\nu + \frac{\nu}{\ln z} (u-0.5)^{\nu-1} \right) \\
 &\quad \times (z^3 \xi^2)^{u-0.5} du = 2^{\nu+2} \int_{0.5}^1 \left(\sum_{\substack{T-\sqrt{x} < \gamma \leq T+H+\sqrt{x} \\ \beta > 0.5}} g(\rho; u) \right) \\
 &\quad \times \left(\frac{\ln(z^3 \xi^2)}{\ln z} (u-0.5)^\nu + \frac{\nu}{\ln z} (u-0.5)^{\nu-1} \right) (z^3 \xi^2)^{u-0.5} du.
 \end{aligned}$$

При фиксированном u сумма по γ равна числу нулей ρ , лежащих в области $\operatorname{Re} s > u$, $T - \sqrt{x} < \operatorname{Im} s \leq T + H + \sqrt{x}$, т.е. величине $N(u, T + H + \sqrt{x}) - N(u, T - \sqrt{x})$. Поскольку $x = o(H)$, то эта разность не превосходит величины

$$\begin{aligned}
 &N(u, T + H) - N(u, T) + (N(T + H + \sqrt{x}) - N(T + H)) + (N(T) - N(T - \sqrt{x})) \\
 &\leq 13H(\ln T)x^{-(2u-1)} + \frac{\sqrt{x}}{\pi} (\ln T + O(1)) \leq 14H(\ln T)x^{-(2u-1)}.
 \end{aligned}$$

Пользуясь тем, что $z^3 \xi^2 \leq x$, находим

$$\begin{aligned}
 I_2 &\leq 2^{\nu+2} 14H(\ln T) \int_{0.5}^1 x^{-(2u-1)} \left(\frac{\ln x}{\ln z} (u-0.5)^\nu + \frac{\nu}{\ln z} (u-0.5)^{\nu-1} \right) x^{u-0.5} du \\
 &= 2^{\nu+2} 14H \frac{\ln T}{\ln z} \int_0^{0.5} (u^\nu \ln x + \nu u^{\nu-1}) x^{-u} du \\
 &= \frac{2^{\nu+2} 14H}{(\ln x)^\nu} \frac{\ln T}{\ln x} \int_0^{0.5 \ln x} e^{-u} (u^\nu + \nu u^{\nu-1}) du \leq \frac{2^{\nu+3} 14H}{(\ln x)^\nu} \frac{\ln T}{\ln z} \nu!.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$I = I_1 + I_2 \leq \frac{(2e)^{8m} H}{(\ln z)^\nu} + \nu! \frac{2^{\nu+3} 14H}{(\ln x)^\nu} \frac{\ln T}{\ln z} < H \frac{(2e)^{8m}}{(\ln z)^\nu} \left(1 + \frac{\nu!}{32} \left(\frac{\ln z}{\ln x} \right)^\nu \frac{\ln T}{\ln z} \right).$$

Лемма доказана.

Лемма 6, доказательство которой приводится ниже, показывает, насколько точна приближенная формула Сельберга “в среднем”. Это утверждение позволит нам заменить в дальнейших выкладках отрезок ряда Дирихле

$$-\frac{1}{\pi} \sum_{n \leq z^3} \frac{\Lambda_z(n)}{n^{\sigma_{z,t}}} \frac{\sin(t \ln n)}{\ln n},$$

приближающий $S(t)$, более простым выражением, именно суммой

$$-\frac{1}{\pi} \sum_{p \leq y} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}},$$

в которой $y = y(z)$, а p принимает значения простых чисел, не превосходящих y .

ЛЕММА 6. Пусть m – целое число, $1 \leq m < (\ln x)/192$, $x^{1/(4m)} < y \leq x^{1/m}$. Тогда имеет место оценка

$$\int_T^{T+H} \left(S(t) + \frac{1}{\pi} \sum_{p < y} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} \right)^{2m} dt < (e^{37} \pi^{-2} \varepsilon^{-3} m^2)^m H.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $z = x^{1/(12m)}$ и заметим, что $z > \exp\left\{\frac{\ln x}{12} \times \frac{192}{\ln x}\right\} = e^{16}$. Прибавим к обеим частям равенства

$$\pi S(t) = - \sum_{n \leq z^3} \frac{\Lambda_z(n)}{n^{\sigma_{z,t}}} \frac{\sin(t \ln n)}{\ln n} + 15\pi\theta(\sigma_{z,t} - 0.5) \left(\ln t + \left| \sum_{n \leq z^3} \frac{\Lambda_z(n)}{n^{\sigma_{z,t} + it}} \right| \right)$$

сумму $\sum_{p < y} p^{-0.5} \sin(t \ln p)$. Проводя тождественные преобразования с подынтегральным выражением, домноженным на π , представим его в виде

$$\begin{aligned} \pi S(t) + \sum_{p < y} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} &= \\ &= \left(\sum_{p < z^3} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} - \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p)}{\ln p} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} \right) \\ &+ \left(\sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p)}{\sqrt{p}} \frac{\sin(t \ln p)}{\ln p} - \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p)}{p^{\sigma_{z,t}}} \frac{\sin(t \ln p)}{\ln p} \right) \\ &+ \left(\sum_{p < z^{1.5}} \frac{\Lambda_z(p^2)}{p} \frac{\sin(2t \ln p)}{2 \ln p} - \sum_{p < z^{1.5}} \frac{\Lambda_z(p^2)}{p^{2\sigma_{z,t}}} \frac{\sin(2t \ln p)}{2 \ln p} \right) \\ &- \sum_{p < z^{1.5}} \frac{\Lambda_z(p^2)}{p} \frac{\sin(2t \ln p)}{2 \ln p} - \sum_{r \geq 3} \sum_{p^r \leq z^3} \frac{\Lambda_z(p^r)}{p^{r\sigma_{z,t}}} \frac{\sin(rt \ln p)}{r \ln p} \\ &+ \sum_{z^3 \leq p < y} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} + 15\pi\theta(\sigma_{z,t} - 0.5) \left(\ln t + \left| \sum_{n \leq z^3} \frac{\Lambda_z(n)}{n^{\sigma_{z,t} + it}} \right| \right). \end{aligned}$$

