Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Хренников, П.-А. Свенссон, Притягивающие неподвижные точки для полиномиальных динамических систем в полях p -адических чисел, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2007, том 71, выпуск 4, 103–114

DOI: <https://doi.org/10.4213/im725>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 07:14:50

УДК 511+517.987

А. Ю. Хренников, П.-А. Свенссон

**Притягивающие неподвижные точки
для полиномиальных динамических систем
в полях p -адических чисел**

Рассматриваются динамические системы вида $h(x) = x + g(x)$, где $g(x)$ – монический неприводимый полином с коэффициентами в кольце целых чисел p -адического поля K . В случае $K = \mathbb{Q}_p$ изучаются 2-периодические точки для простых полиномов такого вида.

Библиография: 19 наименований.

§ 1. Введение

Теория дискретных динамических систем в неархимедовых нормированных полях была развита, в основном, за последние 20 лет (см., например, [1]–[12]). В настоящей работе изучается специальный класс дискретных динамических систем над p -адическим полем K . Этот класс состоит из полиномов вида

$$h(x) = x + g(x),$$

где $g(x)$ – монический неприводимый полином с коэффициентами в кольце целых чисел поля K . Такие системы изучались также Свенссоном [13], [14], и нашу статью можно считать продолжением работы [14]. Однако в [14] степень полинома $g(x)$ предполагалась простой, так что этот полином автоматически задавал либо неразветвленное, либо тотально разветвленное расширение основного поля K . В настоящей работе никакие ограничения на степень полинома $g(x)$ не налагаются.

§ 2. Обозначения

Всюду ниже K – p -адическое поле, т.е. K имеет нулевую характеристику и снабжено нетривиальным дискретным нормированием $|\cdot|$, относительно которого K полно и имеет конечное поле вычетов. Обозначим через $\mathfrak{O}_K$ кольцо целых поля K , а через $\mathfrak{P}_K$ – единственный максимальный идеал в $\mathfrak{O}_K$. Этот идеал является главным в силу дискретности нормирования. Фиксируем любую образующую π идеала $\mathfrak{P}_K$ (так называемый *простой элемент* поля K). Поле вычетов $\mathfrak{O}_K/\mathfrak{P}_K$ поля K по определению конечно. Обозначим его через K_p , а его характеристику – через p . Таким образом, поле K_p изоморфно конечному полю $\mathbb{F}_q$ из q элементов, где $q = p^m$ для некоторого натурального числа m . Для любого элемента u из $\mathfrak{O}_K$ будем обозначать через $\bar{u}$ его канонический образ в K_p . Аналогично, обозначим через $\bar{f}(x)$ канонический образ в $K_p[x]$ произвольного полинома $f(x) \in \mathfrak{O}_K[x]$.

Всякое p -адическое поле изоморфно некоторому конечному расширению поля $\mathbb{Q}_p$ всех p -адических чисел. Если $K = \mathbb{Q}_p$, то $\mathfrak{O}_K$ и $\mathfrak{P}_K$ обычно обозначаются

через $\mathbb{Z}_p$ и $p\mathbb{Z}_p$ соответственно, а поле вычетов $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$ изоморфно конечному полю $\mathbb{F}_p$ из p элементов.

Обозначим через $B_r(a, K)$ открытый шар в K с центром $a \in K$ и радиусом $r > 0$. Соответствующие замкнутый шар и сфера обозначаются через $\bar{B}_r(a, K)$ и $S_r(a, K)$. Отметим, что в топологии нормирования $|\cdot|$ каждый открытый шар замкнут, и наоборот.

§ 3. Динамические системы

Пусть L – конечное расширение¹ поля K . Тогда можно продолжить нормирование $|\cdot|$ с K на L (обозначая это продолжение опять через $|\cdot|$) так, чтобы L стало p -адическим полем относительно продолженного нормирования.

Под *дискретной динамической системой* (или, для краткости, *динамической системой*) h на L будем понимать отображение $L \ni \beta \mapsto h(\beta) \in L$, где $h(x)$ – полином из $K[x]$. Пусть даны динамическая система h на L и элемент α из L . Определим по индукции последовательность $(\alpha_j)_{j=0}^\infty$ элементов из L :

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \alpha, \\ \alpha_j &= h(\alpha_{j-1}), \quad j = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Будем записывать $h^j(\alpha) = \alpha_j$ для всех j , интерпретируя h^j как j -кратную композицию отображения h .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть h – динамическая система на L . Элемент $\alpha \in L$ называется *периодической точкой* динамической системы h , если $h^m(\alpha) = \alpha$ для некоторого натурального m . Если m – наименьшее натуральное число с этим свойством, то α называется *m -периодической точкой* для h , а m – *периодом* точки α . При этом мы говорим, что m элементов $\alpha, h(\alpha), h^2(\alpha), \dots, h^{m-1}(\alpha)$ (все они различны) образуют *m -цикл*. Если $m = 1$, то α называется *неподвижной точкой* отображения h .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Пусть h – динамическая система, а m – натуральное число. Положим $H(x) = h^m(x)$. Назовем *m -периодическую точку* α отображения h (т. е. неподвижную точку отображения H):

- (i) *притягивающей*, если $|H'(\alpha)| < 1$;
- (ii) *нейтральной*, если $|H'(\alpha)| = 1$.

Здесь $H'(x)$ обозначает производную отображения $H(x)$.

