Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Ю. Панов, О мерозначных решениях задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1996, том 60, выпуск 2, 107–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/im73>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 13:07:05

УДК 517.95

Е. Ю. Панов

О мерозначных решениях задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка

Рассматриваются мерозначные решения задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка с лишь непрерывными функциями потока. В работе доказан мерозначный аналог принципа максимума (в пространствах Лебега). Найдены условия, при которых мерозначное решение является обычной функцией. Исследованы вопросы единственности. Выделен класс “сильных” мерозначных решений и доказано существование и единственность (при естественных ограничениях) сильного мерозначного решения. Исследованы вопросы сходимости последовательностей мерозначных решений.

Библиография: 20 наименований.

Введение

Рассмотрим квазилинейное уравнение первого порядка

$$u_t + \sum_{i=1}^n (\varphi_i(u))_{x_i} = 0; \quad (1)$$

здесь $u = u(t, x)$, $(t, x) \in \Pi_T = [0, T) \times \mathbb{R}^n$ ($T > 0$ произвольно); функции потока $\varphi_i(u)$ предполагаются лишь непрерывными: $\varphi_i(u) \in C(\mathbb{R})$.

Понятие обобщенного решения (коротко – о.р.) задачи Коши для уравнения (1) с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (2)$$

было определено С. Н. Кružковым в работах [1], [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Ограниченная измеримая функция $u(t, x)$ называется *обобщенным решением (о.р.) задачи* (1), (2), если:

а) для всех $k \in \mathbb{R}$ и всех $f(t, x) \in C_0^\infty(\Pi_T)$, $f(t, x) \geq 0$,

$$\int_{\Pi_T} \left[|u - k| f_t(t, x) + \sum_{i=1}^n (\varphi_i(u) - \varphi_i(k)) \operatorname{sign}(u - k) f_{x_i}(t, x) \right] dt dx \geq 0,$$

т.е.

$$|u - k|_t + \sum_{i=1}^n ((\varphi_i(u) - \varphi_i(k)) \operatorname{sign}(u - k))_{x_i} \leq 0$$

в смысле распределений;

б) существует множество $\mathcal{E}$ нулевой меры Лебега в $[0, T]$ такое, что при $t \rightarrow 0$, $t \notin \mathcal{E}$,

$$u(t, x) \rightarrow u_0(x) \quad \text{в } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (грант № 94-2187).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из условия а) при $k = \pm \|u\|_\infty$ следует, что о.р. $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению (1) в смысле распределений. В частности, если $u(t, x)$ – кусочно гладкое о.р. задачи (1), (2), то $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению (1) в классическом смысле в областях гладкости, а на разрывах выполнено условие Ранкина–Гюгонио (см. [3])

$$(u_+ - u_-)\nu_0 + \sum_{i=1}^n (\varphi_i(u_+) - \varphi_i(u_-))\nu_i = 0, \quad (3)$$

где $u_+ = u_+(t, x)$, $u_- = u_-(t, x)$ – граничные значения $u(t, x)$ на поверхности разрыва, $\nu = (\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n)$, $\nu = \nu(t, x)$ – вектор нормали к поверхности разрыва.

Из требования а) вытекает следующее условие допустимости разрыва (см. [2]): для любого вещественного k

$$\begin{aligned} & |u_+ - k|\nu_0 + \sum_{i=1}^n ((\varphi_i(u_+) - \varphi_i(k)) \operatorname{sign}(u_+ - k))\nu_i \\ & \leq |u_- - k|\nu_0 + \sum_{i=1}^n ((\varphi_i(u_-) - \varphi_i(k)) \operatorname{sign}(u_- - k))\nu_i. \end{aligned} \quad (4)$$

Предполагается, что вектор нормали ν направлен от u_- к u_+ . Легко видеть, что условие (3) вытекает из (4) при $k = u_\pm$. Заметим, что, обратно, кусочно гладкая функция $u(t, x)$, удовлетворяющая уравнению (1) в областях гладкости, условию (4) на поверхностях разрыва и начальному условию (2) (в смысле требования б)), является о.р. задачи Коши (1), (2).

В работе [2] было доказано существование и единственность о.р. задачи (1), (2) при гладких функциях $\varphi_i(u)$. В работах [4]–[6] начато исследование задачи (1), (2) в общем случае лишь непрерывных функций $\varphi_i(u)$, когда может нарушаться одно из характерных свойств гиперболических уравнений – конечность области зависимости решения от начальных данных. В [5] доказано существование о.р. задачи (1), (2) в классе $L^\infty(\Pi_T) \cap L^1(\Pi_T)$ для ограниченной суммируемой начальной функции. Там же доказана и теорема единственности при некоторых дополнительных ограничениях на поведение функций $\varphi_i(u)$ вблизи точки $u = 0$. Результаты работы [5] обобщены в статье [6], где рассмотрен класс $z + L^1(\Pi_T)$, $z = z(t, x)$ – некоторая фиксированная ограниченная функция.

В диссертации автора [7] (см. также [8], [9]) продолжено исследование задачи Коши (1), (2) в случае непрерывных функций φ_i . В [7] установлено существование решения задачи (1), (2) при произвольной начальной функции $u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Найдены ряд достаточных условий единственности о.р. Приведем одно из них.

с) Для любого компакта $K \subset \mathbb{R}$ при всех $i = 1, \dots, n$, $u, v \in K$

$$|\varphi_i(u) - \varphi_i(v)| \leq \Phi_i(|u - v|),$$

где функции $\Phi_i(o) = \Phi_{Ki}(o)$ определены и выпуклы кверху на $[0, +\infty)$, причем при $o \rightarrow 0$

$$\prod_{i=1}^n \Phi_i(o) = O(o^{n-1}).$$

Заметим, что, как следует из этого условия, при $n = 1$ о.р. задачи (1), (2) всегда единственно.

В [8] (подробно в [7]) приведен пример неединственности о.р., показывающий, что для широкого класса уравнений условие с) является точным.

В настоящей работе изучаются более общие мерозначные решения задачи Коши для уравнения (1) с мерозначными в общем случае начальными данными, введенные впервые в работах [10]–[12]. Определение мерозначного решения (коротко – м.р.) будет приведено в § 2. Там же будут доказаны принцип максимума и теорема регулярности. В § 3 мы выделяем из класса м.р. решения специального вида (сильные м.р.), обладающие, в отличие от общих м.р., свойством единственности (при условиях, гарантирующих единственность о.р.). В § 3 изучаются также вопросы сходимости последовательностей м.р. Основные результаты работы, касающиеся м.р., изложены кратко в [9], [13], [14].

Мы будем использовать (в § 3) результат о существовании о.р., доказательству чего посвящен следующий параграф.

§ 1. Существование обобщенных решений

Доказательство существования о.р. в случае произвольных непрерывных функций $\varphi_i(u)$ будет основано на идее аппроксимации функций $\varphi_i(u)$, $i = 1, \dots, n$, в равномерной норме последовательностями гладких функций $\{\varphi_i^\nu(u)\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ и на дальнейшем предельном переходе при $\nu \rightarrow \infty$ для последовательности о.р. $u^\nu(t, x)$, соответствующих функциям $\varphi_i^\nu(u)$. Реализация такого предельного перехода базируется на результатах и методах работ [1]–[3], [5], [6]. Предельная функция $u(t, x)$ и будет являться искомым о.р. задачи (1), (2). Отметим также, что другая техника такого предельного перехода в аналогичной ситуации применялась в работе [8].

Обозначим: (x, y) – скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$; $|x| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2} = (x, x)^{1/2}$ – евклидова норма x .

Если Ω – открытое подмножество некоторого пространства $\mathbb{R}^m$, то $W_p^s(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, $s \in \mathbb{N}$, будет обозначать пространство Соболева на Ω с показателями p, s ; $W_p^0(\Omega)$ – замыкание в $W_p^s(\Omega)$ подпространства $C_0^\infty(\Omega)$.

Следующая лемма доказана в [5].

ЛЕММА 1.1. Пусть $u(t, x), v(t, x)$ – о.р. задачи (1), (2) с начальными функциями $u_0(x), v_0(x)$ соответственно. Тогда

$$|u - v|_t + \sum_{i=1}^n ((\varphi_i(u) - \varphi_i(v)) \operatorname{sign}(u - v))_{x_i} \leq 0$$

в смысле распределений; здесь $u = u(t, x)$, $v = v(t, x)$.

Мы будем часто использовать также следующую лемму.

ЛЕММА 1.2. Пусть для некоторого $m \in \mathbb{N}$ $\varphi(x, t) \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$. Тогда $E = \{(x, t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \mid t \text{ – точка Лебега функции } \varphi^x(t) = \varphi(x, t)\}$ является множеством полной меры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать измеримость множества E . Действительно, для п.в. $x \in \mathbb{R}^m$ $\varphi^x(t) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ и сечение $E^x = \{t \in \mathbb{R} \mid (x, t) \in E\}$ есть множество точек Лебега функции $\varphi^x(t)$ и поэтому имеет полную меру Лебега в $\mathbb{R}$ (см., например, [15]). По теореме Фубини если множество E измеримо, то оно имеет полную меру в $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$.

Для доказательства измеримости E введем функцию

$$\Phi(x, t, h) = \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} |\varphi(x, \tau) - \varphi(x, t)| d\tau.$$

При фиксированном $h > 0$ функция $\Phi(x, t, h)$, очевидно, измерима и п.в. конечна на $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$. Кроме того, для п.в. $(x, t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ $\Phi(x, t, h)$ определена и непрерывна при $h > 0$. Поэтому (Q – множество рациональных чисел) функция

$$U(x, t, h) = \sup_{0 < \delta < h} \Phi(x, t, \delta) = \sup_{\delta \in (0, h) \cap Q} \Phi(x, t, \delta)$$

измерима по переменным (x, t) для всех $h > 0$ как наименьшая верхняя грань счетного множества измеримых функций. Ясно также, что $U(x, t, h)$ возрастает по h . Пусть

$$V(x, t) = \inf_{h > 0} U(x, t, h) = \inf_{h > 0, h \in Q} U(x, t, h) = \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \Phi(x, t, h).$$

Функция $V(x, t)$ измерима на $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ как наибольшая нижняя грань счетного множества измеримых функций. Остается заметить, что $E = V^{-1}(0)$. Лемма доказана.

Ниже нам потребуется содержащаяся в теореме 1.1 априорная оценка скорости сходимости при $t \rightarrow 0$ о.р. $u(t, x)$ к начальной функции $u_0(x)$ в норме пространства $L^1(\mathbb{R}^n, \rho dx)$, где весовая функция $\rho(x)$ равна $\exp(-|x|)$. Доказательство теоремы 1.1 опирается на ряд предварительных оценок.

Для $M > 0$ положим $N(M) = \max_{|u| \leq M} |\varphi(u)|$, где $\varphi(u) = (\varphi_1(u), \dots, \varphi_n(u))$.

ЛЕММА 1.3. Пусть $u(t, x)$ – о.р. задачи (1), (2), $M = \|u\|_\infty$. Тогда при п.в. $t \in [0, T]$ для всех $\Delta x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |u(t, x + \Delta x) - u(t, x)| \rho(x) dx &\leq \omega^x(|\Delta x|) + Ct, \\ \omega^x(\delta) &= \sup_{\substack{\Delta x \in \mathbb{R}^n \\ |\Delta x| \leq \delta}} \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x + \Delta x) - u_0(x)| \rho(x) dx \end{aligned}$$

– модуль непрерывности функции $u_0(x)$ в $L^1(\mathbb{R}^n, \rho dx)$, $C = \text{const} \cdot N(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Delta x \in \mathbb{R}^n$. Тогда $v(t, x) = u(t, x + \Delta x)$ – о.р. задачи (1), (2) с начальной функцией $v_0(x) = u_0(x + \Delta x)$. По лемме 1.1

$$|u - v|_t + \sum_{i=1}^n ((\varphi_i(u) - \varphi_i(v)) \text{sign}(u - v))_{x_i} \leq 0 \quad (1.1)$$

в смысле распределений.

Выберем функцию $\beta(t) \in C_0^\infty([-1, 1])$, $\beta(t) \geq 0$, $\int \beta(t) dt = 1$, и положим при $\nu > 0$

$$\delta_\nu(t) = \beta(t/\nu)/\nu, \quad \alpha_\nu(t) = \int_{-\infty}^t \delta_\nu(s) ds.$$

Очевидно, при $\nu \rightarrow 0$ семейство функций $\delta_\nu(t)$ сходится в пространстве распределений на $\mathbb{R}$ к δ -функции Дирака и при $t \neq 0$ $\alpha_\nu(t) \rightarrow \theta(t)$, где $\theta(t)$ – функция Хевисайда.

Пусть $0 < t_0 < t_1 < T$, $0 < \nu < \min(t_0, T - t_1)$, $\varepsilon > 0$, $r > 0$, $\chi_\nu(t) = \alpha_\nu(t - t_0) - \alpha_\nu(t - t_1)$, $f(t, x) = \chi_\nu(t)\rho(x)$. Тогда $f(t, x) \in \overset{0}{W}_1^1(\Pi_T)$, $f(t, x) \geq 0$ и из (1.1) следует

$$\int_{\Pi_T} \left[|u - v| f_t(t, x) + \sum_{i=1}^n (\varphi_i(u) - \varphi_i(v)) \operatorname{sign}(u - v) f_{x_i}(t, x) \right] dt dx \geq 0,$$

или

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi_T} |u - v| (\delta_\nu(t - t_0) - \delta_\nu(t - t_1)) \rho(x) dx dt \\ & + \int_{\Pi_T} \sum_{i=1}^n (\varphi_i(u) - \varphi_i(v)) \operatorname{sign}(u - v) \rho_{x_i}(x) \chi_\nu(t) dt dx \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует оценка

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi_T} |u - v| \delta_\nu(t - t_1) \rho(x) dx dt \leq \int_{\Pi_T} |u - v| \delta_\nu(t - t_0) \rho(x) dx dt \\ & + \int_{\Pi_T} |\varphi(u) - \varphi(v)| \cdot |\rho_x(x)| \chi_\nu(t) dt dx, \end{aligned}$$

где $\rho_x(x) = \nabla \rho(x)$.

Так как $\|v\|_\infty = \|u\|_\infty = M$, то для п.в. $(t, x) \in \Pi_T$

$$|\varphi(u) - \varphi(v)| \leq |\varphi(u)| + |\varphi(v)| \leq 2N(M).$$

Отсюда и из последней оценки следует

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi_T} |u - v| \delta_\nu(t - t_1) \rho(x) dx dt \leq \int_{\Pi_T} |u - v| \delta_\nu(t - t_0) \rho(x) dx dt \\ & + 2N(M) \cdot \|\rho_x\|_1 \cdot \int_0^T \chi_\nu(t) dt. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь $\|\rho_x\|_1$ – норма в $L^1(\mathbb{R}^n)$ функции $|\rho_x(x)|$.

Пусть

$$\begin{aligned} E = \left\{ t \in [0, T] \mid \text{ для п.в. } \Delta x \in \mathbb{R}^n \quad t - \text{точка Лебега функции} \right. \\ \left. F(t, \Delta x) = \int_{\mathbb{R}^n} |u(t, x + \Delta x) - u(t, x)| \rho(x) dx \right\}. \end{aligned}$$

По лемме 1.2 E – множество полной меры Лебега. Пусть $t_0, t_1 \in E$. Тогда из (1.2) в пределе при $\nu \rightarrow 0$ вытекает, что для п.в. $\Delta x \in \mathbb{R}^n$

$$F(t_1, \Delta x) \leq F(t_0, \Delta x) + C(t_1 - t_0), \quad C = 2N(M) \cdot \|\rho_x\|_1 \quad (1.3)$$

(здесь мы учли, что $0 \leq \chi_\nu(t) \leq 1$ и при $\nu \rightarrow 0$ $\chi_\nu(t)$ сходится п.в. к характеристической функции интервала $[t_0, t_1]$, что позволило применить теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла).

Переходя в (1.3) к пределу при $t_0 \rightarrow 0$, $t_0 \in E \setminus \mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ – множество нулевой меры из определения 1, и используя условие б) этого определения, получим, что для п.в. $t \in [0, T]$, $\Delta x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |u(t, x + \Delta x) - u(t, x)| \rho(x) dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x + \Delta x) - u_0(x)| \rho(x) dx + Ct \\ &\leq \omega^x(|\Delta x|) + Ct. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства остается заметить, что по свойству непрерывности в среднем обе части полученной оценки непрерывны по $\Delta x \in \mathbb{R}^n$, откуда следует ее справедливость для всех $\Delta x \in \mathbb{R}^n$. Лемма доказана.

