Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Филиппов, Системы представления, полученные из сжатий и сдвигов одной функции, в многомерных пространствах E_φ , *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2012, том 76, выпуск 6, 193–206

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7300>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 17:30:08

УДК 517.51

В. И. Филиппов

**Системы представления,
полученные из сжатий и сдвигов одной функции,
в многомерных пространствах E_φ**

Рассматриваются функциональные системы, получающиеся сжатиями и сдвигами одной функции, в многомерных пространствах E_φ .

Библиография: 12 наименований.

Ключевые слова: обобщенные классы Орлича, обобщенные пространства Орлича, системы представления, приближение в пространствах E_φ , функциональные системы из сжатий и сдвигов одной функции.

В работе [1] рассматривались системы функций, получающиеся из сжатий и сдвигов одной функции, в одномерных пространствах E_φ при некоторых ограничениях, налагаемых на φ . В настоящей работе исследуются системы вида

$$\begin{aligned}\{\psi_{n,k}\} &= \{\psi(2^{n_1}t_1 - k_1, \dots, 2^{n_m}t_m - k_m)\}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad n = (n_1, \dots, n_m), \\ n_i &\in \mathbb{N}, \quad i = 1, \dots, m, \quad k = (k_1, \dots, k_m), \quad k_i = 0, 1, \dots, 2^{n_i} - 1, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (1) \\ t_i &\in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, m, \quad t = (t_1, \dots, t_m), \quad m \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

где $\psi(t) \geq 0$, $t \in T = \{[0, 1]^m\}$, $\psi(t) \in C\{[0, 1]^m\}$, $\psi(t) = 0$, $t \notin T$, в многомерных пространствах E_φ .

Заметим, что система Фабера–Шаудера (без первых двух элементов) является частным случаем системы (1). П. Л. Ульянов [2] исследовал систему Фабера–Шаудера в классах $\varphi(L)$ и сформулировал следующую задачу: для каких других функциональных систем возможно представление в виде ряда элементов классов $\varphi(L)$?

В настоящей работе рассматривается данная задача П. Л. Ульянова (см. [2], [3]). Исследуется, является ли система функций (1) системой представления в пространствах E_φ . Получены результаты в пространствах E_φ . (В работах [4], [5] изучаются более общие системы, но в пространствах L^p , $0 < p < \infty$. В [6] представлены результаты для подсистем системы Фабера–Шаудера в пространствах E_φ , а в [7] – для подсистем системы Фабера–Шаудера в смысле сходимости почти всюду. Подсистемы системы Фабера–Шаудера в смысле сходимости по φ -расстоянию рассмотрены в [8]. Вопросы неединственности представления в пространствах E_φ рассмотрены в работе [9]).

Приведем понятия и утверждения, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Для обозначения меры Лебега множества D будем применять обозначения $|D|$ и $\text{mes}(D)$, кроме того, $\chi_D(t)$ – характеристическая функция множества D .

Пусть Φ – совокупность четных конечных неубывающих на полупрямой $[0, \infty)$ функций φ таких, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \varphi(\infty) = \infty$. Всюду далее будем предполагать, что для функции φ выполнены следующие условия:

$$\varphi(t) \in \Phi, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(t) > 0, \quad t > 0, \quad \varphi(t) \in C[0, \infty).$$

Через $\varphi(L)$ обозначим множество всех тех измеримых функций $f(t)$ на $T = \{[0, 1]^m\}$, для которых

$$\int_T \varphi(f(t)) dt < \infty.$$

Множество $\varphi(L)$ называется также *обобщенным классом Орлича* (см. [2], [10, с. 1–5, 33]).

