Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Е. Широков, Энтропийные характеристики подмножеств состояний. I, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2006, том 70, выпуск 6, 193–222

DOI: <https://doi.org/10.4213/im730>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 16:29:42

УДК 519.722

М. Е. Широков

Энтропийные характеристики подмножеств состояний. I

Изучаются свойства квантовой энтропии и χ -емкости, рассматриваемой как функция множества квантовых состояний, в бесконечномерном случае. Получены условия ограниченности и непрерывности сужения квантовой энтропии на подмножество квантовых состояний, а также условия существования состояния с максимальной энтропией для некоторых подмножеств. Рассмотрено понятие χ -емкости произвольного подмножества квантовых состояний. Показано существование оптимального среднего для любого подмножества с конечной χ -емкостью. Получено достаточное условие существования оптимальной меры и доказано обобщенное свойство максимальной равноудаленности.

Библиография: 20 наименований.

§ 1. Введение

Настоящая статья посвящена изучению свойств квантовой энтропии и χ -емкости¹, рассматриваемой как функция множества квантовых состояний, в бесконечномерном случае.

Квантовая энтропия – это вогнутая полунепрерывная снизу функция на множестве всех квантовых состояний с областью значений $[0, +\infty]$, однако она может иметь ограниченные и даже непрерывные сужения на некоторые нетривиальные замкнутые подмножества состояний [10], [20]. Проблема описания таких подмножеств состояний возникает в различных приложениях, в частности при определении условий существования оптимальной меры для квантового канала с ограничениями [19]. Также представляет интерес вопрос об условиях существования состояния с максимальной энтропией для множества квантовых состояний с ограниченной энтропией. В настоящей статье рассматриваются эти и некоторые другие вопросы, связанные с понятием квантовой энтропии.

В силу теоремы Холево–Шумахера–Вестморленда [13], [17] χ -емкость множества состояний определяет максимальную скорость безошибочной передачи классической информации, которую можно достичь, используя состояния из этого подмножества в качестве алфавита, при несцепленном кодировании в передатчике и произвольном измерении – декодировании в приемнике. Обычно понятие χ -емкости связывается с понятием квантового канала и носит название χ -пропускной способности. Но легко видеть, что χ -пропускная способность канала однозначно определяется выходным множеством этого канала

¹Эта величина, называемая в зарубежной литературе *the Holevo capacity*, обычно связывается с понятием квантового канала связи (см., например, [17]). В настоящей статье эта величина рассматривается как функция множества квантовых состояний и поэтому называется χ -емкостью.

Работа выполнена при поддержке научной программы Отделения математики РАН “Современные проблемы теоретической математики” и РФФИ (проект № 06-01-00164-а).

и поэтому может рассматриваться как функция множества состояний, которую естественно называть χ -емкостью множества [14]. Этот подход является удобным, поскольку рассмотрение χ -емкости как функции множества состояний дает определенную гибкость при изучении ее свойств: можно говорить о χ -емкости произвольного множества состояний, не обязательно являющегося выходным множеством некоторого канала. С этой точки зрения χ -емкость – это неаддитивная функция множества (“неаддитивная мера”), обладающая многими интересными свойствами, детальное изучение которых представляется полезным для квантовой теории информации.

В § 3 рассмотрены условия ограниченности и непрерывности сужения квантовой энтропии на множества квантовых состояний, а также условия существования состояния с максимальной энтропией для этих множеств (предложения 1, 3, 4, 6 и следствия 1–3). Показано, что квантовая энтропия непрерывна в некотором состоянии по отношению к сходимости, определяемой относительной энтропией, тогда и только тогда, когда это состояние имеет достаточно быстро убывающие собственные значения (предложение 2). Рассмотрены связи между некоторыми свойствами множеств квантовых состояний и соответствующими свойствами так называемых “классических проекций” этих множеств (предложение 5). Полученные результаты показывают, в частности, что разрывность и неограниченность квантовой энтропии в бесконечномерном случае имеют чисто классическую природу (см. замечание 5).

В § 4 рассмотрены определение и основные свойства χ -емкости произвольного множества квантовых состояний. В п. 4.1 вводится понятие оптимального среднего произвольного множества состояний как однозначно определенного состояния, обладающего основными свойствами среднего оптимального ансамбля для множества состояний в конечномерном гильбертовом пространстве (теорема 1 и следствие 4). Свойства оптимального среднего позволили показать, что всякое множество с конечной χ -емкостью предкомпактно (следствие 5) и содержится в максимальном множестве с той же самой χ -емкостью. Из этого наблюдения следует важный результат, связанный с χ -пропускной способностью квантовых каналов: если χ -пропускная способность бесконечномерного канала с ограничением, задаваемым некоторым множеством, конечна, то это множество отображается каналом в предкомпактное множество; в частности, необходимым условием конечности χ -пропускной способности канала без ограничений является предкомпактность его выходного множества (следствие 6). Из полученных результатов, связанных с χ -емкостью, вытекает важное наблюдение о свойствах квантовой энтропии (следствие 7). В п. 4.2 вводится понятие оптимальной меры множества состояний и обобщается на бесконечномерный случай свойство максимальной равноудаленности [14] (предложение 7), из которого следует необходимое условие существования оптимальной меры (следствие 8). Получено достаточное условие существования оптимальной меры (теорема 2).

§ 2. Предварительные сведения

Пусть $\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство, $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ – алгебра всех ограниченных операторов в $\mathcal{H}$, $\mathfrak{I}(\mathcal{H})$ – банахово пространство всех ядерных операторов со следовой нормой $\|\cdot\|_1$. Состоянием далее называется положительный ядерный оператор ρ в $\mathcal{H}$ с единичным следом: $\rho \geq 0$, $\text{Tr } \rho = 1$. Алгебра

$\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ обычно называется *алгеброй наблюдаемых квантовой системы*, а состояние задает функционал математического ожидания $A \mapsto \text{Tr } \rho A$, $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, т. е. нормальное состояние в смысле теории операторных алгебр [1]. Множество всех состояний $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ – выпуклое замкнутое подмножество пространства $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$, которое является полным сепарабельным метрическим пространством с метрикой, определяемой следовой нормой. Отметим, что сходимость последовательности состояний к *состоянию* в слабой операторной топологии равносильна сходимости этой последовательности к данному состоянию по следовой норме [2]. Мы будем использовать следующий критерий компактности множеств состояний: *замкнутое множество $\mathcal{K}$ состояний компактно тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует проектор P_ε конечного ранга такой, что $\text{Tr } \rho P_\varepsilon \geq 1 - \varepsilon$ для всех $\rho \in \mathcal{K}$* [12], [19].

Пусть A и B – положительные операторы из $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$. Энтропия фон Неймана оператора A и относительная энтропия операторов A и B определяются соответственно выражениями

$$H(A) = - \sum_i \langle i | A \log A | i \rangle, \quad H(A \| B) = \sum_i \langle i | A \log A - A \log B + B - A | i \rangle,$$

в которых $\{|i\rangle\}$ – базис из собственных векторов оператора A (см. [8], [20]). Энтропия и относительная энтропия являются полунепрерывными снизу функциями своих аргументов со значениями в $[0, +\infty]$, первая из которых вогнута, а вторая выпукла по совокупности аргументов [8], [20]. Отметим также следующее неравенство:

$$H(\rho \| \sigma) \geq \frac{1}{2} \|\rho - \sigma\|_1^2, \quad (1)$$

которое имеет место для произвольных состояний ρ и σ из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ [10].

Относительную энтропию $H(\rho \| \sigma)$ двух состояний ρ и σ можно рассматривать как меру различия этих состояний, классический аналог которой называется *расстоянием Кулбака–Лейблера*. Несмотря на то, что эта мера не является метрикой (она не симметрична и не удовлетворяет аксиоме треугольника), можно ввести понятие сходимости последовательности состояний $\{\rho_n\}$ к некоторому состоянию ρ_* , определяемую условием $\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\rho_n \| \rho_*) = 0$. Топология на пространстве состояний, связанная с такой сходимостью, в классическом случае подробно изучалась в [5], где была названа *сильной информационной топологией*. Этот вид сходимости играет важную роль в настоящей статье и будет называться *H-сходимостью*.

Из неравенства (1) следует, что *H-сходимость* сильнее, чем сходимость, определенная следовой нормой.

Для произвольного множества $\mathcal{A}$ обозначим $\text{co}(\mathcal{A})$ и $\overline{\text{co}}(\mathcal{A})$ его выпуклую оболочку и его выпуклое замыкание соответственно. Множество всех крайних точек множества $\mathcal{A}$ обозначим $\text{Ext}(\mathcal{A})$ [6].

Говоря о непрерывности какой-либо функции на некотором множестве состояний, мы будем иметь в виду непрерывность сужения этой функции на данное множество.

Конечный набор состояний $\{\rho_i\}$ с соответствующими вероятностями $\{\pi_i\}$, далее обозначаемый $\{\pi_i, \rho_i\}$, называется (конечным) *ансамблем*, а состояние $\bar{\rho} = \sum_i \pi_i \rho_i$ – *средним* этого ансамбля. В [19] введено понятие *обобщенного ансамбля* как произвольной вероятностной борелевской меры μ на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

Средним обобщенного ансамбля (меры) μ называется состояние², определяемое интегралом Бохнера:

$$\bar{\rho}(\mu) = \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} \rho \mu(d\rho).$$

Обычное понятие ансамбля соответствует мерам с конечным носителем.

Множество всех вероятностных мер на замкнутом множестве состояний $\mathcal{A}$ обозначим $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ [11].

Далее в статье произвольный ансамбль $\{\pi_i, \rho_i\}$ будем рассматривать как частный случай вероятностной меры. В частности, под выпуклой комбинацией ансамблей будем понимать выпуклую комбинацию соответствующих этим ансамблям мер.

Рассмотрим функционалы

$$\chi(\mu) = \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} H(\rho \| \bar{\rho}(\mu)) \mu(d\rho), \quad \hat{H}(\mu) = \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} H(\rho) \mu(d\rho).$$

В [19, предложение 1 и доказательство теоремы] показано, что оба эти функционала корректно определены и полунепрерывны снизу на $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$, причем

$$\chi(\mu) = H(\bar{\rho}(\mu)) - \hat{H}(\mu) \quad (2)$$

для любой меры μ такой, что $H(\bar{\rho}(\mu)) < +\infty$.

Если $\mu = \{\pi_i, \rho_i\}$, то

$$\chi(\{\pi_i, \rho_i\}) = \sum_{i=1}^n \pi_i H(\rho_i \| \bar{\rho}), \quad \hat{H}(\{\pi_i, \rho_i\}) = \sum_{i=1}^n \pi_i H(\rho_i).$$

Мы будем использовать тождество Дональда [3], [10]

$$\sum_{i=1}^n \pi_i H(\rho_i \| \hat{\rho}) = \sum_{i=1}^n \pi_i H(\rho_i \| \bar{\rho}) + H(\bar{\rho} \| \hat{\rho}), \quad (3)$$

которое имеет место для любого ансамбля $\{\pi_i, \rho_i\}$ из n состояний со средним $\bar{\rho}$ и произвольного состояния $\hat{\rho}$.

Мы также будем использовать обобщенную интегральную версию тождества Дональда [19]

$$\int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} H(\rho \| \hat{\rho}) \mu(d\rho) = \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} H(\rho \| \bar{\rho}(\mu)) \mu(d\rho) + H(\bar{\rho}(\mu) \| \hat{\rho}), \quad (4)$$

которая имеет место для любой вероятностной меры μ с барицентром $\bar{\rho}(\mu)$ и произвольного состояния $\hat{\rho}$.

Используя обобщенное тождество Дональда (4), нетрудно доказать следующее свойство функционала $\chi(\mu)$.

ЛЕММА 1. Пусть $\{\mu_k\}_{k=1}^m$ – конечное множество вероятностных мер на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и $\{\lambda_k\}_{k=1}^m$ – распределение вероятностей. Тогда

$$\chi\left(\sum_{k=1}^m \lambda_k \mu_k\right) = \sum_{k=1}^m \lambda_k \chi(\mu_k) + \chi(\{\lambda_k, \bar{\rho}(\mu_k)\}_{k=1}^m).$$

²Такое состояние также называется *барицентром* меры μ .

В случае $m = 2$ для любого $\lambda \in [0, 1]$ имеет место следующее неравенство:

$$\chi(\lambda\mu_1 + (1 - \lambda)\mu_2) \geq \lambda\chi(\mu_1) + (1 - \lambda)\chi(\mu_2) + \frac{\lambda(1 - \lambda)}{2} \|\bar{\rho}(\mu_2) - \bar{\rho}(\mu_1)\|_1^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mu = \sum_{k=1}^m \lambda_k \mu_k$. По определению

$$\chi(\mu) = \sum_{k=1}^m \lambda_k \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} H(\rho \| \bar{\rho}(\mu)) \mu_k(d\rho).$$

Применяя обобщенное тождество Дональда (4) к каждому интегралу в правой части данного выражения, получаем основное тождество леммы.