ЛЕММА 1.4. Пусть $u(t, x)$ – о.р. задачи (1), (2). Тогда при п.в. $t \in [0, T]$ для всех $g(x) \in W_1^1(\mathbb{R}^n)$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} (u(t, x) - u_0(x)) g(x) dx \right| \leq ct \cdot \|g_x(x)\|_1,$$

где c – константа, зависящая (монотонно возрастаая) только от $N(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 < t_0 < t_1 < T$, $0 < \nu < \min(t_0, T - t_1)$, $f(t, x) = \chi_\nu(t)g(x)$, где, как и выше, $\chi_\nu(t) = \alpha_\nu(t - t_0) - \alpha_\nu(t - t_1)$. Тогда $f(t, x) \in \overset{0}{W}_1^1(\Pi_T)$ и по замечанию 1

$$\int_{\Pi_T} \left[u f_t(t, x) + \sum_{i=1}^n \varphi_i(u) f_{x_i}(t, x) \right] dt dx = 0$$

или

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^n} u g(x) dx \right) (\delta_\nu(t - t_0) - \delta_\nu(t - t_1)) dt \\ = - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \varphi_i(u) g_{x_i}(x) \chi_\nu(t) dx dt. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Пусть E_g – множество полной меры точек Лебега функции

$$F_g(t) = \int_{\mathbb{R}^n} u(t, x) g(x) dx, \quad t_0, t_1 \in E_g.$$

Перейдем в (1.4) к пределу при $\nu \rightarrow 0$. Получим

$$F_g(t_1) = F_g(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \varphi_i(u(t, x)) g_{x_i}(x) dx dt. \quad (1.5)$$

Так как $\|u\|_\infty = M$, то для п.в. $(t, x) \in \Pi_T$

$$\left| \sum_{i=1}^n \varphi_i(u(t, x)) g_{x_i}(x) \right| \leq |\varphi(u)| \cdot |g_x(x)| \leq N(M) |g_x(x)|,$$

и из (1.5) вытекает оценка

$$|F_g(t_1) - F_g(t_0)| \leq N(M) \|g_x(x)\|_1 (t_1 - t_0),$$

из которой в пределе при $t_0 \rightarrow 0$, $t_0 \in E_g \setminus \mathcal{E}$, используя условие b) определения 1, получим, что для всех $t \in E_g$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} (u(t, x) - u_0(x)) g(x) dx \right| \leq ct \cdot \|g_x(x)\|_1. \quad (1.6)$$

Осталось показать, что (1.6) выполнено для множества полной меры значений t независимого от $g(x) \in W_1^1(\mathbb{R}^n)$. Для этого, используя сепарабельность $W_1^1(\mathbb{R}^n)$, выберем счетное всюду плотное множество $S \subset W_1^1(\mathbb{R}^n)$. Тогда из счетности S следует, что $E = \bigcap_{g \in S} E_g$ – множество полной меры, и если $t \in E$, то (1.6) выполнено для всех $g \in S$. Из плотности S в $W_1^1(\mathbb{R}^n)$ и непрерывности обеих частей оценки (1.6) по $g \in W_1^1(\mathbb{R}^n)$ следует, что (1.6) выполнено для всех $g(x) \in W_1^1(\mathbb{R}^n)$. Лемма доказана.

Обозначим $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq r\}$ шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса $r > 0$. Пусть при $h > 0$ $\beta^h(x) = h^{-n} \beta\left(\frac{x}{h}\right)$, где $\beta(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ – неотрицательная функция с носителем в единичном шаре B_1 , $\int_{\mathbb{R}^n} \beta(x) dx = 1$. Очевидно,

$$\beta^h(x) \geq 0, \quad \text{supp } \beta^h(x) \subset B_h \quad \text{и} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \beta^h(x) dx = 1.$$

Для $v(x) \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ определим средние функции: $v^h(x) = v * \beta^h(x)$ (*, как обычно, – операция свертки). Известно (см., например, [3]), что $v^h(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и при $h \rightarrow 0$ $v^h(x) \rightarrow v(x)$ в $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ и поточечно на множестве точек Лебега функции $v(x)$. Кроме того, если $v(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, то

$$|v_x^h(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |v(y)| |\beta_x^h(x - y)| dy \leq \|v\|_\infty \|\beta_x^h\|_1 = \text{const } \|v\|_\infty / h.$$

Следующая лемма является “весовым” вариантом леммы 1 из [2].

ЛЕММА 1.5. Пусть $v(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ и

$$\omega(h) = \sup_{\substack{\Delta x \in \mathbb{R}^n \\ |\Delta x| \leq h}} \int_{\mathbb{R}^n} |v(x + \Delta x) - v(x)| \rho(x) dx$$

– модуль непрерывности функции $v(x)$ в $L^1(\mathbb{R}^n, \rho dx)$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| |v(x)| - v(x)(\text{sign}(v))^h(x) \right| \rho(x) dx \leq 2\omega(h).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Раскрыв $(\text{sign}(v))^h(x)$, получим

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \left| |v(x)| - v(x)(\text{sign}(v))^h(x) \right| \rho(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| |v(x)| - v(x) \int_{\mathbb{R}^n} \text{sign}(v)(y) \beta^h(x-y) dy \right| \rho(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (|v(x)| - v(x) \text{sign}(v)(y)) \beta^h(x-y) dy \right| \rho(x) dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| |v(x)| - v(x) \text{sign}(v)(y) \right| \beta^h(x-y) dy \rho(x) dx. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Для оценки подынтегральной функции заметим, что

$$\begin{aligned} & \left| |v(x)| - v(x) \text{sign}(v)(y) \right| \\ &= \left| |v(x)| - |v(y)| - (v(x) - v(y)) \text{sign}(v)(y) \right| \leq 2|v(x) - v(y)|, \end{aligned}$$

и из (1.7) получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \left| |v(x)| - v(x)(\text{sign}(v))^h(x) \right| \rho(x) dx \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |v(x) - v(y)| \beta^h(x-y) dy \rho(x) dx \\ &= 2 \cdot \int_{|y| \leq h} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |v(x) - v(x-y)| \rho(x) dx \right) \beta^h(y) dy \\ &\leq 2\omega(h) \int_{\mathbb{R}^n} \beta^h(y) dy = 2\omega(h). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1.1. Для н.в. $\Delta t \in [0, T]$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(\Delta t, x) - u_0(x)| \rho(x) dx \leq \omega^t(\Delta t),$$

где $\omega^t(\Delta t) = c \cdot \inf_{0 < h < 1} \left(\frac{\Delta t}{h} + \omega^x(h) \right)$, $c = c(N)$ – константа, зависящая, монотонно возрастающая, только от $N = N(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Договоримся обозначать буквой c константы (возможно, разные), которые могут зависеть, монотонно возрастая, только от N . Обозначим: $v(x) = u(\Delta t, x) - u_0(x)$. Пусть $0 < h < 1$, $g(x) = \rho(x) (\text{sign}(v))^h(x) \in W_1^1(\mathbb{R}^n)$.

По лемме 1.4 для п.в. $\Delta t \in [0, T]$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} v(x)g(x) dx \right| \leq c\Delta t \|g_x(x)\|_1 \leq \frac{c\Delta t}{h}. \quad (1.8)$$

Действительно, $|g_x(x)| \leq |\rho_x(x)| + |\rho(x)| \cdot \|(\text{sign}(v))^h_x\|_\infty$ и по свойствам свертки

$$\|(\text{sign}(v))^h_x\|_\infty \leq \|(\text{sign}(v))\|_\infty \|\beta_x^h\|_1 \leq \text{const}/h.$$

Поэтому

$$\|g_x(x)\|_1 \leq \max(\|\rho_x\|_1, \|\rho\|_1) (1 + 1/h) \leq \text{const}/h$$

(напомним, что $h < 1$). С другой стороны,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |v(x)|\rho(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} v(x)g(x) dx + \int_{\mathbb{R}^n} (|v(x)| - v(x)(\text{sign}(v))^h(x)) \rho(x) dx$$

и по лемме 1.5 и оценке (1.8)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |v(x)|\rho(x) dx \leq c \left(\frac{\Delta t}{h} + \omega^x(v)(h) \right), \quad (1.9)$$

где $\omega^x(v)(h)$ – модуль непрерывности функции $v(x)$ в $L^1(\mathbb{R}^n, \rho dx)$. Легко видеть, что

$$\omega^x(v)(h) \leq \omega^x(u_0)(h) + \omega^x(u(\Delta t, \cdot))(h),$$

и поскольку $\omega^x(u_0)(h) = \omega^x(h)$ и по лемме 1.3 для п.в. $\Delta t \in [0, T]$

$$\omega^x(u(\Delta t, \cdot))(h) \leq \omega^x(h) + c\Delta t,$$

то

$$\omega^x(v)(h) \leq 2\omega^x(h) + c\Delta t.$$

Тогда из (1.9) для п.в. $\Delta t \in [0, T]$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |v(x)|\rho(x) dx \leq c \left(\frac{\Delta t}{h} + \omega^x(h) \right),$$

и для завершения доказательства остается заметить, что $0 < h < 1$ произвольно.

Заметим, что $\omega^t(\Delta t) \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$. Мы готовы приступить к доказательству основной теоремы этого параграфа.

ТЕОРЕМА 1.2. *Существует отображение $F : L^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^\infty(\Pi_T)$, сопоставляющее каждой начальной функции $u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ обобщенное решение $u(t, x) = F(u_0)$ задачи Коши (1), (2) так, что выполнены следующие свойства.*

1°. *Если $u_0(x) \leq v_0(x)$ п.в. в $\mathbb{R}^n$, $u = F(u_0)$, $v = F(v_0)$, то $u(t, x) \leq v(t, x)$ п.в. в Π_T (монотонность).*

2°. *Если $u_0(x) - v_0(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $u = F(u_0)$, $v = F(v_0)$, то для п.в. $t \in [0, T]$*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(t, x) - v(t, x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x) - v_0(x)| dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1 этап. $u_0(x) \in L = Q + (L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n))$, где $Q \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$ – подпространство рациональных констант. Пусть $\{\varphi_i^\nu\}_{\nu=1}^\infty$ – последовательности гладких функций, $i = 1, \dots, n$; $\varphi_i^\nu(u) \rightarrow \varphi_i(u)$ при $\nu \rightarrow \infty$ равномерно на любом компакте, $F_\nu(u_0) = u^\nu = u^\nu(t, x)$ – о.р. задачи

$$u_t + \sum_{i=1}^n (\varphi_i^\nu(u))_{x_i} = 0, \quad u(0, x) = u_0(x). \quad (1.10)$$

Так как $\varphi_i^\nu(u) \in C^1(\mathbb{R})$, то (см. [2], [3]) для всех $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ о.р. задачи (1.10) существует и единственно и выполнены свойства 1°, 2°. Итак, определены отображения

$$F_\nu : L^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^\infty(\Pi_T), \quad u_0 \rightarrow F_\nu(u_0).$$

Рассмотрим метрические пространства $X = Q + L^1(\mathbb{R}^n)$, $Y = Q + L^1(\Pi_T)$, где пространство Q дискретно. Метрика в пространствах X , Y может быть задана равенствами:

$$\text{dist}_X(u_0, v_0) = \|u_0 - v_0\|_1 / (1 + \|u_0 - v_0\|_1), \text{ если } u_0 - v_0 \in L^1(\mathbb{R}^n);$$

$$\text{dist}_X(u_0, v_0) = 1 \text{ в противном случае;}$$

и, аналогично,

$$\text{dist}_Y(u, v) = \|u - v\|_1 / (1 + \|u - v\|_1), \text{ если } u - v \in L^1(\Pi_T);$$

$$\text{dist}_Y(u, v) = 1, \text{ если } u - v \notin L^1(\Pi_T).$$

Легко видеть, что X , Y – полные метрические пространства. Если $u_0, v_0 \in L \subset X$, $u_0 - v_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и $u_\nu = F_\nu(u_0)$, $v_\nu = F_\nu(v_0)$, то по свойству 2°

$$\|u_\nu - v_\nu\|_{L^1(\Pi_T)} \leq T \|u_0 - v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

откуда следует, что для всех $u_0, v_0 \in L$, $\nu \in \mathbb{N}$

$$\text{dist}_Y(F_\nu(u_0), F_\nu(v_0)) \leq \text{const} \cdot \text{dist}_X(u_0, v_0),$$

и семейство отображений $F_\nu : L \rightarrow Y$ равномерно непрерывно. Далее, как показано в работе [5], для всех $u_0 \in L$ последовательность $u^\nu(t, x)$ предкомпактна в Y и существует подпоследовательность (за которой мы сохраним прежнее обозначение u^ν) $u^\nu(t, x)$, сходящаяся в Y к функции $u(t, x) = F(u_0)$. Пусть $E \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ – счетное и всюду плотное в $L^1(\mathbb{R}^n)$ множество, $S = Q + E$. Так как множество S счетно, то, используя стандартную диагональную процедуру,

рассматриваемую выше сходящуюся подпоследовательность u^ν можно выбрать общей для всех $u_0 \in S$. Тогда для всех $u_0 \in S$ при $\nu \rightarrow \infty$ $F_\nu(u_0) \rightarrow F(u_0)$ в Y .

Очевидно, множество S плотно в X . Так как семейство отображений F_ν , $\nu \in \mathbb{N}$, равномерно непрерывно, а пространство Y полно, то, рассуждая так же, как при доказательстве теоремы Арцела–Асколи в [16], получим, что отображение F продолжается до непрерывного отображения на L и для всех $u_0 \in L$ при $\nu \rightarrow \infty$ $F_\nu(u_0) \rightarrow F(u_0)$ в Y , а значит, и в $L^1_{\text{loc}}(\Pi_T)$.

Если $u_0 \in L$, $M = \|u_0\|_\infty$ и $u^\nu(t, x) = F_\nu(u_0)$, то по принципу максимума (см. [2], [5] или §2 ниже) для всех $\nu \in \mathbb{N}$ $\|u^\nu(t, x)\|_\infty \leq M$. Следовательно, предельная функция $u(t, x) = F(u_0) \in L^\infty(\Pi_T)$ и $\|u\|_\infty \leq M$.

Покажем, что $u(t, x)$ – о.р. задачи (1), (2). Так как $u^\nu(t, x) = F_\nu(u_0)$ – о.р. задачи Коши (1.10), то для всех вещественных k и для всех $f(t, x) \in C_0^\infty(\Pi_T)$, $f(t, x) \geq 0$,

$$\int_{\Pi_T} \left[|u^\nu - k| f_t + \sum_{i=1}^n (\varphi_i^\nu(u^\nu) - \varphi_i^\nu(k)) \operatorname{sign}(u^\nu - k) f_{x_i} \right] dt dx \geq 0,$$

откуда в пределе при $\nu \rightarrow \infty$ (учитывая также, что $\varphi_i^\nu(u) \rightarrow \varphi_i(u)$ равномерно на $[-M, M]$) получим, что

$$\int_{\Pi_T} \left[|u - k| f_t + \sum_{i=1}^n (\varphi_i(u) - \varphi_i(k)) \operatorname{sign}(u - k) f_{x_i} \right] dt dx \geq 0$$

и $u(t, x)$ удовлетворяет условию а) определения 1.

Далее, по теореме 1.1 для $\Delta t \in E_\nu$, где $E_\nu \subset [0, T]$ – множество полной меры,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u^\nu(\Delta t, x) - u_0(x)| \rho(x) dx \leq \omega^t(\Delta t),$$

где $\omega^t(\Delta t) = c \cdot \inf_{0 < h < 1} \left(\frac{\Delta t}{h} + \omega^x(h) \right)$; константа c не зависит от ν (возможность выбора такой константы следует из ограниченности последовательности $N_\nu = \max_{|u| \leq M} |\varphi^\nu(u)|$, где $\varphi^\nu(u) = (\varphi_1^\nu(u), \dots, \varphi_n^\nu(u))$).

Пусть $E = \bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} E_\nu$. Тогда $E \subset [0, T]$ – множество полной меры и для $\Delta t \in E$ и всех $\nu \in \mathbb{N}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u^\nu(\Delta t, x) - u_0(x)| \rho(x) dx \leq \omega^t(\Delta t). \quad (1.11)$$

Далее, для п.в. $\Delta t \in [0, T]$ $\|u^\nu(t, \cdot)\|_\infty \leq M$ и (возможно, после выделения подпоследовательности) $\lim_{\nu \rightarrow \infty} u^\nu(\Delta t, \cdot) = u(\Delta t, \cdot)$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Поэтому последнее предельное соотношение справедливо также в пространстве $L^1(\mathbb{R}^n, \rho dx)$ и из (1.11) в пределе при $\nu \rightarrow \infty$ получим, что для п.в. $\Delta t \in [0, T]$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(\Delta t, x) - u_0(x)| \rho(x) dx \leq \omega^t(\Delta t)$$

и $u(\Delta t, \cdot) \rightarrow u_0$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ при $\Delta t \rightarrow 0$, где $\Delta t \in [0, T]$ пробегает некоторое множество полной меры.

Итак, $u(t, x)$ удовлетворяет также условию b) определения 1 и, значит, является о.р. задачи Коши (1), (2). Поскольку свойства 1°, 2° выполнены для отображений F_ν , $\nu \in \mathbb{N}$, то в пределе при $\nu \rightarrow \infty$ получим, что отображение F также удовлетворяет этим свойствам с начальными функциями из класса L .

2 этап. Общий случай: $u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Положим при $m, r \in \mathbb{N}$, $r \geq M = \|u_0\|_\infty$

$$u_m^r(x) = \begin{cases} u_0(x), & |x| \leq m, \\ -r, & |x| > m. \end{cases}$$

Тогда $u_m^r(x) \in L$ и при $m, r \in \mathbb{N}$

$$u_{m+1}^r(x) \geq u_m^r(x) \geq u_m^{r+1}(x).$$

Пусть $u_m^r(t, x) = F(u_m^r)$. Тогда по 1° для п.в. $(t, x) \in \Pi_T$

$$u_{m+1}^r(t, x) \geq u_m^r(t, x) \geq u_m^{r+1}(t, x).$$

Из принципа максимума (см. § 2) следует, что при $m, r \in \mathbb{N}$ $-r \leq u_m^r(t, x) \leq M$ п.в. в Π_T , и при любом фиксированном $r \in \mathbb{N}$ для п.в. $(t, x) \in \Pi_T$ $\{u_m^r(t, x)\}_{m=1}^\infty$ — монотонная ограниченная последовательность.

Определим

$$u^r(t, x) = \lim_{m \rightarrow \infty} u_m^r(t, x)$$

(в смысле сходимости почти всюду). Покажем, что $u^r(t, x)$ — о.р. задачи (1), (2).