Если f и g принадлежат классу $\varphi(L)$, то величину

$$\rho_\varphi(f, g) = \int_T \varphi(f - g) dt$$

условно назовем *φ -расстоянием*. Последовательность функций $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ из класса $\varphi(L)$ называется *сходящейся по φ -расстоянию* к функции $f \in \varphi(L)$, если $f - f_n \in \varphi(L)$ для $n \geq n_0$ при некотором $n_0 \in N$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_\varphi(f - f_n) = 0.$$

Класс $\varphi(L)$ в общем случае не является линейным. Если класс $\varphi(L)$ пополнить по линейности, то получим множество $\varphi^*(L)$, в котором можно ввести квазинорму (φ -норму) элементов с помощью функционала

$$\|f\|_\varphi = \inf \left\{ u > 0 : \int_T \varphi \left(\frac{f(t)}{u} \right) dt < u \right\}, \quad f \in \varphi^*(L),$$

так что $\varphi^*(L)$ станет F -пространством (определение F -пространства см. в [10, с. 81], [11, с. 36]). Множество $\varphi^*(L)$ с введенной выше φ -нормой называется *обобщенным пространством Орлича* (см. [10, с. 1–5, 33]). В этом случае из сходимости по φ -норме следует сходимость по φ -расстоянию для элементов из класса $\varphi(L)$ (см. [10, с. 1–5, 33]).

Пространство $\varphi^*(L)$ в общем случае несепарабельное. Класс $\varphi(L)$ сепарабелен в смысле сходимости по φ -расстоянию тогда и только тогда, когда φ удовлетворяет ω -условию, т. е. $\varphi(t+1) = O\{\varphi(t)\}$, $t \rightarrow \infty$ (см. [2]).

Через E_φ обозначим замыкание в $\varphi^*(L)$ множества ограниченных ступенчатых функций. Пространство E_φ является сепарабельным F -пространством (см. [10, с. 36]).

Будем говорить, что функция φ *удовлетворяет Δ_2 -условию*, если $\varphi(2t) = O\{\varphi(t)\}$, $t \rightarrow \infty$. В этом случае $\varphi(L) = \varphi^*(L) = E_\varphi$ и сходимость по φ -норме эквивалентна сходимости по φ -расстоянию, в противном случае $E_\varphi \subset \varphi(L) \subset \varphi^*(L)$ (см. [10, с. 53]).

Через $S(T)$ обозначим множество измеримых почти всюду конечных на T функций.

Заметим, что $\varphi(L) = L^p$, если $\varphi(t) = |t|^p$, $0 < p < \infty$.

Напомним, что ряд $\sum_{l_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{l_m=1}^{\infty} a_{l_1, \dots, l_m}$ сходится к числу S , называемому *суммой ряда* $\sum_{l_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{l_m=1}^{\infty} a_{l_1, \dots, l_m}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $k_1^0 \in \mathbb{N}, \dots, k_m^0 \in \mathbb{N}$, что для всех $p_1 \geq k_1^0, \dots, p_m \geq k_m^0$ выполняется неравенство

$$\left| S - \sum_{l_1=1}^{p_1} \cdots \sum_{l_m=1}^{p_m} a_{l_1, \dots, l_m} \right| < \varepsilon.$$

Следуя статье [12], приведем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Система элементов $\{f_{l_1, \dots, l_m}\}_{l_1, \dots, l_m=1}^{\infty}$, $m \in \mathbb{N}$, F -пространства E , где E – вещественное векторное пространство, называется *системой представления* (с. п.) в пространстве E , если для произвольного элемента $f \in E$ существует ряд

$$\sum_{l_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{l_m=1}^{\infty} c_{l_1, \dots, l_m} f_{l_1, \dots, l_m}$$

такой, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $k_1^0 \in \mathbb{N}, \dots, k_m^0 \in \mathbb{N}$, при которых для всех $p_1 \geq k_1^0, \dots, p_m \geq k_m^0$ выполняется неравенство

$$\left\| f - \sum_{l_1=1}^{p_1} \cdots \sum_{l_m=1}^{p_m} c_{l_1, \dots, l_m} f_{l_1, \dots, l_m} \right\| < \varepsilon,$$

где $\{c_{l_1, \dots, l_m}\}$ – последовательность действительных чисел, и *абсолютной системой представления* (а. п. с.), если, кроме того,

$$\left\| \sum_{l_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{l_m=1}^{\infty} |c_{l_1, \dots, l_m} f_{l_1, \dots, l_m}| \right\| < \infty.$$

Заметим, что всюду далее $E = E_\varphi$.