Заметим, что модуль последней суммы по $n \leq z^3$ не превосходит следующей величины:

$$\left| \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p)}{\sqrt{p}} (1 - p^{0.5 - \sigma_{z,t}}) p^{it} \right| + \left| \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p)}{\sqrt{p}} p^{it} \right| + \left| \sum_{p < z^{1.5}} \frac{\Lambda_z(p^2)}{p^{2\sigma_{z,t} + 2it}} \right| + \sum_{r \geq 3} \sum_{p^r < z^3} \frac{\ln p}{p^{r/2}}.$$

Переходя к оценкам и пользуясь тем, что $T < t \leq T + H$, будем иметь

$$\left| \pi S(t) + \sum_{p < y} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} \right| \leq \sum_{j=1}^{10} R_j,$$

где

$$\begin{aligned}
R_1 &= \sum_{r \geq 3} \sum_{p < z} (1 + 15\pi(\sigma_{z,t} - 0.5) \ln p) p^{-r/2}, \\
R_2 &= 15\pi(\sigma_{z,t} - 0.5) \left| \sum_{p < z^{1.5}} \frac{\Lambda_z(p^2)}{p^{2\sigma_{z,t} + 2it}} \right|, \\
R_3 &= \frac{1}{2} \left| \sum_{p < z^{1.5}} \frac{\Lambda_z(p^2)}{\ln p} (1 - p^{1-2\sigma_{z,t}}) \frac{p^{2it}}{p} \right|, \quad R_4 = 15\pi(\sigma_{z,t} - 0.5) \ln(T + H), \\
R_5 &= \left| \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p)}{\ln p} (1 - p^{0.5-\sigma_{z,t}}) \frac{p^{it}}{\sqrt{p}} \right|, \\
R_6 &= 15\pi(\sigma_{z,t} - 0.5) \left| \sum_{p < z^3} \Lambda_z(p) (1 - p^{0.5-\sigma_{z,t}}) \frac{p^{it}}{\sqrt{p}} \right|, \\
R_7 &= 15\pi(\sigma_{z,t} - 0.5) \left| \sum_{p < z^{1.5}} \Lambda_z(p) \frac{p^{it}}{\sqrt{p}} \right|, \quad R_8 = \frac{1}{2} \left| \sum_{p < z^{1.5}} \frac{\Lambda_z(p^2)}{\ln p} \frac{p^{2it}}{p} \right|, \\
R_9 &= \left| \sum_{p < z^3} \left(1 - \frac{\Lambda_z(p)}{\ln p} \right) \frac{p^{it}}{\sqrt{p}} \right|, \quad R_{10} = \left| \sum_{z^3 \leq p < y} \frac{p^{it}}{\sqrt{p}} \right|.
\end{aligned}$$

Оценим сначала каждую из величин R_j , $j = 1, 2, 3, 4$. Поскольку при $p \geq 2$

$$\sum_{r=3}^{+\infty} p^{-r/2} = \frac{1}{p(\sqrt{p} - 1)},$$

то верхней границей R_1 служит выражение

$$\sum_{p \geq 2} \frac{1}{p(\sqrt{p} - 1)} + 15\pi(\sigma_{z,t} - 0.5) \sum_{p \geq 2} \frac{\ln p}{p(\sqrt{p} - 1)}.$$

Поскольку $0.5(\sigma_{z,t} - 0.5) \ln z \geq 1$ и $\ln z > 16$, то неравенство для R_1 принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
R_1 &\leq 0.5(\sigma_{z,t} - 0.5)(\ln z) \sum_{p \geq 2} \frac{1 + 30\pi(\ln p)/(\ln z)}{p(\sqrt{p} - 1)} \\
&\leq 0.5(\sigma_{z,t} - 0.5)(\ln z) \sum_{p \geq 2} \frac{1 + 15\pi(\ln p)/8}{p(\sqrt{p} - 1)} < 12(\sigma_{z,t} - 0.5) \ln z.
\end{aligned}$$

Далее, пользуясь соотношением

$$\sum_{p \leq z^{1.5}} \frac{\ln p}{p} < 2 \ln z^{1.5} = 3 \ln z,$$

которое справедливо при $z > e^{16}$, заключаем, что R_2 не превосходит величины

$$15\pi(\sigma_{z,t} - 0.5) \sum_{p \leq z^{1.5}} \frac{\Lambda(p^2)}{p} < 45\pi(\sigma_{z,t} - 0.5) \ln z.$$

Для оценки R_3 воспользуемся теоремой Лагранжа о конечных приращениях, согласно которой

$$1 - p^{1-2\sigma_{z,t}} = (2\sigma_{z,t} - 1)(\ln p)p^{\theta(1-2\sigma_{z,t})} \leq 2(\sigma_{z,t} - 0.5) \ln p, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Отсюда следует, что R_3 удовлетворяет неравенствам

$$R_3 \leq 0.5 \sum_{p \leq z^{1.5}} \frac{\Lambda_z(p^2)}{\ln p} \frac{1}{p} 2(\sigma_{z,t} - 0.5) \ln p \leq 3(\sigma_{z,t} - 0.5) \ln z.$$