Выполнение для $u^r(t, x)$ условия а) доказывается так же, как и на первом этапе доказательства. Далее, из теоремы 1.1 следует, что для п.в. $\Delta t \in [0, T]$ и всех $m \in \mathbb{N}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_m^r(\Delta t, x) - u_m^r(x)| \rho(x) dx \leq \omega^t(\Delta t), \quad (1.12)$$

где

$$\omega^t(\Delta t) = c \cdot \inf_{0 < h < 1} \left(\frac{\Delta t}{h} + \omega^x(h) \right),$$

$$\omega^x(h) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \sup_{\substack{\Delta x \in \mathbb{R}^n \\ |\Delta x| \leq h}} \int_{\mathbb{R}^n} |u_m^r(x + \Delta x) - u_m^r(x)| \rho(x) dx$$

— совместный модуль непрерывности семейства функций $u_m^r(x)$, $m \in \mathbb{N}$, в $L^1(\mathbb{R}^n, \rho dx)$. Так как при $m \rightarrow \infty$ $u_m^r(x) \rightarrow u_0(x)$ в $L^1(\mathbb{R}^n, \rho dx)$, то по критерию компактности Хаусдорфа семейство $u_m^r(x)$, $m \in \mathbb{N}$, равномерно непрерывно в $L^1(\mathbb{R}^n, \rho dx)$ и, значит, $\omega^x(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

Отсюда легко следует, что $\omega^t(\Delta t) \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$. Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, из (1.12) получим, что для п.в. $\Delta t \in [0, T]$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u^r(\Delta t, x) - u_0(x)| \rho(x) dx \leq \omega^t(\Delta t)$$

и функция $u^r(t, x)$ удовлетворяет условию b) определения 1.

Итак, $u^r(t, x)$ – о.р. задачи (1), (2). Очевидно, для п.в. $(t, x) \in \Pi_T$ $\{u^r(t, x)\}_{r \in \mathbb{N}}$ – монотонно убывающая, ограниченная (по принципу максимума) последовательность о.р. задачи (1), (2). Пусть

$$F(u_0) = u(t, x) = \lim_{r \rightarrow \infty} u^r(t, x).$$

Так же, как и выше, доказываем, что $u(t, x)$ – о.р. задачи (1), (2).

Докажем свойства 1°, 2°. Пусть $u_0(x) \leq v_0(x)$ п.в. в $\mathbb{R}^n$. Тогда при $r \geq \max(\|u_0\|_\infty, \|v_0\|_\infty)$ $u_m^r(x) \leq v_m^r(x)$ п.в. в $\mathbb{R}^n$ и, значит, по свойству 1°, выполненному для случая, когда начальные функции принадлежат подпространству L ,

$$u_m^r(t, x) \leq v_m^r(t, x) \text{ п.в. в } \Pi_T,$$

где $u_m^r(t, x) = F(u_m^r)$, $v_m^r(t, x) = F(v_m^r)$ и предельный переход при $m \rightarrow \infty$, а затем при $r \rightarrow \infty$, дает

$$u(t, x) = F(u_0) \leq v(t, x) = F(v_0) \text{ п.в. в } \Pi_T.$$

Свойство 1° доказано.

Пусть $u_0(x) - v_0(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Тогда при $r \geq \max(\|u_0\|_\infty, \|v_0\|_\infty)$ $u_m^r(x) - v_m^r(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и по свойству 2°, выполненному для случая, когда начальные функции принадлежат подпространству L , при $u_m^r(t, x) = F(u_m^r)$, $v_m^r(t, x) = F(v_m^r)$ для п.в. $t \in [0, T]$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_m^r(t, x) - v_m^r(t, x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u_m^r(x) - v_m^r(x)| dx.$$

Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, а затем при $r \rightarrow \infty$, получим, что свойство 2° выполнено и в общем случае. Теорема доказана.

§ 2. Мерозначные решения

Пусть Ω – некоторая область в $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$. Мерозначной функцией на Ω называется слабо измеримое отображение $x \rightarrow \nu_x$ множества Ω в пространство $\text{Prob}_0(\mathbb{R})$ вероятностных борелевских мер с компактным носителем на прямой $\mathbb{R}$. Слабая измеримость ν_x означает, что для любой непрерывной функции $p(\lambda)$ функция $x \rightarrow \int p(\lambda) d\nu_x(\lambda)$ измерима на Ω .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Из слабой измеримости мерозначной функции ν_x вытекает измеримость на Ω функций $\int p(\lambda) d\nu_x(\lambda)$ для всех борелевских функций $p(\lambda)$.

Действительно, пусть

$$F = \left\{ p(\lambda) \left| \begin{array}{l} p(\lambda) \text{ – борелевская функция на } \mathbb{R}, \quad |p(\lambda)| \leq 1 \text{ и} \\ \text{функция } x \rightarrow \int p(\lambda) d\nu_x(\lambda) \text{ измерима по Лебегу} \end{array} \right. \right\}.$$

По определению мерозначной функции единичный шар B пространства $C(\mathbb{R})$ содержится в F . Далее, очевидно, F секвенциально замкнуто в топологии поточечной сходимости. Если $p_k(\lambda) \rightarrow p(\lambda)$ и для всех $k \in \mathbb{N}$ $p_k(\lambda) \in F$, то $p(\lambda) \in F$.

По теореме Лебега (см. [15]) F содержит все борелевские функции $p(\lambda)$, по модулю не превосходящие единицы, и, значит, для любой ограниченной борелевской функции $p(\lambda)$ функция $x \rightarrow \int p(\lambda) d\nu_x(\lambda)$ измерима по Лебегу.

Мерозначная функция ν_x называется *ограниченной*, если существует $M > 0$ такое, что для п.в. $x \in \Omega$ $\text{supp } \nu_x \subset [-M, M]$. Множество ограниченных мерозначных функций на Ω будем обозначать $MV(\Omega)$.

Наконец, мерозначные функции ν_x вида $\nu_x(\lambda) = \delta(\lambda - u(x))$, $u(x) \in L^\infty(\Omega)$ (т.е. ν_x – мера Дирака с носителем в точке $u(x)$), будем называть *регулярными* и отождествлять их с соответствующими функциями $u(x)$. Таким образом, имеет место естественное вложение $L^\infty(\Omega) \rightarrow MV(\Omega)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть $\nu_x^k \in MV(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, $\nu_x \in MV(\Omega)$. Будем говорить, что:

- 1) последовательность ν_x^k *ограничена*, если при некотором $M > 0$ для п.в. $x \in \Omega$ и всех $k \in \mathbb{N}$ $\text{supp } \nu_x^k \subset [-M, M]$;
- 2) последовательность ν_x^k *сходится к ν_x слабо*, если для всех $p(\lambda) \in C(\mathbb{R})$ $\int p(\lambda) d\nu_x^k(\lambda) \rightarrow \int p(\lambda) d\nu_x(\lambda)$ при $k \rightarrow \infty$ *-слабо в $L^\infty(\Omega)$;
- 3) последовательность ν_x^k *сходится к ν_x сильно*, если для всех $p(\lambda) \in C(\mathbb{R})$ $\int p(\lambda) d\nu_x^k(\lambda) \rightarrow \int p(\lambda) d\nu_x(\lambda)$ при $k \rightarrow \infty$ п.в. на Ω .

Как показано в следующей теореме, мерозначные функции естественно возникают как слабые пределы ограниченных последовательностей из $L^\infty(\Omega)$.

ТЕОРЕМА 2.1. 1) Пусть $u_k(x) \in L^\infty(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, – ограниченная последовательность.

Тогда существуют подпоследовательность $u_r(x) = u_k(x)$, $k = k_r$, и мерозначная функция $\nu_x \in MV(\Omega)$ такие, что для всех $p(\lambda) \in C(\mathbb{R})$

$$p(u_r(x)) \rightarrow \int p(\lambda) d\nu_x(\lambda) \quad \text{при } r \rightarrow \infty \quad \text{*-слабо в } L^\infty(\Omega),$$

т.е. последовательность регулярных мерозначных функций, отождествляемых с $u_r(x)$, сходится слабо к ν_x в смысле определения 2.1.

При этом

2) мерозначная функция ν_x *регулярна*: $\nu_x(\lambda) = \delta(\lambda - u(x))$ тогда и только тогда, когда при $r \rightarrow \infty$ $u_r(x) \rightarrow u(x)$ в $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ (сильно).

Доказательство теоремы 2.1 можно найти в работе [10] (см. также обзор [17]).

Заметим, что, обратно, любая мерозначная функция на Ω является слабым пределом ограниченной последовательности из $L^\infty(\Omega)$ (см. [10], [17]).

Мы будем рассматривать мерозначные решения задачи Коши для уравнения (1) с ограниченной мерозначной начальной функцией $\nu_x \in MV(\mathbb{R}^n)$:

$$\nu_{0,x} = \nu_x. \tag{2.1}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Ограниченная мерозначная функция $\nu_{t,x}$ на Π_T называется *мерозначным решением* (м.р.) задачи (1), (2.1), если:

а) для всех $k \in \mathbb{R}$

$$\left(\int |\lambda - k| d\nu_{t,x}(\lambda) \right)_t + \sum_{i=1}^n \left(\int (\varphi_i(\lambda) - \varphi_i(k)) \operatorname{sign}(\lambda - k) d\nu_{t,x}(\lambda) \right)_{x_i} \leq 0$$

в смысле распределений;

б) существует множество $\mathcal{E} \subset [0, T]$ нулевой меры Лебега такое, что для всех $p(\lambda) \in C(\mathbb{R})$

$$\int p(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda) \rightarrow \int p(\lambda) d\nu_x(\lambda) \quad \text{в } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \quad \text{при } t \rightarrow 0, \quad t \notin \mathcal{E}.$$

Легко видеть, что в регулярном случае данное определение согласуется с определением 1, т.е. функция $u(t, x) \in L^\infty(\Pi_T)$ является о.р. задачи (1), (2) в смысле определения 1 тогда и только тогда, когда регулярная мерозначная функция $\nu_{t,x}(\lambda) = \delta(\lambda - u(t, x))$ является м.р. задачи (1), (2.1) с регулярной начальной функцией $\nu_x(\lambda) = \delta(\lambda - u_0(x))$.

Заметим также, что из результатов §3 ниже следует существование м.р. задачи (1), (2.1) при любых начальных данных.

Нашей дальнейшей задачей является доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $\nu_{t,x}$ — м.р. задачи Коши (1), (2.1).

1) Если $p \geq 1$ и $\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int |\lambda|^p d\nu_x(\lambda) \right) dx < \infty$, то для п.в. $t \in [0, T]$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int |\lambda|^p d\nu_{t,x}(\lambda) \right) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int |\lambda|^p d\nu_x(\lambda) \right) dx.$$

2) Если при $M \geq 0$ п.в. в $\mathbb{R}^n$ $\operatorname{supp} \nu_x \subset [-M, M]$, то п.в. в Π_T $\operatorname{supp} \nu_{t,x} \subset [-M, M]$ (принцип максимума).

Теорема 2.2 при $p \geq n$ доказана в [7]. Здесь мы приводим модификацию доказательства из [7], охватывающую общий случай $p \geq 1$. Заметим также, что неоднородный вариант утверждения теоремы 2.2 для о.р. установлен недавно в [18], [19].

Для доказательства теоремы 2.2 нам потребуется ряд лемм. Верен следующий мерозначный аналог утверждения, содержащегося в замечании 1.

ЛЕММА 2.1. Если $\nu_{t,x}$ — м.р. задачи Коши (1), (2.1), то

$$\left(\int \lambda d\nu_{t,x}(\lambda) \right)_t + \sum_{i=1}^n \left(\int \varphi_i(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda) \right)_{x_i} = 0$$

в смысле распределений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению 2.2 для всех $k \in \mathbb{R}$ при любой пробной функции $f = f(t, x) \in C_0^\infty(\Pi_T)$, $f(t, x) \geq 0$,

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi_T} \left[\left(\int |\lambda - k| d\nu_{t,x}(\lambda) \right) f_t \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i=1}^n \left(\int (\varphi_i(\lambda) - \varphi_i(k)) \operatorname{sign}(\lambda - k) d\nu_{t,x}(\lambda) \right) f_{x_i} \right] dt dx \geq 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Так как мерозначная функция $\nu_{t,x}$ ограничена, то при некотором $R > 0$ п.в. в Π_T $\operatorname{supp} \nu_{t,x} \subset [-R, R]$. Возьмем в (2.2) $k = R$. Учитывая, что при $|\lambda| \leq R$

$$|\lambda - R| = R - \lambda, \quad (\varphi_i(\lambda) - \varphi_i(R)) \operatorname{sign}(\lambda - R) = \varphi_i(R) - \varphi_i(\lambda),$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi_T} \left[\left(\int R d\nu_{t,x}(\lambda) \right) f_t + \sum_{i=1}^n \left(\int \varphi_i(R) d\nu_{t,x}(\lambda) \right) f_{x_i} \right] dt dx \\ & = \int_{\Pi_T} \left[R f_t(t, x) + \sum_{i=1}^n \varphi_i(R) f_{x_i}(t, x) \right] dt dx = 0, \end{aligned}$$

из (2.2) получим

$$\int_{\Pi_T} \left[\left(\int \lambda d\nu_{t,x}(\lambda) \right) f_t + \sum_{i=1}^n \left(\int \varphi_i(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda) \right) f_{x_i} \right] dt dx \leq 0. \quad (2.3)$$

При $k = -R$, $|\lambda| \leq R$ $|\lambda - k| = \lambda + R$, $\operatorname{sign}(\lambda - k) = 1$, и из (2.2) следует

$$\int_{\Pi_T} \left[\left(\int \lambda d\nu_{t,x}(\lambda) \right) f_t + \sum_{i=1}^n \left(\int \varphi_i(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda) \right) f_{x_i} \right] dt dx \geq 0. \quad (2.4)$$

Из (2.3), (2.4) следует, что для всех $f(t, x) \in C_0^\infty(\Pi_T)$, $f(t, x) \geq 0$,

$$\int_{\Pi_T} \left[\left(\int \lambda d\nu_{t,x}(\lambda) \right) f_t + \sum_{i=1}^n \left(\int \varphi_i(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda) \right) f_{x_i} \right] dt dx = 0. \quad (2.5)$$

Остается заметить, что произвольная функция $f(t, x) \in C_0^\infty(\Pi_T)$ есть разность неотрицательных функций из $C_0^\infty(\Pi_T)$ и (2.5) верно для всех $f(t, x) \in C_0^\infty(\Pi_T)$. Лемма доказана.

Пусть $BV^1(\mathbb{R})$ – пространство функций на $\mathbb{R}$, обладающих обобщенной 1-й производной, являющейся функцией ограниченной вариации. Другими словами, $BV^1(\mathbb{R})$ – пространство функций на $\mathbb{R}$, обобщенная вторая производная которых является мерой (не обязательно неотрицательной).

Ясно, что $BV^1(\mathbb{R})$ содержит все выпуклые функции. Например, $f(x) = |x| \in BV^1(\mathbb{R})$ и $f''(x) = \delta(x)$ – мера Дирака, сосредоточенная в нуле. Если $f(x) \in BV^1(\mathbb{R})$, то, как легко понять, $f(x)$ дифференцируема всюду, за исключением не более чем счетного множества точек, и дважды дифференцируема почти всюду.

Пусть $\varphi(x) \in C(\mathbb{R})$, $\mathcal{L}$ – пространство постоянных функций. Определим линейное отображение $T_\varphi : BV^1(\mathbb{R})/\mathcal{L} \rightarrow C(\mathbb{R})/\mathcal{L}$, положив

$$T_\varphi(g)(x) = g'(x)\varphi(x) - \int_0^x \varphi(o) dg'(o).$$

Если в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ $g'(x)$ непрерывна, то представитель

$$T_\varphi(g)(x) = \int_{x_0}^x (\varphi(x) - \varphi(o)) dg'(o) + \varphi(x)g'(x_0)$$

является непрерывной функцией и отображение T_φ определено корректно: $T_\varphi(g)(x) \in C(\mathbb{R})/\mathcal{L}$.

Если $\varphi(x)$ – абсолютно непрерывная на каждом ограниченном интервале функция, то $T_\varphi(g)(x)$ также абсолютно непрерывная на любом ограниченном интервале функция и отображение T_φ однозначно определено равенством

$$T_\varphi(g)'(x) = \varphi'(x)g'(x).$$

ЛЕММА 2.2. Пусть $g(x) \in BV^1(\mathbb{R})$ и мера $g''(x) = dg'(x)$ имеет компактный носитель. Тогда при некотором вещественном A :

- 1) $g(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |x - k| dg'(k) + Ax \quad \text{в } C(\mathbb{R})/\mathcal{L};$
- 2) $T_\varphi(g)(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (\varphi(x) - \varphi(k)) \operatorname{sign}(x - k) dg'(k) + A\varphi(x) \quad \text{в } C(\mathbb{R})/\mathcal{L}.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a > 0$ таково, что $\operatorname{supp} g''(x) \subset [-a/2, a/2]$,

$$\psi(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |x - k| dg'(k).$$

Если $h(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, то

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} h''(x)\psi(x) dx &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |x - k| h''(x) dx \right) dg'(k) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |x - k|_{xx} h(x) dx \right) dg'(k) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} 2h(k) dg'(k) = \int_{\mathbb{R}} h(k) dg'(k). \end{aligned}$$

Отсюда $\psi''(x) = g''(x) = dg'(x)$ в смысле распределений и

$$g(x) = \psi(x) + Ax + \operatorname{const}.$$

Чтобы найти A , вычислим $\psi'(a)$. При $x \in (a/2, +\infty)$

$$\psi(x) = \frac{1}{2} \int_{-a}^a (x - k) dg'(k) \quad \text{и} \quad \psi'(x) = \frac{1}{2} \int_{-a}^a dg'(k) = \frac{g'(a) - g'(-a)}{2}$$

(так как $\text{supp } g''(x) \subset [-a/2, a/2]$, то вне интервала $[-a/2, a/2]$ функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема).

Итак,

$$A = g'(a) - \psi'(a) = \frac{g'(a) + g'(-a)}{2}.$$

Утверждение 1) доказано.