В настоящей статье мы будем рассматривать системы функций для случая, когда сжатия по всем переменным одинаковые, т. е. $n = (n, \dots, n)$

ТЕОРЕМА 1. Для того чтобы подсистема $\{\psi_{n_{l_1}, \dots, n_{l_m}}\}_{l_1, \dots, l_m=1}^{\infty}$ системы

$$\begin{aligned} \{\psi_{n,k}\} &= \{\psi(2^n t_1 - k_1, \dots, 2^n t_m - k_m)\} = \{\psi_{r_1, \dots, r_m}\}, \\ n &= 0, 1, 2, \dots, \quad k = (k_1, \dots, k_m), \quad k_i = 0, 1, \dots, 2^n - 1, \quad m \in \mathbb{N}, \\ r_i &= 2^n + k_i, \quad t_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, m, \quad t = (t_1, \dots, t_m), \quad m \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\psi(t) \geq 0$, $t \in T$, $\psi(t) \in C\{[0, 1]^m\}$, $\psi(t) = 0$, $t \notin T$, была абсолютной системой представления в E_φ , необходимо и достаточно, чтобы для любых $\varepsilon > 0$, $N_1 \in \mathbb{N}, \dots, N_m \in \mathbb{N}$ существовали $p_1 \in \mathbb{N}, \dots, p_m \in \mathbb{N}$ такие, что

$$\text{mes} \left\{ t \in T: \sum_{l_1=N_1}^{p_1} \cdots \sum_{l_m=N_m}^{p_m} \psi_{n_{l_1}, \dots, n_{l_m}}(t_1, \dots, t_m) \neq 0 \right\} > 1 - \varepsilon. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Предположим, что необходимое условие теоремы 1 не выполнено. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и $N_1 \in \mathbb{N}, \dots, N_m \in \mathbb{N}$ такие, что для всех $p_1 > N_1, \dots, p_m > N_m$

$$\text{mes} \left\{ t \in T: \sum_{l_1=N_1}^{p_1} \cdots \sum_{l_m=N_m}^{p_m} \psi_{n_{l_1}, \dots, n_{l_m}}(t_1, \dots, t_m) = 0 \right\} > \varepsilon. \quad (4)$$

Зафиксируем эти $N_1, \dots, N_m$. Пусть

$$U_\varepsilon = \left\{ t \in T : \sum_{l_1=N_1}^{\infty} \cdots \sum_{l_m=N_m}^{\infty} \psi_{n_{l_1}, \dots, n_{l_m}}(t_1, \dots, t_m) = 0 \right\}.$$

Из (4) следует, что $|U_\varepsilon| > 0$.

Пусть $M_1 = \max\{n_{N_1}, \dots, n_{N_m}\}$. Тогда существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $2^{n_0} \leq M_1 \leq 2^{n_0+1}$. Пусть $M = 2^{n_0+3}$. Заметим, что в силу определения системы $\{\psi_{n,k}\}$ в теореме 1 для произвольного элемента $\psi_{n_{l_1}, \dots, n_{l_m}}$ существует неотрицательное целое n такое, что выполнены неравенства $2^n \leq n_{l_i} \leq 2^{n+1}$ для всех $1 \leq i \leq m$, где n одно и то же для всех i .