Поведение точек в окрестности неподвижной точки динамической системы описывается следующей теоремой (см. [6]).

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть α – m -периодическая точка динамической системы h на L , и пусть $H(x) = h^m(x)$.

- (i) Если α – притягивающая точка, то найдется ее окрестность V такая, что $\lim_{j \rightarrow \infty} H^j(\beta) = \alpha$ для всех $\beta \in V$.
- (ii) Если α – нейтральная точка, то найдется шар $B_r(\alpha, L)$ такой, что

$$H[S_\rho(\alpha, L)] \subseteq S_\rho(\alpha, L)$$

для всякой сферы $S_\rho(\alpha, L)$, $\rho < r$.

Теорема 3.3 мотивирует следующее определение.

¹Все конечные расширения поля K считаются содержащимися в некотором фиксированном алгебраическом замыкании поля K .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Пусть α – m -периодическая точка динамической системы h на L , и пусть $H = h^m$.

(i) Если α – притягивающая точка, то $A(\alpha, L) = \{\beta \in L : \lim_{j \rightarrow \infty} H^j(\beta) = \alpha\}$ называется *множеством притяжения* точки α на L .

(ii) Если α – нейтральная точка, то шар $B_r(\alpha, L)$ такой, что каждая сфера $S_\rho(\alpha, L)$, $\rho < r$, инвариантна относительно H , называется *дисксом Зигеля* на L . Объединение всех дисков Зигеля такого вида называется *максимальным дисксом Зигеля* точки α на L и обозначается через $\text{Si}(\alpha, L)$.

Заметим, что если $H(x) = h^m(x)$ и α является m -периодической точкой системы h , то

$$H'(\alpha) = \prod_{j=0}^{m-1} h'(h^j(\alpha)).$$

Отсюда вытекает, что если один элемент m -цикла является притягивающим, то и все остальные элементы также являются притягивающими. Поэтому имеет смысл следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5. Пусть C – m -цикл динамической системы h на L , содержащий притягивающие точки. Определим *множество притяжения* цикла C на L как объединение:

$$A(C, L) = \bigcup_{\beta \in C} A(\beta, L).$$

Следующий результат (см. [6]) применяется для вычисления множества притяжения (или максимального диска Зигеля) неподвижных точек динамических систем.

ТЕОРЕМА 3.6. Пусть h – динамическая система на L , а α – m -периодическая точка отображения h . Пусть r – положительное вещественное число. Положим $H = h^m$.

(i) Если α – притягивающая точка и r удовлетворяет неравенству

$$\max_{n \geq 2} \left(\left| \frac{H^{(n)}(\alpha)}{n!} \right| r^{n-1} \right) < 1, \quad (3.1)$$

то $\bar{B}_r(\alpha, L) \subseteq A(\alpha, L)$. Здесь $H^{(n)}$ обозначает n -ю производную от H .

(ii) Если α – нейтральная точка и r удовлетворяет (3.1), то $\bar{B}_r(\alpha, L) \subseteq \text{Si}(\alpha, L)$.

Мы изучаем динамические системы, заданные моническими полиномами с целыми коэффициентами. Для таких полиномов можно оценить множество притяжения (или максимальный диск Зигеля) с помощью следующей леммы.

ЛЕММА 3.7. Пусть $h(x) \in \mathfrak{O}_K[x]$ – полином степени m , а α – любой элемент из (некоторого расширения поля) K такой, что $|\alpha| \leq 1$. Пусть старший коэффициент полинома $h(x)$ является единицей. Число $r \in \mathbb{R}^+$ удовлетворяет (3.1) тогда и только тогда, когда $r < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Если выполнено (3.1), то, в частности,

$$\left| \frac{h^{(m)}(\alpha)}{m!} \right| r^{m-1} < 1.$$

Однако $h^{(m)}(\alpha) = um!$ для некоторой единицы $u \in \mathfrak{O}_K$, поэтому $r < 1$.

Достаточность. Пусть $r < 1$. Полагая $h(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$ (где $|b_m| = 1$), имеем

$$\frac{h^{(n)}(\alpha)}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{m-n} \frac{(n+i)!}{i!} b_{n+i} \alpha^i = \sum_{i=0}^{m-n} \binom{n+i}{n} b_{n+i} \alpha^i$$

для всех n таких, что $2 \leq n \leq m$. Здесь правая часть – целое число, поэтому

$$\left| \frac{h^{(n)}(\alpha)}{n!} \right| r^{n-1} < \left| \frac{h^{(n)}(\alpha)}{n!} \right| \leq 1.$$

Лемма доказана.

§ 4. Притягивающие неподвижные точки

Пусть K – $\mathfrak{p}$ -адическое поле, а $g(x) \in \mathfrak{O}_K[x]$ – монический полином, неприводимый над K . Рассмотрим динамическую систему

$$h(x) = x + g(x)$$

в таком расширении L поля K , которое содержит хотя бы одну неподвижную точку $h(x)$, т. е. хотя бы один нуль полинома $g(x)$.

Чтобы вывести условия для $g(x)$, при которых неподвижные точки будут притягивающими, используем следующий вариант леммы Гензеля.