Далее, для значений $x \in \mathbb{R}$, при которых $g'(x)$ непрерывна,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{-a}^a (\varphi(x) - \varphi(k)) \text{sign}(x - k) dg'(k) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-a}^x (\varphi(x) - \varphi(k)) dg'(k) - \int_x^a (\varphi(x) - \varphi(k)) dg'(k) \right) \\ &= \frac{1}{2} \varphi(x) \left(\int_{-a}^x dg'(k) - \int_x^a dg'(k) \right) + \frac{1}{2} \left(\int_x^a \varphi(k) dg'(k) - \int_{-a}^x \varphi(k) dg'(k) \right) \\ &= \varphi(x) \left(g'(x) - \frac{g'(a) + g'(-a)}{2} \right) - \int_{-a}^x \varphi(k) dg'(k) + \frac{1}{2} \int_{-a}^a \varphi(k) dg'(k) \\ &= \varphi(x)g'(x) - \int_0^x \varphi(k) dg'(k) - A\varphi(x) + \text{const} \\ &= T_\varphi(g)(x) - A\varphi(x) + \text{const}. \end{aligned}$$

По непрерывности функций $\varphi(x)$, $T_\varphi(g)(x)$ последнее равенство выполнено для всех $x \in \mathbb{R}$. Итак,

$$T_\varphi(g)(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (\varphi(x) - \varphi(k)) \text{sign}(x - k) dg'(k) + A\varphi(x) + \text{const}$$

для всех $x \in \mathbb{R}$, и 2) доказано.

ЛЕММА 2.3. Пусть $\nu_{t,x}$ – м.р. задачи (1), (2.1). Тогда для любой выпуклой функции $g(\lambda)$

$$\left(\int g(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda) \right)_t + \sum_{i=1}^n \left(\int T_i(g)(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda) \right)_{x_i} \leq 0 \quad (2.6)$$

в смысле распределений. (Здесь $T_i(g) = T_{\varphi_i}(g)$.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По ограниченности $\nu_{t,x}$ при некотором $R > 0$ для п.в. $(t, x) \in \Pi_T$ $\text{supp } \nu_{t,x} \subset [-R, R]$ и левая часть (2.6) имеет смысл при любой функции $g(\lambda) \in C(\mathbb{R})$. Кроме того, левая часть (2.6) зависит лишь от поведения $g(\lambda)$ на интервале $[-R, R]$ и можно считать, что $g''(\lambda)$ – мера с компактным носителем.

Если мерозначная функция $\nu_{t,x}$ удовлетворяет части а) определения 2.2, то для всех $k \in \mathbb{R}$ при любой пробной функции $f = f(t, x) \in C_0^\infty(\Pi_T)$, $f(t, x) \geq 0$, выполнено (2.2).

Проинтегрируем (2.2) по положительной мере $dg'(k)/2$. Используя лемму 2.2, получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi_T} \left[\left(\int g(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda) \right) f_t + \sum_{i=1}^n \left(\int T_i(g)(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda) \right) f_{x_i} \right] dt dx \\ & - A \int_{\Pi_T} \left[\left(\int \lambda d\nu_{t,x}(\lambda) \right) f_t + \sum_{i=1}^n \left(\int \varphi_i(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda) \right) f_{x_i} \right] dt dx \geq 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

По лемме 2.1

$$\int_{\Pi_T} \left[\left(\int \lambda d\nu_{t,x}(\lambda) \right) f_t + \sum_{i=1}^n \left(\int \varphi_i(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda) \right) f_{x_i} \right] dt dx = 0$$

и из (2.7) для всех $f = f(t, x) \in C_0^\infty(\Pi_T)$, $f(t, x) \geq 0$,

$$\int_{\Pi_T} \left[\left(\int g(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda) \right) f_t + \sum_{i=1}^n \left(\int T_i(g)(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda) \right) f_{x_i} \right] dt dx \geq 0,$$

что эквивалентно (2.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. Пусть $L > 0$ таково, что п.в. в Π_T $\text{supp } \nu_{t,x} \subset [-L, L]$, $p \geq 1$, $q \geq \max(p, n+1)$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и положим

$$g_\varepsilon(\lambda) = \begin{cases} a|\lambda|^q, & |\lambda| \leq \varepsilon, \\ |\lambda|^p - b, & |\lambda| > \varepsilon, \end{cases}$$

где константы a , b определяются из условия $g_\varepsilon(\lambda) \in C^1(\mathbb{R})$: $a = (p/q) \cdot \varepsilon^{p-q}$, $b = ((q-p)/q) \cdot \varepsilon^p$. Ясно, что $g_\varepsilon(\lambda)$ – выпуклая функция и для всех $\varepsilon > 0$ $g_\varepsilon(\lambda) \leq |\lambda|^p$. Из леммы 2.3 следует, что для всех $\alpha \in (0, 1)$

$$\left(\int (g_\varepsilon(\lambda) + \alpha) d\nu_{t,x}(\lambda) \right)_t + \sum_{i=1}^n \left(\int T_i(g_\varepsilon)(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda) \right)_{x_i} \leq 0 \quad (2.8)$$

в смысле распределений.

Так как функции $T_i(g_\varepsilon)(\lambda)$ определены с точностью до аддитивной константы, мы можем считать, что $T_i(g_\varepsilon)(0) = 0$. Тогда

$$T_i(g_\varepsilon)(\lambda) = \int_0^\lambda (\varphi_i(\lambda) - \varphi_i(o)) g_\varepsilon''(o) do.$$

Пусть при $i = 1, \dots, n$

$$N_i(\alpha, \varepsilon) = \sup_{|\lambda| \leq L} \frac{|T_i(g_\varepsilon)(\lambda)|}{g_\varepsilon(\lambda) + \alpha}, \quad N(\alpha, \varepsilon) = \left(\sum_{i=1}^n N_i^2(\alpha, \varepsilon) \right)^{1/2}.$$

Тогда если $N = \max \left\{ \|\varphi_i\|_{L^\infty([-L, L])} \mid i = 1, \dots, n \right\}$, то при $|\lambda| \leq L$

$$|T_i(g_\varepsilon)(\lambda)| \leq \left| \int_0^\lambda (\varphi_i(\lambda) - \varphi_i(o)) g_\varepsilon''(o) do \right| \leq 2N \int_0^{|\lambda|} g_\varepsilon''(o) do \leq 2N g_\varepsilon'(|\lambda|)$$

и при $|\lambda| \leq \varepsilon$

$$\frac{|T_i(g_\varepsilon)(\lambda)|}{g_\varepsilon(\lambda) + \alpha} \leq \frac{2Naq|\lambda|^{q-1}}{a|\lambda|^q + \alpha} = \frac{2Nq}{|\lambda| + (\alpha/a)|\lambda|^{1-q}} \leq Cq\alpha^{-1/q}, \quad (2.9)$$

$$C = 2Na^{1/q} \leq 2N(\varepsilon^{p-q})^{1/q}.$$

Последняя оценка в (2.9) следует из того, что при $x > 0$ $f(x) = x + \beta x^{1-q} \geq \beta^{1/q}$ ($\beta = \alpha/a$). Действительно, при $x \leq \beta^{1/q}$ $f(x) \geq \beta x^{1-q} \geq \beta(\beta^{1/q})^{1-q} = \beta^{1/q}$, а при $x > \beta^{1/q}$ $f(x) \geq x \geq \beta^{1/q}$.

Если $|\lambda| > \varepsilon$, то

$$\begin{aligned} \frac{|T_i(g_\varepsilon)(\lambda)|}{g_\varepsilon(\lambda) + \alpha} &\leq \frac{2Np|\lambda|^{p-1}}{|\lambda|^p - b + \alpha} \leq \frac{2Np|\lambda|^{p-1}}{|\lambda|^p - b} = \frac{2Np}{|\lambda| - b|\lambda|^{1-p}} \\ &\leq \frac{2Np}{\varepsilon - b\varepsilon^{1-p}} = \frac{2Np}{\varepsilon - (1-p/q)\varepsilon} = \frac{2Nq}{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из (2.9), (2.10) следует, что для всех $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0, 1)$

$$\frac{|T_i(g_\varepsilon)(\lambda)|}{g_\varepsilon(\lambda) + \alpha} \leq Cq\alpha^{-1/q}, \quad C = C(\varepsilon),$$

и, следовательно,

$$N(\alpha, \varepsilon) \leq cq\alpha^{-1/q}, \quad c = c(\varepsilon). \quad (2.11)$$

Пусть $h(u) = \exp(-u)$, $0 < t_0 < t_1 < T$, $0 < \nu < \min(t_0, T - t_1)$, $\chi_\nu(t) = \alpha_\nu(t - t_0) - \alpha_\nu(t - t_1)$, $\alpha > 0$, $\beta = \beta(\alpha) > 0$; функция $\beta(\alpha)$ будет определена позже. Пусть

$$H(t, x, \alpha) = h(\beta(N(\alpha, \varepsilon)t + |x|)), \quad f(t, x) = \chi_\nu(t)H(t, x, \alpha).$$

Очевидно, $f(t, x) \in \mathring{W}_1^1(\Pi_T)$, $f(t, x) \geq 0$, и из (2.8) при

$$\begin{aligned} P(t, x) &= \int (g_\varepsilon(\lambda) + \alpha) d\nu_{t,x}(\lambda) = \int g_\varepsilon(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda) + \alpha, \\ Q_i(t, x) &= \int T_i(g_\varepsilon)(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda) \end{aligned}$$

следует, что

$$\int_{\Pi_T} \left[P(t, x) f_t(t, x) + \sum_{i=1}^n Q_i(t, x) f_{x_i}(t, x) \right] dt dx \geq 0$$

и

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi_T} P(t, x) (\delta_\nu(t - t_0) - \delta_\nu(t - t_1)) H(t, x, \alpha) dt dx + \beta \int_{\Pi_T} \left[P(t, x) N(\alpha, \varepsilon) \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^n Q_i(t, x) \frac{x_i}{|x|} \right] h'(\beta(N(\alpha, \varepsilon)t + |x|)) \chi_\nu(t) dt dx \geq 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n Q_i(t, x) \frac{x_i}{|x|} \right| & \leq \int \left| \sum_{i=1}^n T_i(g_\varepsilon)(\lambda) \frac{x_i}{|x|} \right| d\nu_{t,x}(\lambda) \leq \int \left(\sum_{i=1}^n T_i^2(g_\varepsilon)(\lambda) \right)^{1/2} d\nu_{t,x}(\lambda) \\ & \leq \int (g_\varepsilon(\lambda) + \alpha) \left(\sum_{i=1}^n N_i^2(\alpha, \varepsilon) \right)^{1/2} d\nu_{t,x}(\lambda) = N(\alpha, \varepsilon) P(t, x), \end{aligned}$$

и так как при $u \in \mathbb{R}$ $h'(u) \leq 0$, то второй интеграл в (2.12) неположителен. Поэтому из (2.12) получаем

$$\int_{\Pi_T} P(t, x) (\delta_\nu(t - t_0) - \delta_\nu(t - t_1)) H(t, x, \alpha) dt dx \geq 0. \quad (2.13)$$

Пусть

$$E = \left\{ t \in [0, T] \mid \begin{array}{l} \text{для всех } \alpha, \varepsilon \in Q \cap (0, 1) \text{ } t - \text{точка Лебега} \\ \text{функции } \int_{\mathbb{R}^n} P(t, x) H(t, x, \alpha) dx \end{array} \right\}.$$

Так как множество рациональных чисел Q счетно, то E имеет полную меру Лебега на $[0, T]$, и если $t_0, t_1 \in E$, то из (2.13) в пределе при $\nu \rightarrow 0$ получим, что для всех $\alpha, \varepsilon \in Q \cap (0, 1)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} P(t_1, x) H(t_1, x, \alpha) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} P(t_0, x) H(t_0, x, \alpha) dx. \quad (2.14)$$

Переходя в (2.14) к пределу при $t_0 \rightarrow 0$, $t_0 \in E \setminus \mathcal{E}$ ($\mathcal{E}$ – множество нулевой меры из определения 2.2), и учитывая, что при $t \rightarrow 0$, $t \notin \mathcal{E}$, $\int g_\varepsilon(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda) \rightarrow \int g_\varepsilon(\lambda) d\nu_x(\lambda)$ в $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$, получим, что при $t \in E$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int g_\varepsilon(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda) + \alpha \right) H(t, x, \alpha) dx \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int g_\varepsilon(\lambda) d\nu_x(\lambda) + \alpha \right) H(0, x, \alpha) dx, \end{aligned}$$

или, усилив последнее неравенство,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int g_\varepsilon(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda) \right) h(\beta(N(\alpha, \varepsilon)t + |x|)) dx \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int |\lambda|^p d\nu_x(\lambda) \right) h(\beta|x|) dx + \alpha \int_{\mathbb{R}^n} h(\beta|x|) dx. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Выберем $\beta(\alpha) = \alpha^r$, где $1/q < r < 1/n$ (напомним, что $q > n$). Тогда при $\alpha \rightarrow 0$ $\beta(\alpha) \rightarrow 0$ и из (2.11) $\beta(\alpha)N(\alpha, \varepsilon) \rightarrow 0$. Значит, при $\alpha \rightarrow 0$ $h(\beta(N(\alpha, \varepsilon)t + |x|)) \rightarrow h(0) = 1$. Далее,

$$\alpha \int_{\mathbb{R}^n} h(\beta|x|) dx = \alpha \beta^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} h(|x|) dx = \text{const} \cdot \alpha \beta^{-n} = \text{const} \alpha^{1-nr},$$

и так как $1 - nr > 0$, то $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha \int_{\mathbb{R}^n} h(\beta|x|) dx = 0$.

Учитывая выведенные выше предельные соотношения, из (2.15) в пределе при $\alpha \rightarrow 0$, $\alpha \in Q \cap (0, 1)$, получим (по лемме Фату), что для всех $t \in E$, $\varepsilon \in Q \cap (0, 1)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int g_\varepsilon(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda) \right) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int |\lambda|^p d\nu_x(\lambda) \right) dx.$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ семейство функций $g_\varepsilon(\lambda)$, монотонно возрастаая, сходится к функции $|\lambda|^p$, и по теореме Леви из последней оценки в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ следует, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int |\lambda|^p d\nu_{t,x}(\lambda) \right) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int |\lambda|^p d\nu_x(\lambda) \right) dx.$$

Теорема в случае $p < +\infty$ доказана.

Пусть теперь $\text{supp } \nu_x \subset [-M, M]$ п.в. в $\mathbb{R}^n$. Выберем $q = p \geq n + 1$. Тогда $g_\varepsilon(\lambda) = |\lambda|^p$, и из (2.15) при $t \in E_p$, где $E_p \subset [0, T]$ – множество полной меры, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int |\lambda|^p d\nu_{t,x}(\lambda) \right) h(\beta(N(\alpha)t + |x|)) dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int |\lambda|^p d\nu_x(\lambda) \right) h(\beta|x|) dx \\ &+ \alpha \int_{\mathbb{R}^n} h(\beta|x|) dx \leq (M^p + \alpha) \int_{\mathbb{R}^n} h(\beta|x|) dx. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Мы учли, что $\text{supp } \nu_x \subset [-M, M]$ п.в. в $\mathbb{R}^n$ и, следовательно, для п.в. $x \in \mathbb{R}^n$ $\int |\lambda|^p d\nu_x(\lambda) \leq M^p$.

По (2.11) (можно считать, что $\varepsilon = 1$)

$$N(\alpha) \leq c \cdot p \alpha^{-1/p}, \quad c = \text{const}. \quad (2.17)$$

Пусть $\gamma \in Q \cap (0, 1)$, $\gamma < M$; $\alpha = \gamma^p$, $\beta(\alpha) = \alpha^{1/p}/p = \gamma/p$. Если $E = \bigcap_{p=n+1}^\infty E_p$, то $E \subset [0, T]$ – множество полной меры и (2.16) выполнено для всех $t \in E$ и для всех натуральных p .