Очевидно, что существует неотрицательная функция $G_0(t) \in E_\varphi$ такая, что $G_0(t)\chi_{U_\varepsilon}(t) \in E_\varphi$ и

$$\inf_{\{c_{r_1, \dots, r_m}\}} \left\{ \left\| G_0(t)\chi_{U_\varepsilon}(t) - \sum_{r_1=1}^M \cdots \sum_{r_m=1}^M c_{r_1, \dots, r_m} \psi_{r_1, \dots, r_m}(t) \chi_{U_\varepsilon}(t) \right\|_\varphi \right\} = \delta > 0.$$

Если бы это было не так, то конечномерные системы функций были бы системами представления в пространствах E_φ , но пространства E_φ являются бесконечномерными. Поэтому мы имеем

$$\begin{aligned} & \inf_{\{c_{l_1, \dots, l_m}\}} \left\{ \left\| G_0(t)\chi_{U_\varepsilon}(t) - \sum_{l_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{l_m=1}^{\infty} c_{l_1, \dots, l_m} \psi_{n_{l_1}, \dots, n_{l_m}}(t) \right\|_\varphi \right\} \\ & \geq \inf_{\{c_{l_1, \dots, l_m}\}} \left\{ \left\| G_0(t)\chi_{U_\varepsilon}(t) - \left(\sum_{r_1=1}^M \cdots \sum_{r_m=1}^M c_{r_1, \dots, r_m} \psi_{r_1, \dots, r_m}(t) \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \sum_{l_1=N_1}^{\infty} \cdots \sum_{l_m=N_m}^{\infty} c_{l_1, \dots, l_m} \psi_{n_{l_1}, \dots, n_{l_m}}(t) \right) \chi_{U_\varepsilon}(t) \right\|_\varphi \right\} \\ & \geq \inf_{\{c_{r_1, \dots, r_m}\}} \left\{ \left\| G_0(t)\chi_{U_\varepsilon}(t) - \sum_{r_1=1}^M \cdots \sum_{r_m=1}^M c_{r_1, \dots, r_m} \psi_{r_1, \dots, r_m}(t) \chi_{U_\varepsilon}(t) \right\|_\varphi \right\} = \delta > 0. \end{aligned}$$

Это означает, что в данном случае система $\{\psi_{n_{l_1}, \dots, n_{l_m}}\}$ не является полной в пространстве E_φ . Таким образом, мы получили противоречие с условием теоремы.

Достаточность. Необходима следующая

ЛЕММА 1. Пусть $\psi \in C(T)$, $\|\psi\|_C \neq 0$, $\psi(t) \geq 0$, $t \in T$, $\psi(t) = 0$, $t \notin T$. Если для подсистемы $\{\psi_{n_{l_1}, \dots, n_{l_m}}\}$ системы (2) условие (3) выполняется, то для произвольных

$$\begin{aligned} \eta > 0, \quad \tau > 0, \quad \Delta = (\alpha_1, \beta_1) \times \cdots \times (\alpha_m, \beta_m) \subset T, \\ |\Delta| > \eta, \quad \lambda > 0, \quad N_1 \in \mathbb{N}, \dots, N_m \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{5}$$

существует сумма $\sum_{l_1=N_1}^{p_1} \cdots \sum_{l_m=N_m}^{p_m} c_{l_1, \dots, l_m} \psi_{n_{l_1}, \dots, n_{l_m}}(t)$ такая, что

$$\text{mes} \left\{ t \in T : \left| \lambda \chi_\Delta(t) - \sum_{l_1=N_1}^{p_1} \cdots \sum_{l_m=N_m}^{p_m} c_{l_1, \dots, l_m} \psi_{n_{l_1}, \dots, n_{l_m}}(t) \right| < \tau \right\} \geq |\Delta| - \eta, \quad (6)$$

$$c_{l_1, \dots, l_m} \geq 0 \quad \forall l_1 = \overline{N_1, p_1}, \dots, l_m = \overline{N_m, p_m};$$

$$0 \leq \sum_{l_1=N_1}^{p_1} \cdots \sum_{l_m=N_m}^{p_m} c_{l_1, \dots, l_m} \psi_{n_{l_1}, \dots, n_{l_m}}(t) \leq \lambda \chi_\Delta(t) \quad \forall t \in T; \quad (7)$$