ТЕОРЕМА 4.1 (лемма Гензеля). Пусть K – $\mathfrak{p}$ -адическое поле, $g(x) \in \mathfrak{O}_K[x]$ – монический полином и $\bar{g}(x) = s_0(x)t_0(x)$ для некоторых монических взаимно простых полиномов $s_0(x)$ и $t_0(x)$ из $K_{\mathfrak{p}}[x]$. Тогда существует единственная пара монических полиномов $s(x), t(x) \in \mathfrak{O}_K[x]$ такая, что $\bar{s}(x) = s_0(x)$, $\bar{t}(x) = t_0(x)$ и $g(x) = s(x)t(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [15, с. 169].

Назовем полином $g(x) \in \mathfrak{O}_K[x]$ *инерционным*, если его старший коэффициент есть единица, а канонический образ $\bar{g}(x) \in K_{\mathfrak{p}}[x]$ неприводим над $K_{\mathfrak{p}}$. Конечно, инерционные полиномы неприводимы.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $g(x) \in \mathfrak{O}_K[x]$ – монический неприводимый полином. Если динамическая система $h(x) = x + g(x)$ имеет притягивающую неподвижную точку α , то полином $g(x)$ инерционный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме Гензеля (см. теорему 4.1) найдутся неприводимый полином $r(x) \in K_{\mathfrak{p}}[x]$ и натуральное число m такие, что $\bar{g}(x) = r(x)^m$. Отсюда $\bar{g}'(x) = mr(x)^{m-1}r'(x)$. Поскольку α – притягивающая точка, то $\bar{h}'(\bar{\alpha}) = 0$ и, значит, $r(x) \mid \bar{h}'(x)$. Но $\bar{g}'(x)$ и $\bar{h}'(x)$ взаимно просты, поэтому $m = 1$.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Пусть $g(x) \in \mathfrak{O}_K[x]$ – монический неприводимый полином. Если неподвижная точка α динамической системы $h(x) = x + g(x)$ притягивающая, то расширение $K(\alpha)/K$ неразветвленное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из [16, гл. II, предложение 7].

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть $g(x) \in \mathfrak{D}_K[x]$ – монический и неприводимый над K полином. Неподвижная точка отображения $h(x) = x + g(x)$ является притягивающей тогда и только тогда, когда $g(x)$ является инерционным и существует непостоянный полином $\psi(x) \in K_p[x]$ такой, что

$$\bar{g}(x) = \psi(x^p) - x,$$

где $p = \text{char } K_p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем $\bar{g}(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$. Тогда

$$\bar{h}(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + (a_1 + 1)x + a_0.$$

Если α – притягивающая неподвижная точка отображения h , то $\bar{h}'(\bar{\alpha}) = 0$. Мы знаем из теоремы 4.2, что $\bar{g}(x)$ – минимальный полином для $\bar{\alpha}$. Поэтому полином $\bar{h}'(x)$ должен быть равен нулю в $K_p[x]$. Тем самым, $\bar{h}(x) = \psi(x^p)$ для некоторого $\psi(x) \in K_p[x]$. Этим и доказана необходимость.

Достаточность получается непосредственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.5. Более общий вариант этой теоремы содержится в работе [17, предложение 4.32].

ТЕОРЕМА 4.6. Пусть $h(x) = x + g(x)$, где $g(x)$ – монический неприводимый полином степени n из $\mathfrak{D}_K[x]$. Допустим, что $g(x)$ задает неразветвленное расширение поля K , и положим $L = K(\alpha)$, где α – нуль полинома $g(x)$.

(i) Если полином $g(x)$ инерционный и удовлетворяет условиям теоремы 4.4, то α – притягивающая точка и $B_1(\alpha, L) \subseteq A(\alpha, L) \subset \bar{B}_1(\alpha, L)$.

(ii) Если полином $g(x)$ не инерционный, то α – нейтральная точка. Если при этом нули $g(x)$ экидистантны, то

$$\text{Si}(\alpha, L) = \begin{cases} \bar{B}_1(\alpha, L), & \text{если } q \equiv \frac{q^n - 1}{(n - 1, q^n - 1)} \equiv 1 \pmod{2}, \\ B_1(\alpha, L) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где q – число элементов поля K_p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) вытекает из теорем 4.4, 3.6, (i) и леммы 3.7.

Докажем утверждение (ii). Из теоремы 4.4 следует, что α – нейтральная точка. В силу теоремы 3.6, (ii) и леммы 3.7 имеем $B_1(\alpha, L) \subseteq \text{Si}(\alpha, L)$. Ясно, что элементы, не входящие в $\bar{B}_1(\alpha, L)$, не могут принадлежать $\text{Si}(\alpha, L)$, поэтому остается рассмотреть элементы сферы $S_1(\alpha, L)$. Имеем $S_1(\alpha, L) \subseteq \text{Si}(\alpha, L)$ тогда и только тогда, когда $h(\beta) \in S_1(\alpha, L)$ для всех $\beta \in S_1(\alpha, L)$, или, иными словами, когда $\bar{h}(\beta) \neq \bar{\alpha}$ для всех $\beta \neq \bar{\alpha}$ из L_p . Условие экидистантности нулей полинома $g(x)$ влечет, что $\bar{h}(x) = (x - \bar{\alpha})^n + x$ в $L_p[x]$, так что $\text{Si}(\alpha, L)$ содержит $S_1(\alpha, L)$ тогда и только тогда, когда полином $x^{n-1} + 1$ не имеет нулей в L_p . Поле L_p состоит из q^n элементов, поэтому у полинома $x^{n-1} + 1$ не будет нулей в L_p только тогда, когда оба числа q и $(q^n - 1)/(n - 1, q^n - 1)$ нечетны, что и утверждалось.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.7. Пусть $g(x) = x^6 - x + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$, и пусть α – неподвижная точка системы $h(x) = x + g(x) = x^6 + 2$. Тогда $|2\alpha - \alpha| = 1$. Но $\bar{h}(2\bar{\alpha}) = \bar{\alpha}^6 + 2 = \bar{h}(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha}$ в $\mathbb{F}_3(\bar{\alpha})$, откуда $|h(2\alpha) - \alpha| < 1$. Этот пример показывает, что оба включения в теореме 4.6, (i) могут быть строгими.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.8. Условие эквидистантности нулей полинома $g(x)$ необходимо в теореме 4.6, (ii), поскольку существуют неприводимые полиномы, задающие неразветвленные расширения, но имеющие неэквидистантные нули. Мы построим такой полином далее, в приложении.