По (2.17) $\beta(\alpha)N(\alpha) \leq c$, и так как $\beta < 1$, то

$$h(\beta(N(\alpha)t + |x|)) \geq \exp(-ct)h(\beta|x|) \geq \exp(-ct)h(|x|).$$

Тогда из (2.16) при $t \in E$ имеем

$$\exp(-ct) \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int |\lambda|^p d\nu_{t,x}(\lambda) \right) h(|x|) dx \leq \text{const}(M^p + \gamma^p)\beta^{-n}$$

(так как $\int_{\mathbb{R}^n} h(\beta|x|) dx = \text{const } \beta^{-n}$). Отсюда, учитывая также, что $\gamma < M$, получим, что при $t \in E$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int |\lambda|^p d\nu_{t,x}(\lambda) \right) h(|x|) dx \leq \text{const} \cdot \exp(cT) M^p \beta^{-n} = c \cdot M^p \beta^{-n},$$

c – константа, не зависящая от p . Интегрируя эту оценку по $t \in [0, T]$, получим

$$\begin{aligned} \int_{\Pi_T} \left(\int |\lambda|^p d\nu_{t,x}(\lambda) \right) h(|x|) dx dt &\leq cT M^p p^n \gamma^{-n}, \\ \overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \left(\int_{\Pi_T} \left(\int |\lambda|^p d\nu_{t,x}(\lambda) \right) h(|x|) dx dt \right)^{1/p} &\leq M. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Из (2.18) следует, что для п.в. $(t, x) \in \Pi_T$ $\text{supp } \nu_{t,x} \subset [-M, M]$. Действительно, пусть при некотором $\delta > 0$ множество

$$A = \left\{ (t, x) \in \Pi_T \mid \int_{|\lambda| > M+\delta} d\nu_{t,x}(\lambda) > 0 \right\}$$

имеет положительную меру. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Pi_T} \left(\int |\lambda|^p d\nu_{t,x}(\lambda) \right) h(|x|) dt dx &\geq \int_A \left(\int_{|\lambda| > M+\delta} |\lambda|^p d\nu_{t,x}(\lambda) \right) h(|x|) dt dx \\ &\geq (M+\delta)^p \int_A \varphi(t, x) dt dx, \end{aligned}$$

где

$$\varphi(t, x) = \left(\int_{|\lambda| > M+\delta} d\nu_{t,x}(\lambda) \right) h(|x|) > 0 \quad \text{при } (t, x) \in A.$$

Итак,

$$\overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \left(\int_{\Pi_T} \left(\int |\lambda|^p d\nu_{t,x}(\lambda) \right) h(|x|) dt dx \right)^{1/p} \geq M + \delta,$$

что противоречит (2.18). Теорема полностью доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Если для н.в. $x \in \mathbb{R}^n$ $\text{supp } \nu_x \subset [a, b]$, где $a \leq b$, то $\text{supp } \nu_{t,x} \subset [a, b]$ н.в. в Π_T . В частности, если $\nu_x(\lambda) = \delta(\lambda - c)$, $c = \text{const}$, то $\nu_{t,x}(\lambda) = \delta(\lambda - c)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{\nu}_x = p^* \nu_x$, где $p(\lambda) = \lambda - (a + b)/2$. Тогда мерозначная функция $\tilde{\nu}_{t,x} = p^* \nu_{t,x}$ является м.р. задачи Коши

$$u_t + \sum_{i=1}^n (\varphi_i(u + (a + b)/2))_{x_i} = 0, \quad \tilde{\nu}_{0,x} = \tilde{\nu}_x,$$

и так как для п.в. $x \in \mathbb{R}^n$ $\text{supp } \tilde{\nu}_x \subset [-(b - a)/2, (b - a)/2]$, то по теореме 2.2 для п.в. $(t, x) \in \Pi_T$ $\text{supp } \tilde{\nu}_{t,x} \subset [-(b - a)/2, (b - a)/2]$, откуда следует, что п.в. в Π_T $\text{supp } \nu_{t,x} \subset [a, b]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В регулярном случае из теоремы 2.2 вытекает следующий результат: если $1 \leq p \leq \infty$, $u_0(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ и $u(t, x)$ – о.р. задачи (1), (2), то для п.в. $t \in [0, T]$ $u(t, \cdot) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ и $\|u(t, \cdot)\|_p \leq \|u_0\|_p$.

Мы докажем далее, что при условии с) любое м.р. задачи Коши с регулярными начальными данными также регулярно. Для этого нам потребуются две леммы.

ЛЕММА 2.4. Пусть $\Phi(o)$ – определенная и выпуклая кверху на $[0, +\infty)$ функция, $\Phi(o) \geq 0$. Тогда для всех $\varepsilon > 0$ $\sup_{o>0} \frac{\Phi(o)}{o+\varepsilon} \leq \frac{\Phi(\varepsilon)}{\varepsilon}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим прежде всего, что $\Phi(o)$ – неубывающая функция; это легко следует из неотрицательности и выпуклости кверху $\Phi(o)$. Поэтому при $o \leq \varepsilon$

$$\frac{\Phi(o)}{o+\varepsilon} \leq \frac{\Phi(o)}{\varepsilon} \leq \frac{\Phi(\varepsilon)}{\varepsilon},$$

если же $o > \varepsilon$, то

$$\frac{\Phi(o)}{o+\varepsilon} \leq \frac{\Phi(o)}{o} \leq \frac{\Phi(\varepsilon)}{\varepsilon},$$

так как в силу выпуклости кверху и неотрицательности $\Phi(o)$ функция $\frac{\Phi(o)}{o}$ не возрастает. Итак,

$$\sup_{o>0} \frac{\Phi(o)}{o+\varepsilon} \leq \frac{\Phi(\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

ЛЕММА 2.5. Пусть $\omega(o)$ – определенная при $o \in (0, \infty)$ ограниченная и неубывающая функция, $\lim_{o \rightarrow 0+} \omega(o) = 0$, $\Phi(o)$ – наименьшая выпуклая кверху мажоранта $\omega(o)$ (т.е. $\Phi(o) = \inf\{h(o) \mid \text{функция } h \geq \omega \text{ выпукла кверху на } (0, \infty)\}$). Тогда $\lim_{o \rightarrow 0+} \Phi(o) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда из условия $\lim_{o \rightarrow 0+} \omega(o) = 0$ следует, что найдется $o_0 > 0$ такое, что $\omega(o_0) < \varepsilon$. Пусть $l(o) = \varepsilon + co$, где $c = \|\omega\|_\infty / o_0$. Тогда $\omega(o) < l(o)$ для всех $o \in (0, \infty)$. Действительно, если $o \in (0, o_0)$, то $\omega(o) \leq \varepsilon < l(o)$, а при $o > o_0$ $l(o) > co_0 = \|\omega\|_\infty \geq \omega(o)$. Так как $\Phi(o)$ является наименьшей выпуклой кверху мажорантой $\omega(o)$, а функция $l(o)$ линейна, то $\Phi(o) \leq l(o)$. В частности,

$$\overline{\lim}_{o \rightarrow 0+} \Phi(o) \leq \lim_{o \rightarrow 0+} l(o) = \varepsilon.$$

Из произвольности $\varepsilon > 0$ следует, что $\lim_{o \rightarrow 0+} \Phi(o) = 0$. Лемма доказана.

Пусть $u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $M = \|u_0\|_\infty$.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть при $i = 1, \dots, n$, $u, v \in [-M, M]$

$$|\varphi_i(u) - \varphi_i(v)| \leq \Phi_i(|u - v|),$$

где функции $\Phi_i(o)$ определены и выпуклы кверху на $[0, +\infty)$, причем при $o \rightarrow 0$

$$\prod_{i=1}^n \Phi_i(o) = O(o^{n-1}).$$

(В частности, эти условия всегда выполнены при $n = 1$.)

Тогда м.р. $\nu_{t,x}$ задачи Коши (1), (2.1) с регулярной начальной функцией $u_0(x)$ регулярно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы можем считать, что функции $\Phi_i(o)$ являются наименьшими из множества выпуклых кверху на $[0, +\infty)$ функций, удовлетворяющих условию: при $u, v \in [-M, M]$

$$|\varphi_i(u) - \varphi_i(v)| \leq \Phi_i(|u - v|).$$

Пусть при $i = 1, \dots, n$

$$\omega_i(o) = \sup \{ |\varphi_i(u) - \varphi_i(v)| \mid u, v \in [-M, M], \quad |u - v| \leq o \}$$

— модули непрерывности функций $\varphi_i(u)$ на отрезке $[-M, M]$. Тогда функция $\Phi_i(o)$ является наименьшей выпуклой кверху мажорантой для $\omega_i(o)$, и по лемме 2.5

$$\lim_{o \rightarrow 0+} \Phi_i(o) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Пусть $\nu_{t,x}$ — м.р. задачи (1), (2.1) с регулярной начальной функцией $u_0(x)$ ($\nu_x(\lambda) = \delta(\lambda - u_0(x))$). По принципу максимума п.в. в Π_T $\text{supp } \nu_{t,x} \subset [-M, M]$. Пусть $g = g(t, x, \tau, \xi) \in C_0^\infty(\Pi_T \times \Pi_T)$, $g(t, x, \tau, \xi) \geq 0$. По определению 2.2 для всех $\mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi_T} \left[\left(\int |\lambda - \mu| d\nu_{t,x}(\lambda) \right) g_t \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i=1}^n \left(\int (\varphi_i(\lambda) - \varphi_i(\mu)) \text{sign}(\lambda - \mu) d\nu_{t,x}(\lambda) \right) g_{x_i} \right] dt dx \geq 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Интегрируя (2.19) сначала по мере $\nu_{\tau,\xi}(\mu)$, а затем по переменным $(\tau, \xi) \in \Pi_T$, получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi_T \times \Pi_T} \left[\left(\iint |\lambda - \mu| d\nu_{t,x}(\lambda) d\nu_{\tau,\xi}(\mu) \right) g_t(t, x, \tau, \xi) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i=1}^n \left(\iint (\varphi_i(\lambda) - \varphi_i(\mu)) \text{sign}(\lambda - \mu) d\nu_{t,x}(\lambda) d\nu_{\tau,\xi}(\mu) \right) \right. \\ & \quad \left. \times g_{x_i}(t, x, \tau, \xi) \right] dt dx d\tau d\xi \geq 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Аналогично, меняя местами переменные λ и μ , t и τ , x_i и ξ_i , получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi_T \times \Pi_T} \left[\left(\iint |\lambda - \mu| d\nu_{t,x}(\lambda) d\nu_{\tau,\xi}(\mu) \right) g_\tau(t, x, \tau, \xi) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i=1}^n \left(\iint (\varphi_i(\lambda) - \varphi_i(\mu)) \text{sign}(\lambda - \mu) d\nu_{t,x}(\lambda) d\nu_{\tau,\xi}(\mu) \right) \right. \\ & \quad \left. \times g_{\xi_i}(t, x, \tau, \xi) \right] dt dx d\tau d\xi \geq 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Складывая (2.20) и (2.21), придем к соотношению

$$\int_{\Pi_T \times \Pi_T} \left[A(t, x, \tau, \xi)(g_t + g_\tau)(t, x, \tau, \xi) + \sum_{i=1}^n B_i(t, x, \tau, \xi)(g_{x_i} + g_{\xi_i})(t, x, \tau, \xi) \right] dt dx d\tau d\xi \geq 0, \quad (2.22)$$

где

$$A(t, x, \tau, \xi) = \iint |\lambda - \mu| d\nu_{t,x}(\lambda) d\nu_{\tau,\xi}(\mu),$$

$$B_i(t, x, \tau, \xi) = \iint (\varphi_i(\lambda) - \varphi_i(\mu)) \operatorname{sign}(\lambda - \mu) d\nu_{t,x}(\lambda) d\nu_{\tau,\xi}(\mu).$$

Пусть $f(t, x) \in C_0^\infty(\Pi_T)$, $f(t, x) \geq 0$, $\varepsilon > 0$. Положим

$$g(t, x, \tau, \xi) = \delta_\varepsilon \left(\frac{t - \tau}{2} \right) \prod_{i=1}^n \delta_\varepsilon \left(\frac{x_i - \xi_i}{2} \right) f \left(\frac{t + \tau}{2}, \frac{x + \xi}{2} \right).$$

Из (2.22) имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi_T \times \Pi_T} \left[A(t, x, \tau, \xi) f_t \left(\frac{t + \tau}{2}, \frac{x + \xi}{2} \right) + \sum_{i=1}^n B_i(t, x, \tau, \xi) f_{x_i} \left(\frac{t + \tau}{2}, \frac{x + \xi}{2} \right) \right] \\ & \times \delta_\varepsilon \left(\frac{t - \tau}{2} \right) \prod_{i=1}^n \delta_\varepsilon \left(\frac{x_i - \xi_i}{2} \right) dt dx d\tau d\xi \geq 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Переходя в (2.23) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим (в аналогичной ситуации этот предельный переход обоснован в [2], [3])

$$\int_{\Pi_T} \left[P(t, x) f_t(t, x) + \sum_{i=1}^n Q_i(t, x) f_{x_i}(t, x) \right] dt dx \geq 0, \quad (2.24)$$

где

$$P(t, x) = A(t, x, t, x) = \iint |\lambda - \mu| d\nu_{t,x}(\lambda) d\nu_{t,x}(\mu),$$

$$Q_i(t, x) = B_i(t, x, t, x) = \iint (\varphi_i(\lambda) - \varphi_i(\mu)) \operatorname{sign}(\lambda - \mu) d\nu_{t,x}(\lambda) d\nu_{t,x}(\mu).$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Из (2.24) следует, что для всех $f(t, x) \in C_0^\infty(\Pi_T)$, $f(t, x) \geq 0$,

$$\int_{\Pi_T} \left[(P(t, x) + \varepsilon) f_t(t, x) + \sum_{i=1}^n Q_i(t, x) f_{x_i}(t, x) \right] dt dx \geq 0. \quad (2.25)$$

Далее,

$$\begin{aligned}
|Q_i(t, x)| &\leq \iint |\varphi_i(\lambda) - \varphi_i(\mu)| d\nu_{t,x}(\lambda) d\nu_{t,x}(\mu) \\
&\leq \iint \Phi_i(|\lambda - \mu|) d\nu_{t,x}(\lambda) d\nu_{t,x}(\mu) \\
&\leq \Phi_i \left(\iint |\lambda - \mu| d\nu_{t,x}(\lambda) d\nu_{t,x}(\mu) \right) = \Phi_i(P(t, x)).
\end{aligned} \tag{2.26}$$

В последней оценке мы воспользовались неравенством Йенсена для выпуклых кверху функций $\Phi_i(o)$. Далее, по лемме 2.4 $\sup_{o>0} \frac{\Phi_i(o)}{o+\varepsilon} \leq \frac{\Phi_i(\varepsilon)}{\varepsilon}$ и из (2.26) получаем

$$|Q_i(t, x)| \leq \frac{\Phi_i(\varepsilon)}{\varepsilon} (P(t, x) + \varepsilon). \tag{2.27}$$

Пусть $0 < t_0 < t_1 < T$, $0 < h < \min(t_0, T - t_1)$, $\nu > 0$, $R = (R_1, R_2, \dots, R_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
\chi_h(t) &= \alpha_h(t - t_0) - \alpha_h(t - t_1), \\
g_\nu(t, x) &= \prod_{i=1}^n \alpha_\nu \left(R_i - \frac{\Phi_i(\varepsilon)}{\varepsilon} t - |x_i| \right).
\end{aligned}$$

Положим $f(t, x) = \chi_h(t)g_\nu(t, x)$. Тогда $f(t, x) \geq 0$, $f(t, x) \in \overset{\circ}{W}_1^1(\Pi_T)$ и (2.25) выполнено с пробной функцией $f(t, x)$, откуда

$$\begin{aligned}
&\int_{\Pi_T} \bar{P}(t, x) (\delta_h(t - t_0) - \delta_h(t - t_1)) g_\nu dt dx + \int_{\Pi_T} \left[\bar{P}(t, x) (g_\nu)_t \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^n Q_i(t, x) (g_\nu)_{x_i} \right] \chi_h(t) dt dx \geq 0.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Здесь $\bar{P}(t, x) = P(t, x) + \varepsilon$.

Заметим, что из (2.27) получаем

$$\begin{aligned}
&\bar{P}(t, x) (g_\nu)_t(t, x) + \sum_{i=1}^n Q_i(t, x) (g_\nu)_{x_i}(t, x) \\
&\leq \bar{P}(t, x) \left((g_\nu)_t(t, x) + \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_i(\varepsilon)}{\varepsilon} |(g_\nu)_{x_i}(t, x)| \right) = 0,
\end{aligned}$$

так как $(g_\nu)_t(t, x) = - \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_i(\varepsilon)}{\varepsilon} |(g_\nu)_{x_i}(t, x)|$.

Итак, второй интеграл в (2.28) неположителен, и из (2.28) получаем

$$\int_{\Pi_T} \bar{P}(t, x) g_\nu(t, x) (\delta_h(t - t_0) - \delta_h(t - t_1)) dx dt \geq 0. \tag{2.29}$$

При $\nu \rightarrow 0$ $g_\nu(t, x) \rightarrow g(t, x)$ п.в. в Π_T , где $g(t, x)$ — характеристическая функция множества $\left\{ (t, x) \in \Pi_T \mid |x_i| \leq R_i - \frac{\Phi_i(\varepsilon)}{\varepsilon} t \right\}$, $|g_\nu(t, x)| \leq 1$. Применяя теорему

Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, в пределе при $\nu \rightarrow 0$ из (2.29) получим

$$\int_0^T \left(\int_{A(t)} \bar{P}(t, x) dx \right) \delta_h(t - t_1) dt \leq \int_0^T \left(\int_{A(t)} \bar{P}(t, x) dx \right) \delta_h(t - t_0) dt, \quad (2.30)$$

где $A(t) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| \leq R_i - \frac{\Phi_i(\varepsilon)}{\varepsilon} t \right\}$.

Пусть

$$E = \left\{ t \in [0, T] \mid \begin{array}{l} \text{для всех рациональных } R_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad \varepsilon > 0 \\ t - \text{точка Лебега функции } \varphi(t) = \int_{A(t)} \bar{P}(t, x) dx \end{array} \right\}.$$

Тогда $E \subset [0, T]$ имеет полную меру Лебега и при $t_0, t_1 \in E$ в пределе при $h \rightarrow 0$ из (2.30) получим, что для всех рациональных $R_i, i = 1, \dots, n, \varepsilon > 0$

$$\int_{A(t_1)} \bar{P}(t_1, x) dx \leq \int_{A(t_0)} \bar{P}(t_0, x) dx,$$

откуда следует, что (mes – мера Лебега на $\mathbb{R}^n$)

$$\int_{A(t_1)} P(t_1, x) dx \leq \int_{A(t_0)} P(t_0, x) dx + \varepsilon (\text{mes}(A(t_0))),$$

или

$$\int_{A(t_1)} P(t_1, x) dx \leq \int_{A(t_0)} P(t_0, x) dx + \varepsilon 2^n \prod_{i=1}^n s \left(R_i - \frac{\Phi_i(\varepsilon)}{\varepsilon} t_0 \right); \quad (2.31)$$

здесь $s(u) = \max(u, 0)$.