$$0 \leq \sum_{l_1=N_1}^{n_1} \cdots \sum_{l_m=N_m}^{n_m} c_{l_1, \dots, l_m} \psi_{n_{l_1}, \dots, n_{l_m}}(t) \leq \sum_{l_1=N_1}^{j_1} \cdots \sum_{l_m=N_m}^{j_m} c_{l_1, \dots, l_m} \psi_{n_{l_1}, \dots, n_{l_m}}(t), \quad (8)$$

$$t \in T, \quad N_1 \leq n_1 \leq j_1 \leq p_1, \dots, N_m \leq n_m \leq j_m \leq p_m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 < \tau < \lambda$. Для простоты рассуждений положим $\xi_{l_1, \dots, l_m}(t) = D \psi_{n_{l_1}, \dots, n_{l_m}}(t)$, где $D = \frac{1}{\sup_{t \in T} \psi(t)}$. Таким образом, $0 \leq \xi_{l_1, \dots, l_m}(t) \leq 1$ для всех $t \in T$, $l_1, \dots, l_m = 1, 2, \dots$.

Назовем сумму

$$\sum_{l_1=N_1}^{p_1^0} \cdots \sum_{l_m=N_m}^{p_m^0} c_{l_1, \dots, l_m} \psi_{n_{l_1}, \dots, n_{l_m}}(t),$$

где $p_1^0, \dots, p_m^0$, $N_1, \dots, N_m$, $c_{l_1, \dots, l_m}$ выбраны определенным образом, *пачкой*. Элементу $\xi_{l_1, \dots, l_m}(t)$ соответствует элемент $\psi_{n_0, k^0}(t) = \psi(2^{n_0} t_1 - k_1^0, \dots, 2^{n_0} t_m - k_m^0)$, где $n_0 = 0, 1, 2, \dots$, $0 \leq k_1^0 \leq 2^{n_0} - 1, \dots, 0 \leq k_m^0 \leq 2^{n_0} - 1$. Назовем множество

$$E_{l_1, \dots, l_m} = \left\{ t \in T : \frac{k_1^0}{2^{n_0}} < t_1 < \frac{k_1^0 + 1}{2^{n_0}}, \dots, \frac{k_m^0}{2^{n_0}} < t_m < \frac{k_m^0 + 1}{2^{n_0}} \right\} \quad (9)$$

основанием элемента $\xi_{l_1, \dots, l_m}(t)$. Очевидно, что $\text{supp } \xi_{l_1, \dots, l_m}(t) \subset \overline{E_{l_1, \dots, l_m}}$, где $\text{supp } f(t) = \{t \in T : f(t) \neq 0\}$. Доказательство леммы конструктивное и состоит из построения конечного числа пачек, сумма которых удовлетворяет условиям леммы.

Построим первую пачку следующим образом. Учитывая (3), (5), выберем элементы $\xi_{l_1, \dots, l_m}(t)$ таким образом, чтобы их основания не пересекались, в то время как объединение оснований содержалось в Δ и по мере было между $|\Delta|$ и $|\Delta| - \varepsilon$, где ε – малая величина. Действительно, возьмем сумму, которая удовлетворяет условию (3). Тогда основания элементов $\xi_{l_1, \dots, l_m}(t)$ покрывают множество T с требуемой точностью. Так как основания элементов $\xi_{l_1, \dots, l_m}(t)$ являются m -мерными квадратами (или просто квадратами), перенумеруем основания в указанной сумме в каком-то порядке невозрастания их m -мерных объемов (или просто объемов). Основания с одинаковыми объемами не пересекаются. Основания с меньшими объемами по отношению к основаниям с большими объемами или не пересекаются, или содержатся в основаниях с большими объемами. Поэтому оставляем в указанной перенумерованной сумме, по мере возрастания номера суммы, те элементы, которые удовлетворяют введенным требованиям, т. е. оставляем новый элемент с условием, чтобы он не пересекался с объединением предыдущих оставленных элементов.