Завершим настоящий параграф обсуждением того, сколько имеется полиномов данной степени, задающих по теореме 4.4 динамические системы с притягивающими неподвижными точками. Назовем два полинома из $\mathfrak{O}_K[x]$ $K_p[x]$ -эквивалентными, если их канонические образы в $K_p[x]$ совпадают. Конечно, этим задается отношение эквивалентности на $\mathfrak{O}_K[x]$.

Обозначим через $N(m, p)$ число классов эквивалентности, представимых инерционными полиномами с каноническим образом вида $\psi(x^p) - x$ в $K_p[x]$, где $\psi(x) \in K_p[x]$ имеет степень m . Например, если $K = \mathbb{Q}_2$, то $N(2, 2) = 1$, поскольку $\psi(x) = x^2 + 1$ — единственный квадратичный полином в $\mathbb{F}_2[x]$, для которого полином $\psi(x^2) - x$ неприводим над $\mathbb{F}_2$. С другой стороны, для $K = \mathbb{Q}_3$ получаем $N(2, 3) = 3$, так как в качестве $\psi(x)$ можно выбрать любой из полиномов $x^2 + 2$, $x^2 + x + 1$ или $x^2 + 2x + 2$ из $\mathbb{F}_3[x]$.

ТЕОРЕМА 4.9. Пусть K — p -адическое поле, а $N(m, p)$ определено, как выше. Если $m \neq 1$ и $p \nmid m$, то $p \mid N(m, p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G — множество всех $a \in K_p$ таких, что $a^p = a$. Тогда $(G, +)$ — циклическая группа порядка p , порожденная единицей 1 поля K_p . Положим

$$K_p^{(m)}[x] = \{\psi(x) \in K_p[x] : \psi(x) \text{ монический, } \deg \psi(x) = m\},$$

где $m \geq 2$, и определим действие

$$G \times K_p^{(m)}[x] \ni (b, \psi(x)) \mapsto b \bullet \psi(x) \in K_p^{(m)}[x]$$

группы G на $K_p^{(m)}[x]$ по формуле

$$b \bullet \psi(x) = \psi(x + b) - b$$

для всех $b \in G$. Обозначим через $G_{\psi(x)}$ стабилизатор полинома $\psi(x) \in K_p^{(m)}[x]$. Допустим, что $G_{\psi(x)} \neq \{0\}$. Тогда $G_{\psi(x)} = G$, откуда

$$\psi(x + 1) = \psi(x) + 1. \quad (4.1)$$

Подставляя

$$\psi(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \cdots + a_1x + a_0$$

в (4.1) и приравнивая коэффициенты, мы, в частности, получаем

$$a_{m-1} = a_{m-1} + m,$$

что невозможно при $p \nmid m$. Следовательно, если $p \nmid m$, то каждая орбита указанного действия группы G на $K_p^{(m)}[x]$ имеет длину p . Это относится и к орбитам, содержащим такие полиномы $\psi(x)$, что полином $\psi(x^p) - x$ неприводим над K_p . Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.10. Утверждение, что $p \mid N(m, p)$, может иметь место и тогда, когда условия теоремы не выполняются. Например, компьютерные вычисления показывают, что $N(6, 3) = 72$ при $K = \mathbb{Q}_3$.

Представляет интерес асимптотическое поведение числа $N(m, p)$. Например, можно ли что-нибудь сказать о величине

$$\frac{1}{\pi(x)} \sum N(m, p),$$

где $\pi(x)$ – количество простых чисел, меньших x , а сумма берется по всем простым $p \leq x$?

§ 5. Примеры

В настоящем параграфе мы проиллюстрируем изложенную теорию двумя примерами. В первом рассматривается динамическая система

$$h(x) = x + g(x), \quad (5.1)$$

где $g(x)$ – неприводимый кубический полином из $\mathbb{Q}_3[x]$. С точностью до изоморфизма имеется 10 кубических расширений поля $\mathbb{Q}_3$. Соответствующие полиномы можно найти с помощью леммы Краснера (см. [18]).