Устремим в (2.31) $t_0 \in E \setminus \mathcal{E}$ к нулю ($\mathcal{E}$ – множество нулевой меры из определения 2.2). Тогда

$$P(t, x) = \iint |\lambda - \mu| d\nu_{t,x}(\lambda) d\nu_{t,x}(\mu) \rightarrow 0 \quad \text{в } L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n).$$

Действительно, по неравенству Гёльдера

$$P(t, x) \leq \left(\iint (\lambda - \mu)^2 d\nu_{t,x}(\lambda) d\nu_{t,x}(\mu) \right)^{1/2}. \quad (2.32)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \iint (\lambda - \mu)^2 d\nu_{t,x}(\lambda) d\nu_{t,x}(\mu) &= \iint (\lambda^2 - 2\lambda\mu + \mu^2) d\nu_{t,x}(\lambda) d\nu_{t,x}(\mu) \\ &= \int \lambda^2 d\nu_{t,x}(\lambda) - 2 \int \lambda d\nu_{t,x}(\lambda) \int \mu d\nu_{t,x}(\mu) + \int \mu^2 d\nu_{t,x}(\mu). \end{aligned} \quad (2.33)$$

По условию b) определения 2.2 при $t \rightarrow 0$, $t \in E \setminus \mathcal{E}$,

$$\int \lambda^2 d\nu_{t,x}(\lambda) \rightarrow u_0^2(x), \quad \int \lambda d\nu_{t,x}(\lambda) \rightarrow u_0(x) \quad \text{в } L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n),$$

и из (2.33)

$$\iint (\lambda - \mu)^2 d\nu_{t,x}(\lambda) d\nu_{t,x}(\mu) \rightarrow 0 \quad \text{в } L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n).$$

Тогда из (2.32) $P(t, x) \rightarrow 0$ в $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n)$, а значит, и в $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$.

Из (2.31) в пределе при $t_0 \rightarrow 0$, $t_0 \in E \setminus \mathcal{E}$, следует оценка (справедливая для всех $t \in E$)

$$\int_{A(t)} P(t, x) dx \leq \varepsilon 2^n \prod_{i=1}^n s(R_i). \quad (2.34)$$

Заметим, что оценки (2.31), (2.34) справедливы для всех $R \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$. Действительно, по определению множества E они верны для всех рациональных R_i , $i = 1, \dots, n$, $\varepsilon > 0$ и остается воспользоваться непрерывностью выражений, входящих в (2.31), (2.34) по переменным $R \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$, и плотностью множества рациональных чисел.

Пусть

$$H_i = \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Phi_i(\varepsilon)}{\varepsilon} \leq +\infty$$

(так как $\Phi_i(\varepsilon)$ – выпуклые сверху функции, то $\Phi_i(\varepsilon)/\varepsilon$ убывают и $H_i > 0$),

$$I = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid H_i = +\infty\}, \quad k = \text{card}(I).$$

Положим при $\delta > 0$, $\rho = t$, $r > 0$

$$R_i = \begin{cases} \frac{\Phi_i(\varepsilon)}{\varepsilon}(\rho + \delta), & i \in I, \\ \frac{\Phi_i(\varepsilon)}{\varepsilon}r, & i \notin I. \end{cases} \quad (2.35)$$

Тогда из (2.34) для $t \in E$ имеем

$$\int_{A(t)} P(t, x) dx \leq \text{const} \cdot \left(\varepsilon \prod_{i=1}^n \frac{\Phi_i(\varepsilon)}{\varepsilon} \right) r^{n-k} (t + \delta)^k.$$

Переходя в последней оценке к пределу сначала при $\varepsilon \rightarrow 0$, а затем при $\delta \rightarrow 0$, получим, что для $t \in E$

$$\int_{B(t)} P(t, x) dx \leq c(r) \cdot \left(\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \prod_{i=1}^n \frac{\Phi_i(\varepsilon)}{\varepsilon} \right) t^k, \quad (2.36)$$

где $B(t) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| \leq H_i(r - t), i \notin I\}$, $c(r)$ – константа, зависящая только от r . Заметим, что по условию теоремы

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \prod_{i=1}^n \frac{\Phi_i(\varepsilon)}{\varepsilon} < +\infty.$$

Если $k \leq 1$, то при $\varepsilon \rightarrow 0$ $\prod_{i=1}^n \Phi_i(\varepsilon) = o(\varepsilon^{n-1})$. Действительно, тогда, не умаляя общности, можно считать, что $I \subset \{1\}$. В этом случае

$$\varepsilon^{1-n} \prod_{i=1}^n \Phi_i(\varepsilon) = \Phi_1(\varepsilon) \prod_{i=2}^n \frac{\Phi_i(\varepsilon)}{\varepsilon},$$

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{1-n} \prod_{i=1}^n \Phi_i(\varepsilon) = \prod_{i=2}^n H_i \cdot \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_1(\varepsilon) = 0.$$

Поэтому правая часть оценки (2.36) равна нулю, и из (2.36), учитывая также произвольность $r > 0$, получим, что

$$P(t, x) = \iint |\lambda - \mu| d\nu_{t,x}(\lambda) d\nu_{t,x}(\mu) = 0 \text{ п.в. в } \Pi_T,$$

откуда следует, что для п.в. $(t, x) \in \Pi_T$ мера $\nu_{t,x}$ является мерой Дирака, т.е. мерозначное решение $\nu_{t,x}$ регулярно. Теорема при $k \leq 1$ доказана.

Рассмотрим случай $k > 1$. Пусть $t_0, t_1 \in E$, R_i , $i = 1, \dots, n$, определены равенством (2.35), где $\delta > 0$, $\rho = t_1$, $r > 0$. Из (2.31) в пределе сначала при $\varepsilon \rightarrow 0$, а затем при $\delta \rightarrow 0$ получим, что для $t_0, t_1 \in E$

$$\begin{aligned} & \int_{B(t_1)} P(t_1, x) dx - \int_{B(t_0)} P(t_0, x) dx \\ & \leq 2^n \left(\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \prod_{i=1}^n \frac{\Phi_i(\varepsilon)}{\varepsilon} \right) (r - t_0)^{n-k} (t_1 - t_0)^k \leq c(r)(t_1 - t_0)^k. \end{aligned}$$

Пусть $\varphi(t) = \int_{B(t)} P(t, x) dx$. Тогда для п.в. $t_0, t_1 \in [0, T]$, $t_1 > t_0$,

$$\varphi(t_1) - \varphi(t_0) \leq \text{const} \cdot (t_1 - t_0)^k. \quad (2.37)$$

Так как $k > 1$, из (2.37) следует, что для п.в. $t_0, t_1 \in [0, T]$, $t_1 > t_0$, $\varphi(t_1) \leq \varphi(t_0)$. Кроме того, как следует из (2.36), $\varphi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$, $t \notin \mathcal{E}$. Поэтому $\varphi(t) = 0$ для п.в. $t \in [0, T]$, т.е. (учитывая также произвольность $r > 0$) для п.в. $(t, x) \in \Pi_T$

$$P(t, x) = \iint |\lambda - \mu| d\nu_{t,x}(\lambda) d\nu_{t,x}(\mu) = 0$$

и $\nu_{t,x}(\lambda) = \delta(\lambda - u(t, x))$ – регулярная мерозначная функция. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. При предположениях теоремы 2.3 м.р. задачи (1), (2.1) единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u_1(t, x)$, $u_2(t, x)$ – два различных регулярных по теореме 2.3 решения. Тогда мерозначная функция

$$\nu_{t,x}(\lambda) = (\delta(\lambda - u_1(t, x)) + \delta(\lambda - u_2(t, x))) / 2$$

является нерегулярным м.р. задачи (1), (2.1), что противоречит утверждению теоремы 2.3.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. В общем случае существуют нерегулярные м.р. с регулярными начальными данными. Действительно, рассмотрим задачу Коши (1), (2), имеющую более одного обобщенного решения (см. пример в [7], [8]). Тогда если $u_1(t, x)$, $u_2(t, x)$ – два различных о.р., то для всех $\alpha \in (0, 1)$ мерозначная функция $\nu_{t,x}(\lambda) = (1-\alpha)\delta(\lambda - u_1(t, x)) + \alpha\delta(\lambda - u_2(t, x))$ является, очевидно, нерегулярным м.р.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. В случае нерегулярной мерозначной начальной функции соответствующее мерозначное решение также нерегулярно. Действительно, пусть, напротив, мерозначное решение $\nu_{t,x}$ регулярно: $\nu_{t,x}(\lambda) = \delta(\lambda - u(t, x))$. Тогда по определению 2.2 при $t \rightarrow 0$, $t \notin \mathcal{E}$,

$$u(t, x) \rightarrow u_0(x) = \int \lambda d\nu_x(\lambda) \quad \text{в } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$$

и, значит $(u(t, x))$ ограничена, $u^2(t, x) \rightarrow u_0^2(x)$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. С другой стороны, при $t \rightarrow 0$, $t \notin \mathcal{E}$,

$$u^2(t, x) \rightarrow \int \lambda^2 d\nu_x(\lambda) \quad \text{в } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n),$$

и мы получаем, что п.в. в $\mathbb{R}^n$ $u_0^2(x) = \int \lambda^2 d\nu_x(\lambda)$. Отсюда

$$\begin{aligned} \int (\lambda - u_0(x))^2 d\nu_x(\lambda) &= \int \lambda^2 d\nu_x(\lambda) - 2u_0(x) \int \lambda d\nu_x(\lambda) + u_0^2(x) \\ &= u_0^2(x) - 2u_0^2(x) + u_0^2(x) = 0 \end{aligned}$$

п.в. в $\mathbb{R}^n$ и для п.в. $x \in \mathbb{R}^n$ $\nu_x(\lambda) = \delta(\lambda - u_0(x))$, что противоречит нерегулярности ν_x .

В работе [7] показано, что нерегулярное м.р. всегда неединственно. Проиллюстрируем этот результат на простейшем примере. Рассмотрим в слое Π_T задачу Коши для уравнения $u_t = 0$ с постоянной мерозначной начальной функцией $\nu_x \equiv \nu$, где мера $\nu \in \text{Prob}_0(\mathbb{R})$ отлична от мер Дирака $\delta(\lambda - u)$, $u \in \mathbb{R}$.

Пусть $a = \int \lambda d\nu(\lambda)$, $p(t, \lambda) = a + \alpha(t)(\lambda - a)$, где $\alpha(t)$ – невозрастающая функция на $[0, +\infty)$ такая, что $\alpha(t) \geq 0$ и

$$\lim_{t \rightarrow 0} \alpha(t) = \alpha(0) = 1.$$

Пусть $\nu_t = p(t, \cdot)^* \nu$ – образ меры ν при отображении $\lambda \rightarrow p(t, \lambda)$.

Покажем, что мерозначная функция $\nu_{t,x} = \nu_t$ является м.р. рассматриваемой задачи. Условие а) для рассматриваемой задачи сводится к условию: для всех $k \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dt} \int |\lambda - k| d\nu_t(\lambda) \leq 0 \quad \text{в смысле распределений.} \quad (2.38)$$

Пусть $k \in \mathbb{R}$, $g(\lambda) = |\lambda - k|$, $\varphi(t) = \int g(\lambda) d\nu_t(\lambda)$. Так как $\nu_t = p(t, \cdot)^* \nu$, то

$$\varphi(t) = \int g(p(t, \lambda)) d\nu(\lambda) = \int g(a + \alpha(t)(\lambda - a)) d\nu(\lambda)$$

и по неравенству Йенсена

$$\varphi(t) \geq g \left(\int (a + \alpha(t)(\lambda - a)) d\nu(\lambda) \right) = g(a) \quad (2.39)$$

(по выбору a имеем $\int (\lambda - a) d\nu(\lambda) = 0$). Далее, пусть $t_2 > t_1 > 0$, $\alpha_1 = \alpha(t_1)$, $\alpha_2 = \alpha(t_2)$, $p_1(\lambda) = a + \alpha_1(\lambda - a)$, $p_2(\lambda) = a + \alpha_2(\lambda - a)$, $\beta = \begin{cases} \alpha_2/\alpha_1 & \text{при } \alpha_1 > 0, \\ 0 & \text{при } \alpha_1 = 0. \end{cases}$ Так как функция $\alpha(t)$ не возрастает, то $0 \leq \beta \leq 1$ и, как легко заметить, $p_2(\lambda) = (1 - \beta)a + \beta p_1(\lambda)$. Тогда, используя выпуклость функции $g(\lambda)$ и (2.39), получим, что

$$\begin{aligned} \varphi(t_2) &= \int g(p_2(\lambda)) d\nu(\lambda) = \int g((1 - \beta)a + \beta p_1(\lambda)) d\nu(\lambda) \\ &\leq \int ((1 - \beta)g(a) + \beta g(p_1(\lambda))) d\nu(\lambda) = (1 - \beta)g(a) + \beta \int g(p_1(\lambda)) d\nu(\lambda) \\ &= (1 - \beta)g(a) + \beta \varphi(t_1) \leq (1 - \beta)\varphi(t_1) + \beta \varphi(t_1) = \varphi(t_1). \end{aligned}$$

Итак, для всех вещественных k функция $\varphi(t)$ не возрастает, что эквивалентно (2.38).

Далее, для любой непрерывной функции $g(\lambda)$ при $t \rightarrow 0$

$$\int g(\lambda) d\nu_t(\lambda) = \int g(a + \alpha(t)(\lambda - a)) d\nu(\lambda) \rightarrow \int g(\lambda) d\nu(\lambda),$$

так как $\lim_{t \rightarrow 0} \alpha(t) = 1$. Следовательно, мерозначная функция $\nu_{t,x} = \nu_t$ удовлетворяет также условию b) определения 2.2 и, значит, является м.р. задачи $u_t = 0$, $\nu_{0,x} \equiv \nu$. Построенные м.р., соответствующие различным функциям $\alpha(t)$, образуют бесконечное семейство различных м.р. рассматриваемой задачи.

§ 3. Сильные мерозначные решения

Как показано выше, мерозначное решение задачи Коши (1), (2.1) существует, но в случае нерегулярной мерозначной начальной функции ν_x заведомо неединственно (даже в случае уравнения $u_t = 0$), что побуждает нас сузить класс допустимых м.р. В настоящем параграфе мы вводим понятие сильного м.р.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Ограниченная мерозначная функция $\nu_{t,x}$ называется *сильным мерозначным решением* задачи (1), (2.1), если для всех $\lambda \in (0, 1)$ функция

$$u^\lambda(t, x) = u(t, x, \lambda) = \inf \{ \mu \mid \nu_{t,x}((-\infty, \mu)) > \lambda \}$$

является о.р. задачи Коши (1), (2) с начальной функцией

$$u_0^\lambda(x) = u_0(x, \lambda) = \inf \{ \mu \mid \nu_x((-\infty, \mu)) > \lambda \}.$$

ЛЕММА 3.1. 1) Если ν – вероятностная мера на прямой $\mathbb{R}$, то функция $u(\lambda) = \inf\{\mu \mid \nu((-\infty, \mu)) > \lambda\}$ – однозначно определяемая, неубывающая и непрерывная справа функция на $(0, 1)$ такая, что $\nu = u^* d\lambda$ – образ меры Лебега $d\lambda$ на интервале $(0, 1)$ при отображении $\lambda \rightarrow u(\lambda)$.

2) Если ν_x – мерозначная функция в области Ω некоторого евклидового пространства $\mathbb{R}^m$, то функция $u(x, \lambda) = \inf\{\mu \mid \nu_x((-\infty, \mu)) > \lambda\}$ измерима по совокупности переменных на $\Omega \times (0, 1)$ и $\nu_x = u(x, \cdot)^* d\lambda$.

3) Пусть $\nu_x, \tilde{\nu}_x$ – мерозначные функции на Ω такие, что для всех $\lambda \in (0, 1)$ функции $u(x, \lambda) = \inf\{\mu \mid \nu_x((-\infty, \mu)) > \lambda\}$ и $\tilde{u}(x, \lambda) = \inf\{\mu \mid \tilde{\nu}_x((-\infty, \mu)) > \lambda\}$ совпадают почти всюду на Ω . Тогда для п.в. $x \in \Omega$ $\nu_x = \tilde{\nu}_x$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Легко проверить, что для любого вещественного μ $u(\lambda) < \mu$ тогда и только тогда, когда $\nu((-\infty, \mu)) > \lambda$. Поэтому если $\tilde{\nu} = u^* d\lambda$, то

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}((-\infty, \mu)) &= d\lambda(\{\lambda \in (0, 1) \mid u(\lambda) < \mu\}) = d\lambda(\{\lambda \in (0, 1) \mid \lambda < \nu((-\infty, \mu))\}) \\ &= \nu((-\infty, \mu)). \end{aligned}$$

Итак, функции распределения мер $\tilde{\nu}$ и ν совпадают, откуда следует равенство $\nu = \tilde{\nu} = u^* d\lambda$.

То, что функция $u(\lambda)$ не убывает и непрерывна справа, проверяется непосредственно.

Далее, пусть $v(\lambda)$ – неубывающая, непрерывная справа функция на $(0, 1)$ такая, что $\nu = v^* d\lambda$, $f(\mu) = \nu((-\infty, \mu))$ – функция распределения меры ν . Тогда $f(\mu) = d\lambda(\{\lambda \in (0, 1) \mid v(\lambda) < \mu\})$. Так как функция $v(\lambda)$ не убывает и непрерывна справа, то $\{\lambda \in (0, 1) \mid v(\lambda) < \mu\} = (0, \lambda_0)$, где $\lambda_0 = \sup\{\lambda \in (0, 1) \mid v(\lambda) < \mu\}$. Следовательно,

$$f(\mu) = d\lambda((0, \lambda_0)) = \lambda_0 = \sup\{\lambda \in (0, 1) \mid v(\lambda) < \mu\}.$$

Отсюда и из непрерывности справа функции $v(\lambda)$ вытекает, что при $\lambda \in (0, 1)$ $f(\mu) > \lambda$ тогда и только тогда, когда $v(\lambda) < \mu$ и, значит, $v(\lambda) = \inf\{\mu \mid f(\mu) > \lambda\} = u(\lambda)$. Таким образом, неубывающая и непрерывная справа функция $u(\lambda)$ определяется равенством $\nu = u^* d\lambda$ однозначно.