Пусть $N_1, \dots, N_m$ произвольные. Поскольку $|E_{l_1, \dots, l_m}| \rightarrow 0$ при $l_1 \rightarrow \infty, \dots, l_m \rightarrow \infty$, из соотношения (3) следует, что для $\eta/8$ существуют $k_1^1, \dots, k_m^1$, $N_1^1 > N_1, \dots, N_m^1 > N_m$ такие, что

$$\left\{ \bigcup E_{l_1, \dots, l_m}, (l_1, \dots, l_m) \in \Omega_1 \right\} \subset \Delta, \\ |\Delta| - \left| \left\{ \bigcup E_{l_1, \dots, l_m}, (l_1, \dots, l_m) \in \Omega_1 \right\} \right| < \frac{\eta}{8},$$

где

$$\Omega_1 = \{(l_1, \dots, l_m) : N_1^1 \leq l_1 \leq k_1^1, \dots, N_m^1 \leq l_m \leq k_m^1, E_{l_1, \dots, l_m} \subset \Delta\}, \\ E_{l_1^0, \dots, l_m^0} \cap \left\{ \bigcup E_{l_1, \dots, l_m}, (l_1, \dots, l_m) \in \Omega_1 \setminus \{(l_1^0, \dots, l_m^0), (l_1^0, \dots, l_m^0) \in \Omega_1\} \right\} = \emptyset.$$

Положим $c_{l_1, \dots, l_m} = \lambda$, $(l_1, \dots, l_m) \in \Omega_1$. Для $(l_1, \dots, l_m) \notin \Omega_1$ положим $c_{l_1, \dots, l_m} = 0$. Для любых $t \in T$, $0 \leq c_{l_1, \dots, l_m} \leq \lambda$, $l_1 = \overline{N_1^1, k_1^1}, \dots, l_m = \overline{N_m^1, k_m^1}$ получим

$$0 \leq \sum_{l_1=N_1^1}^{k_1^1} \cdots \sum_{l_m=N_m^1}^{k_m^1} c_{l_1, \dots, l_m} \xi_{l_1, \dots, l_m}(t) \leq \lambda \chi_\Delta(t).$$

Для функции

$$G_1(t) = \lambda \chi_\Delta(t) - \sum_{l_1=N_1^1}^{k_1^1} \cdots \sum_{l_m=N_m^1}^{k_m^1} c_{l_1, \dots, l_m} \xi_{l_1, \dots, l_m}(t)$$

верно неравенство $\text{mes}\{t \in T : 0 \leq G_1(t) \leq \tau\} \geq (|\Delta| - \eta/4)M(\tau/2, \lambda)$, где $M(\tau, \lambda) = \text{mes}\{t \in T : \lambda - \tau \leq \lambda D\psi(t) \leq \lambda\}$. Условия (7) и (8) для $G_1(t)$ очевидны. Тогда n -я пачка, где $n \geq 2$, строится рекуррентно так же, как и первая, следующим образом. Функция

$$G_{n-1}(t) = \lambda \chi_\Delta(t) - \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{l_1=N_1^i}^{k_1^i} \cdots \sum_{l_m=N_m^i}^{k_m^i} c_{l_1, \dots, l_m} \xi_{l_1, \dots, l_m}(t) \right)$$

ограничена на T и разрывна на не более чем конечном числе линий (гиперплоскостей), параллельных осям координат и проходящих через двоично-рациональные точки. Поэтому для функции $G_{n-1}(t)$ существует ступенчатая функция

$$P_{n-1}(t) = \sum_{j=1}^{j_0} b_j \chi_{B_j}(t),$$

где $B_j \cap B_i = \emptyset$, $i \neq j$, и B_j , $j = \overline{1, j_0}$, — m -мерные квадраты со сторонами, параллельными осям координат, координаты граней которых являются двоично-рациональными числами, такая, что

$$P_{n-1}(t) \leq G_{n-1}(t) \quad \forall t \in T, \\ 0 \leq G_{n-1}(t) - P_{n-1}(t) \leq \frac{\tau}{2} \quad \forall t \in T.$$