Девять из этих полиномов задают вполне разветвленные расширения, так что их можно считать полиномами Эйзенштейна. Приведем один из возможных выборов попарно неэквивалентных полиномов Эйзенштейна (см. [18]):

$$\begin{array}{lll} x^3 + 3x^2 + 6, & x^3 + 3x^2 + 15, & x^3 + 3x^2 + 24, \\ x^3 + 3x + 3, & x^3 + 3x + 6, & x^3 + 3x^2 + 3, \\ x^3 + 3, & x^3 + 6, & x^3 + 12. \end{array}$$

Если $g(x)$ – любой из этих полиномов (или, вообще, любой полином Эйзенштейна из $\mathbb{Q}_3[x]$), то каждая неподвижная точка α динамической системы (5.1) нейтральна, а ее максимальный диск Зигеля $\text{Si}(\alpha, L)$, где $L = \mathbb{Q}_3(\alpha)$, равен $\bar{B}_1(\alpha, L)$ (см. [14]). То же самое имеет место и тогда, когда вполне разветвленное кубическое расширение задано минимальным полиномом некоторой единицы².

Неразветвленное расширение однозначно (с точностью до изоморфизма) определяется своей степенью. Неприводимый полином, задающий такое кубическое расширение $\mathbb{Q}_3$, можно построить, взяв кубический неприводимый полином в $\mathbb{F}_3[x]$ и “подняв” его до кубического полинома с коэффициентами из $\mathbb{Z}_3$. При этом имеется по существу восемь возможных способов выбора полинома, определяющего кубическое неразветвленное расширение L поля $\mathbb{Q}_3$:

$$\begin{array}{ll} g_1(x) = x^3 + 2x + 1, & g_2(x) = x^3 + 2x + 2, \\ g_3(x) = x^3 + x^2 + 2, & g_4(x) = x^3 + x^2 + x + 2, \\ g_5(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1, & g_6(x) = x^3 + 2x^2 + 1, \\ g_7(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1, & g_8(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 2. \end{array} \quad (5.2)$$

Теорема 4.6 показывает, что если $g(x) = g_1(x)$ или $g(x) = g_2(x)$, то неподвижная точка α динамической системы (5.1) является притягивающей и $A(\alpha, L) \supseteq B_1(\alpha, L)$. Поскольку полином $\bar{h}(x) = x^3 \in \mathbb{F}_3[x]$ инъективен как отображение $L_p \rightarrow L_p$, на сфере $S_1(\alpha, L)$ нет элементов, притягиваемых точкой α . Мы заключаем, что $A(\alpha, L) = B_1(\alpha, L)$.

²Например, $g(x) = x^3 - 2$ задает вполне разветвленное расширение поля $\mathbb{Q}_3$, причем $\sqrt[3]{2}$ является единицей в этом расширении.

Если $g(x)$ – любой другой полином из списка (5.2), то все неподвижные точки α системы (5.1) нейтральны. Однако всё, что мы (пока) можем сказать о максимальном диске Зигеля $\text{Si}(\alpha, L)$, – это то, что он содержит $B_1(\alpha, L)$ (по теореме 3.6, (ii) и лемме 3.7). Он будет равен $B_1(\alpha, L)$, если найдется такое $\beta \in L$, что $|\beta - \alpha| = 1$, но $|h(\beta) - \alpha| < 1$. На уровне поля вычетов $L_{\mathfrak{p}}$ это означает, что $\beta \neq \bar{\alpha}$, но $\bar{h}(\beta) = \bar{\alpha}$.

Допустим, что $g(x) = g_j(x)$ для некоторого $j \in \{3, 4, \dots, 8\}$, и пусть $h_j(x)$ – соответствующая динамическая система. Для каждого $i \in \{3, 4, \dots, 8\}$, $i \neq j$, найдутся $a \in \mathbb{F}_3^*$ и $b \in \mathbb{F}_3$ такие, что

$$\bar{g}_i(x) = a\bar{g}_j(ax + b).$$

Следовательно, α_i является нулем полинома $\bar{g}_i(x)$ (в некотором алгебраическом замыкании поля $\mathbb{F}_3$) тогда и только тогда, когда $\alpha_j = a\alpha_i + b$ является нулем полинома $\bar{g}_j(x)$. Далее,

$$a\bar{h}_j(ax + b) = a[ax + b + \bar{g}_j(ax + b)] = x + ab + \bar{g}_i(x) = ab + \bar{h}_i(x), \quad (5.3)$$

поскольку $a^2 = 1$ для всех $a \in \mathbb{F}_3^*$.

Допустим теперь, что $\beta_i \neq \alpha_i$, но $\bar{h}_i(\beta_i) = \alpha_i$. Тогда в силу (5.3) имеем

$$\alpha_i = \bar{h}_i(\beta_i) = a\bar{h}_j(a\beta_i + b) + 2ab.$$

С другой стороны, $\alpha_i = a\alpha_j + 2ab$. Поэтому

$$\alpha_j = \bar{h}_j(\beta_j),$$

где $\beta_j = a\beta_i + b \neq \alpha_j$. Отсюда следует, что максимальный диск Зигеля один и тот же для всех динамических систем h_j при $3 \leq j \leq 8$. Поэтому достаточно изучить поведение элементов из $S_1(\alpha, L)$, считая α неподвижной точкой системы $h_5(x)$. Для этого полинома имеем $\bar{\alpha}^2 \neq \bar{\alpha}$, но $\bar{h}_5(\bar{\alpha}^2) = \bar{\alpha}$ в $L_{\mathfrak{p}}$. Поэтому $\text{Si}(\alpha, L) = B_1(\alpha, L)$. Итог этих рассуждений приведен в табл. 1.