Для доказательства неравенства в случае $m = 2$ достаточно использовать неравенство (1) для оценки снизу последнего слагаемого в правой части основного тождества леммы:

$$\begin{aligned} & \lambda H(\bar{\rho}(\mu_1) \| \lambda\bar{\rho}(\mu_1) + (1 - \lambda)\bar{\rho}(\mu_2)) + (1 - \lambda)H(\bar{\rho}(\mu_2) \| \lambda\bar{\rho}(\mu_1) + (1 - \lambda)\bar{\rho}(\mu_2)) \\ & \geq \frac{1}{2} \lambda \|(1 - \lambda)(\bar{\rho}(\mu_2) - \bar{\rho}(\mu_1))\|_1^2 + \frac{1}{2} (1 - \lambda) \|\lambda(\bar{\rho}(\mu_2) - \bar{\rho}(\mu_1))\|_1^2 \\ & = \frac{1}{2} \lambda(1 - \lambda) \|\bar{\rho}(\mu_2) - \bar{\rho}(\mu_1)\|_1^2. \end{aligned}$$

Заметим, что из леммы 1 следует важное неравенство

$$H(\lambda\rho_1 + (1 - \lambda)\rho_2) \geq \lambda H(\rho_1) + (1 - \lambda)H(\rho_2) + \frac{\lambda(1 - \lambda)}{2} \|\rho_2 - \rho_1\|_1^2, \quad (5)$$

которое имеет место для любых состояний ρ_1 и ρ_2 . Для его доказательства достаточно рассмотреть спектральные разложения этих состояний как вероятностные меры на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и применить лемму 1.

§ 3. О свойствах квантовой энтропии

В настоящем параграфе рассмотрены свойства сужения квантовой энтропии на множества квантовых состояний.

Пусть $\mathcal{A}$ – множество квантовых состояний такое, что $\sup_{\rho \in \mathcal{A}} H(\rho) < +\infty$. Если существует состояние, на котором достигается данная точная верхняя грань, то такое состояние будем называть *состоянием с максимальной энтропией для множества $\mathcal{A}$* . Обозначим это состояние $\Gamma(\mathcal{A})$. Из неравенства (5) вытекает следующее простое наблюдение.

ЛЕММА 2. Пусть $\mathcal{A}$ – произвольное выпуклое замкнутое множество состояний такое, что $\sup_{\rho \in \mathcal{A}} H(\rho) < +\infty$. Любая последовательность $\{\rho_n\}$ состояний из $\mathcal{A}$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\rho_n) = \sup_{\rho \in \mathcal{A}} H(\rho),$$

сходится³ к однозначно определенному состоянию $\rho_*(\mathcal{A})$ из $\mathcal{A}$.

³Используя [16, предложение 1 и лемма 1] для случая тождественного канала Φ , можно получить более сильную версию леммы 2, а именно доказать H -сходимость последовательности $\{\rho_n\}$ к состоянию $\rho_*(\mathcal{A}) = \Omega(\Phi, \mathcal{A})$, которая вместе с приведенным ниже предложением 2 показывает, что $\rho_*(\mathcal{A}) = \Gamma(\mathcal{A})$, если существует $\lambda < 1$ такое, что $\text{Tr}(\rho_*(\mathcal{A}))^\lambda < +\infty$.

Если состояние с максимальной энтропией $\Gamma(\mathcal{A})$ существует, то оно совпадает с состоянием $\rho_*(\mathcal{A})$, а сужение энтропии на множество $\mathcal{A}$ непрерывно в состоянии $\Gamma(\mathcal{A})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предположению для произвольного $\varepsilon > 0$ существует N_ε такое, что $H(\rho_n) > \sup_{\rho \in \mathcal{A}} H(\rho) - \varepsilon$ для всех $n \geq N_\varepsilon$. Используя неравенство (5) при $\lambda = 1/2$, получаем

$$\begin{aligned} \sup_{\rho \in \mathcal{A}} H(\rho) - \varepsilon &\leq \frac{1}{2} H(\rho_{n_1}) + \frac{1}{2} H(\rho_{n_2}) \\ &\leq H\left(\frac{1}{2} \rho_{n_1} + \frac{1}{2} \rho_{n_2}\right) - \frac{1}{8} \|\rho_{n_2} - \rho_{n_1}\|_1^2 \leq \sup_{\rho \in \mathcal{A}} H(\rho) - \frac{1}{8} \|\rho_{n_2} - \rho_{n_1}\|_1^2 \end{aligned}$$

и, следовательно, $\|\rho_{n_2} - \rho_{n_1}\|_1 < \sqrt{8\varepsilon}$ для всех $n_1 \geq N_\varepsilon$ и $n_2 \geq N_\varepsilon$. Таким образом, последовательность $\{\rho_n\}$ является фундаментальной и, следовательно, сходится к некоторому состоянию ρ_* из $\mathcal{A}$. Нетрудно видеть, что это состояние ρ_* не зависит от выбора последовательности $\{\rho_n\}$, а определяется только множеством $\mathcal{A}$. Обозначим это состояние $\rho_*(\mathcal{A})$.

Если состояние с максимальной энтропией $\Gamma(\mathcal{A})$ существует, то в силу приведенных выше рассуждений оно совпадает с состоянием $\rho_*(\mathcal{A})$. Из определения состояния $\Gamma(\mathcal{A})$ и полунепрерывности снизу квантовой энтропии следует утверждение о непрерывности. Лемма доказана.

Из полунепрерывности снизу энтропии следует, что

$$H(\rho_*(\mathcal{A})) \leq \sup_{\rho \in \mathcal{A}} H(\rho),$$

причем существование состояния с максимальной энтропией равносильно выполнению равенства в этом неравенстве. Примеры множеств, для которых это равенство не выполнено, рассмотрены в предложениях 1 и 3. Возможное отсутствие равенства в данном неравенстве в классическом случае и его следствия подробно рассматривались в [4], где такая ситуация названа эффектом “потери энтропии” (“entropy loss”).

Следуя работе [19], неограниченный оператор H в $\mathcal{H}$ с дискретным спектром конечной кратности будем называть *ℋ-оператором*. Пусть Q_n – спектральный проектор оператора H , соответствующий его n наименьшим собственным значениям. Следуя работе [18], обозначим

$$\mathrm{Tr} \rho H = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathrm{Tr} \rho Q_n H, \quad (6)$$

где последовательность в правой части является неубывающей. В работах [18], [19] показано, что любое компактное множество состояний $\mathcal{K}$ содержится в выпуклом компактном множестве $\mathcal{K}_{H,h} = \{\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \mid \mathrm{Tr} \rho H \leq h\}$, определяемом некоторым $\mathfrak{H}$ -оператором H и положительным числом h . Пусть $h_m(H)$ – минимальное собственное значение H , а $\mathcal{H}_m(H)$ – соответствующее (конечномерное) собственное подпространство.

Заметим, что $\mathcal{K}_{H,h}$ есть пустое множество, если $h < h_m(H)$, $\mathcal{K}_{H,h} = \mathfrak{S}(\mathcal{H}_m(H))$, если $h = h_m(H)$, и $\mathcal{K}_{H,h}$ содержит состояния бесконечного ранга, если $h > h_m(H)$.

Как показано в следующем предложении, свойства сужения квантовой энтропии на множество $\mathcal{K}_{H,h}$ зависят от коэффициента роста $g(H)$ $\mathfrak{H}$ -оператора H , определяемого следующим образом:

$$g(H) = \inf\{\lambda > 0 \mid \text{Tr exp}(-\lambda H) < +\infty\},$$

причем предполагается, что $g(H) = +\infty$, если $\text{Tr exp}(-\lambda H) = +\infty$ для всех $\lambda > 0$.

Известно [10], [20], что при условии $g(H) = 0$ энтропия непрерывна на компактном множестве $\mathcal{K}_{H,h}$ и достигает своего (конечного) максимума в состоянии $\Gamma(\mathcal{K}_{H,h})$ вида $(\text{Tr exp}(-\lambda H))^{-1} \text{exp}(-\lambda H)$. Следующее предложение обобщает это наблюдение и дает необходимое и достаточное условие существования состояния с максимальной энтропией для множества $\mathcal{K}_{H,h}$.

Пусть $h_*(H) = \frac{\text{Tr } H \text{exp}(-g(H)H)}{\text{Tr exp}(-g(H)H)}$, если $\text{Tr exp}(-g(H)H) < +\infty$, и $h_*(H) = +\infty$ в противном случае.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть H – $\mathfrak{H}$ -оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и h – положительное число такое, что $h > h_m(H)$.

1) Квантовая энтропия ограничена на множестве $\mathcal{K}_{H,h}$ тогда и только тогда, когда $g(H) < +\infty$.

2) Квантовая энтропия непрерывна на множестве $\mathcal{K}_{H,h}$ тогда и только тогда, когда $g(H) = 0$.

3) Если $h \leq h_*(H)$, то $\sup_{\rho \in \mathcal{K}_{H,h}} H(\rho) = \lambda^* h + \log \text{Tr exp}(-\lambda^* H)$, где $\lambda^* = \lambda^*(H, h) \geq g(H)$ – единственное решение уравнения

$$\text{Tr } H \text{exp}(-\lambda H) = h \text{Tr exp}(-\lambda H),$$

и существует состояние с максимальной энтропией

$$\Gamma(\mathcal{K}_{H,h}) = (\text{Tr exp}(-\lambda^* H))^{-1} \text{exp}(-\lambda^* H).$$

Если $h > h_*(H)$, то $\sup_{\rho \in \mathcal{K}_{H,h}} H(\rho) = g(H)h + \log \text{Tr exp}(-g(H)H)$ и в $\mathcal{K}_{H,h}$ не существует состояния с максимальной энтропией. В обоих случаях $\sup_{\rho \in \mathcal{K}_{H,h}} H(\rho) = \inf_{\lambda \in (g(H), +\infty)} (\lambda h + \log \text{Tr exp}(-\lambda H))$.

Функция $F_H(h) = \sup_{\rho \in \mathcal{K}_{H,h}} H(\rho)$ обладает следующими свойствами:

i) является непрерывной возрастающей функцией на $[h_m, +\infty)$ такой, что $F_H(h_m) = \log \dim \mathcal{H}_m(H)$ и $\lim_{h \rightarrow +\infty} F_H(h) = +\infty$;

ii) имеет непрерывную производную на $(h_m, +\infty)$:

$$\frac{dF_H(h)}{dh} = \begin{cases} \lambda^*(H, h), & h \in (h_m(H), h_*(H)), \\ g(H), & h \in [h_*(H), +\infty), \end{cases}$$

$$\left. \frac{dF_H(h)}{dh} \right|_{h=h_m+0} = \lim_{h \rightarrow h_m(H)+0} \frac{dF_H(h)}{dh} = +\infty, \quad \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{dF_H(h)}{dh} = g(H);$$

iii) строго вогнута на $[h_m(H), h_*(H))$ и линейна на $[h_*(H), +\infty)$, если $h_*(H) < +\infty$.

В ч. II настоящей работы, которая будет опубликована в следующем номере журнала, на рис. 2 представлены, наряду с другими характеристиками, результаты вычисления $\sup_{\rho \in \mathcal{K}_{H,h}} H(\rho)$ как функции параметра $h = c$ для $\mathfrak{H}$ -оператора $H = -\log \sigma$ с конечным $h_*(H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H = \sum_{k=1}^{+\infty} h_k |k\rangle\langle k|$, где $\{|k\rangle\}_{k \in \mathbb{N}}$ – ортонормированный базис пространства $\mathcal{H}$ и $\{h_k\}$ – неубывающая последовательность положительных чисел, стремящаяся к $+\infty$. Пусть $d = \dim \mathcal{H}_m(H)$; тогда $h_k = h_m$, $k = \overline{1, d}$, и $\{|k\rangle\}_{k=1}^d$ – базис подпространства $\mathcal{H}_m(H)$.

Докажем утверждение 1) предложения.

Предположим, что $g(H) < +\infty$. Тогда существует $\lambda > 0$ такое, что

$$\sigma = (\text{Tr} \exp(-\lambda H))^{-1} \exp(-\lambda H)$$

– состояние. Используя неотрицательность относительной энтропии и определение множества $\mathcal{K}_{H,h}$, получаем

$$H(\rho) = \lambda \text{Tr} \rho H + \log \text{Tr} \exp(-\lambda H) - H(\rho \| \sigma) \leq \lambda h + \log \text{Tr} \exp(-\lambda H) < +\infty$$

для всех ρ из $\mathcal{K}_{H,h}$, т. е. ограниченность энтропии на $\mathcal{K}_{H,h}$.

Предположим, что $\sup_{\rho \in \mathcal{K}_{H,h}} H(\rho) < +\infty$. Покажем, что уравнение

$$\sum_{k=1}^n h_k \exp(-\lambda h_k) = h \sum_{k=1}^n \exp(-\lambda h_k) \quad (7)$$

имеет единственное положительное решение λ_n для всех достаточно больших n и что последовательность $\{\lambda_n\}$ является возрастающей. Уравнение (7) равносильно уравнению $f_n(\lambda) = 0$, где $f_n(\lambda) = \sum_{k=1}^n (h_k - h) \exp(-\lambda(h_k - h))$. Поскольку

$$f'_n(\lambda) = - \sum_{k=1}^n (h_k - h)^2 \exp(-\lambda(h_k - h)) < 0,$$

функция $f_n(\lambda)$ строго убывает на $[0, +\infty)$. Нетрудно видеть, что

$$f_n(0) = \sum_{k=1}^n h_k - nh, \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f_n(\lambda) = -\infty, \quad h > h_m.$$

Поскольку последовательность $\{h_k\}$ неубывающая и неограниченная, для всех достаточно больших n имеет место неравенство $\sum_{k=1}^n h_k > nh$, и из сказанного выше следует существование единственного решения λ_n уравнения $f_n(\lambda) = 0$. Для доказательства того, что $\lambda_{n+1} > \lambda_n$, достаточно заметить, что $f_{n+1}(\lambda) > f_n(\lambda)$ для всех λ из $[0, +\infty)$ и для всех n таких, что $h_n > h$.