Мы выбрали N_j^n , $j = \overline{1, m}$, таким образом, чтобы выполнялось

$$N_j^n > k_j^{n-1}, \quad j = \overline{1, m}, \quad |E_{l_1, \dots, l_m}| < \min_{1 \leq j \leq j_0} \{|B_j|\}, \quad l_j \geq N_j^n, \quad j = \overline{1, m},$$

и множество $E_{l_1, \dots, l_m}$ содержалось в каком-то множестве B_j . Для $\eta/4^n$ из условия (3) найдем k_j^n , $k_j^n \geq N_j^n$, $j = \overline{1, m}$, таким образом, чтобы

$$\begin{aligned} & \left\{ \bigcup E_{l_1, \dots, l_m}, (l_1, \dots, l_m) \in \Omega_n \right\} \subset \Delta, \\ & |\Delta| - \left| \left\{ \bigcup E_{l_1, \dots, l_m}, (l_1, \dots, l_m) \in \Omega_n \right\} \right| < \frac{\eta}{4^n}, \\ & E_{l_1, \dots, l_j^1, \dots, l_m} \cap E_{l_1, \dots, l_j^2, \dots, l_m} = \emptyset, \quad l_j^1 \neq l_j^2, \\ & (l_1, \dots, l_j^1, \dots, l_m) \in \Omega_n, \quad (l_1, \dots, l_j^2, \dots, l_m) \in \Omega_n, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_n &= \{(l_1, \dots, l_m) : N_1^n \leq l_1 \leq k_1^n, \dots, N_m^n \leq l_m \leq k_m^n, E_{l_1, \dots, l_m} \subset \Delta\} \\ E_{l_1^0, \dots, l_m^0} \cap \left\{ \bigcup E_{l_1, \dots, l_m}, (l_1, \dots, l_m) \in \Omega_n \setminus \{(l_1^0, \dots, l_m^0), (l_1^0, \dots, l_m^0) \in \Omega_n\} \right\} &= \emptyset. \end{aligned}$$

Положим $c_{l_1, \dots, l_m} = P_{n-1}(t)$ при $(l_1, \dots, l_m) \in \Omega_n$, $t \in E_{l_1, \dots, l_m}$ и $c_{l_1, \dots, l_m} = 0$ для остальных номеров. Из (10), $|E_{l_1, \dots, l_m}| \downarrow 0$, $l_1 \rightarrow \infty, \dots, l_m \rightarrow \infty$ и того, что $P_{n-1}(t) \leq G_{n-1}(t)$ для всех $t \in T$, следует, что

$$0 \leq c_{l_1, \dots, l_m} \xi_{l_1, \dots, l_m}(t) \leq G_{n-1}(t), \quad t \in T, \quad (l_1, \dots, l_m) \in \Omega_n.$$

Согласно (10) получаем

$$0 \leq \sum_{l_1=N_1^n}^{k_1^n} \dots \sum_{l_m=N_m^n}^{k_m^n} c_{l_1, \dots, l_m} \xi_{l_1, \dots, l_m}(t) \leq G_{n-1}(t) \quad \forall t \in T.$$

Тогда

$$G_n(t) \geq 0, \quad t \in T, \quad n \geq 1, \quad (11)$$

$$\text{mes}\{t \in T : 0 \leq |G_n(t)| \leq \tau\} \geq \sum_{j=1}^n d_j, \quad (12)$$

где

$$d_1 = \left(|\Delta| - \frac{\eta}{2} \right) M\left(\frac{\tau}{2}, \lambda\right), \quad d_j = \left(|\Delta| - \frac{\eta}{2} - \sum_{i=1}^{j-1} d_i \right) M\left(\frac{\tau}{2}, \lambda\right), \quad j \geq 2.$$

Очевидно, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} d_i$ сходится к $|\Delta| - \eta/2$. Докажем (12) методом математической индукции. Для $n = 1$ утверждение следует из построения первой пачки. Пусть соотношение (12) справедливо для $n - 1$. Докажем его для n . Обозначим

$$D_{n-1} = \{t \in T : 0 \leq |G_{n-1}(t)| \leq \tau\}.$$

Из предположения индукции имеем $|D_{n-1}| \geq \sum_{j=1}^{n-1} d_j$. Рассмотрим подмножество A_{n-1} множества D_{n-1} такое, что $A_{n-1} = \{(\alpha_1, t_0) \times (\alpha_2, \beta_2) \times \dots \times (\alpha_m, \beta_m) \cap D_{n-1}\}$, $t_0 \in (\alpha_1, \beta_1)$, $|A_{n-1}| = \sum_{j=1}^{n-1} d_j$.