Таким образом, величины R_j , $j = 1, 2, 3, 4$, в сумме не превосходят

$$\begin{aligned} & 12(\sigma_{z,t} - 0.5) \ln z + 45\pi(\sigma_{z,t} - 0.5) \ln z \\ & + 3(\sigma_{z,t} - 0.5) \ln z + 15\pi(\sigma_{z,t} - 0.5) \ln(T + H) \\ & \leq 15\pi \left(1 + \left(3 + \frac{15}{15\pi} \right) \frac{\ln z}{\ln T} \right) (\sigma_{z,t} - 0.5) \ln(T + H). \end{aligned}$$

Поскольку $z = x^{1/(12m)} \leq T^{\varepsilon/(120m)}$, то дробь $(\ln z)/\ln T$ ограничена сверху произведением $\varepsilon(120m)^{-1} \leq 10^{-5}$. Следовательно, искомая оценка принимает вид

$$\sum_{j=1}^4 R_j < 15\pi(1 + 10^{-5}(3 + \pi^{-1}))(\sigma_{z,t} - 0.5) \ln(T + H) < 48(\sigma_{z,t} - 0.5) \ln T.$$

Применяя к интегралу I из условия леммы неравенство Гёльдера, приходим к соотношению

$$\pi^{2m} I \leq 7^{2m-1} \left(I_1 + \sum_{k=5}^{10} I_k \right),$$

в котором

$$\begin{aligned} I_1 &= 48^{2m} (\ln T)^{2m} \int_T^{T+H} (\sigma_{z,t} - 0.5)^{2m} dt, \quad I_k = \int_T^{T+H} R_k^{2m}(t) dt, \\ & k = 5, 6, \dots, 10. \end{aligned}$$

Полагая в предыдущей лемме $\nu = 2m$, $\xi = 1$, $z = x^{1/(12m)}$, нетрудно заметить, что интеграл I_1 ограничен сверху произведением

$$48^{2m} (\ln T)^{2m} H \frac{(2e)^{8m}}{(\ln z)^{2m}} \left(1 + \frac{(2m)!}{32} \left(\frac{\ln z}{\ln x} \right)^{2m} \frac{\ln T}{\ln z} \right).$$

Следствием формулы Стирлинга является неравенство $(2m)! < 4\sqrt{m} (2m/e)^{2m}$, воспользовавшись которым можно убедиться, что второе слагаемое в скобках не превосходит величины

$$\frac{(2m)!}{32} \left(\frac{1}{12m} \right)^{2m} 12m \frac{\ln T}{\ln x} < 1.5m^{1.5} (6e)^{-2m} 20\varepsilon^{-1} < 0.115\varepsilon^{-1}.$$

Поскольку ε не превосходит 10^{-3} , окончательная оценка I_1 принимает вид

$$\begin{aligned} I_1 &< H \left(\frac{\ln T}{\ln z} \right)^{2m} (48 \cdot 16e^4)^{2m} (1 + 0.115\varepsilon^{-1}) \\ &< H(240m\varepsilon^{-1} \cdot 48 \cdot 16e^4)^{2m} (8\varepsilon)^{-1} < H(me^{16.2})^{2m} \varepsilon^{-(2m+1)}. \end{aligned}$$

Интегралы I_5 и I_6 запишем в виде

$$R(n) = \left| \sum_{p < z^3} \Lambda_z(p) (\ln p)^n \frac{1 - p^{0.5 - \sigma_{z,t}}}{\sqrt{p} \ln p} p^{it} \right|, \quad n = 0, 1.$$

Воспользовавшись равенством

$$\frac{1 - p^{0.5 - \sigma_{z,t}}}{\sqrt{p} \ln p} = \int_{0.5}^{\sigma_{z,t}} p^{-u} du,$$

будем иметь

$$R(n) = \left| \int_{0.5}^{\sigma_{z,t}} \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p) (\ln p)^n p^{it}}{p^u} du \right| \leq \int_{0.5}^{\sigma_{z,t}} \left| \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p) (\ln p)^n p^{it}}{p^u} \right| du.$$

Представим теперь множитель p^{-u} в виде

$$p^{-u} = z^u \int_u^{+\infty} \frac{\ln(zp)}{(zp)^v} dv.$$

Меняя местами порядок суммирования и интегрирования и вынося интеграл за знак модуля, приходим к следующей цепочке неравенств:

$$\begin{aligned} R(n) &\leq \int_{0.5}^{\sigma_{z,t}} \left| z^u \int_u^{+\infty} \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p) (\ln p)^n \ln(zp)}{(zp)^v} p^{it} dv \right| du \\ &\leq \int_{0.5}^{\sigma_{z,t}} z^u \int_{0.5}^{+\infty} z^{-v} \left| \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p) (\ln p)^n \ln(zp)}{p^v} p^{it} \right| dv du \\ &\leq \left(\int_{0.5}^{\sigma_{z,t}} z^{u-0.5} du \right) \int_{0.5}^{+\infty} z^{0.5-v} \left| \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p) (\ln p)^n \ln(zp)}{p^v} p^{it} \right| dv \\ &\leq (\sigma_{z,t} - 0.5) z^{\sigma_{z,t}-0.5} \int_{0.5}^{+\infty} z^{0.5-v} \left| \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p) (\ln p)^n \ln(zp)}{p^v} p^{it} \right| dv. \end{aligned}$$