Для каждого достаточно большого n рассмотрим состояние

$$\rho_n = \left(\sum_{k=1}^n \exp(-\lambda_n h_k) \right)^{-1} \sum_{k=1}^n \exp(-\lambda_n h_k) |k\rangle\langle k| \quad (8)$$

из $\mathcal{K}_{H,h}$. Это состояние есть точка максимума функции $H(\rho)$ на подмножестве $\mathcal{K}_{H,h}^n$ множества $\mathcal{K}_{H,h}$, состоящего из состояний, носитель которых лежит внутри линейной оболочки векторов $\{|k\rangle\}_{k=1}^n$. Действительно, используя неотрицательность относительной энтропии и определение состояния ρ_n , легко видеть, что

$$H(\rho) = \lambda_n \text{Tr} \rho H + \log \sum_{k=1}^n \exp(-\lambda_n h_k) - H(\rho \| \rho_n) \leq \lambda_n h + \log \sum_{k=1}^n \exp(-\lambda_n h_k)$$

для всех ρ из $\mathcal{K}_{H,h}^n$ и что выполнение равенства в этом неравенстве имеет место тогда и только тогда, когда $\rho = \rho_n$. Используя это наблюдение и монотонность логарифма, получаем

$$H(\rho_n) = \lambda_n h + \log \sum_{k=1}^n \exp(-\lambda_n h_k) \geq \lambda_n (h - h_m). \quad (9)$$

Поскольку $h > h_m$, предположение $\sup_{\rho \in \mathcal{K}_{H,h}} H(\rho) < +\infty$ гарантирует ограниченность последовательности $\{\lambda_n\}$, а значит, в силу упомянутой выше монотонности этой последовательности существует $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = \lambda^* < +\infty$. Поскольку $\lambda_n \leq \lambda^*$ для всех n , из равенства в (9) следует, что

$$\sum_{k=1}^n \exp(-\lambda^* h_k) \leq \sum_{k=1}^n \exp(-\lambda_n h_k) < \exp\left(\sup_{\rho \in \mathcal{K}_{H,h}} H(\rho)\right) < +\infty \quad (10)$$

для всех n , и поэтому

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \exp(-\lambda^* h_k) < +\infty. \quad (11)$$

Таким образом, доказано, что $g(H) \leq \lambda^* < +\infty$.

Поскольку $\mathcal{K}_{H,h} = \bigcup_n \mathcal{K}_{H,h}^n$ и $\sup_{\rho \in \mathcal{K}_{H,h}^n} H(\rho) = H(\rho_n)$, из полунепрерывности снизу энтропии следует, что

$$\sup_{\rho \in \mathcal{K}_{H,h}} H(\rho) = \lim_{n \rightarrow +\infty} H(\rho_n).$$

В силу леммы 2 последовательность состояний $\{\rho_n\}$ сходится к состоянию $\rho_*(\mathcal{K}_{H,h})$. Поскольку $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = \lambda^*$, последовательность

$$\left\{ A_n = \sum_{k=1}^n \exp(-\lambda_n h_k) |k\rangle\langle k| \right\}_n$$

операторов из $\mathfrak{I}(\mathcal{H})$ сходится к оператору $A_* = \sum_{k=1}^{+\infty} \exp(-\lambda^* h_k) |k\rangle\langle k|$ в $\mathfrak{I}(\mathcal{H})$ в слабой операторной топологии. Комбинируя эти наблюдения, нетрудно показать, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Tr } A_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \exp(-\lambda_n h_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \exp(-\lambda^* h_k) = \text{Tr } A_*, \quad (12)$$

$$\rho_*(\mathcal{K}_{H,h}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_n = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \exp(-\lambda^* h_k) \right)^{-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \exp(-\lambda^* h_k) |k\rangle\langle k|. \quad (13)$$

Используя (9) и (12), получаем

$$\sup_{\rho \in \mathcal{K}_{H,h}} H(\rho) = \lim_{n \rightarrow +\infty} H(\rho_n) = h\lambda^* + \log \sum_{k=1}^{+\infty} \exp(-\lambda^* h_k). \quad (14)$$

Из полунепрерывности снизу энтропии следует, что

$$H(\rho_*(\mathcal{K}_{H,h})) = \lambda^* \frac{\sum_{k=1}^{+\infty} h_k \exp(-\lambda^* h_k)}{\sum_{k=1}^{+\infty} \exp(-\lambda^* h_k)} + \log \sum_{k=1}^{+\infty} \exp(-\lambda^* h_k) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} H(\rho_n).$$

Учитывая (14), заключаем, что это неравенство равносильно неравенству

$$\sum_{k=1}^{+\infty} h_k \exp(-\lambda^* h_k) \leq h \sum_{k=1}^{+\infty} \exp(-\lambda^* h_k) \quad (15)$$

и что в случае выполнения равенства в этих неравенствах $\rho_*(\mathcal{K}_{H,h}) = \Gamma(\mathcal{K}_{H,h})$. Обратно, если существует состояние $\Gamma(\mathcal{K}_{H,h})$, то оно в силу леммы 2 совпадает с $\rho_*(\mathcal{K}_{H,h})$ и, следовательно, имеет место равенство в (15). Таким образом, существование состояния $\Gamma(\mathcal{K}_{H,h})$ равносильно выполнению равенства в (15). Поэтому для завершения доказательства утверждения 1) предложения достаточно показать, что неравенство $h \leq h_*(H)$ равносильно равенству в (15).

Покажем сначала, что из неравенства $\lambda^* > g(H)$ следует равенство в (15). Рассмотрим функцию

$$f(\lambda) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\lambda) = \sum_{k=1}^{+\infty} (h_k - h) \exp(-\lambda(h_k - h)).$$

Поскольку ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} h_k^p \exp(-\lambda h_k)$ сходится равномерно на $[g(H) + \varepsilon, +\infty)$ для любого $p \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$, функция $f(\lambda)$ имеет непрерывную производную $f'(\lambda) = -\sum_{k=1}^{+\infty} (h_k - h)^2 \exp(-\lambda(h_k - h)) < 0$ на интервале $(g(H), +\infty)$. По построению $f(\lambda_n) > f_n(\lambda_n) = 0$ для всех достаточно больших n . Поэтому из непрерывности функции $f(\lambda)$ в точке $\lambda^* \in (g(H), +\infty)$ следует, что $f(\lambda^*) \geq 0$. Поскольку (15) равносильно обратному неравенству, получаем $f(\lambda^*) = 0$, т. е. выполнено равенство в (15).

Если $h < h_*(H)$, то $f(g(H)) > 0$ (допуская случай $f(g(H)) = +\infty$). Поскольку (15) означает, что $f(\lambda^*) \leq 0$, получаем $\lambda^* > g(H)$ и в силу приведенного выше наблюдения имеем $f(\lambda^*) = 0$.

Если $h = h_*(H)$, то $f(g(H)) = 0$ и, следовательно, $\lambda^* = g(H)$. Действительно, если $\lambda^* > g(H)$, то из приведенного выше наблюдения вытекает, что $f(\lambda^*) = 0 = f(g(H))$ вопреки строгому убыванию функции $f(\lambda)$.

Если $h > h_*(H)$, то $f(g(H)) < 0$. Поскольку функция $f(\lambda)$ убывающая, то $f(\lambda^*) < 0$ и, следовательно, имеет место строгое неравенство в (15).

Докажем утверждение 2) предложения. Если $g(H) = 0$, то энтропия непрерывна на множестве $\mathcal{K}_{H,h}$ в силу наблюдения из [20]. Это также следует из импликации (i) $\Rightarrow$ (ii) в приведенном ниже предложении 4.

Для доказательства обратного утверждения рассмотрим последовательность состояний

$$\sigma_n = (1 - q_n)|1\rangle\langle 1| + \frac{q_n}{n} \sum_{k=2}^{n+1} |k\rangle\langle k|,$$

определяемую сходящейся к нулю последовательностью положительных чисел

$$q_n = (h - h_m) \left(n^{-1} \sum_{k=2}^{n+1} h_k - h_m \right)^{-1}.$$

Здесь предполагается, что n настолько большое, что $q_n \leq 1$. Поскольку последовательность $\{\sigma_n\}$ лежит в $\mathcal{K}_{H,h}$ и сходится к чистому состоянию $|1\rangle\langle 1|$, из предполагаемой непрерывности энтропии на множестве $\mathcal{K}_{H,h}$ следует сходимость к нулю последовательности положительных чисел

$$H(\sigma_n) = h_2(q_n) + q_n \log n = h_2(q_n) + \frac{(h - h_m) \log n}{n^{-1} \sum_{k=2}^{n+1} h_k - h_m}.$$

В силу очевидной оценки $n^{-1} \sum_{k=2}^{n+1} h_k \leq h_{n+1}$ заключаем, что последовательность $\{\nu_n = h_{n+1}^{-1} \log n\}$ сходится к нулю. Поэтому для любого $\lambda > 0$ имеем

$$\mathrm{Tr} \exp(-\lambda H) = \sum_{n=0}^{+\infty} \exp(-\lambda h_{n+1}) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\frac{\lambda}{\nu_n}} < +\infty$$

и, следовательно, $g(H) = 0$.

Общее выражение для $\sup_{\rho \in \mathcal{K}_{H,h}} H(\rho)$ выводится из предыдущих наблюдений и замечания, что нижняя грань в этом выражении достигается при $\lambda = \lambda^*$, если $h \leq h_*(H)$, и при $\lambda = g(H)$, если $h \geq h_*(H)$.

Доказательство свойств функции $F_H(\rho)$ основано на теореме о неявной функции и представлено в § 5.

Пусть σ – произвольное состояние. Далее существенную роль будет играть коэффициент убывания $d(\sigma)$ состояния σ , определяемый следующим образом:

$$d(\sigma) = \inf\{\lambda > 0 \mid \mathrm{Tr} \sigma^\lambda < +\infty\} \in [0, 1].$$

Если σ – состояние полного ранга, то $-\log \sigma$ – $\mathfrak{H}$ -оператор и $d(\sigma) = g(-\log \sigma)$.

Нетрудно видеть, что из $d(\sigma) < 1$ следует $H(\sigma) < +\infty$, но существуют состояния σ с конечной энтропией такие, что $d(\sigma) = 1$ (например, состояние со спектром $\{a((k+1) \log^3(k+1))^{-1}\}$, где a – нормировочный коэффициент). Особая роль этих состояний показана в следующем предложении, которое является некоммутативным обобщением теоремы 21 из работы [5], где классическое состояние – распределение вероятностей σ – называется *гиперболическим*, если $d(\sigma) = 1$, и *power dominated*, если $d(\sigma) < 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть σ – состояние с конечной энтропией.

1) Если $d(\sigma) < 1$, то

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\rho_n) = H(\sigma)$$

для любой последовательности состояний $\{\rho_n\}$, H -сходящейся⁴ к состоянию σ .

2) Если $d(\sigma) = 1$, то для любого $h \geq H(\sigma)$ существует последовательность $\{\rho_n\}$ состояний конечного ранга, H -сходящаяся к состоянию σ , такая, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\rho_n) = h.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Предложение 2 показывает, что выпуклое множество состояний $\{\sigma \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \mid d(\sigma) < 1\}$ является максимальным множеством непрерывности энтропии по отношению к H -сходимости.

Доказательство предложения 2 основано на следующей лемме.

ЛЕММА 3. Если σ – состояние с $d(\sigma) < 1$, то для любого состояния ρ такового, что $H(\rho \parallel \sigma) < +\infty$, энтропия $H(\rho)$ конечна и для любого $\lambda > d(\sigma)$ справедливо следующее равенство:

$$H(\rho \parallel (\mathrm{Tr} \sigma^\lambda)^{-1} \sigma^\lambda) = \lambda H(\rho \parallel \sigma) + \log \mathrm{Tr} \sigma^\lambda - (1 - \lambda) H(\rho).$$

Если $\mathrm{Tr} \sigma^{d(\sigma)} < +\infty$, то это равенство справедливо и для $\lambda = d(\sigma)$.

⁴Это значит, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\rho_n \parallel \sigma) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{P_n\}$ – возрастающая последовательность спектральных проекторов состояния σ . При каждом n для положительных ядерных операторов $A_n = P_n \rho P_n$ и $B_n = P_n \sigma$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} H(A_n \| B_n^\lambda) &= \text{Tr}(A_n \log A_n - A_n \log B_n^\lambda + B_n^\lambda - A_n) \\ &= \text{Tr}((\lambda + (1 - \lambda))A_n \log A_n - \lambda A_n \log B_n + B_n^\lambda - A_n) \\ &= \lambda H(A_n \| B_n) + \text{Tr} B_n^\lambda - \lambda \text{Tr} B_n - (1 - \lambda) \text{Tr} A_n - (1 - \lambda) \text{Tr} A_n (-\log A_n). \end{aligned}$$

Поскольку $B_n^\lambda = P_n \sigma^\lambda$, из [8, лемма 4] следует, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Tr} A_n (-\log A_n) = H(\rho), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} H(A_n \| B_n^\lambda) = H(\rho \| \sigma^\lambda)$$

для всех $\lambda > d(\sigma)$. Поэтому, переходя к пределу при $n \rightarrow +\infty$ в предыдущем равенстве, получаем

$$H(\rho \| \sigma^\lambda) = \lambda H(\rho \| \sigma) + \text{Tr} \sigma^\lambda - 1 - (1 - \lambda) H(\rho).$$

Таким образом, из конечности $H(\rho \| \sigma)$ следует конечность $H(\rho)$ и $H(\rho \| \sigma^\lambda)$ для всех $\lambda > d(\sigma)$. Замечая, что

$$H(\rho \| (\text{Tr} \sigma^\lambda)^{-1} \sigma^\lambda) = H(\rho \| \sigma^\lambda) + \log \text{Tr} \sigma^\lambda - \text{Tr} \sigma^\lambda + 1,$$

получаем равенство леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. Пусть $d(\sigma) < 1$. В силу леммы 3

$$\frac{H(\rho_n \| (\text{Tr} \sigma^\lambda)^{-1} \sigma^\lambda) - \lambda H(\rho_n \| \sigma)}{1 - \lambda} = \frac{\log \text{Tr} \sigma^\lambda}{1 - \lambda} - H(\rho_n) \quad (16)$$

для всех $\lambda > d(\sigma)$. Предположим, что $\liminf_{n \rightarrow +\infty} H(\rho_n) - H(\sigma) = \Delta > 0$. Поскольку первое слагаемое в правой части (16) стремится к $H(\sigma)$ при $\lambda \rightarrow 1$, существует $\lambda' < 1$ такое, что правая часть (16) меньше, чем $-\Delta/2$, при $\lambda = \lambda'$ и всех достаточно больших n , в то время как левая часть (16) в силу неотрицательности относительной энтропии не меньше выражения $-\frac{\lambda' H(\rho_n \| \sigma)}{1 - \lambda'}$, которое стремится к нулю при $n \rightarrow +\infty$.