2) Для доказательства измеримости $u(x, \lambda)$ необходимо установить, что для всех вещественных μ множество $E_\mu = \{(x, \lambda) \in \Omega \times (0, 1) \mid u(x, \lambda) < \mu\}$ измеримо. Для $\mu \in \mathbb{R}$ (см. первую часть доказательства) множество E_μ совпадает с множеством $\{(x, \lambda) \in \Omega \times (0, 1) \mid \nu_x((-\infty, \mu)) > \lambda\}$ и, следовательно, измеримо, так как по замечанию 2.1 измерима функция

$$f(x) = \nu_x((-\infty, \mu)) = \int \theta(\mu - \lambda) d\nu_x(\lambda)$$

$\left(\theta(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{при } \lambda \leq 0, \\ 1 & \text{при } \lambda > 0, \end{cases} \right.$ – функция Хевисайда). То, что $\nu_x = u(x, \cdot)^* d\lambda$, следует из утверждения 1).

3) Пусть $E = \{x \in \Omega \mid \text{для всех } \lambda \in (0, 1) \cap Q \quad u(x, \lambda) = \tilde{u}(x, \lambda)\}$. Из условия леммы и счетности множества рациональных чисел Q следует, что E – множество полной меры. При $x \in E$, $\lambda \in (0, 1) \cap Q$ $u(x, \lambda) = \tilde{u}(x, \lambda)$. Поскольку множество $(0, 1) \cap Q$ плотно в $(0, 1)$ и функции $u(x, \lambda)$, $\tilde{u}(x, \lambda)$ непрерывны справа по переменной λ , то при $x \in E$ $u(x, \lambda) = \tilde{u}(x, \lambda)$ для всех $\lambda \in (0, 1)$. По утверждению 1) тогда при $x \in E$ $\nu_x = \tilde{\nu}_x$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.2. Пусть ограниченная в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ последовательность $\{u_r^0(x)\}_{r=1}^\infty$ сходится п.в. на $\mathbb{R}^n$ к функции $u_0(x)$; $u_r(t, x)$ – о.р. задачи (1), (2) с начальной функцией $u_r^0(x)$. Предположим также, что $u_r(t, x) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} u(t, x)$ п.в. на Π_T . Тогда $u(t, x)$ – о.р. задачи (1), (2) с начальной функцией $u_0(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M = \sup_{r \in \mathbb{N}} \|u_r^0\|_\infty$. По определению 1 для всех $k \in \mathbb{R}$ и всех $f(t, x) \in C_0^\infty(\Pi_T)$, $f(t, x) \geq 0$,

$$\int_{\Pi_T} \left[|u_r - k| f_t + \sum_{i=1}^n (\varphi_i(u_r) - \varphi_i(k)) \operatorname{sign}(u_r - k) f_{x_i} \right] dt dx \geq 0. \quad (3.1)$$

Переходя в (3.1) к пределу при $r \rightarrow \infty$ и учитывая, что $u_r(t, x) \rightarrow u(t, x)$ п.в. в Π_T при $r \rightarrow \infty$, получим, что для всех $k \in \mathbb{R}$ и всех $f(t, x) \in C_0^\infty(\Pi_T)$, $f(t, x) \geq 0$,

$$\int_{\Pi_T} \left[|u - k| f_t + \sum_{i=1}^n (\varphi_i(u) - \varphi_i(k)) \operatorname{sign}(u - k) f_{x_i} \right] dt dx \geq 0,$$

т.е. $u(t, x)$ удовлетворяет требованию а) определения 1.

Далее, по теореме 1.1 существует множество нулевой меры $\mathcal{E}_r \subset [0, T]$ такое, что для всех $\Delta t \in [0, T] \setminus \mathcal{E}_r$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_r(\Delta t, x) - u_r^0(x)| \rho(x) dx \leq \omega^t(r, \Delta t), \quad (3.2)$$

где $\rho(x) = \exp(-|x|)$, $\omega^t(r, \Delta t) = c \cdot \inf_{0 < h < 1} (\omega_r^x(h) + \Delta t/h)$, $\omega_r^x(h)$ – модуль непрерывности $u_r^0(x)$ в $L^1(\mathbb{R}^n, \rho dx)$; константа c зависит, монотонно возрастаая, только от $N(M)$.

Так как $u_r^0(x) \rightarrow u_0(x)$ в $L^1(\mathbb{R}^n, \rho dx)$, то семейство $\{u_r^0(x)\}_{r=1}^\infty$ равномерно непрерывно в $L^1(\mathbb{R}^n, \rho dx)$, и для всех $r \in \mathbb{N}$ $\omega_r^x(h) \leq \omega^x(h)$, где функция $\omega^x(h)$ не зависит от r и $\omega^x(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. Значит,

$$\omega^t(r, \Delta t) \leq \omega^t(\Delta t) = c \cdot \inf_{0 < h < 1} (\omega^x(h) + \Delta t/h)$$

и $\omega^t(\Delta t)$ не зависит от r . Кроме того, $\omega^t(\Delta t) \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$.

Из (3.2) при $\Delta t \in [0, T] \setminus \bigcup_{r=1}^\infty \mathcal{E}_r$ для всех $r \in \mathbb{N}$ следует

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_r(\Delta t, x) - u_r^0(x)| \rho(x) dx \leq \omega^t(\Delta t). \quad (3.3)$$

Переходя в (3.3) к пределу при $r \rightarrow \infty$, получим, что для п.в. $\Delta t \in [0, T]$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(\Delta t, x) - u_0(x)| \rho(x) dx \leq \omega^t(\Delta t)$$

и при $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta t \notin \mathcal{E}$, где $\mathcal{E} \subset [0, T]$ – множество нулевой меры Лебега, $u(\Delta t, x) \rightarrow u_0(x)$ в $L^1(\mathbb{R}^n, \rho dx)$, а значит, и в $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$, т.е. $u(t, x)$ удовлетворяет требованию б) определения о.р. Итак, $u(t, x)$ – о.р. задачи (1), (2) с начальной функцией $u_0(x)$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3.1. а) *Сильное м.р. задачи (1), (2.1) существует.*

б) *Сильное м.р. $\nu_{t,x}$ задачи (1), (2.1) с постоянной мерозначной функцией $\nu_x = \nu$ постоянно: $\nu_{t,x} = \nu$ п.в. в Π_T .*

с) *При выполнении условия единственности о.р. задачи Коши (1), (2) с ограниченной измеримой начальной функцией (например, условия С)) сильное м.р. единственно (мерозначные функции, отличающиеся на множестве нулевой меры значений аргумента, отождествляются).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения б) и с) вытекают из определения 3.1, утверждения 3) леммы 3.1 и постоянства о.р. задачи Коши (1), (2) с постоянной начальной функцией (см. следствие 2.1).

Докажем а). Пусть $M > 0$ таково, что для п.в. $x \in \mathbb{R}^n$ $\text{supp } \nu_x \subset [-M, M]$, $u_0(x, \lambda) = \inf \{ \mu \mid \nu_x((-\infty, \mu)) > \lambda \}$. Ясно, что для всех $\lambda \in (0, 1)$

$$\|u_0(\cdot, \lambda)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq M.$$

Пусть $u(t, x, \lambda) = F(u_0^\lambda)$ – о.р. задачи (1), (2) с начальной функцией $u_0^\lambda(x) = u_0(x, \lambda)$; здесь $F : L^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^\infty(\Pi_T)$ – отображение, построенное в теореме 1.2. Из свойства монотонности в теореме 1.2 функция $u(t, x, \lambda)$ не убывает по λ :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \Rightarrow u(t, x, \lambda_1) \leq u(t, x, \lambda_2) \text{ п.в. в } \Pi_T.$$

“Исправим” функцию $u(\cdot, \lambda)$ при каждом фиксированном $\lambda \in (0, 1)$ на множестве нулевой меры значений $(t, x) \in \Pi_T$, не являющихся точками Лебега функции $u(\cdot, \lambda)$, положив для таких (t, x)

$$u(t, x, \lambda) = \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} c^{-1} h^{-(n+1)} \int_0^h \int_{B_h} u(t + \tau, x + y, \lambda) d\tau dy,$$

где c – мера Лебега единичного шара B_1 в $\mathbb{R}^n$.

Тогда, как легко видеть, свойство монотонности $u(t, x, \lambda_1) \leq u(t, x, \lambda_2)$ при $\lambda_1 \leq \lambda_2$ будет выполнено уже при всех $(t, x) \in \Pi_T$. Кроме того, из принципа максимума (см. замечание 2.1) следует, что $|u(t, x, \lambda)| \leq M$ для всех значений аргументов. Положим

$$\bar{u}(t, x, \lambda) = \inf_{\mu > \lambda} u(t, x, \mu) = \lim_{\mu \rightarrow \lambda+} u(t, x, \mu).$$

Тогда для всех $(t, x) \in \Pi_T$ $\bar{u}(t, x, \lambda)$ – неубывающая непрерывная справа функция. При фиксированном $\lambda \in (0, 1)$

$$\bar{u}^\lambda(t, x) = \bar{u}(t, x, \lambda) \in L^\infty(\Pi_T) \text{ и } \|\bar{u}^\lambda(t, x)\|_\infty \leq M.$$

Покажем, что для всех $\lambda \in (0, 1)$ $\bar{u}(t, x, \lambda)$ – о.р. задачи (1), (2) с начальной функцией $u_0(x, \lambda)$.

Пусть $\lambda \in (0, 1)$, $u_r(t, x) = u(t, x, \lambda + 1/r)$, $r \in \mathbb{N}$. Тогда $u_r(t, x)$ – о.р. задачи (1), (2) с начальной функцией $u_r^0(x) = u_0(x, \lambda + 1/r)$, и при $r \rightarrow \infty$ $u_r(t, x) \rightarrow \bar{u}(t, x, \lambda)$, $u_r^0(x) \rightarrow u_0(x, \lambda)$ поточечно, $\|u_r(x)\|_\infty \leq M$, $\|u_r(t, x)\|_\infty \leq M$. По лемме 3.2 $\bar{u}(t, x, \lambda)$ – о.р. задачи (1), (2) с начальной функцией $u_0(x, \lambda)$, что и нужно было установить.

Покажем далее, что $\bar{u}(t, x, \lambda)$ – измеримая по совокупности переменных $(t, x, \lambda) \in \Pi_T \times (0, 1)$ функция. Действительно, пусть $m \in \mathbb{N}$, $\lambda_i = i/m$, $i = 0, \dots, m$; $u_m(t, x, \lambda) = \bar{u}(t, x, \lambda_i)$ при $\lambda \in [\lambda_{i-1}, \lambda_i]$. Из измеримости функций $(t, x) \rightarrow \bar{u}(t, x, \lambda_i)$ следует, что для всех $m \in \mathbb{N}$ $u_m(t, x, \lambda)$ – измеримая на $\Pi_T \times (0, 1)$ функция. Далее, по непрерывности справа $\bar{u}(t, x, \lambda)$ по переменной λ , при $m \rightarrow \infty$ имеем $u_m(t, x, \lambda) \rightarrow \bar{u}(t, x, \lambda)$. Значит, $\bar{u}(t, x, \lambda)$ измерима на $\Pi_T \times (0, 1)$ как поточечный предел измеримых функций.

Положим $\nu_{t,x} = \bar{u}(t, x, \cdot)^* d\lambda$ – образ меры Лебега $d\lambda$ на интервале $(0, 1)$ при отображении $\lambda \rightarrow \bar{u}(t, x, \lambda)$. Очевидно, для всех $(t, x) \in \Pi_T$ $\nu_{t,x}$ – вероятностная мера и $\text{supp } \nu_{t,x} \subset [-M, M]$ (так как при $(t, x, \lambda) \in \Pi_T \times (0, 1)$ $|\bar{u}(t, x, \lambda)| \leq M$). Далее, если $p(\lambda) \in C(\mathbb{R})$, то

$$\int p(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda) = \int_0^1 p(\bar{u}(t, x, \lambda)) d\lambda$$

– измеримая на Π_T функция (поскольку, как установлено выше, функция $\bar{u}(t, x, \lambda)$ измерима на $\Pi_T \times (0, 1)$) и отображение $(t, x) \rightarrow \nu_{t,x}$ слабо измеримо.

Итак, $\nu_{t,x}$ – ограниченная мерозначная функция. Так как $\bar{u}(t, x, \lambda)$ – неубывающая непрерывная справа по $\lambda \in (0, 1)$ функция для всех $(t, x) \in \Pi_T$ и $\nu_{t,x} = \bar{u}(t, x, \cdot)^* d\lambda$, то по утверждению 1) леммы 3.1

$$\bar{u}(t, x, \lambda) = \inf \{ \mu \mid \nu_{t,x}((-\infty, \mu)) > \lambda \},$$

и так как $\bar{u}(t, x, \lambda)$ – о.р. задачи (1), (2) с начальной функцией $u_0(x, \lambda) = \inf \{ \mu \mid \nu_x((-\infty, \mu)) > \lambda \}$, то по определению 3.1 $\nu_{t,x}$ – сильное м.р. задачи (1), (2.1). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.2. *Сильное м.р. $\nu_{t,x}$ является м.р. в смысле определения 2.2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u_0(x, \lambda) = \inf \{ \mu \mid \nu_x((-\infty, \mu)) > \lambda \}$, $u(t, x, \lambda) = \inf \{ \mu \mid \nu_{t,x}((-\infty, \mu)) > \lambda \}$. По лемме 3.1 функции $u_0(x, \lambda)$, $u(t, x, \lambda)$ измеримы по совокупности переменных. Покажем, что мерозначная функция $\nu_{t,x}$ удовлетворяет требованию а) определения 2.2.

Пусть $k \in \mathbb{R}$, $f(t, x) \in C_0^\infty(\Pi_T)$, $f(t, x) \geq 0$. Тогда по определениям 1 и 3.1 для всех $\lambda \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \int_{\Pi_T} \left[|u(\cdot, \lambda) - k| f_t + \sum_{i=1}^n (\varphi_i(u(\cdot, \lambda)) - \varphi_i(k)) \right. \\ &\quad \left. \times \text{sign}(u(\cdot, \lambda) - k) f_{x_i} \right] dt dx \geq 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Далее, по лемме 3.1 $\nu_{t,x} = u(t, x, \cdot)^* d\lambda$ и

$$\begin{aligned} &\int_{\Pi_T} \left[\left(\int |\lambda - k| d\nu_{t,x}(\lambda) \right) f_t + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^n \left(\int (\varphi_i(\lambda) - \varphi_i(k)) \text{sign}(\lambda - k) d\nu_{t,x}(\lambda) \right) f_{x_i} \right] dt dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Pi_T} \left[\left(\int_0^1 |u(\cdot, \lambda) - k| d\lambda \right) f_t \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 (\varphi_i(u(\cdot, \lambda)) - \varphi_i(k)) \operatorname{sign}(u(\cdot, \lambda) - k) d\lambda \right) f_{x_i} \right] dt dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_{\Pi_T} \left[|u(\cdot, \lambda) - k| f_t \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{i=1}^n (\varphi_i(u(\cdot, \lambda)) - \varphi_i(k)) \operatorname{sign}(u(\cdot, \lambda) - k) f_{x_i} \right] dt dx \right) d\lambda \\
&= \int_0^1 F(\lambda) d\lambda.
\end{aligned}$$

По (3.4) последний интеграл неотрицателен, и мерозначная функция $\nu_{t,x}$ удовлетворяет требованию а) определения 2.2.

По теореме 1.1 при $\lambda \in (0, 1)$ для п.в. $t \in [0, T]$

$$W(t, \lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} |u(t, x, \lambda) - u_0(x, \lambda)| \rho(x) dx \leq \omega^t(t, \lambda),$$

где $\omega^t(t, \lambda) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$.

Пусть

$$E = \{t \in [0, T] \mid \text{для п.в. } \lambda \in (0, 1) \quad t - \text{точка Лебега функции } W(t, \lambda)\}.$$

По лемме 1.2 E – множество полной меры. При $t \in E$ для п.в. $\lambda \in (0, 1)$ $W(t, \lambda) \leq \omega^t(t, \lambda)$. Следовательно, при $t \rightarrow 0$, $t \in E$, $W(t, \lambda) \rightarrow 0$ для п.в. $\lambda \in (0, 1)$. По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла при $t \rightarrow 0$, $t \in E$, $\int_0^1 W(t, \lambda) d\lambda \rightarrow 0$, т.е. при $t \rightarrow 0$, $t \in E$, $u(t, x, \lambda) \rightarrow u_0(x, \lambda)$ в $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n \times (0, 1))$. Отсюда если $p(\lambda) \in C(\mathbb{R})$, то при $t \rightarrow 0$, $t \in E$, $p(u(t, x, \lambda)) \rightarrow p(u_0(x, \lambda))$ в $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n \times (0, 1))$ (учитывая также, что по принципу максимума $|u(t, x, \lambda)| \leq M$ для п.в. $(t, x, \lambda) \in \Pi_T \times (0, 1)$, где $M > 0$ таково, что $\operatorname{supp} \nu_x \subset [-M, M]$ п.в. в $\mathbb{R}^n$). Поэтому при $t \rightarrow 0$, $t \in E$,

$$\int_0^1 p(u(t, x, \lambda)) d\lambda \rightarrow \int_0^1 p(u_0(x, \lambda)) d\lambda \quad \text{в } L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n).$$

Так как

$$\int_0^1 p(u(t, x, \lambda)) d\lambda = \int p(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda), \quad \int_0^1 p(u_0(x, \lambda)) d\lambda = \int p(\lambda) d\nu_x(\lambda),$$

то при $t \rightarrow 0$, $t \in E$, для всех $p(\lambda) \in C(\mathbb{R})$

$$\int p(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda) \rightarrow \int p(\lambda) d\nu_x(\lambda),$$

т.е. мерозначная функция $\nu_{t,x}$ удовлетворяет и требованию б) определения 2.2. Теорема доказана.