ТАБЛИЦА 1. Полиномиальная динамика в кубических расширениях $\mathbb{Q}_3$

Полином $g(x)$	Природа α	$A(\alpha, L)$ или $\text{Si}(\alpha, L)$
$x^3 + 2x + 1$	притягивающая	$A(\alpha, L) = B_1(\alpha, L)$
$x^3 + 2x + 2$	притягивающая	$A(\alpha, L) = B_1(\alpha, L)$
$x^3 + x^2 + 2$	нейтральная	$\text{Si}(\alpha, L) = B_1(\alpha, L)$
$x^3 + x^2 + x + 2$	нейтральная	$\text{Si}(\alpha, L) = B_1(\alpha, L)$
$x^3 + x^2 + 2x + 1$	нейтральная	$\text{Si}(\alpha, L) = B_1(\alpha, L)$
$x^3 + 2x^2 + 1$	нейтральная	$\text{Si}(\alpha, L) = B_1(\alpha, L)$
$x^3 + 2x^2 + x + 1$	нейтральная	$\text{Si}(\alpha, L) = B_1(\alpha, L)$
$x^3 + 2x^2 + 2x + 2$	нейтральная	$\text{Si}(\alpha, L) = B_1(\alpha, L)$
полином Эйзенштейна	нейтральная	$\text{Si}(\alpha, L) = \bar{B}_1(\alpha, L)$

Наш следующий пример касается 2-периодических точек динамической системы $h(x) = x + g(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$, где коэффициенты полинома

$$g(x) = x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \dots + a_1x + a_0$$

таковы, что $a_{p-1}, a_{p-2}, \dots, a_2, a_1 + 1$ не являются единицами, но a_0 – единица в $\mathbb{Z}_p$. Канонический образ $\bar{g}(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ имеет вид $x^p - x + \bar{b}$, поэтому полином $g(x)$ инерционный.

Особый интерес при изучении 2-периодических точек динамической системы h представляет полином $h^2(x) - x = h(h(x)) - x$, поскольку его нули – это в точности все 2-периодические точки и все неподвижные точки h . (Тем самым, $h^2(x) - x$ делится на $g(x)$.)

Сначала мы отдельно изучим 2-периодические точки динамической системы h в случае $p = 2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Пусть $g(x) = x^2 + ax + b \in \mathbb{Z}_2[x]$, причем $a + 1$ не является единицей, но b – единица. Тогда система h имеет ровно один 2-цикл $C = \{\gamma_1, \gamma_2\}$. Обе точки γ_1, γ_2 притягивающие и принадлежат $\mathbb{Z}_2$, причем

$$A(C, \mathbb{Q}_2) = \mathbb{Z}_2. \quad (5.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отобразим полиномы $g(x)$ и $h(x)$ в элементы $\bar{g}(x) = x^2 + x + 1$ и $\bar{h}(x) = x^2 + 1$ поля $\mathbb{F}_2[x]$. Тогда

$$\bar{h}^2(x) - x = x^4 - x = x(x + 1)\bar{g}(x)$$

в $\mathbb{F}_2[x]$. Это означает, что

$$h^2(x) - x = (x - \gamma_1)(x - \gamma_2)g(x)$$

для некоторых $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{Z}_2$. Элементы γ_1 и γ_2 – единственные 2-периодические точки для h . Легко проверить, что γ_1 и γ_2 притягивающие и что для $C = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ выполнено равенство (5.4).

Теперь будем считать, что p – нечетное простое число. Пусть

$$g(x) = x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}_p[x],$$

где a_0 – единица, но $a_{p-1}, \dots, a_2, a_1 + 1$ не являются единицами. Положим $h(x) = x + g(x)$. Канонические образы полиномов $g(x)$ и $h(x)$ в $\mathbb{F}_p[x]$ суть $\bar{g}(x) = x^p - x + \bar{a}_0$ и $\bar{h}(x) = x^p + \bar{a}_0$ соответственно. Рассмотрим $q(x) = \bar{h}^2(x) - x \in \mathbb{F}_p[x]$. Простое вычисление показывает, что

$$q(x) = x^{p^2} - x + 2b, \quad (5.5)$$

где $b = \bar{a}_0 \in \mathbb{F}_p^*$.

ЛЕММА 5.2. Пусть p – простое число. Тогда полином $q(x)$, заданный равенством (5.5), допускает разложение на множители:

$$q(x) = \prod_{j=1}^p (x^p - x + \beta_j)$$

в $\mathbb{F}_{p^2}[x]$, где β_j – различные элементы из $\mathbb{F}_{p^2}$ и $\text{Tr}_{\mathbb{F}_{p^2}}(\beta_j) = 2b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из [19, теорема 3.80].