Пусть $d(\sigma) = 1$ и $h > H(\sigma)$. Без ограничения общности можно считать, что σ – состояние полного ранга такое, что $-\log \sigma$ – $\mathfrak{H}$ -оператор с $g(-\log \sigma) = d(\sigma) = 1$ и $h_*(-\log \sigma) = H(\sigma) < +\infty$. Из предложения 1 следует, что $\sup_{\rho \in \mathcal{K}_{-\log \sigma, h}} H(\rho) = h$ для всех $h > h_*(-\log \sigma)$. Для данного $h > h_*(-\log \sigma)$ в доказательстве предложения 1 построена последовательность $\{\rho_n\}$ состояний, определенных формулой (8), которая сходится к состоянию $\rho_*(\mathcal{K}_{-\log \sigma, h}) = \sigma$, определенному формулой (13). По построению

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\rho_n) = \sup_{\rho \in \mathcal{K}_{-\log \sigma, h}} H(\rho) = h, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} H(\rho_n \| \sigma) = 0.$$

Предложение доказано.

Рассмотрим множество $\mathcal{V}_{\sigma, c} = \{\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \mid H(\rho \| \sigma) \leq c\}$, определяемое состоянием σ и неотрицательным числом c . В силу свойств относительной энтропии множество $\mathcal{V}_{\sigma, c}$ является непустым замкнутым и выпуклым подмножеством множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ для любых σ и c . Множество $\mathcal{V}_{\sigma, c}$ можно рассматривать как

c -псевдоокрестность состояния σ относительно псевдометрики, определяемой относительной энтропией. В следующем параграфе будет показано, что это множество играет особую роль в вопросах, связанных с понятием χ -емкости множества состояний.

Пусть $c_*(\sigma) = H((\text{Tr } \sigma^{d(\sigma)})^{-1} \sigma^{d(\sigma)} \| \sigma)$, если $\text{Tr } \sigma^{d(\sigma)} < +\infty$, и $c_*(\sigma) = +\infty$ в противном случае. Свойства сужения энтропии на множество $\mathcal{V}_{\sigma,c}$, а также необходимые и достаточные условия существования состояния с максимальной энтропией для этого множества рассмотрены в следующем предложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть σ – произвольное состояние $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и c – положительное число.

1) Множество $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ является компактным выпуклым подмножеством множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

2) Квантовая энтропия ограничена на множестве $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ тогда и только тогда, когда $d(\sigma) < 1$.

3) Квантовая энтропия непрерывна на множестве $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ тогда и только тогда, когда $d(\sigma) = 0$.

4) Если $d(\sigma) < 1$ и $c \leq c_*(\sigma)$, то $\sup_{\rho \in \mathcal{V}_{\sigma,c}} H(\rho) = \frac{\lambda^* c + \log \text{Tr } \sigma^{\lambda^*}}{1 - \lambda^*}$, где $\lambda^* = \lambda^*(\sigma, c) \geq d(\sigma)$ – единственное решение уравнения⁵

$$(\lambda - 1) \text{Tr}(\sigma^\lambda \log \sigma) = (c + \log \text{Tr } \sigma^\lambda) \text{Tr } \sigma^\lambda,$$

и существует состояние с максимальной энтропией $\Gamma(\mathcal{V}_{\sigma,c}) = (\text{Tr } \sigma^{\lambda^*})^{-1} \sigma^{\lambda^*}$.

Если $d(\sigma) < 1$ и $c > c_*(\sigma)$, то $\sup_{\rho \in \mathcal{V}_{\sigma,c}} H(\rho) = \frac{d(\sigma)c + \log \text{Tr } \sigma^{d(\sigma)}}{1 - d(\sigma)}$ и в $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ не существует состояния с максимальной энтропией. В обоих случаях при $d(\sigma) < 1$ имеет место равенство

$$\sup_{\rho \in \mathcal{V}_{\sigma,c}} H(\rho) = \inf_{\lambda \in (d(\sigma), 1)} \frac{\lambda c + \log \text{Tr } \sigma^\lambda}{1 - \lambda}.$$

В § 3 ч. II настоящей работы на рис. 2 представлены, наряду с другими характеристиками, результаты вычисления $\sup_{\rho \in \mathcal{V}_{\sigma,c}} H(\rho)$ как функции параметра c для состояния σ , у которого $d(\sigma) < 1$ и $c_*(\sigma) < +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что σ – состояние полного ранга такое, что $-\log \sigma$ – $\mathfrak{H}$ -оператор⁶.

1) Утверждение о компактности доказывается при помощи критерия компактности, рассмотренного в § 2, и неравенства

$$H(\rho \| \sigma) \geq H(P\rho P \| P\sigma P) \geq \text{Tr}(P\rho) \log \frac{\text{Tr}(P\rho)}{\text{Tr}(P\sigma)} + \text{Tr}(P\sigma) - \text{Tr}(P\rho), \quad (17)$$

которое справедливо для любых состояний ρ, σ и произвольного проектора P . Это неравенство следует из [8, лемма 3] и свойства монотонности относительной энтропии [9], примененного к вполне положительному сохраняющему след отображению $\Phi(A) = (\text{Tr } A)\tau$, где τ – произвольное состояние.

⁵Это значит, что $H((\text{Tr } \sigma^{\lambda^*})^{-1} \sigma^{\lambda^*} \| \sigma) = c$.

⁶Это предположение и используемая в доказательстве бесконечномерность пространства $\mathcal{H}$ подразумевают бесконечный ранг состояния σ . Однако можно показать, что все утверждения предложения 3 справедливы и для состояния σ конечного ранга.

Пусть $\{P_n\}$ – последовательность проекторов конечного ранга, выбранная по данному состоянию σ , такая, что $\text{Tr } P_n \sigma > 1 - n^{-1}$. Предположим, что множество $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ не компактно. В силу критерия компактности для каждого n существует состояние ρ_n из $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ такое, что $\text{Tr}((I_{\mathcal{H}} - P_n)\rho_n) > \varepsilon$ для некоторого положительного ε . Используя неравенство (17) с $P = I_{\mathcal{H}} - P_n$, получаем

$$\begin{aligned} H(\rho_n \| \sigma) &\geq \text{Tr}((I_{\mathcal{H}} - P_n)\rho_n) \log \frac{\text{Tr}((I_{\mathcal{H}} - P_n)\rho_n)}{\text{Tr}((I_{\mathcal{H}} - P_n)\sigma)} \\ &\quad + \text{Tr}((I_{\mathcal{H}} - P_n)\sigma) - \text{Tr}((I_{\mathcal{H}} - P_n)\rho_n) \geq \varepsilon \log(\varepsilon n) - 1 \end{aligned}$$

для достаточно больших n , следовательно, $H(\rho_n \| \sigma)$ стремится к $+\infty$ при $n \rightarrow +\infty$, что противоречит определению множества $\mathcal{V}_{\sigma,c}$.

2) Если $d(\sigma) = 1$, то в силу утверждения 2) предложения 2 энтропия не ограничена на множестве $\mathcal{V}_{\sigma,c}$.

Если $d(\sigma) < 1$, то из леммы 3 следует, что

$$H(\rho) = \frac{\lambda H(\rho \| \sigma) + \log \text{Tr } \sigma^\lambda - H(\rho \| \sigma_\lambda)}{1 - \lambda} \leq \frac{c\lambda + \log \text{Tr } \sigma^\lambda}{1 - \lambda} \quad (18)$$

для всех λ из $(d(\sigma), 1)$ и всех ρ из $\mathcal{V}_{\sigma,c}$. Поэтому $\sup_{\rho \in \mathcal{V}_{\sigma,c}} H(\rho) < +\infty$.

3) Если $d(\sigma) > 0$, то в силу предложения 1 энтропия не является непрерывной на множестве $\mathcal{K}_{-\log \sigma, c}$, которое содержится в $\mathcal{V}_{\sigma,c}$.

Если $d(\sigma) = 0$, то, как показано выше, $\sup_{\rho \in \mathcal{V}_{\sigma,c}} H(\rho) = d < +\infty$ и, следовательно, множество $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ содержится в $\mathcal{K}_{-\log \sigma, c+d}$. В силу предложения 1 энтропия непрерывна на множестве $\mathcal{K}_{-\log \sigma, c+d}$.

4) Обозначим через σ_λ состояние $(\text{Tr } \sigma^\lambda)^{-1} \sigma^\lambda$ и заметим, что непрерывная функция $f(\lambda) = H(\sigma_\lambda \| \sigma)$ является убывающей на интервале $(d(\sigma), 1)$. Действительно, нетрудно показать, что эта функция имеет производную

$$f'(\lambda) = -(1 - \lambda)(\text{Tr } \sigma_\lambda \log^2 \sigma - (\text{Tr } \sigma_\lambda \log \sigma)^2) < 0$$

для каждого λ из $(d(\sigma), 1)$. Заметим также, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow d(\sigma)+0} f(\lambda) = c_* \leq +\infty, \quad f(1) = 0.$$

Предположим, что $c \leq c_*$. Из приведенного выше наблюдения следует существование единственного решения λ^* уравнения $f(\lambda) = c$. Таким образом, $H(\sigma_{\lambda^*} \| \sigma) = c$, следовательно,

$$H(\sigma_{\lambda^*}) = \frac{c\lambda^* + \log \text{Tr } \sigma^{\lambda^*}}{1 - \lambda^*}.$$

Из неравенства (18) следует, что $H(\rho) \leq H(\sigma_{\lambda^*})$ для всех ρ из $\mathcal{V}_{\sigma,c}$.

Предположим, что $c_* < +\infty$ и $c > c_*$. В этом случае

$$h = \frac{d(\sigma)c + \log \text{Tr } \sigma^{d(\sigma)}}{1 - d(\sigma)} > \frac{d(\sigma)c_* + \log \text{Tr } \sigma^{d(\sigma)}}{1 - d(\sigma)} = H(\sigma_{d(\sigma)}).$$

Поскольку $d(\sigma_{d(\sigma)}) = 1$, из предложения 2 следует, что для каждого достаточно большого m существует последовательность состояний $\{\rho_n^m\}_n$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\rho_n^m \| \sigma_{d(\sigma)}) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} H(\rho_n^m) = h - \frac{1}{m}. \quad (19)$$

Используя лемму 3, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} H(\rho_n^m \| \sigma) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H(\rho_n^m \| \sigma_{d(\sigma)}) - \log \operatorname{Tr} \sigma^{d(\sigma)} + (1 - d(\sigma)) H(\rho_n^m)}{d(\sigma)} \\ &= \frac{(1 - d(\sigma))h - \log \operatorname{Tr} \sigma^{d(\sigma)}}{d(\sigma)} - \frac{1 - d(\sigma)}{d(\sigma)m} = c - \frac{1 - d(\sigma)}{d(\sigma)m}. \end{aligned}$$

Таким образом, для каждого m существует $N(m)$ такое, что ρ_n^m лежит в $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ для всех $n \geq N(m)$. С учетом этого из (19) следует, что из семейства $\{\rho_n^m\}_{n,m}$ можно выбрать последовательность $\{\hat{\rho}_n\}_n$ состояний из $\mathcal{V}_{\sigma,c}$, сходящуюся к состоянию $\sigma_{d(\sigma)}$, такую, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\hat{\rho}_n) = h$. Поэтому $\sup_{\rho \in \mathcal{V}_{\sigma,c}} H(\rho) \geq h$. Поскольку обратное неравенство следует из (18), получаем $\sup_{\rho \in \mathcal{V}_{\sigma,c}} H(\rho) = h > H(\sigma_{d(\sigma)})$. В силу леммы 2 множество $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ не содержит состояния с максимальной энтропией.

Общее выражение для $\sup_{\rho \in \mathcal{V}_{\sigma,c}} H(\rho)$ выводится из предыдущих наблюдений и замечания, что нижняя грань в этом выражении достигается при $\lambda = \lambda^*$, если $c \leq c_*(\sigma)$, и при $\lambda = d(\sigma)$, если $c \geq c_*(\sigma)$.