Возвращаясь к оценке $I(n)$ и пользуясь неравенством Коши, находим

$$\begin{aligned} I(n) &\leq (15\pi)^{2m} \int_T^{T+H} (\sigma_{z,t} - 0.5)^{2(1+n)m} z^{2m(\sigma_{z,t}-0.5)} \\ &\quad \times \left(\int_0^{+\infty} z^{-v} \left| \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p) (\ln p)^n \ln(zp)}{p^{0.5+v}} p^{it} \right| dv \right)^{2m} dt \leq (15\pi)^{2m} \sqrt{j_1} \sqrt{j_2}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} j_1 &= \int_T^{T+H} (\sigma_{z,t} - 0.5)^{4(1+n)m} z^{4m(\sigma_{z,t}-0.5)} dt, \\ j_2 &= \int_T^{T+H} \left(\int_0^{+\infty} z^{-v} \left| \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p) (\ln p)^n \ln(zp)}{p^{0.5+v}} p^{it} \right| dv \right)^{4m} dt. \end{aligned}$$

Величину j_1 оценим с помощью леммы 5, в которой положим $\nu = 4(1+n)m$, $\xi = z^{4m}$:

$$j_1 \leq H \frac{(2e)^{8m}}{(\ln z)^\nu} \left(1 + 60m^{1.5} \varepsilon^{-1} \left(\frac{2}{3e} \right)^{4m} \right) < (4\varepsilon)^{-1} \frac{(2e)^{8m}}{(\ln z)^\nu} H.$$

Применяя к интегралу j_2 неравенство Гёльдера, приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} j_2 &\leq \int_T^{T+H} \left(\int_0^{+\infty} z^{-v} dv \right)^{4m-1} \int_0^{+\infty} z^{-v} \left| \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p)(\ln p)^n \ln(zp)}{p^{0.5+v}} p^{it} \right|^{4m} dv dt \\ &= (\ln z)^{1-4m} \int_0^{+\infty} z^{-v} \int_T^{T+H} \left| \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p)(\ln p)^n \ln(zp)}{p^{0.5+v}} p^{it} \right|^{4m} dt dv \\ &= (\ln z)^{4(1+n)m+1} \int_0^{+\infty} z^{-v} \int_0^H \left| \sum_{p < z^3} \frac{a(p)}{\sqrt{p}} p^{it} \right|^{4m} dt dv, \end{aligned}$$

где

$$a(p) = \frac{\Lambda_z(p)(\ln p)^n \ln(zp)}{(\ln z)^{2+n} p^v} p^{iT},$$

а $\nu = 4(1+n)m$. Заметим теперь, что при $p \leq z^3$ величина $a(p)$ по модулю не превосходит дроби $36(\ln p)/\ln(z^3)$. Полагая в лемме 3 $\varkappa = H$, $\xi = z^3 = \varkappa^{c/m}$, $c = (\ln x)/(4 \ln H) \leq 1/80$, $B = 36$, убеждаемся, что нижней границей ξ служит величина $\exp\{\frac{\ln x}{4m}\} > \exp\{\frac{192}{4}\} > \exp\{e^2\}$, а верхней границей интеграла по t в выражении для j_2 – величина $13(2 \cdot 36^2 \cdot 2m)^{2m} H$. Следовательно, j_2 не превосходит произведения $(\ln z)^\nu \cdot 13(72^2 m)^{2m} H$. Возвращаясь к оценке $I(n)$, будем иметь

$$\begin{aligned} I(n) &\leq (15\pi)^{2m} \left((4\varepsilon)^{-1} \frac{(2e)^{8m}}{(\ln z)^\nu} \cdot 13(72^2 m)^{2m} (\ln z)^\nu \right)^{0.5} H < \frac{H}{\sqrt{\varepsilon}} (e^{24} m)^m, \\ I_5 + I_6 &< \frac{2H}{\sqrt{\varepsilon}} (e^{24} m)^m. \end{aligned}$$

Интеграл I_7 оценим с помощью лемм 3 и 5, предварительно применив к нему неравенство Коши:

$$\begin{aligned} I_7 &\leq (15\pi)^{2m} \int_T^{T+H} (\sigma_{z,t} - 0.5)^{2m} \left| \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p)}{\sqrt{p}} p^{it} \right|^{2m} dt \leq (15\pi)^{2m} \sqrt{j_3} \sqrt{j_4}, \\ j_3 &= \int_T^{T+H} (\sigma_{z,t} - 0.5)^{4m} dt, \\ j_4 &= \int_T^{T+H} \left| \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p)}{\sqrt{p}} p^{it} \right|^{4m} dt = (\ln z)^{4m} \int_0^H \left| \sum_{p < z^3} \frac{a(p)}{\sqrt{p}} p^{it} \right|^{4m} dt, \\ a(p) &= \frac{\Lambda_z(p)}{\ln z} p^{iT}. \end{aligned}$$

Полагая в лемме 5 $\xi = 1$, $\nu = 4m$, получаем

$$j_3 \leq H \frac{(2e)^{8m}}{(\ln z)^{4m}} (1 + 45m^{1.5} \varepsilon^{-1} (3e)^{-4m}) < (80\varepsilon)^{-1} H \frac{(2e)^{8m}}{(\ln z)^{4m}}.$$

Поскольку абсолютная величина $a(p)$ при $p \leq z^3$ не превосходит $3(\ln p)/\ln(z^3)$, то согласно лемме 3 для интеграла j_4 при $\varkappa = H$, $\xi = z^3$, $B = 3$ имеет место неравенство

$$j_4 \leq 13(2 \cdot 3^2 \cdot 2m)^{2m} H (\ln z)^{4m}.$$

Переходя к оценке I_7 , будем иметь

$$I_7 \leq (15\pi)^{2m} \frac{H}{\sqrt{\varepsilon}} (2e)^{4m} (36m)^m < \frac{H}{\sqrt{\varepsilon}} (e^{19}m)^m.$$