ЛЕММА 5.3. Пусть $p \neq 2$ – простое число. Тогда для каждого $b \in \mathbb{F}_p^*$ полином $x^p + x - 2b \in \mathbb{F}_p[x]$ допускает разложение

$$x^p + x - 2b = (x - b) \prod_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} (x^2 - 2bx + c_i) \quad (5.6)$$

на полиномы, неприводимые над $\mathbb{F}_p$, где c_i – различные элементы из $\mathbb{F}_p^*$ такие, что $b^2 - c_i \notin \mathbb{F}_p^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, $x - b$ делит $x^p + x - 2b$. Поэтому мы должны доказать, что $x^2 - 2bx + c$ делит $x^p + x - 2b$ для каждого $c \in \mathbb{F}_p$ такого, что $b^2 - c \notin \mathbb{F}_p^2$. Для этого достаточно доказать, что

$$(x^2 + c - b^2) \mid (x^{p-1} + 1). \quad (5.7)$$

Поскольку $b^2 - c \notin \mathbb{F}_p^2$, полином $x^2 + c - b^2$ неприводим над $\mathbb{F}_p$. Выберем $\alpha \in \mathbb{F}_{p^2}$ так, что $\alpha^2 = b^2 - c$. Заметим, что $\alpha^2 \in \mathbb{F}_p$, откуда

$$(\alpha^{p-1})^2 = (\alpha^2)^{p-1} = 1.$$

Таким образом, $\alpha^{p-1} = 1$ или $\alpha^{p-1} = -1$. Поскольку $\alpha \notin \mathbb{F}_p$, первый случай невозможен. Этим доказано (5.7).

Полиномы из правой части равенства (5.6) попарно взаимно просты. Так как все они имеют простые нули и делят $x^p + x - 2b$, то вся правая часть должна также быть делителем этого полинома. Поскольку произведение в правой части есть монический полином степени p , оно должно быть равно $x^p + x - 2b$, что и утверждалось.

ЛЕММА 5.4. Пусть p – нечетное простое число, $s \in \mathbb{F}_p^*$, а $B = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{p-1}\}$ – множество всех $p-1$ элементов из $\mathbb{F}_{p^2} \setminus \mathbb{F}_p$ таких, что $\text{Tr}_{\mathbb{F}_{p^2}}(\beta_i) = s$. Тогда существует разбиение множества B на $(p-1)/2$ двух-элементных подмножеств таких, что для каждой клетки $\{\beta_i, \beta_j\}$ этого разбиения элементы $\beta_i + \beta_j$ и $\beta_i \beta_j$ принадлежат $\mathbb{F}_p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\text{Tr}_{\mathbb{F}_{p^2}}(\beta) = \beta^p + \beta$ для всех $\beta \in \mathbb{F}_{p^2}$, эта лемма следует из леммы 5.3.

ЛЕММА 5.5. Разложение полинома $q(x) \in \mathbb{F}_p[x]$, определенного в (5.5), на неприводимые полиномы над $\mathbb{F}_p[x]$, где $p \neq 2$, имеет вид

$$q(x) = (x^p - x + b) \prod_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} (x^{2p} - 2x^{p+1} + 2bx^p + x^2 - 2bx + c_i),$$

где c_i – различные элементы из $\mathbb{F}_p$ и $b^2 - c_i \notin \mathbb{F}_p^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{F}_{p^2} \setminus \mathbb{F}_p$ – такие элементы, что $\text{Tr}_{\mathbb{F}_{p^2}}(\beta_1) = \text{Tr}_{\mathbb{F}_{p^2}}(\beta_2) = 2b$. Тогда

$$\begin{aligned} & (x^p - x + \beta_1)(x^p - x + \beta_2) \\ &= x^{p^2} - 2x^{p+1} + (\beta_1 + \beta_2)x^p + x^2 - (\beta_1 + \beta_2)x + \beta_1\beta_2, \end{aligned}$$

так что данная лемма вытекает из лемм 5.2–5.4.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.6. Пусть p – простое число, $p \neq 2$, и пусть

$$g(x) = x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \dots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}_p[x],$$

где $a_{p-1}, \dots, a_2, a_1 + 1$ не являются единицами, но a_0 – единица. Тогда все 2-периодические точки динамической системы $h(x) = x + g(x)$ содержатся в неразветвленном расширении L степени $2p$ поля $\mathbb{Q}_p$. Кроме того, если $C = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ есть 2-цикл, то γ_1 и γ_2 притягивающие, причем

$$A(C, L) = B_1(\gamma_1, L) \cup B_1(\gamma_2, L).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что 2-периодические точки содержатся в неразветвленном расширении степени $2p$ поля $\mathbb{Q}_p$, вытекает из леммы 5.5. Остальные утверждения проверяются с помощью того, что $h^2(x)$ имеет канонический образ $\bar{h}^2(x) = x^{p^2} + 2b$ в $\mathbb{F}_p[x]$.

Приложение

Как было обещано в замечании 4.8, мы построим здесь неприводимый полином $g(x)$ с неэквидистантными нулями, задающий неразветвленное расширение p -адического поля K . Конечно, полином $g(x)$ не может быть инерционным, поскольку, как легко видеть, каждый такой полином имеет эквидистантные нули.