Следующее предложение посвящено рассмотрению вопроса о непрерывности энтропии на произвольных множествах состояний.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $\mathcal{A}$ – произвольное замкнутое подмножество множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Следующие свойства равносильны:

- (i) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{K}_{H,h}$ для некоторого $\mathfrak{H}$ -оператора H с $g(H) = 0$ и положительного числа h ;
- (ii) энтропия непрерывна на множестве $\mathcal{A}$ и существует состояние σ из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ такое, что относительная энтропия $H(\rho \| \sigma)$ непрерывна и ограничена на множестве $\mathcal{A}$;
- (iii) существует $\mathfrak{H}$ -оператор $\tilde{H}$ с $g(\tilde{H}) < +\infty$ такой, что линейная функция $\operatorname{Tr} \rho \tilde{H}$ непрерывна и ограничена на множестве $\mathcal{A}$.

Если равносильные свойства (i)–(iii) имеют место для множества $\mathcal{A}$, то $\mathfrak{H}$ -операторы $H, \tilde{H}$ и состояние σ можно выбрать таким образом, что $\operatorname{Tr} \sigma H < +\infty$, $\tilde{H} = -\log \sigma$ и $H(\sigma) < +\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из последнего утверждения предложения 4 следует, что если свойства (i)–(iii) имеют место для множества $\mathcal{A}$, то эти свойства имеют место и для множества $\overline{\operatorname{co}}\{\mathcal{A}, \sigma\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4. (ii) $\Rightarrow$ (iii). Поскольку (ii) гарантирует конечность энтропии на $\mathcal{A}$, имеем

$$H(\rho \| \sigma) = -H(\rho) + \operatorname{Tr} \rho(-\log \sigma) \quad \forall \rho \in \mathcal{A}. \quad (20)$$

В силу предложения 3 множество $\mathcal{A}$ компактно и, следовательно, энтропия ограничена на $\mathcal{A}$. Таким образом, из (ii) и (20) следует непрерывность и ограниченность функции $\operatorname{Tr} \rho(-\log \sigma)$ на множестве $\mathcal{A}$. Поэтому (iii) имеет место с $\tilde{H} = -\log \sigma$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Пусть $\lambda > g(\tilde{H})$ и $\sigma = (\operatorname{Tr} \exp(-\lambda \tilde{H}))^{-1} \exp(-\lambda \tilde{H})$ – состояние из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ с конечной энтропией. Свойство (iii) означает непрерывность и ограниченность функции $\operatorname{Tr} \rho(-\log \sigma)$ на множестве $\mathcal{A}$. Поэтому из (20) следует, в силу полунепрерывности снизу энтропии и относительной энтропии, непрерывность и ограниченность функций $H(\rho)$ и $H(\rho \| \sigma)$ на множестве $\mathcal{A}$.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Пусть $H = \sum_k h_k |k\rangle\langle k|$, где $\{|k\rangle\}$ – ортонормированный базис в $\mathcal{H}$. В силу предположения имеем $\sum_k \exp(-\lambda h_k) < +\infty$ для всех $\lambda > 0$ и, следовательно, $\sum_k h_k \exp(-\lambda h_k) < +\infty$ для всех $\lambda > 0$. Это гарантирует существование последовательности $\{\lambda_k\}$ положительных чисел, монотонно сходящейся к нулю, такой, что $\sum_k h_k \exp(-\lambda_k h_k) < +\infty$. Такую последовательность можно построить следующим образом. Для произвольного натурального m пусть $N(m)$ – минимальное натуральное число такое, что $\sum_{k=N(m)}^{+\infty} h_k \exp(-h_k/m) < 2^{-m}$. Нетрудно видеть, что последовательность

$$\lambda_k = \begin{cases} 1, & k < N(2), \\ \frac{1}{m}, & N(m) \leq k < N(m+1), \quad m \geq 2, \end{cases}$$

обладает указанным свойством. Поскольку $\text{Tr } \rho H = \sum_k h_k \langle k|\rho|k\rangle \leq h$ для всех ρ из $\mathcal{A}$, ряд $\sum_k \lambda_k h_k \langle k|\rho|k\rangle$ сходится равномерно на $\mathcal{A}$. Это гарантирует непрерывность на $\mathcal{A}$ функции $\text{Tr } \rho(-\log \sigma)$, где

$$\sigma = \left(\sum_k \exp(-\lambda_k h_k) \right)^{-1} \sum_k \exp(-\lambda_k h_k) |k\rangle\langle k|.$$

Заметим, что из условия $\sum_k h_k \exp(-\lambda_k h_k) < +\infty$ следует $\text{Tr } \sigma H < +\infty$ и $H(\sigma) < +\infty$. Таким образом, (iii) имеет место с $\tilde{H} = -\log \sigma$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Пусть $\tilde{H} = \sum_k \tilde{h}_k |k\rangle\langle k|$, где $\{|k\rangle\}$ – ортонормированный базис в $\mathcal{H}$. Поскольку (iii) равносильно (ii), из предложения 3 следует компактность множества $\mathcal{A}$. В соответствии с (iii) ряд $\sum_k \tilde{h}_k \langle k|\rho|k\rangle$ сходится на компактном множестве $\mathcal{A}$ к непрерывной функции $\text{Tr } \rho \tilde{H}$. В силу леммы Дини этот ряд сходится равномерно на $\mathcal{A}$, что гарантирует существование последовательности $\{\lambda_k\}$ положительных чисел, монотонно сходящейся к $+\infty$, такой, что $\sum_k \lambda_k \tilde{h}_k \langle k|\rho|k\rangle \leq h < +\infty$ для всех ρ из $\mathcal{A}$. Нетрудно видеть, что (i) имеет место с $H = \sum_k \lambda_k \tilde{h}_k |k\rangle\langle k|$.

Последнее утверждение предложения следует из приведенного выше построения.

Из предложений 1 и 4 вытекает следующее наблюдение.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если H – $\mathfrak{H}$ -оператор с $g(H) = 0$, то существуют состояние σ из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{H}$ -оператор $\tilde{H}$ с $g(\tilde{H}) < +\infty$ такие, что относительная энтропия $H(\rho \| \sigma)$ и линейная функция $\text{Tr } \rho \tilde{H}$ непрерывны на множестве $\mathcal{K}_{H,h}$.

Поскольку множество $\mathcal{K}_{H,h}$ является выпуклым, из предложений 1 и 4 получаем следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если энтропия непрерывна на замкнутом множестве $\mathcal{A}$ и существует состояние σ из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ такое, что относительная энтропия $H(\rho \| \sigma)$ непрерывна и ограничена на множестве $\mathcal{A}$, то энтропия непрерывна на множестве $\text{co}(\mathcal{A})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Предположение о существовании состояния σ в п. (ii) предложения 4 и в следствии 2 существенно. Действительно, пусть $\mathcal{A}$ – замкнутое множество всех чистых состояний из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Энтропия тождественно равна нулю на этом множестве и, следовательно, непрерывна. Но она не является

непрерывной функцией на $\overline{\text{co}}(\mathcal{A}) = \mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Существует компактное множество $\mathcal{A}$ чистых состояний (сходящаяся последовательность) такое, что энтропия не ограничена на множестве $\overline{\text{co}}(\mathcal{A})$ (см. пример 1 в ч. II настоящей работы).

Предложение 4 и следствие 2 позволяют показать непрерывность энтропии и относительной энтропии на некоторых нетривиальных множествах состояний. В ч. II настоящей работы нам потребуется следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ – замкнутое семейство унитарных (анти-унитарных) операторов в пространстве $\mathcal{H}$, и пусть ω – состояние из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ такое, что $U_\lambda \omega U_\lambda^* = \omega$ для всех $\lambda \in \Lambda$. Тогда для любого состояния σ такого, что $\text{Tr } \sigma(-\log \omega) < +\infty$, функции $H(\rho)$ и $H(\rho \| \omega)$ непрерывны на множестве $\overline{\text{co}}(\{U_\lambda \sigma U_\lambda^*\}_{\lambda \in \Lambda})$.

Для произвольного ортонормированного базиса $\{|k\rangle\} \subset \mathcal{H}$ рассмотрим вполне положительное сохраняющее след отображение

$$\Pi_{\{|k\rangle\}}: \rho \mapsto \sum_k \langle k | \rho | k \rangle |k\rangle \langle k|.$$

Заметим, что множество выходных состояний отображения $\Pi_{\{|k\rangle\}}$ можно рассматривать как множество классических состояний (распределений вероятностей). Поэтому множество $\Pi_{\{|k\rangle\}}(\mathcal{A})$ можно назвать классической проекцией множества $\mathcal{A}$, соответствующей базису $\{|k\rangle\}$.

Следующее предложение показывает, что некоторые свойства множеств квантовых состояний тесно связаны со свойствами классических проекций этих множеств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $\mathcal{A}$ – произвольное замкнутое подмножество множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

1) Множество $\mathcal{A}$ компактно, если множество $\Pi_{\{|k\rangle\}}(\mathcal{A})$ компактно хотя бы для одного базиса $\{|k\rangle\}$.

2) Если множество $\mathcal{A}$ компактно, то множество $\Pi_{\{|k\rangle\}}(\mathcal{A})$ компактно для любого базиса $\{|k\rangle\}$.

3) Энтропия ограничена на множестве $\mathcal{A}$, если энтропия ограничена на множестве $\Pi_{\{|k\rangle\}}(\mathcal{A})$ хотя бы для одного базиса $\{|k\rangle\}$.

4) Если энтропия ограничена на выпуклом множестве $\mathcal{A}$, то энтропия ограничена на множестве $\Pi_{\{|k\rangle\}}(\mathcal{A})$ по крайней мере для одного базиса $\{|k\rangle\}$.

5) Энтропия непрерывна на множестве $\mathcal{A}$, если энтропия непрерывна на множестве $\Pi_{\{|k\rangle\}}(\mathcal{A})$ хотя бы для одного базиса $\{|k\rangle\}$.

6) Если энтропия непрерывна на множестве $\mathcal{A}$ и существует состояние σ в $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ такое, что относительная энтропия $H(\rho \| \sigma)$ непрерывна и ограничена на множестве $\mathcal{A}$, то энтропия непрерывна на множестве $\Pi_{\{|k\rangle\}}(\mathcal{A})$ по крайней мере для одного базиса $\{|k\rangle\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если множество $\Pi_{\{|k\rangle\}}(\mathcal{A})$ компактно, то, в силу критерия компактности для подмножеств классических состояний, для любого $\varepsilon > 0$ существует N_ε такое, что

$$\text{Tr } P_\varepsilon \rho = \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \langle k | \rho | k \rangle \geq 1 - \varepsilon \quad \forall \rho \in \mathcal{A},$$

где $P_\varepsilon = \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} |k\rangle\langle k|$ – проектор конечного ранга. Это в силу критерия компактности для подмножеств $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ гарантирует компактность множества $\mathcal{A}$.

Если множество $\mathcal{A}$ компактно, то для любого базиса $\{|k\rangle\}$ множество $\Pi_{\{|k\rangle\}}(\mathcal{A})$ компактно как образ компактного множества при непрерывном отображении.

В доказательстве следующих утверждений будет использовано тождество

$$H(\rho \parallel \Pi_{\{|k\rangle\}}(\rho)) = H(\Pi_{\{|k\rangle\}}(\rho)) - H(\rho), \quad (21)$$

справедливое для любого состояния ρ такого, что $H(\Pi_{\{|k\rangle\}}(\rho)) < +\infty$.

Если энтропия ограничена на множестве $\Pi_{\{|k\rangle\}}(\mathcal{A})$, то она ограничена и на множестве $\mathcal{A}$, поскольку из (21) и неотрицательности относительной энтропии следует, что $H(\rho) \leq H(\Pi_{\{|k\rangle\}}(\rho))$ для любого ρ из $\mathcal{A}$.

Если энтропия ограничена на выпуклом множестве $\mathcal{A}$, то в силу приведенного далее следствия 7 множество $\mathcal{A}$ содержится в множестве $\mathcal{K}_{H,h}$, определенном некоторым $\mathfrak{H}$ -оператором H с $g(H) < +\infty$. Пусть $\{|k\rangle\}$ – базис из собственных векторов $\mathfrak{H}$ -оператора H . Множество $\Pi_{\{|k\rangle\}}(\mathcal{A})$ также содержится в $\mathcal{K}_{H,h}$, и, следовательно, энтропия ограничена на $\Pi_{\{|k\rangle\}}(\mathcal{A})$ в силу предложения 1.

Предположим, что энтропия непрерывна на множестве $\Pi_{\{|k\rangle\}}(\mathcal{A})$. Тогда энтропия конечна на этом множестве и в силу (21) энтропия конечна на множестве $\mathcal{A}$. Пусть ρ_0 – состояние из $\mathcal{A}$ и $\{\rho_n\}$ – последовательность состояний из $\mathcal{A}$, сходящаяся к состоянию ρ_0 . Используя предположение о непрерывности энтропии на множестве $\Pi_{\{|k\rangle\}}(\mathcal{A})$, полунепрерывность снизу относительной энтропии и тождество (21), получаем

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} H(\rho_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} H(\Pi_{\{|k\rangle\}}(\rho_n)) - \liminf_{n \rightarrow +\infty} H(\rho_n \parallel \Pi_{\{|k\rangle\}}(\rho_n)) \\ &\leq H(\Pi_{\{|k\rangle\}}(\rho_0)) - H(\rho_0 \parallel \Pi_{\{|k\rangle\}}(\rho_0)) = H(\rho_0). \end{aligned}$$

Из этого неравенства и полунепрерывности снизу энтропии следует, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\rho_n) = H(\rho_0)$.