Три оставшихся интеграла также оцениваются с помощью леммы 3. Полагая $a(p) = \Lambda_z(p^2)p^{2iT}/\ln p$, убеждаемся, что

$$I_8 = \int_0^H \left| \sum_{p < z^{1.5}} \frac{a(p)}{p} p^{2it} \right|^{2m} dt \leq m^m H.$$

Далее, полагая

$$a(p) = \left(1 - \frac{\Lambda_z(p)}{\ln p}\right) p^{iT}$$

и замечая, что $a(p) = 0$ при $p \leq z$ и $|a(p)| \leq 3(\ln p)/\ln(z^3)$ при $z < p \leq z^3$, находим

$$I_9 = \int_0^H \left| \sum_{p < z^3} \frac{a(p)}{\sqrt{p}} p^{it} \right|^{2m} dt \leq 13(2 \cdot 3^2 m)^m H < (e^{5.5}m)^m H.$$

Наконец, полагая $a(p) = 0$ при $p \leq z^3$ и $a(p) = p^{iT}$ при $z^3 < p < y$, получаем, что в последнем случае

$$|a(p)| = 1 = \frac{\ln y}{\ln p} \frac{\ln p}{\ln y} \leq \frac{\ln p}{\ln y} \frac{\ln x^{1/m}}{\ln x^{1/(4m)}} = 4 \frac{\ln p}{\ln y},$$

так что

$$\begin{aligned} I_{10} &\leq \int_T^{T+H} \left| \sum_{z^3 < p < y} \frac{p^{it}}{\sqrt{p}} \right|^{2m} dt = \int_0^H \left| \sum_{p < y} \frac{a(p)}{\sqrt{p}} p^{it} \right|^{2m} dt \\ &\leq 13(2 \cdot 4^2 m)^m H < (e^{6.1}m)^m H. \end{aligned}$$

Сумма полученных оценок дает искомую верхнюю границу интеграла леммы:

$$\begin{aligned} \pi^{2m} I &< 7^{2m-1} \left((e^{16.2}m)^{2m} \varepsilon^{-(2m+1)} + \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} (e^{24}m)^m + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (e^{19}m)^m + m^m H \right. \\ &\quad \left. + (e^{5.5}m)^m + (e^{6.1}m)^m \right) H < (7e^{16.2}m)^{2m} \varepsilon^{-(2m+1)} H < (e^{37} \varepsilon^{-3} m^2)^m H. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

§ 3. Основные леммы

При доказательстве утверждений этого параграфа сохраняет силу замечание, сделанное выше относительно параметров T , H и x , для которых при любом σ с условием $0.5 \leq \sigma \leq 1$ выполнена оценка

$$N(\sigma, T + H) - N(\sigma, T - H) \leq 13H(\ln T)x^{1-2\sigma}.$$

ЛЕММА 7. Пусть m – целое число, $1 \leq m < (\ln x)/192$. Тогда интеграл

$$I_m = \int_T^{T+H} (S(t+2h) - S(t))^{2m} dt$$

не превосходит величины $(10B\varepsilon^{-3}m^2)^m H$, $B = e^{37}\pi^{-2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $y = x^{1/m}$ и обозначим через $U(t)$ следующий тригонометрический полином:

$$\sum_{p < y} a(p)p^{-0.5+it}, \quad a(p) = p^{ih} \sin(h \ln p).$$

Тогда разность $S(t+2h) - S(t)$ запишется в виде

$$\left(S(t+2h) + \frac{1}{\pi} \sum_{p < y} \frac{\sin((t+2h) \ln p)}{\sqrt{p}} \right) - \left(S(t) + \frac{1}{\pi} \sum_{p < y} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} \right) - \frac{1}{\pi} (U(t) + \bar{U}(t)).$$

Возводя это выражение в степень $2m$ и применяя к нему неравенство Гёльдера, приходим к соотношению $I_m < 3^{2m-1}(2I^{(1)} + I^{(2)})$, в котором

$$I^{(1)} = \int_T^{T+H+2h} \left(S(t) + \frac{1}{\pi} \sum_{p < y} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} \right)^{2m} dt,$$

$$I^{(2)} = \pi^{-2m} \int_T^{T+H} (U(t) + \bar{U}(t))^{2m} dt.$$

Согласно лемме 6 верхней границей $I^{(1)}$ служит величина $(B\varepsilon^{-3}m^2)^m (H+2h)$, где $B = e^{37}\pi^{-2}$. Далее, интеграл $I^{(2)}$ представляется суммой

$$\pi^{-2m} \left(\binom{2m}{m} HS_m + 2\theta \sum_{\nu=0}^{2m} \binom{2m}{\nu} \sum_{P_\nu \neq Q_\nu} \frac{1}{\sqrt{P_\nu Q_\nu}} \left| \ln \frac{P_\nu}{Q_\nu} \right|^{-1} \right),$$

$$S_m = \sum_{P_m = Q_m} \frac{|a(p_1)|^2 \dots |a(p_m)|^2}{\sqrt{P_m Q_m}},$$

в которой через P_ν , Q_ν обозначены произведения $p_1 \dots p_\nu$ и $q_1 \dots q_{2m-\nu}$ соответственно. Так как наибольшее из чисел P_ν , Q_ν при любом ν не превосходит y^{2m} , а общее количество пар (P_ν, Q_ν) не превосходит $(\pi(y))^{2m}$, то верхней границей каждой из сумм по $P_\nu \neq Q_\nu$ служит величина $(y\pi(y))^{2m} < x^4 \leq H^{0.2}$. Поскольку число решений уравнения $p_1 \dots p_m = q_1 \dots q_m$ в простых числах $q_1, \dots, q_m$