ТЕОРЕМА П.1. Пусть K — p -адическое поле, а π — простой элемент поля K . Допустим, что полином $g_1(x) = x^2 - a \in \mathfrak{O}_K[x]$ инерционный, и пусть ζ — нуль $g_1(x)$. Пусть также инерционным является полином $g_2(x) = x^2 - \zeta \in \mathfrak{O}_L[x]$, где $L = K(\zeta)$, и пусть ω — нуль $g_2(x)$. Тогда минимальный полином $g(x)$ числа $\alpha = \zeta + \pi^2\omega$ задает биквадратичное неразветвленное расширение поля K , но нули $g(x)$ неэквидистантны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{L} = K(\zeta, \omega)$. Ясно, что расширение $\tilde{L}/K$ неразветвленное и $[\tilde{L} : K] = 4$. Легко проверяется, что $\tilde{L} = K(\alpha)$, откуда $\deg g(x) = 4$. Простое вычисление дает, что

$$g(x) = x^4 - 2ax^2 - 4a\pi^4x + a(a - \pi^8).$$

Поэтому канонический образ $g(x)$ в $K_p[x]$ имеет вид

$$\bar{g}(x) = x^4 - 2\bar{a}x^2 + \bar{a}^2 = (x - \bar{a})^2,$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Остается проверить, что условия теоремы П.1 могут быть реализованы. Возьмем $K = \mathbb{Q}_5$. Тогда полином $x^2 - 2 \in \mathbb{Z}_5[x]$ инерционный. Легко проверить, что полином $x^2 - \zeta \in \mathfrak{O}_L[x]$, где $L = \mathbb{Q}_5(\zeta)$ и $\zeta^2 = 2$, также инерционный. Поэтому полином

$$g(x) = x^4 - 4x^2 - 5000x - 781246 \in \mathbb{Z}_5[x]$$

имеет неэквидистантные нули и задает неразветвленное (биквадратичное) расширение поля $\mathbb{Q}_5$.

Авторы благодарят профессоров Б. Диарра и А. Эскасу из университета Блеза Паскаля в Клермон-Ферране за полезные обсуждения.

Список литературы

1. В. С. Анашин, “Равномерно распределенные последовательности p -адических целых чисел”, *Матем. заметки*, **55:2** (1994), 3–46; англ. пер.: V. S. Anashin, “Uniformly distributed sequences of p -adic integers”, *Math. Notes*, **55:2** (1994), 109–133.
2. В. С. Анашин, “Равномерно распределенные последовательности p -адических целых чисел. II”, *Дискрет. математика*, **14:4** (2002), 3–64; англ. пер.: V. S. Anashin, “Uniformly distributed sequences of p -adic integers”, *Discrete Math. Appl.*, **12:6** (2002), 527–590.

3. D. K. Arrowsmith, F. Vivaldi, "Geometry of p -adic Siegel discs", *Phys. D*, **71**:1–2 (1994), 222–236.
4. R. Benedetto, " p -adic dynamics and Sullivan's no wandering domains theorem", *Compositio Math.*, **122**:3 (2000), 281–298.
5. R. Benedetto, "Hyperbolic maps in p -adic dynamics", *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **21**:1 (2001), 1–11.
6. A. Yu. Khrennikov, *Non-archimedean analysis: quantum paradoxes, dynamical systems and biological models*, Math. Appl., **427**, Kluwer, Dordrecht, 1997.
7. A. Yu. Khrennikov, " p -adic discrete dynamical systems and their applications in physics and cognitive sciences", *Russ. J. Math. Phys.*, **11**:1 (2004), 45–70.
8. A. Yu. Khrennikov, M. Nilsson, "On the number of cycles of p -adic dynamical systems", *J. Number Theory*, **90**:2 (2001), 255–264.
9. A. Yu. Khrennikov, M. Nilsson, "Behaviour of Hensel perturbations of p -adic monomial dynamical systems", *Anal. Math.*, **29**:2 (2003), 107–133.
10. K.-O. Lindahl, "On Siegel's linearization theorem for fields of prime characteristic", *Nonlinearity*, **17**:3 (2004), 745–763.
11. J. Lubin, "Nonarchimedean dynamical systems", *Compositio Math.*, **94**:3 (1994), 321–346.
12. F. Vivaldi, "Dynamics over irreducible polynomials", *Nonlinearity*, **5**:4 (1992), 941–960.
13. П.-А. Свенссон, "Возмущенные динамические системы в p -адических полях", *Тр. МИАН*, **245** (2004), 264–272; англ. пер.: P.-A. Svensson, "Perturbed dynamical systems in p -adic fields", *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2004, № 2, 250–257.
14. П.-А. Свенссон, "Динамические системы в неразветвленных или вполне разветвленных расширениях p -адического поля", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:6 (2005), 211–218; англ. пер.: P.-A. Svensson, "Dynamical systems in unramified or totally ramified extensions of a p -adic field", *Izv. Math.*, **69**:6 (2005), 1279–1287.
15. H. Hasse, *Number theory*, Classics Math., Springer-Verlag, Berlin, 2002.
16. S. Lang, *Algebraic number theory*, Grad. Texts in Math., **110**, Springer-Verlag, New York, 1986.
17. J. Rivera-Letelier, *Dynamique des fonctions rationnelles sur des corps locaux*, Ph.D. thesis, Univ. Paris-Sud, Centre d'Orsay, 2000.
18. P.-A. Svensson, "Cubic extensions of the 3-adic number field", *Comment. Math. Univ. St. Pauli*, **51**:1 (2002), 53–62.
19. R. Lidl, H. Niederreiter, *Introduction to finite fields and their applications*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.

А. Ю. ХРЕННИКОВ (A. YU. KHRENNIKOV)
 School of Mathematics and System Engineering
 Växjö University
 E-mail: Andrei.Khrennikov@vxu.se

Поступило в редакцию
 14.12.2005

Перевод с английского
 А. В. Домрина

П.-А. СВЕНССОН (P.-A. SVENSSON)
 School of Mathematics and System Engineering
 Växjö University
 E-mail: Per-Anders.Svensson@vxu.se