Если энтропия непрерывна на множестве $\mathcal{A}$ и существует состояние σ из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ такое, что относительная энтропия $H(\rho \parallel \sigma)$ непрерывна и ограничена на множестве $\mathcal{A}$, то в силу предложения 4 множество $\mathcal{A}$ содержится в множестве $\mathcal{K}_{H,h}$, определенном некоторым $\mathfrak{H}$ -оператором H с $g(H) = 0$. Пусть $\{|k\rangle\}$ – базис из собственных векторов H . Тогда множество $\Pi_{\{|k\rangle\}}(\mathcal{A})$ также содержится в $\mathcal{K}_{H,h}$ и в силу предложения 1 энтропия непрерывна на $\Pi_{\{|k\rangle\}}(\mathcal{A})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Выражение “по крайней мере для одного” в пп. 4) и 6) предложения 5 нельзя, в отличие от п. 2), заменить на выражение “для любого”. Действительно, для любого чистого состояния ρ существует базис $\{|k\rangle\}$ такой, что $H(\Pi_{\{|k\rangle\}}(\rho)) = +\infty$.

Пусть σ – состояние с базисом из собственных векторов $\{|k\rangle\}$. Множество $\Pi_{\{|k\rangle\}}^{-1}(\sigma)$, состоящее из всех состояний, имеющих такие же диагональные значения в базисе $\{|k\rangle\}$, что и состояние σ , назовем *слоем*⁷, соответствующим

⁷Если состояние σ имеет различные собственные значения, то базис из собственных векторов $\{|k\rangle\}$ по существу единствен и множество $\mathcal{L}(\sigma)$ определяется только состоянием σ . Если состояние σ имеет кратные собственные значения, то множество $\mathcal{L}(\sigma)$ также зависит от выбора базиса $\{|k\rangle\}$. Поскольку в последнем случае все “варианты” множества $\mathcal{L}(\sigma)$ изоморфны друг другу, будем предполагать, что выбран один из этих вариантов.

состоянию σ , и обозначим $\mathcal{L}(\sigma)$. В некотором смысле слой можно рассматривать как простейшее чисто квантовое множество состояний.

Используя (21), получаем

$$H(\rho) \leq H(\sigma) \quad \forall \rho \in \mathcal{L}(\sigma), \quad (22)$$

и, следовательно, энтропия ограничена на слое, соответствующем состоянию σ , тогда и только тогда, когда $H(\sigma) < +\infty$. Следующее предложение показывает, что ограниченность энтропии на слое гарантирует ее непрерывность.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть σ – произвольное состояние из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

1) Множество $\mathcal{L}(\sigma)$ является компактным выпуклым подмножеством $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

2) Энтропия $H(\rho)$ непрерывна на множестве $\mathcal{L}(\sigma)$ тогда и только тогда, когда $\sup_{\rho \in \mathcal{L}(\sigma)} H(\rho) = H(\sigma) < +\infty$.

3) Если $H(\sigma) < +\infty$, то $H(\rho \| \sigma) = H(\sigma) - H(\rho)$ для любого состояния ρ из $\mathcal{L}(\sigma)$.

4) Если $H(\sigma) = +\infty$, то $H(\rho \| \sigma) = +\infty$ для произвольного чистого состояния ρ из $\mathcal{L}(\sigma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения 1) и 2) следуют из пп. 1) и 5) предложения 5 соответственно, поскольку $\Pi_{\{|k\rangle\}}(\mathcal{L}(\sigma)) = \{\sigma\}$, если $\{|k\rangle\}$ – базис из собственных векторов состояния σ .

Выражение для относительной энтропии в случае $H(\sigma) < +\infty$ есть просто переформулировка тождества (21).

Пусть $H(\sigma) = +\infty$ и ρ – произвольное чистое состояние из $\mathcal{L}(\sigma)$. Рассмотрим последовательности состояний $\{\sigma_n = (\text{Tr } P_n \sigma)^{-1} P_n \sigma\}$ и $\{\rho_n = (\text{Tr } P_n \rho)^{-1} P_n \rho P_n\}$, где P_n – спектральный проектор состояния σ , соответствующий его n максимальным собственным значениям.

Поскольку для каждого n чистое состояние ρ_n лежит в $\mathcal{L}(\sigma_n)$, используя (21), получаем

$$H(\rho_n \| \sigma_n) = H(\sigma_n) - H(\rho_n) = H(\sigma_n).$$

В силу [8, лемма 4] левая и правая части этого равенства сходятся к $H(\rho \| \sigma)$ и к $H(\sigma) = +\infty$ соответственно при $n \rightarrow +\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Предложения 5 и 6 приводят к следующему наблюдению: разрывность и неограниченность квантовой энтропии в бесконечномерном случае имеют чисто классическую природу. Действительно, множество всех квантовых состояний можно представить как совокупность слоев, соответствующих всем состояниям, диагонализированным в некотором базисе. Множество таких состояний можно отождествить с множеством классических состояний – распределений вероятностей, в то время как отдельный слой – с множеством чисто квантовых состояний. Предложение 6 показывает, что энтропия непрерывна на целом слое, если она конечна на соответствующем классическом состоянии. В силу предложения 5 разрывность энтропии связана с переходом между слоями, соответствующими множеству классических состояний, на которых энтропия разрывна.

§ 4. χ -емкость

4.1. Оптимальное среднее. Пусть $\mathcal{A}$ – произвольное подмножество множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. χ -емкость множества $\mathcal{A}$ определяется выражением

$$\overline{C}(\mathcal{A}) = \sup_{\{\pi_i, \rho_i\}} \chi(\{\pi_i, \rho_i\}), \quad (23)$$

в котором точная верхняя грань берется по всем ансамблям $\{\pi_i, \rho_i\}$ состояний из $\mathcal{A}$.

Если энтропия ограничена на множестве $\overline{\text{co}}(\mathcal{A})$, то

$$\overline{C}(\mathcal{A}) = \sup_{\{\pi_i, \rho_i\}} \left(H\left(\sum_i \pi_i \rho_i\right) - \sum_i \pi_i H(\rho_i) \right) \leqslant \sup_{\rho \in \overline{\text{co}}(\mathcal{A})} H(\rho) < +\infty.$$

Однако ограниченность энтропии не является необходимым условием конечности χ -емкости, как это следует из примеров, рассмотренных в ч. II настоящей работы.

В соответствии с [15] последовательность $\{\{\pi_i^n, \rho_i^n\}\}_n$ ансамблей состояний из $\mathcal{A}$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \chi(\{\pi_i^n, \rho_i^n\}) = \overline{C}(\mathcal{A}),$$

называется *аппроксимирующей последовательностью* для множества $\mathcal{A}$.

Если $\mathcal{A}$ – множество состояний (операторов плотности) в конечномерном гильбертовом пространстве, то существует ансамбль $\{\pi_i, \rho_i\}$, являющийся оптимальным ансамблем для множества $\mathcal{A}$, на котором достигается точная верхняя грань в определении χ -емкости (23) и среднее состояние которого обладает рядом особых свойств [14]. Если $\mathcal{A}$ – множество состояний (операторов плотности) в бесконечномерном гильбертовом пространстве, то оптимальный ансамбль, в общем случае, не существует, но можно доказать существование единственного состояния, обладающего свойствами среднего состояния оптимального ансамбля в конечномерном случае.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathcal{A}$ – множество с конечной χ -емкостью $\overline{C}(\mathcal{A})$.

1) Существует единственное состояние $\Omega(\mathcal{A})$ в $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ такое, что

$$H(\rho \| \Omega(\mathcal{A})) \leqslant \overline{C}(\mathcal{A}) \quad \forall \rho \in \mathcal{A}.$$

Состояние $\Omega(\mathcal{A})$ лежит в $\overline{\text{co}}(\mathcal{A})$. Для любой аппроксимирующей последовательности ансамблей $\{\{\pi_i^n, \rho_i^n\}\}_n$ для множества $\mathcal{A}$ соответствующая последовательность средних состояний $\{\bar{\rho}_n\}$ H -сходится⁸ к состоянию $\Omega(\mathcal{A})$.

2) χ -емкость множества $\mathcal{A}$ определяется выражением

$$\overline{C}(\mathcal{A}) = \inf_{\sigma \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})} \sup_{\rho \in \mathcal{A}} H(\rho \| \sigma) = \inf_{\sigma \in \overline{\text{co}}(\mathcal{A})} \sup_{\rho \in \mathcal{A}} H(\rho \| \sigma) = \sup_{\rho \in \mathcal{A}} H(\rho \| \Omega(\mathcal{A})), \quad (24)$$

где первые два равенства выполняются и в случае $\overline{C}(\mathcal{A}) = +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Покажем сначала, что при любой аппроксимирующей последовательности ансамблей $\{\mu_n = \{\pi_i^n, \rho_i^n\}_{i=1}^{N(n)}\}$ для множества $\mathcal{A}$ соответствующая последовательность средних состояний $\{\bar{\rho}_n\}$ сходится к некоторому

⁸Это значит, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\bar{\rho}_n \| \Omega(\mathcal{A})) = 0$.

состоянию из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. По определению аппроксимирующей последовательности для любого $\varepsilon > 0$ существует N_ε такое, что $\chi(\mu_n) > \overline{C}(\mathcal{A}) - \varepsilon$ для всех $n \geq N_\varepsilon$. В силу леммы 1 при $m = 2$ и $\lambda = 1/2$ имеем

$$\begin{aligned} \overline{C}(\mathcal{A}) - \varepsilon &\leq \frac{1}{2} \chi(\mu_{n_1}) + \frac{1}{2} \chi(\mu_{n_2}) \\ &\leq \chi\left(\frac{1}{2} \mu_{n_1} + \frac{1}{2} \mu_{n_2}\right) - \frac{1}{8} \|\bar{\rho}_{n_2} - \bar{\rho}_{n_1}\|_1^2 \leq \overline{C}(\mathcal{A}) - \frac{1}{8} \|\bar{\rho}_{n_2} - \bar{\rho}_{n_1}\|_1^2 \end{aligned}$$

и, следовательно, $\|\bar{\rho}_{n_2} - \bar{\rho}_{n_1}\|_1 < \sqrt{8\varepsilon}$ для всех $n_1 \geq N_\varepsilon$ и $n_2 \geq N_\varepsilon$. Таким образом, последовательность $\{\bar{\rho}_n\}$ является фундаментальной и, следовательно, сходится к некоторому состоянию ρ_* из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

Пусть σ – произвольное состояние из $\mathcal{A}$. Для каждого натурального n и произвольного η из $[0, 1]$ рассмотрим ансамбль⁹ μ_n^η , состоящий из набора состояний $\{\rho_1^n, \dots, \rho_{N(n)}^n, \sigma\}$ с соответствующим распределением вероятностей $\{(1 - \eta)\pi_1^n, \dots, (1 - \eta)\pi_{N(n)}^n, \eta\}$. Получим последовательность ансамблей $\{\mu_n^\eta\}$ с соответствующей последовательностью средних состояний $\{\bar{\rho}_n^\eta = (1 - \eta)\bar{\rho}_n + \eta\sigma\}_n$, сходящейся к состоянию $\bar{\rho}_\eta = (1 - \eta)\rho_* + \eta\sigma$ при $n \rightarrow +\infty$.

Для произвольного n имеем

$$\chi(\mu_n^\eta) = (1 - \eta) \sum_i \pi_i^n H(\rho_i^n \| \bar{\rho}_n^\eta) + \eta H(\sigma \| \bar{\rho}_n^\eta). \quad (25)$$

В силу предположения конечности $\overline{C}(\mathcal{A})$ обе суммы в правой части выражения (25) конечны. Применяя тождество Дональда (3) к первой сумме в правой части, получаем

$$\sum_i \pi_i^n H(\rho_i^n \| \bar{\rho}_n^\eta) = \chi(\mu_n^0) + H(\bar{\rho}_n \| \bar{\rho}_n^\eta).$$

Подстановка предыдущего выражения в (25) дает

$$\chi(\mu_n^\eta) = \chi(\mu_n^0) + (1 - \eta)H(\bar{\rho}_n \| \bar{\rho}_n^\eta) + \eta(H(\sigma \| \bar{\rho}_n^\eta) - \chi(\mu_n^0)).$$

Отсюда в силу неотрицательности относительной энтропии получаем

$$H(\sigma \| \bar{\rho}_n^\eta) \leq \eta^{-1}(\chi(\mu_n^\eta) - \chi(\mu_n^0)) + \chi(\mu_n^0), \quad \eta \neq 0. \quad (26)$$

По определению аппроксимирующей последовательности

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \chi(\mu_n^0) = \overline{C}(\mathcal{A}) \geq \chi(\mu_n^\eta) \quad (27)$$

для всех n и $\eta > 0$. Следовательно,

$$\liminf_{\eta \rightarrow +0} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \eta^{-1}[\chi(\mu_n^\eta) - \chi(\mu_n^0)] \leq 0. \quad (28)$$

В силу полунепрерывности снизу относительной энтропии из неравенств (26)–(28) следует, что

$$H(\sigma \| \rho_*) \leq \liminf_{\eta \rightarrow +0} \liminf_{n \rightarrow +\infty} H(\sigma \| \bar{\rho}_n^\eta) \leq \overline{C}(\mathcal{A}).$$

⁹Такое расширение ансамбля путем “подмешивания” дополнительного состояния было первоначально использовано в [14] в конечномерном случае.