при фиксированной левой части не превосходит $m!$, то сумма S_m удовлетворяет следующей цепочке неравенств:

$$\begin{aligned}
 S_m &\leq m! \sum_{p_1, \dots, p_m < y} \frac{|a(p_1)|^2 \dots |a(p_m)|^2}{p_1 \dots p_m} \\
 &\leq m! \left(\sum_{p < y} \frac{|a(p)|^2}{p} \right)^m = m! \left(\sum_{p < y} \frac{\sin^2(h \ln p)}{p} \right)^m \\
 &\leq m! \left(h^2 \ln y \sum_{p < y} \frac{\ln p}{p} \right)^m < m! (2h \ln y)^{2m} < m! \left(\frac{2\pi}{3} \left(\ln \frac{T}{2\pi} \right)^{-1} \frac{\varepsilon \ln T}{10m} \right)^{2m} < 1.
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 I^{(2)} &< \pi^{-2m} \left(\binom{2m}{m} H + 2^{2m} H^{0.2} \right) < H, \\
 I_m &< 3^{2m-1} (2(B\varepsilon^{-3}m^2)^m (H + 2h) + H) < (10B\varepsilon^{-3}m^2)^m H.
 \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 8. Пусть $D(\lambda)$ – множество тех значений t из промежутка $T \leq t \leq T + H$, для которых выполняется неравенство $|S(t + 2h) - S(t)| \geq \lambda$. Тогда при любом λ для меры этого множества справедлива следующая оценка:

$$\text{mes } D(\lambda) \leq e^4 H \exp\{-\varkappa \lambda\},$$

$$\text{где } \varkappa = \frac{2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{e\sqrt{10B}}, \quad B = e^{37}\pi^{-2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $0 \leq \lambda \leq 4\varkappa^{-1}$, то меру $D(\lambda)$ достаточно оценить тривиально длиной промежутка:

$$\text{mes } D(\lambda) \leq H \leq e^4 H \exp\{-\varkappa \lambda\}.$$

Если $\lambda \geq 18 \ln T$, то множество $D(\lambda)$ оказывается пустым. Это следует из оценки $|S(t)| < 8.9 \ln t$ (см. [1]), которая справедлива при всех достаточно больших t :

$$|S(t + 2h) - S(t)| < 17.8 \ln(t + 2h) < 18 \ln T.$$

Пусть, наконец, $4\varkappa^{-1} < \lambda < 18 \ln T$. В этом случае возведем обе части неравенства

$$\lambda^{-1} |S(t + 2h) - S(t)| \geq 1$$

в степень $2m = 2[0.5\varkappa\lambda]$ и проинтегрируем по множеству $D(\lambda)$. Получим

$$\begin{aligned}
 \text{mes } D(\lambda) &\leq \lambda^{-2m} \int_{D(\lambda)} (S(t + 2h) - S(t))^{2m} dt \\
 &\leq \lambda^{-2m} \int_T^{T+H} (S(t + 2h) - S(t))^{2m} dt.
 \end{aligned}$$

Поскольку целое число $m = [0.5\varkappa\lambda]$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned}
 m &\geq 0.5\varkappa\lambda - 1 \geq 0.5\varkappa \cdot 4\varkappa^{-1} - 1 = 1, \\
 m &\leq 0.5\varkappa(18 \ln T + 1) < 10\varkappa \ln T < \frac{0.01\varepsilon}{192} \ln T \leq \frac{1}{192} \ln x,
 \end{aligned}$$

то к последнему интегралу можно применить лемму 7:

$$\begin{aligned} \text{mes } D(\lambda) &\leq \lambda^{-2m} (10B\varepsilon^{-3}m^2)^m H = \left(\frac{2m}{e\kappa\lambda} \right)^{2m} H \\ &\leq \left(\frac{2}{e\kappa\lambda} \frac{\kappa\lambda}{2} \right)^{2m} H = e^{-2m} H \leq e^2 H \exp\{-\kappa\lambda\}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 9. Пусть γ – ордината нуля $\zeta(s)$, $T \leq \gamma - h < \gamma \leq T + H$, и пусть промежуток $(\gamma - h, \gamma]$ содержит ровно ν ординат нулей, кратность каждого из которых равна j , $j \geq 1$. Тогда для любого t из промежутка $(\gamma - 2h, \gamma - h]$ справедливо неравенство

$$S(t + 2h) - S(t) \geq \nu j - 0.5.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольное число t , $\gamma - 2h < t < \gamma - h$. Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ – все различные ординаты нулей $\zeta(s)$, попавшие в промежуток $(t, t + 2h]$ и занумерованные в порядке возрастания. Для каждой величины γ_r через n_r обозначим сумму кратностей нулей, имеющих γ_r своей ординатой. Поскольку $\gamma - h \geq t$ и $\gamma \leq t + 2h$, то промежуток $(\gamma - h, \gamma]$ целиком содержится в промежутке $(t, t + 2h]$. Но тогда из условия леммы следует, что в ряде $n_1, n_2, \dots, n_k$ найдется не менее ν чисел, больших или равных j .