Будем называть м.р. в смысле определения 2.2 *слабыми м.р.*

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. а) Регулярное решение $u(t, x)$ ($\nu_{t,x}(\lambda) = \delta(\lambda - u(t, x))$) является сильным м.р.

Действительно, пусть $\nu_x(\lambda) = \delta(\lambda - u_0(x))$ – начальная функция (заведомо регулярная по замечанию 2.3). Тогда для всех $\lambda \in (0, 1)$ $u(t, x, \lambda) = u(t, x)$, $u(x, \lambda) = u_0(x)$, и требования определения 3.1 выполнены.

б) Выпуклая комбинация сильных м.р., вообще говоря, не является сильным м.р. (напротив, выпуклая комбинация слабых м.р. является, очевидно, слабым м.р.).

Действительно, пусть $n = 1$ и $u_1(t, x)$, $u_2(t, x)$ – о.р. задачи Коши для уравнения $u_t + (u^2)_x = 0$ с начальными функциями

$$u_1(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad u_2(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ 1, & x < 0. \end{cases}$$

Тогда, как легко проверить (см. введение, замечание 1),

$$u_1(t, x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x/(2t), & 0 \leq x \leq 2t, \\ 1, & x > 2t, \end{cases} \quad u_2(t, x) = \begin{cases} 0, & x \geq t, \\ 1, & x < t; \end{cases}$$

$\delta(\lambda - u_1(t, x))$, $\delta(\lambda - u_2(t, x))$ – сильные м.р., а их выпуклая комбинация $\nu_{t,x}(\lambda) = (\delta(\lambda - u_1(t, x)) + \delta(\lambda - u_2(t, x))) / 2$ не является сильным м.р., так как $\nu_x(\lambda) = \nu = (\delta(\lambda) + \delta(\lambda - 1))$ – постоянная мерозначная функция, а $\nu_{t,x}$ отлична от ν при $0 < x < 2t$ (см. теорему 3.1, б)).

ЛЕММА 3.3. Пусть $\{\nu_k\}_{k=1}^\infty$ – последовательность вероятностных мер на прямой $\mathbb{R}$, ν – мера на $\mathbb{R}$, $\nu_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \nu$ слабо. Пусть при $\lambda \in (0, 1)$

$$u_k(\lambda) = \inf\{\mu \mid \nu_k((-\infty, \mu)) > \lambda\}, \quad u(\lambda) = \inf\{\mu \mid \nu((-\infty, \mu)) > \lambda\}.$$

Тогда для всех $\lambda \in T$, где $T \subset (0, 1)$ – множество с не более чем счетным дополнением $(0, 1) \setminus T$,

$$u_k(\lambda) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u(\lambda).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f_k(\mu) = \nu_k((-\infty, \mu))$, $f(\mu) = \nu((-\infty, \mu))$ – функции распределения мер ν_k , $k \in \mathbb{N}$, и ν соответственно, $E \subset \mathbb{R}$, $T \subset (0, 1)$ – множества точек непрерывности функций $f(\mu)$, $u(\lambda)$. По монотонности функций $f(\mu)$, $u(\lambda)$ дополнения $\mathbb{R} \setminus E$, $(0, 1) \setminus T$ не более чем счетны.

Из слабой сходимости $\nu_k \rightarrow \nu$ следует, что при $k \rightarrow \infty$ для всех $\mu \in E$ $f_k(\mu) \rightarrow f(\mu)$. Пусть $\lambda \in T$, $\varepsilon > 0$; $\mu \in E$ таково, что $\mu - \varepsilon \in E$ и $\mu - \varepsilon < u(\lambda) < \mu$. Из непрерывности функции u в точке λ следует, что существует $\delta > 0$ такое, что $\mu - \varepsilon < u(\lambda - \delta)$. Тогда $\mu - \varepsilon < u(\lambda - \delta) \leq u(\lambda) < \mu$, откуда следует, что $f(\mu) > \lambda$, $f(\mu - \varepsilon) \leq \lambda - \delta < \lambda$. Так как $\mu, \mu - \varepsilon \in E$, то при $k \rightarrow \infty$ $f_k(\mu) \rightarrow f(\mu)$, $f_k(\mu - \varepsilon) \rightarrow f(\mu - \varepsilon)$ и, начиная с некоторого натурального k , $f_k(\mu) > \lambda$, $f_k(\mu - \varepsilon) < \lambda$, откуда $\mu - \varepsilon \leq u_k(\lambda) < \mu$, и так как $\mu - \varepsilon < u(\lambda) < \mu$, то $|u_k(\lambda) - u(\lambda)| < \varepsilon$. Из произвольности $\varepsilon > 0$ следует, что для всех $\lambda \in T$ $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(\lambda) = u(\lambda)$. Лемма доказана.

Если $\{\nu_{t,x}^k\}_{k=1}^\infty$ – ограниченная последовательность слабых м.р. задачи Коши (1), (2.1), сходящаяся слабо при $k \rightarrow \infty$ к мерозначной функции $\nu_{t,x}$, то, как легко следует из определения слабой сходимости, предельная мерозначная функция $\nu_{t,x}$ удовлетворяет условию а) определения 2.2. В частности, если $\nu_{t,x}$ допускает начальные данные (2.1) в смысле условия б) определения 2.2, то $\nu_{t,x}$ является слабым м.р. задачи Коши (1), (2.1).

Верен следующий “сильный” аналог этого утверждения.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $\{\nu_x^k\}_{k=1}^\infty$ – ограниченная последовательность начальных мерозначных функций; $\{\nu_{t,x}^k\}_{k=1}^\infty$ – соответствующая последовательность сильных м.р. задачи Коши (1), (2.1) и при $k \rightarrow \infty$ $\nu_{t,x}^k \rightarrow \nu_{t,x}$, $\nu_x^k \rightarrow \nu_x$ сильно.

Тогда $\nu_{t,x}$ – сильное м.р. задачи (1), (2.1) с мерозначной начальной функцией ν_x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По ограниченности последовательности $\{\nu_x^k\}_{k=1}^\infty$ (см. определение 2.1) существует постоянная $M > 0$ такая, что для п.в. $x \in \mathbb{R}^n$ и всех натуральных k $\text{supp } \nu_x^k \subset \Delta = [-M, M]$.

Пусть $p(\lambda) \in C(\Delta)$ и

$$A(p) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \text{supp } \nu_x^k \subset \Delta \text{ и при } k \rightarrow \infty \int_{\Delta} p(\lambda) d\nu_x^k(\lambda) \rightarrow \int_{\Delta} p(\lambda) d\nu_x(\lambda) \right\}.$$

Из определения сильной сходимости для всех $p(\lambda) \in C(\Delta)$ следует, что $A(p)$ – множество полной меры. Пусть $G \subset C(\Delta)$ – счетное, всюду плотное множество и $A = \bigcap_{p \in G} A(p)$. Из счетности G следует, что $A \subset \mathbb{R}^n$ – множество полной меры, и для всех $p(\lambda) \in G$, $x \in A$

$$\int_{\Delta} p(\lambda) d\nu_x^k(\lambda) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_{\Delta} p(\lambda) d\nu_x(\lambda). \quad (3.5)$$

Так как G плотно в $C(\Delta)$, то (3.5) выполнено при $x \in A$ для всех $p(\lambda) \in C(\Delta)$, т.е. при $x \in A$ $\nu_x^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \nu_x$ слабо в пространстве мер на Δ . По принципу максимума (теорема 2.2) для п.в. $(t, x) \in \Pi_T$ $\text{supp } \nu_{t,x}^k \subset \Delta$ и, аналогично, существует множество $B \subset \Pi_T$ полной меры такое, что при $(t, x) \in B$ $\nu_{t,x}^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \nu_{t,x}$ слабо в пространстве мер на Δ .

По лемме 3.1 функции

$$\begin{aligned} u_k(t, x, \lambda) &= \inf\{\mu \mid \nu_{t,x}^k((-\infty, \mu)) > \lambda\}, \\ u_k(x, \lambda) &= \inf\{\mu \mid \nu_x^k((-\infty, \mu)) > \lambda\}, \quad k \in \mathbb{N}; \\ u(t, x, \lambda) &= \inf\{\mu \mid \nu_{t,x}((-\infty, \mu)) > \lambda\}, \\ u_0(x, \lambda) &= \inf\{\mu \mid \nu_x((-\infty, \mu)) > \lambda\} \end{aligned}$$

измеримы по совокупности переменных и по лемме 3.3 для $(t, x) \in B$ $u_k(t, x, \lambda) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u(t, x, \lambda)$, за исключением не более чем счетного множества (зависящего, вообще говоря, от (t, x)) значений λ , откуда следует, что $u_k(t, x, \lambda) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u(t, x, \lambda)$ п.в. в $\Pi_T \times (0, 1)$.

Аналогично, из леммы 3.3 следует, что при $x \in A$ $u_k(x, \lambda) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u_0(x, \lambda)$ п.в. в $\mathbb{R}^n \times (0, 1)$.

Пусть

$$S = \left\{ \lambda \in (0, 1) \mid u_k(t, x, \lambda) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u(t, x, \lambda) \text{ п.в. в } \Pi_T, \right. \\ \left. u_k(x, \lambda) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u_0(x, \lambda) \text{ п.в. в } \mathbb{R}^n \right\}.$$

Тогда S – множество полной меры в $(0, 1)$, и так как для всех $k \in \mathbb{N}$ $u_k(t, x, \lambda)$ – о.р. задачи (1), (2) с начальной функцией $u_k(x, \lambda)$, то по лемме 3.2 для всех $\lambda \in S$ $u(t, x, \lambda)$ – о.р. задачи (1), (2) с начальной функцией $u_0(x, \lambda)$. Из непрерывности справа функций $u(t, x, \lambda)$ и $u_0(x, \lambda)$ по $\lambda \in (0, 1)$ следует, что $u(t, x, \lambda)$ – о.р. задачи (1), (2) с начальной функцией $u_0(x, \lambda)$ для всех $\lambda \in (0, 1)$.

Действительно, пусть $\lambda \in (0, 1)$ и последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty \in S$ такова, что $\lambda_k > \lambda$ и $\lambda_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \lambda$. Так как $\lambda_k \in S$, то $u_k(t, x) = u(t, x, \lambda_k)$ – о.р. задачи (1), (2) с начальной функцией $u_k(x) = u_0(x, \lambda_k)$, а из непрерывности справа функций $u(t, x, \lambda)$ и $u_0(x, \lambda)$ по $\lambda \in (0, 1)$ следует, что при $k \rightarrow \infty$ $u_k(t, x) \rightarrow u(t, x) = u(t, x, \lambda)$, $u_k(x) \rightarrow u_0(x) = u_0(x, \lambda)$. По лемме 3.2 $u(t, x) = u(t, x, \lambda)$ – о.р. задачи (1), (2) с начальной функцией $u_0(x) = u_0(x, \lambda)$ для всех $\lambda \in (0, 1)$. По определению 3.1 $\nu_{t,x}$ – сильное м.р. задачи (1), (2.1) с мерозначной начальной функцией ν_x . Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Если последовательность сильных м.р. $\nu_{t,x}^k$ при $k \rightarrow \infty$ слабо сходится к (слабому) м.р. $\nu_{t,x}$, то $\nu_{t,x}$ не является, вообще говоря, сильным м.р. Действительно, пусть $n = 1$. Рассмотрим задачу Коши

$$u_t + (\varphi(u))_x = 0, \quad \varphi(u) = \begin{cases} 0, & u < 0, \\ u, & u \geq 0, \end{cases}$$

с начальным условием $u(0, x) = u_k(x) = u(kx)$, $k \in \mathbb{N}$, где

$$u(x) = \begin{cases} -([x] \bmod 2) & \text{при } x \geq 0, \\ 1 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

(здесь $[x]$ – целая часть x).

Ясно, что о.р. рассматриваемой задачи будет являться функция $u_k(t, x) = u(kt, kx)$, где (см. рис. 1)

$$u(t, x) = \begin{cases} 1, & t > l(x), \\ u(x), & t \leq l(x), \end{cases}$$

$l(x)$ – кусочно линейная непрерывная функция, $l(x) = 0$ при $x < 0$; $l(x)$ линейна на каждом интервале $[i, i + 1]$, $i = 0, 1, \dots$, с угловым коэффициентом $\alpha = \begin{cases} 1, & i \text{ четно,} \\ 2, & i \text{ нечетно.} \end{cases}$ (Линия разрыва $t = l(x)$ определяется из условий Ранкина–Гюгонио (3). Легко проверить также, что на разрывах выполнено условие допустимости (4)).

Рис. 1

Очевидно, что при $k \rightarrow \infty$ последовательность сильных м.р. $\nu_{t,x}^k(\lambda) = \delta(\lambda - u_k(t, x))$ сходится слабо к м.р.

$$\nu_{t,x}(\lambda) = \begin{cases} \delta(\lambda - 1), & t > 3x/2, \\ (\delta(\lambda + 1) + \delta(\lambda))/2, & t \leq 3x/2; \end{cases}$$

$\nu_{t,x}$ является слабым м.р. задачи (1), (2.1) с мерозначной начальной функцией

$$\nu_x(\lambda) = \begin{cases} \delta(\lambda - 1), & x \leq 0, \\ (\delta(\lambda + 1) + \delta(\lambda))/2, & x > 0; \end{cases}$$

но не является сильным м.р., так как

$$u(t, x, \lambda) = \inf \{ \mu \mid \nu_{t,x}((-\infty, \mu)) > \lambda \} = \begin{cases} u_1(t, x), & \lambda < 1/2, \\ u_2(t, x), & \lambda \geq 1/2, \end{cases}$$

где функции

$$u_1(t, x) = \begin{cases} 1, & t > 3x/2, \\ -1, & t \leq 3x/2, \end{cases} \quad u_2(t, x) = \begin{cases} 1, & t > 3x/2, \\ 0, & t \leq 3x/2, \end{cases}$$

не являются о.р. (разрыв $t = 3x/2$ не удовлетворяет условию Ранкина–Гюгоннио).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. В случае, когда функция $\varphi(u)$ не линейна ни на каком невырожденном интервале, любая последовательность (даже слабых) мерозначных решений содержит сильно сходящуюся подпоследовательность (общий многомерный вариант этого утверждения доказан в [20]). Поэтому в этом случае последовательность сильных м.р. $\nu_{t,x}^k$, слабо сходящаяся к слабому м.р. $\nu_{t,x}$, сходится к $\nu_{t,x}$ сильно и по теореме 3.3 $\nu_{t,x}$ является сильным м.р.

В заключение автор выражает свою признательность С.Н. Кружкову за внимание к работе.

Список литературы

1. Кружков С. Н. Обобщенные решения задачи Коши в целом для нелинейных уравнений первого порядка // ДАН СССР. 1969. Т. 187. № 1. С. 29–32.
2. Кружков С. Н. Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Матем. сб. 1970. Т. 81. № 2. С. 228–255.
3. Кружков С. Н. Нелинейные уравнения с частными производными. Ч. 2. Уравнения первого порядка. М.: Изд-во МГУ, 1970.
4. Benilan Ph. Equation d'évolution dans un espace de Banach quelconque et applications // These de Doctorat d'Etat. Centre d'Orsey. Universite de Paris-Sud. 1972.
5. Кружков С. Н., Хильденбранд Ф. Задача Коши для квазилинейных уравнений первого порядка в случае, когда область зависимости от начальных данных бесконечна // Вестн. Моск. ун-та. 1974. № 1. С. 93–100.
6. Кружков С. Н., Андреев П. А. К нелокальной теории задачи Коши для квазилинейных уравнений первого порядка в классе локально-суммируемых функций // ДАН СССР. 1975. Т. 220. № 1. С. 23–26.
7. Панов Е. Ю. Обобщенные решения задачи Коши для квазилинейных законов сохранения. Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. М.: Изд-во МГУ, 1991.
8. Кружков С. Н., Панов Е. Ю. Консервативные квазилинейные законы первого порядка с бесконечной областью зависимости от начальных данных // ДАН СССР. 1990. Т. 314. № 1. С. 79–84.
9. Панов Е. Ю. Обобщенные решения задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка в классах локально суммируемых и мерозначных функций // Динамика сплошной среды (Новосибирск). 1990. Т. 98. С. 61–66.
10. Tartar L. Compensated compactness and applications to partial differential equations // Research notes in mathematics, nonlinear analysis, and mechanics. Heriot-Watt Symposium. 1979. V. 4. P. 136–212.
11. DiPerna R. J. Generalized solutions to conservation laws, in system of nonlinear partial differential equations // NATO ASI Series/Ed. J. M. Ball. D. Reidel Pub. Co. 1983.
12. DiPerna R. J. Measure-valued solutions to conservation laws // Arch. Rational Mech. Anal. 1985. V. 88. P. 223–270.
13. Панов Е. Ю. Сильные мерозначные решения задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка с ограниченной мерозначной начальной функцией // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1993. № 1. С. 20–23.
14. Панов Е. Ю. Мерозначные решения задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка с неограниченной областью зависимости от начальных данных // Динамика сплошной среды (Новосибирск). 1988. Т. 88. С. 102–108.
15. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Гостехиздат, 1957.
16. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
17. Дакоронья Б. Слабая непрерывность и слабая полунепрерывность снизу нелинейных функционалов // УМН. 1989. Т. 44. № 4. С. 35–98.
18. Бенилан Ф., Кружков С. Н. Квазилинейные уравнения первого порядка с непрерывными нелинейностями // Докл. РАН. 1994. Т. 339. № 2. С. 151–154.
19. Benilan Ph., Kruzhkov S. N. Conservation laws with continuous flux functions. Preprint de l'équipe de mathématiques de Besancon. № 94/23: Besancon, 1994.
20. Панов Е. Ю. О последовательностях мерозначных решений квазилинейных уравнений первого порядка // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 2. С. 87–106.