Таким образом, доказано, что

$$\sup_{\sigma \in \mathcal{A}} H(\sigma \| \rho_*) \leq \overline{C}(\mathcal{A}). \quad (29)$$

Пусть $\{\{\lambda_j^n, \sigma_j^n\}\}_n$ – произвольная аппроксимирующая последовательность ансамблей. В силу неравенства (29) получаем

$$\sum_j \lambda_j^n H(\sigma_j^n \| \rho_*) \leq \overline{C}(\mathcal{A}).$$

Применяя тождество Дональда (3), получаем

$$\sum_j \lambda_j^n H(\sigma_j^n \| \rho_*) = \sum_j \lambda_j^n H(\sigma_j^n \| \bar{\sigma}_n) + H(\bar{\sigma}_n \| \rho_*). \quad (30)$$

Из двух предыдущих выражений следует, что

$$H(\bar{\sigma}_n \| \rho_*) \leq \overline{C}(\mathcal{A}) - \sum_j \lambda_j^n H(\sigma_j^n \| \bar{\sigma}_n).$$

Правая часть этого неравенства стремится к нулю при $n \rightarrow +\infty$ благодаря аппроксимирующему свойству последовательности $\{\{\lambda_j^n, \sigma_j^n\}\}_n$. Таким образом, последовательность $\{\bar{\sigma}_n\}_n$ H -сходится к состоянию ρ_* и, следовательно, сходится к этому состоянию в топологии следовой нормы. Поэтому состояние ρ_* не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности, а определяется только множеством $\mathcal{A}$. Обозначим это состояние $\Omega(\mathcal{A})$. Предыдущее наблюдение показывает, что $\rho_* = \Omega(\mathcal{A})$ – единственное состояние из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, для которого имеет место неравенство (29).

2) Для доказательства выражения (24) покажем сначала, что неравенство (29) на самом деле является равенством. Действительно, из выражения (30), справедливого для любой аппроксимирующей последовательности $\{\{\lambda_j^n, \sigma_j^n\}\}_n$, с учетом неотрицательности относительной энтропии следует, что

$$\sum_j \lambda_j^n H(\sigma_j^n \| \bar{\sigma}_n) \leq \sum_j \lambda_j^n H(\sigma_j^n \| \rho_*) \leq \sup_{\sigma \in \mathcal{A}} H(\sigma \| \rho_*).$$

В силу аппроксимирующего свойства последовательности $\{\{\lambda_j^n, \sigma_j^n\}\}_n$ левая часть этого неравенства стремится к $\overline{C}(\mathcal{A})$ при $n \rightarrow +\infty$. Это доказывает равенство в (29).

Рассмотрим функцию $F(\sigma) = \sup_{\rho \in \mathcal{A}} H(\rho \| \sigma)$ на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Равенство в (29) означает, что $F(\Omega(\mathcal{A})) = \overline{C}(\mathcal{A})$. Следовательно, состояние $\Omega(\mathcal{A})$ – единственная точка минимума функции $F(\sigma)$ на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Действительно, пусть σ_0 – состояние из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ такое, что

$$\sup_{\rho \in \mathcal{A}} H(\rho \| \sigma_0) = F(\sigma_0) \leq F(\Omega(\mathcal{A})) = \overline{C}(\mathcal{A}).$$

В силу утверждения 1) теоремы $\sigma_0 = \Omega(\mathcal{A})$.

Если $\overline{C}(\mathcal{A}) = +\infty$, то правая часть выражения (24) также равна $+\infty$. Действительно, если σ_0 – состояние из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ такое, что $\sup_{\rho \in \mathcal{A}} H(\rho \| \sigma_0) = c < +\infty$,

то, используя тождество Дональда и неотрицательность относительной энтропии, получаем

$$\sum_i \pi_i H(\rho_i \| \bar{\rho}) \leq \sum_i \pi_i H(\rho_i \| \sigma_0) - H(\bar{\rho} \| \sigma_0) \leq c$$

для любого ансамбля $\{\pi_i, \rho_i\}$ состояний из $\mathcal{A}$, поэтому $\overline{C}(\mathcal{A}) \leq c < +\infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Состояние $\Omega(\mathcal{A})$, введенное в теореме 1, называется *оптимальным средним состоянием множества $\mathcal{A}$* .

Из теоремы 1, тождества Дональда (3) и неравенства (1) вытекает следующее полезное неравенство.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $\mathcal{A}$ – множество с конечной χ -емкостью. Для произвольного ансамбля $\{\pi_i, \rho_i\}$ состояний из $\mathcal{A}$ со средним состоянием $\bar{\rho}$ имеет место неравенство

$$\overline{C}(\mathcal{A}) - \chi(\{\pi_i, \rho_i\}) \geq H(\bar{\rho} \| \Omega(\mathcal{A})) \geq \frac{1}{2} \|\bar{\rho} - \Omega(\mathcal{A})\|_1^2.$$

Теорема 1 и предложение 3 позволяют получить следующий важный результат.

СЛЕДСТВИЕ 5. Любое множество состояний с конечной χ -емкостью является предкомпактным.

Заметим, что обратное утверждение неверно. Существуют компактные множества, например сходящиеся последовательности состояний, имеющие бесконечную χ -емкость (см. §3 ч. II настоящей работы).

Следствие 5 приводит к важному наблюдению, связанному с χ -пропускной способностью квантовых каналов с ограничениями [18], [19], [15].

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть $\Phi: \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \mapsto \mathfrak{S}(\mathcal{H}')$ – произвольный квантовый канал и $\mathcal{A}$ – подмножество $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Если $\overline{C}(\Phi, \mathcal{A}) < +\infty$, то $\Phi(\mathcal{A})$ – предкомпактное подмножество в $\mathfrak{S}(\mathcal{H}')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определений χ -пропускной способности канала с ограничениями и χ -емкости следует, что

$$\overline{C}(\Phi(\mathcal{A})) \leq \overline{C}(\Phi, \mathcal{A}).$$

Следствие доказано.

Данное наблюдение показывает, что χ -пропускная способность квантового канала без ограничений может быть конечной, только если выходное множество состояний этого канала предкомпактно.

Теорема 1 и предложение 1 приводят к следующему наблюдению о свойствах энтропии.

СЛЕДСТВИЕ 7. Энтропия ограничена на выпуклом множестве $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда это множество предкомпактно и содержится в множестве $\mathcal{K}_{H,h}$, определенном некоторым $\mathfrak{H}$ -оператором H с $g(H) < +\infty$ и положительным h .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если множество $\mathcal{A}$ содержится в множестве $\mathcal{K}_{H,h}$ с $g(H) < +\infty$, то в силу предложения 1 имеем $\sup_{\rho \in \mathcal{A}} H(\rho) < +\infty$.

Если $\sup_{\rho \in \mathcal{A}} H(\rho) < +\infty$, то $\overline{C}(\mathcal{A}) < +\infty$ и в силу теоремы 1 имеем

$$H(\rho \| \Omega(\mathcal{A})) = \text{Tr } \rho(-\log \Omega(\mathcal{A})) - H(\rho) \leq \overline{C}(\mathcal{A})$$

для всех ρ из $\mathcal{A}$. Поэтому

$$\text{Tr } \rho(-\log \Omega(\mathcal{A})) \leq \overline{C}(\mathcal{A}) + \sup_{\rho \in \mathcal{A}} H(\rho)$$

для всех ρ из $\mathcal{A}$ и, следовательно, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{K}_{H,h}$, где $H = -\log \Omega(\mathcal{A})$ и $h = \overline{C}(\mathcal{A}) + \sup_{\rho \in \mathcal{A}} H(\rho)$.

В силу следствия 7 ограниченность энтропии на выпуклом множестве $\mathcal{A}$ означает, что множество $\mathcal{A}$ содержится в множестве $\mathcal{K}_{H,h}$, определенном некоторым $\mathfrak{H}$ -оператором H с конечным $g(H)$. В силу теоремы 1 конечность χ -емкости произвольного множества $\mathcal{A}$ означает, что множество $\mathcal{A}$ содержится в множестве $\mathcal{V}_{\Omega(\mathcal{A}), \overline{C}(\mathcal{A})}$, имеющем такую же χ -емкость и такое же оптимальное среднее состояние.

4.2. Оптимальная мера. Пусть $\mathcal{A}$ – замкнутое множество с конечной χ -емкостью. В силу следствия 5 множество $\mathcal{A}$ компактно. Следовательно, множество $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ всех вероятностных мер на $\mathcal{A}$ компактно в топологии слабой сходимости (топологии Прохорова) [11]. Поскольку произвольную меру из $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ можно аппроксимировать слабо сходящейся последовательностью мер с конечным носителем, из полунепрерывности снизу функционала $\chi(\mu)$ следует, что

$$\overline{C}(\mathcal{A}) = \sup_{\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{A})} \chi(\mu), \quad (31)$$

т. е. точная верхняя грань по всем мерам из $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ совпадает с точной верхней гранью по всем мерам с конечным носителем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Мера μ_* из $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ такая, что

$$\overline{C}(\mathcal{A}) = \chi(\mu_*) = \int_{\mathcal{A}} H(\rho \| \bar{\rho}(\mu_*)) \mu_*(d\rho),$$

называется *оптимальной мерой для множества $\mathcal{A}$* .

Используя теорему 1 и обобщенное тождество Дональда (4), нетрудно получить следующее обобщение следствия 4: для произвольного замкнутого множества $\mathcal{A}$ с конечной χ -емкостью и произвольной меры μ из $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ имеет место следующее неравенство:

$$\overline{C}(\mathcal{A}) - \chi(\mu) \geq H(\bar{\rho}(\mu) \| \Omega(\mathcal{A})) \geq \frac{1}{2} \|\bar{\rho}(\mu) - \Omega(\mathcal{A})\|_1^2.$$

Это неравенство и теорема 1 позволяют обобщить свойство максимальной равноудаленности оптимального ансамбля [14] на бесконечномерный случай.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть μ_* – оптимальная мера для замкнутого множества $\mathcal{A}$ с конечной χ -емкостью. Тогда ее баричесентр $\bar{\rho}(\mu_*)$ совпадает с оптимальным средним состоянием $\Omega(\mathcal{A})$ и $H(\rho \| \Omega(\mathcal{A})) = \overline{C}(\mathcal{A})$ для μ_* -почти всех ρ .

В частности, если существует конечный или счетный ансамбль $\{\pi_i, \rho_i\}$, на котором достигается точная верхняя грань в определении χ -емкости (23) – оптимальный ансамбль для множества $\mathcal{A}$, то его среднее состояние $\bar{\rho}$ совпадает с оптимальным средним состоянием $\Omega(\mathcal{A})$ и $H(\rho_i \parallel \Omega(\mathcal{A})) = \bar{C}(\mathcal{A})$ для всех i таких, что $\pi_i > 0$.

СЛЕДСТВИЕ 8. Пусть $\mathcal{A}$ – замкнутое множество с конечной χ -емкостью. Необходимым условием существования оптимальной меры для множества $\mathcal{A}$ является неравенство $\bar{C}(\mathcal{A}) \leq H(\Omega(\mathcal{A}))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай $H(\Omega(\mathcal{A})) < +\infty$, для которого из (2), определения оптимальной меры μ_* и предложения 7 следует

$$\bar{C}(\mathcal{A}) = \chi(\mu_*) = H(\bar{\rho}(\mu_*)) - \hat{H}(\mu_*) \leq H(\bar{\rho}(\mu_*)) = H(\Omega(\mathcal{A})).$$

Следствие доказано.

Данное следствие дает простой способ показать отсутствие оптимальной меры для некоторого множества состояний. Этот способ будет использован в ч. II настоящей работы.

Следующая теорема дает достаточное условие существования оптимальной меры.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathcal{A}$ – замкнутое множество с конечной χ -емкостью. Оптимальная мера для множества $\mathcal{A}$ существует, если выполнено одно из следующих условий:

- 1) $H(\Omega(\mathcal{A})) < +\infty$ и $\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\rho_n) = H(\Omega(\mathcal{A}))$ для любой последовательности $\{\rho_n\}$ состояний из $\text{co}(\mathcal{A})$, H -сходящейся¹⁰ к состоянию $\Omega(\mathcal{A})$;
- 2) функция $\rho \mapsto H(\rho \parallel \Omega(\mathcal{A}))$ непрерывна на множестве $\mathcal{A}$.

Доказательство теоремы основано на следующей лемме.

ЛЕММА 4. Пусть $\mathcal{A}$ – замкнутое множество с конечной χ -емкостью. Существует последовательность мер $\{\mu_n\}$ из $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ с конечным носителем, слабо сходящаяся к некоторой мере μ_* из $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ с барицентром $\Omega(\mathcal{A})$, такая, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\bar{\rho}(\mu_n) \parallel \Omega(\mathcal{A})) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \chi(\mu_n) = \bar{C}(\mathcal{A}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mu_n = \{\{\pi_i^n, \rho_i^n\}\}_n$ – аппроксимирующая последовательность ансамблей для множества $\mathcal{A}$ с соответствующей последовательностью средних состояний $\{\bar{\rho}_n(\mu_n)\}$. Из теоремы 1 следует, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\bar{\rho}(\mu_n) \parallel \Omega(\mathcal{A})) = 0.$$

Поскольку в силу следствия 5 множество $\mathcal{A}$ компактно, множество $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ слабо компактно. Следовательно, существует подпоследовательность последовательности $\{\mu_n\}$, слабо сходящаяся к некоторой мере μ_* из $\mathcal{P}(\mathcal{A})$. Из непрерывности отображения $\mu \mapsto \bar{\rho}(\mu)$ следует, что $\bar{\rho}(\mu_*) = \Omega(\mathcal{A})$. Таким образом, данная подпоследовательность обладает всеми свойствами, указанными в лемме.