Пусть (a, b) – промежуток, целиком лежащий в $(t, t + 2h]$ и не содержащий точек разрыва $S(t)$. Запишем разность значений $S(t)$ на концах этого промежутка с помощью формулы конечных приращений Лагранжа; получим

$$S(b) - S(a) = (b - a)S'(\xi) = -(b - a) \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{\xi}{2\pi} + O(\xi^{-2}) \right),$$

где ξ – некоторое число, лежащее между a и b . Так как величины $\ln \xi$ и $\ln T$ равны с точностью до слагаемого порядка $HT^{-1} \ll T^{-0.5}$, то

$$S(b) - S(a) = -(b - a) \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} + O(T^{-0.5}) \right) = -(b - a) ((6h)^{-1} + O(T^{-0.5})).$$

Пользуясь этим соотношением, преобразуем следующее тождество:

$$\begin{aligned} S(t + 2h) - S(t) &= (S(\gamma_1 - 0) - S(t)) \\ &\quad + (S(\gamma_1 + 0) - S(\gamma_1 - 0)) + (S(\gamma_2 - 0) - S(\gamma_1 + 0)) \\ &\quad + (S(\gamma_2 + 0) - S(\gamma_2 - 0)) + (S(\gamma_3 - 0) - S(\gamma_2 + 0)) + \dots \\ &\quad \dots + (S(\gamma_k + 0) - S(\gamma_k - 0)) + (S(t + 2h) - S(\gamma_k + 0)). \end{aligned}$$

Поскольку при переходе через точку $t = \gamma_r$ функция $S(t)$ совершает скачок, равный n_r , то $S(\gamma_r + 0) - S(\gamma_r - 0) = n_r$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} S(t + 2h) - S(t) &= n_1 + n_2 + \dots + n_r - ((6h)^{-1} + O(T^{-0.5})) \\ &\quad \times ((\gamma_1 - t) + (\gamma_2 - \gamma_1) + (\gamma_3 - \gamma_2) + \dots + (t + 2h - \gamma_k)) \\ &= n_1 + n_2 + \dots + n_r - 2h \cdot (6h)^{-1} + O(hT^{-0.5}) \\ &\geq \nu j - \frac{1}{3} + O(hT^{-0.5}) \geq \nu j - 0.5. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

§ 4. Доказательства теорем

Заключительный параграф статьи посвящен доказательству сформулированной во введении теоремы А и двух следующих утверждений.

ТЕОРЕМА В. Пусть ε – сколь угодно малое фиксированное число, $0 < \varepsilon < 0.001$, $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{27/82+\varepsilon}$. Тогда для любого целого $j \geq 1$ имеет место оценка

$$N_j(T+H) - N_j(T) \leq e^{7.2}(N(T+H) - N(T)) \exp\{-\kappa j\},$$

$$\kappa = \frac{2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{e\sqrt{10B}}, \quad B = e^{37}\pi^{-2}.$$

ТЕОРЕМА С. Пусть ε – сколь угодно малое фиксированное число, $0 < \varepsilon < 0.001$, $X \geq X_0(\varepsilon) > 0$. Тогда неравенство

$$N_j(T+H) - N_j(T) \leq e^{7.2}(N(T+H) - N(T)) \exp\{-\kappa j\},$$

в котором $j \geq 1$, $H = X^\varepsilon$, $\kappa = \frac{2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{e\sqrt{10B}}$, $B = e^{37}\pi^{-2}$, справедливо для всех T из промежутка $(X, 2X)$, за исключением значений из некоторого множества, мера которого не превосходит $X^{1-0.01\varepsilon}$.

Покажем сначала, как из теоремы В следует неравенство теоремы А. Будем предполагать, что $T > \exp\{\frac{1}{18}e^{32.5}\}$ и $e^{32.5} < j < 18 \ln T$, так как при $j \leq e^{32.5}$ утверждение теоремы следует из тривиальной оценки $N_j(T) \leq N(T)$, а при $j \geq 18 \ln T$ величина $N_j(T)$ тождественно равна нулю.

Возьмем в теореме В $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$ и обозначим $\tau = T_0(\varepsilon)$. Далее, определим числа T_s , H_s , $s = 1, 2, \dots$, соотношениями $T_1 = T$, $H_s = T_s^{27/82+\varepsilon}$, $T_{s+1} = T_s - H_s$ и положим s_0 равным номеру первого члена убывающей последовательности T_s с условием $T_{s+1} \leq \tau$.

Согласно теореме В для $1 \leq s \leq s_0$ справедливы неравенства

$$N_j(T_s) - N_j(T_{s+1}) \leq e^{7.2}(N(T_s) - N(T_{s+1})) \exp\{-\kappa j\},$$

$$\kappa = \frac{\pi}{\sqrt{2}} 10^{-5} e^{-19.5}, \quad e^{-30.3} < \kappa < e^{-30},$$

сложив которые, получим

$$\begin{aligned} N_j(T) &\leq e^{7.2}N(T)e^{-\kappa j} + N_j(\tau) < e^{7.2}N(T)e^{-\kappa j}(1 + N_j(\tau)T^{-1}e^{\kappa j}) \\ &< e^{7.2}N(T)e^{-\kappa j}(1 + N_j(\tau)T^{-1+18\kappa}) \\ &< e^{7.3}N(T)e^{-\kappa j} < e^{7.3}N(T) \exp\{-e^{-30.3}j\}. \end{aligned}$$

Теорема А доказана.

Доказательства теорем В и С проводятся единообразно; для случая $H = X^\varepsilon$ следует брать значения T промежутка $(X, 2X)$, не принадлежащие “исключительному” множеству $\mathcal{E}$ из леммы 2, т. е. те значения, для которых справедливы утверждения основных лемм 7 и 8.

Как и при доказательстве теоремы А, требуется рассмотреть лишь случай “малых” j , $j < 18 \ln(T+H)$, так как для $j \geq 18 \ln(T+H)$ величины $N_j(T)$ и $N_j(T+H)$ тождественно равны нулю.

Если j не превосходит $\varkappa^{-1} \ln 2$, то искомая разность оценивается тривиально:

$$N_j(T+H) - N_j(T) \leq N(T+H) - N(T) \leq 2(N(T+H) - N(T)) \exp\{-\varkappa j\}.$$

Пусть, наконец, $\varkappa^{-1} \ln 2 < j < 18 \ln T$, и пусть γ_1 – наибольшая из ординат нулей функции $\zeta(s)$ с кратностью, большей или равной j , лежащая в промежутке между T и $T+H$. Возьмем $e_1 = (\gamma_1 - h, \gamma_1]$ и обозначим γ_2 наибольшую из таких ординат, не попавших в e_1 , $\gamma_2 \leq \gamma_1 - h$. Положим $e_2 = (\gamma_2 - h, \gamma_2]$ и определим тем же способом величины $\gamma_3, \gamma_4, \dots$ и промежутки $e_3, e_4, \dots$. Это построение мы продолжим до тех пор, пока на промежутке $(T, \gamma_k - h]$ не останется ординат нулей с указанным свойством или пока мы не получим ординату γ_k с условием $\gamma_k - h < T \leq \gamma_k$.

Промежутки $e_1, e_2, \dots, e_k$ попарно не пересекаются и имеют одинаковую длину h . Кроме того, в их объединении содержатся все ординаты нулей $\zeta(s)$, кратность которых больше или равна j . Построенные промежутки разобьем на классы $E_1, E_2, \dots$, относя к классу E_r те из них, которые содержат в точности r искомым ординат. Если k_r – число промежутков в классе с номером r , то справедливо следующее неравенство:

$$N_j(T+H) - N_j(T) \leq 1 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2 + \dots + r \cdot k_r + \dots$$

Оценим каждую из величин k_r сверху. Пусть промежуток $e = (\gamma - h, \gamma]$ принадлежит E_r . Положим тогда $e' = e - h = (\gamma - 2h, \gamma - h]$. Согласно лемме 8 для любого t из e' справедливо неравенство $S(t+2h) - S(t) \geq rj - 0.5$. Таким образом, e' целиком содержится во множестве $D(rj - 0.5)$. Проведя такое построение для каждого элемента e из E_r , убеждаемся, что все k_r промежутков e' попарно не пересекаются, имеют одинаковую длину h и содержатся в $D(rj - 0.5)$. Следовательно, их общая длина не превосходит меры $D(rj - 0.5)$: $k_r \cdot h \leq \text{mes } D(rj - 0.5)$. Для оценки величины $\text{mes } D(rj - 0.5)$ воспользуемся леммой 7:

$$\text{mes } D(rj - 0.5) \leq e^4 H \exp\{-\varkappa(rj - 0.5)\}, \quad \varkappa = \frac{2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{e\sqrt{10B}}, \quad B = e^{37}\pi^{-2}.$$

Следовательно, k_r не превосходит величины $Hh^{-1}e^{4+0.5\varkappa} \exp\{-\varkappa rj\}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} N_j(T+H) - N_j(T) &\leq Hh^{-1}e^{4+0.5\varkappa} \sum_{r=1}^{+\infty} r \exp\{-\varkappa rj\} = Hh^{-1}e^{4+0.5\varkappa} \frac{e^{-\varkappa j}}{(1 - e^{-\varkappa j})^2} \\ &\leq e^{7.2} (N(T+H) - N(T)) \exp\{-\varkappa j\}. \end{aligned}$$

Теоремы В и С доказаны.

Список литературы

1. Карацуба А. А., Королёв М. А., “Аргумент дзета-функции Римана”, *УМН*, **60:3** (2005), 41–96.
2. Ramachandra K., Sankaranarayanan A., “On some theorems of Littlewood and Selberg. I”, *J. Number Theory*, **44:3** (1993), 281–291.
3. Montgomery H. L., “The pair correlation of zeros of the zeta function”, *Analytic number theory*, **24** (1973), 181–193.

4. Cheer A. Y., Goldston D. A., “Simple zeros of the Riemann zeta-function”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **118**:2 (1993), 365–372.
5. Montgomery H. L., “Distribution of the zeros of the zeta function”, *Proc. of the Int. Cong. for Math.*, **1**, Vancouver, 1975, 379–381.
6. Conrey J. B., Ghosh A., Gonek S. M., “Simple zeros of the Riemann zeta-function”, *Proc. London Math. Soc.*, **76**:3 (1998), 165–372.
7. Fujii A., “On the distribution of the zeros of the Riemann zeta-function in short intervals”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **81**:1 (1975), 139–142.
8. Карацуба А. А., “О функции $S(t)$ ”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **60**:5 (1996), 27–56.
9. Королёв М. А., “Об аргументе дзета-функции Римана на критической прямой”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:2 (2003), 21–60.
10. Ghosh A., “On Riemann’s zeta-function – sign changes of $S(T)$ ”, *Recent Progress in Analytic Number Theory.*, **1**, Academic Press, N. Y., 1981, 25–46.
11. Selberg A., “Contributions to the theory of the Riemann zeta-function”, *Arch. Math. Naturvid.*, **48**:5 (1946), 89–155.

М. А. КОРОЛЁВ (М. А. KOROLEV)
Московский государственный университет им.
М. В. Ломоносова
E-mail: hardy_ramanujan@mail.ru

Поступило в редакцию
13.12.2005