¹⁰Это значит, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\rho_n \parallel \Omega(\mathcal{A})) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Два условия в теореме приводят к двум различным доказательствам того, что предельная мера μ_* , введенная в лемме 4, является оптимальной мерой для множества $\mathcal{A}$.

Пусть $\{\mu_n\}$ – последовательность, существующая в силу леммы 4.

Из условия 1) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\bar{\rho}(\mu_n)) = H(\bar{\rho}(\mu_*)) = H(\Omega(\mathcal{A})) < +\infty.$$

Используя (2) и полунепрерывность снизу функционала $\hat{H}(\mu)$, получаем

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \chi(\mu_n) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} (H(\bar{\rho}(\mu_n)) - \hat{H}(\mu_n)) \leq H(\bar{\rho}(\mu_*)) - \hat{H}(\mu_*) = \chi(\mu_*).$$

Поскольку $\lim_{n \rightarrow +\infty} \chi(\mu_n) = \bar{C}(\mathcal{A})$ и $\chi(\mu_*) \leq \bar{C}(\mathcal{A})$, это неравенство показывает, что $\chi(\mu_*) = \bar{C}(\mathcal{A})$, т. е. оптимальность меры μ_* .

Из условия 2), компактности множества $\mathcal{A}$ и определения слабой сходимости следует, что

$$\chi(\mu_*) = \int_{\mathcal{A}} H(\rho \| \Omega(\mathcal{A})) \mu_*(d\rho) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathcal{A}} H(\rho \| \Omega(\mathcal{A})) \mu_n(d\rho).$$

Используя обобщенное тождество Дональда (4) и неотрицательность относительной энтропии, получаем

$$\int_{\mathcal{A}} H(\rho \| \Omega(\mathcal{A})) \mu_n(d\rho) = \chi(\mu_n) + H(\bar{\rho}(\mu_n) \| \Omega(\mathcal{A})) \geq \chi(\mu_n).$$

Поскольку $\lim_{n \rightarrow +\infty} \chi(\mu_n) = \bar{C}(\mathcal{A})$, из двух последних выражений следует $\chi(\mu_*) = \bar{C}(\mathcal{A})$, т. е. оптимальность меры μ_* .

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Условия в теореме 2 существенны, хотя и не являются необходимыми. Существуют примеры множеств с конечной χ -емкостью, не имеющих оптимальной меры. Оптимальной меры может не быть даже у счетного замкнутого множества – сходящейся последовательности состояний с конечной χ -емкостью. Существуют также примеры множеств с конечной χ -емкостью, для которых не выполнены условия теоремы 2, но существует оптимальная мера. Все указанные примеры будут рассмотрены в § 3 ч. II настоящей работы.

§ 5. Приложение

Здесь приведено доказательство свойств функции $F_H(h) = \sup_{\rho \in \mathcal{K}_{H,h}} H(\rho)$, представленных в предложении 1.

Заметим прежде всего, что в силу полунепрерывности снизу энтропии имеем

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} F_H(h) = \sup_{\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})} H(\rho) = +\infty$$

при любом значении $g(H)$, поскольку $\bigcup_{h \in \mathbb{R}_+} \mathcal{K}_{H,h} = \mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

Рассмотрим функцию

$$g(\lambda, h) = \sum_{k=1}^{+\infty} (h_k - h) \exp(-\lambda h_k).$$

По теореме о рядах, зависящих от параметров [7], эта функция дифференцируема в любой точке (λ, h) с $\lambda > g(H)$, причем

$$\frac{\partial g(\lambda, h)}{\partial \lambda} = \sum_{k=1}^{+\infty} h_k(h - h_k) \exp(-\lambda h_k), \quad \frac{\partial g(\lambda, h)}{\partial h} = - \sum_{k=1}^{+\infty} \exp(-\lambda h_k). \quad (32)$$

Как показано в доказательстве предложения 1, для каждого h из интервала $(h_m(H), h_*(H))$ существует единственное $\lambda^* = \lambda^*(h) > g(H)$ такое, что $g(\lambda^*(h), h) = 0$. Из (32) следует, что

$$\left. \frac{\partial g(\lambda, h)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda^*(h)} = - \sum_{k=1}^{+\infty} (h_k - h)^2 \exp(-\lambda^*(h) h_k) < 0.$$

По теореме о неявной функции функция $\lambda^*(h)$ дифференцируема на интервале $(h_m(H), h_*(H))$ и

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda^*(h)}{dh} &= - \left[\frac{\partial g(\lambda, h)}{\partial \lambda} \right]^{-1} \frac{\partial g(\lambda, h)}{\partial h} \\ &= - \left[\sum_{k=1}^{+\infty} (h_k - h)^2 \exp(-\lambda^*(h) h_k) \right]^{-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \exp(-\lambda^*(h) h_k) < 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Выражение (14) означает, что

$$F_H(h) = \lambda^*(h)h + \log \sum_{k=1}^{+\infty} \exp(-\lambda^*(h) h_k) \quad (34)$$

для всех h из $(h_m(H), h_*(H))$.

Прямое дифференцирование с учетом равенства $g(\lambda^*(h), h) = 0$ дает

$$\frac{dF_H(h)}{dh} = \frac{d}{dh} \left[\lambda^*(h)h + \log \sum_{k=1}^{+\infty} \exp(-\lambda^*(h) h_k) \right] = \lambda^*(h). \quad (35)$$

Поэтому из (33) следует, что

$$\frac{d^2 F_H(h)}{dh^2} = \frac{d\lambda^*(h)}{dh} < 0,$$

т. е. что $F_H(h)$ — строго вогнутая функция на интервале $(h_m(H), h_*(H))$.

Предположим, что $h_*(H) < +\infty$. Если $h > h_*(H)$, то в силу уже доказанной части предложения 1

$$F_H(h) = g(H)h + \log \sum_{k=1}^{+\infty} \exp(-g(H) h_k) \quad (36)$$

— линейная функция и

$$\frac{dF_H(h)}{dh} = g(H). \quad (37)$$

Если $h = h_*(H)$, то, как показано в доказательстве предложения 1, $\lambda^*(h) = g(H)$ и, следовательно, выражения (34) и (36) в этом случае совпадают.

Для доказательства гладкости функции $F_H(h)$ в точке $h_*(H)$ заметим, что $\lambda^*(h) \rightarrow g(H)$ при $h \rightarrow h_*(H) - 0$. Действительно, в силу (33) функция $\lambda^*(h)$ убывает на $(h_m(H), h_*(H))$ и для любого $\lambda > g(H)$ существует

$$h_\lambda = \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \exp(-\lambda h_k) \right]^{-1} \sum_{k=1}^{+\infty} h_k \exp(-\lambda h_k)$$

такое, что $\lambda = \lambda^*(h_\lambda)$.

Таким образом, из равенств (34)–(37) следует, что

$$\lim_{h \rightarrow h_*(H) - 0} F_H(h) = F_H(h_*(H)), \quad \lim_{h \rightarrow h_*(H) - 0} \frac{dF_H(h)}{dh} = \frac{dF_H(h)}{dh} \Big|_{h=h_*(H)+0},$$

а значит, функция $F_H(h)$ имеет непрерывную производную в точке $h_*(H)$.

Для доказательства непрерывности справа функции $F_H(h)$ в точке $h_m(H)$ заметим, что

$$\lambda^*(h) \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad h \rightarrow h_m + 0. \quad (38)$$

Действительно, в силу (33) функция $\lambda^*(h)$ убывает на $(h_m(H), h_*(H))$ и, следовательно, существует $\lambda^m = \lim_{h \rightarrow h_m(H)+0} \lambda^*(h)$. Если $\lambda^m < +\infty$, то, переходя к пределу $h \rightarrow h_m(H) + 0$ в равенстве

$$\sum_{k=1}^{+\infty} h_k \exp(-\lambda^*(h) h_k) \equiv h \sum_{k=1}^{+\infty} \exp(-\lambda^*(h) h_k),$$

которое выполнено для всех h из $(h_m(H), h_*(H))$, получаем очевидное противоречие.

Пусть $d = \dim \mathcal{H}_m(H)$. Нетрудно видеть, что

$$P(h) = \log \sum_{k=1}^{+\infty} \exp(-\lambda^*(h) h_k) = -\lambda^*(h) h_m(H) + Q(h), \quad (39)$$

где

$$Q(h) = \log \left(d + \sum_{k>d} \exp(-\lambda^*(h)(h_k - h_m(H))) \right)$$

– неубывающая функция на интервале $(h_m(H), h_*(H))$, стремящаяся к $\log d$ при $h \rightarrow h_m(H) + 0$.

Поскольку функция $F_H(h)$ не убывает на $(h_m(H), +\infty)$, существует

$$\lim_{h \rightarrow h_m(H)+0} F_H(h) \geq F_H(h_m(H)).$$

Поэтому в силу (34) и (39) существует $\lim_{h \rightarrow h_m(H)+0} \lambda^*(h)(h - h_m(H)) = C < +\infty$ и

$$\lim_{h \rightarrow h_m(H)+0} F_H(h) = C + \log d = C + F_H(h_m(H)).$$

Таким образом, для доказательства непрерывности справа функции $F_H(h)$ в точке $h_m(H)$ достаточно показать, что $C = 0$. Это можно сделать, доказав, что

$$\int_{h_m(H)}^{h''} \lambda^*(h) dh = \lim_{h' \rightarrow h_m(H)+0} \int_{h'}^{h''} \lambda^*(h) dh < +\infty \quad (40)$$

для некоторого $h'' > h_m(H)$. Действительно, из (40) и предположения $C > 0$ следует

$$\int_{h_m(H)}^{h''} (h - h_m(H))^{-1} dh < +\infty.$$

Противоречие.

Нетрудно видеть, что $\frac{dP(h)}{dh} = -h \frac{d\lambda^*(h)}{dh}$ и, следовательно,

$$\frac{dQ(h)}{dh} = -\frac{d\lambda^*(h)}{dh} (h - h_m(H)). \quad (41)$$

Интегрируя (41), получим

$$Q(h'') - Q(h') = \lambda^*(h')(h' - h_m(H)) - \lambda^*(h'')(h'' - h_m(H)) + \int_{h'}^{h''} \lambda^*(h) dh.$$

Поэтому из упомянутого выше существования пределов $\lim_{h' \rightarrow h_m(H)+0} Q(h') = \log d$ и $\lim_{h' \rightarrow h_m(H)+0} \lambda^*(h')(h' - h_m(H)) = C < +\infty$ следует (40).

Из сказанного выше следует

$$\frac{F_H(h) - F_H(h_m(H))}{h - h_m(H)} \geq \lambda^*(h) \quad \forall h > h_m(H),$$

и, используя (38), получаем $\left. \frac{dF_H(h)}{dh} \right|_{h=h_m(H)+0} = +\infty$.

Автор благодарен А. С. Холево за помощь в процессе работы над настоящей статьей.

Список литературы

1. Браттели У., Робинсон Д., *Операторные алгебры и квантовая статистическая механика*, Мир, М., 1982.
2. Dell'Antonio G. F., "On the limits of sequences of normal states", *Commun. Pure Appl. Math.*, **20** (1967), 413–429.
3. Donald M. J., "Further results on the relative entropy", *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, **101**:2 (1987), 363–373.
4. Harremoës P., Topsøe F., "Maximum entropy fundamentals", *Entropy*, **3**:3 (2001), 191–226.
5. Harremoës P., "Information Topologies with Applications", *Accepted for publication in a volume of the Bolyai Studies*, Springer, N. Y., 2004.
6. Июффе Ф. Д., Тихомиров В. М., *Теория экстремальных задач*, Наука, М., 1974.
7. Кудрявцев Л. Д., *Курс математического анализа*, Высшая школа, М., 1988.
8. Lindblad G., "Expectations and entropy inequalities for finite quantum systems", *Commun. Math. Phys.*, **39**:2 (1974), 111–119.
9. Lindblad G., "Completely positive maps and entropy inequalities", *Commun. Math. Phys.*, **40**:2 (1975), 147–151.

10. Ohya M., Petz D., *Quantum entropy and its use*, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
11. Parthasarathy K. R., *Probability measures on metric spaces*, Probability and Mathematical Statistics, **3**, Academic Press, N. Y.–London, 1967.
12. Сарымсаков Т. А., *Введение в квантовую теорию вероятностей*, Ташкент, Фан, 1985.
13. Schumacher B., Westmoreland M. D., “Sending classical information via noisy quantum channels”, *Phys. Rev. A*, **56**:1 (1997), 131–138.
14. Schumacher B., Westmoreland M., *Optimal signal ensembles*, E-print [quant-ph/9912122](#).
15. Shirokov M. E., “The Holevo capacity of infinite dimensional channels and the additivity problem”, *Commun. Math. Phys.*, **262**:1 (2006), 137–159.
16. Shirokov M. E., *On entropic quantities related to the classical capacity of infinite dimensional quantum channels*, E-print [quant-ph/0411091](#).
17. Холево А. С., “Квантовые теоремы кодирования”, *УМН*, **53**:6 (1998), 193–230.
18. Холево А. С., “Классическая пропускная способность квантовых каналов с ограничениями”, *Теория вероятностей и ее применения*, **48**:2 (2003), 359–374.
19. Холево А. С., Широков М. Е., “Непрерывные ансамбли и классическая пропускная способность квантовых каналов бесконечной размерности”, *Теория вероятностей и ее применения*, **50**:1 (2005), 98–114.
20. Wehrl A., “General properties of entropy”, *Rev. Mod. Phys.*, **50**:2 (1978), 221–260.

М. Е. Широков (M. E. SHIROKOV)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: msh@mi.ras.ru

Поступило в редакцию
23.12.2005