Очевидно, что $M(\tau, \lambda_1) \geq M(\tau, \lambda_2)$, если $0 < \tau < \lambda_1 \leq \lambda_2$. Поскольку

$$0 \leq P_{n-1}(t) \leq \lambda, \quad t \in T,$$

имеем

$$\begin{aligned} \text{mes} \left\{ t \in T : P_{n-1}(t) - \frac{\tau}{2} \leq \sum_{l_1=N_1^n}^{k_1^n} \dots \sum_{l_m=N_m^n}^{k_m^n} c_{l_1, \dots, l_m} \xi_{l_1, \dots, l_m}(t) \leq P_{n-1}(t) \right\} \\ \geq \left(|\Delta| - \frac{\eta}{2} - |A_{n-1}| \right) M\left(\frac{\tau}{2}, \lambda\right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \text{mes} \{ t \in T : 0 \leq G_n(t) \leq \tau \} \\ \geq \text{mes} \left\{ t \in T : 0 \leq G_{n-1}(t) - \sum_{l_1=N_1^n}^{k_1^n} \dots \sum_{l_m=N_m^n}^{k_m^n} c_{l_1, \dots, l_m} \xi_{l_1, \dots, l_m}(t) \leq \tau \right\} \\ \geq |A_{n-1}| + \left(|\Delta| - \frac{\eta}{2} - |A_{n-1}| \right) M\left(\frac{\tau}{2}, \lambda\right) = \sum_{j=1}^n d_j. \end{aligned}$$

Поскольку ряд $\sum_{j=1}^{\infty} d_j$ сходится к $|\Delta| - \eta/2$, найдется номер j_0 такой, что для всех $n \geq j_0$ имеем $\sum_{j=1}^n d_j \geq |\Delta| - \eta$. В силу того, что $E_{l_1, \dots, l_j^1, \dots, l_m} \cap E_{l_1, \dots, l_j^2, \dots, l_m} = \emptyset$, если $l_j^1 \neq l_j^2$, $(l_1, \dots, l_j^1, \dots, l_m) \in \Omega_n$, $(l_1, \dots, l_j^2, \dots, l_m) \in \Omega_n$, справедливо

$$\begin{aligned} \sum_{l_1=N_1^n}^{n_1} \dots \sum_{l_m=N_m^n}^{n_m} c_{l_1, \dots, l_m} \xi_{l_1, \dots, l_m}(t) \leq \sum_{l_1=N_1^n}^{j_1} \dots \sum_{l_m=N_m^n}^{j_m} c_{l_1, \dots, l_m} \xi_{l_1, \dots, l_m}(t), \\ N_1^n \leq n_1 \leq j_1 \leq k_1^n = p_1, \quad \dots, \quad N_m^n \leq n_m \leq j_m \leq k_m^n = p_m, \end{aligned}$$

где $t \in T$. Тогда получаем (8). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При выполнении условий леммы 1 получаем соотношения, аналогичные (6)–(8) и для любого $\lambda \leq 0$. Доказательство этого аналогично.

ЛЕММА 2. Для произвольных $\lambda \in \mathbb{R}$, $E \subset T$ квазинорма пространства E_φ удовлетворяет условию

$$\lim_{|E| \rightarrow 0} \|\lambda \chi_E(t)\|_\varphi = 0. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы очевидно.

Продолжим доказательство достаточности теоремы. Из теоремы Лузина следует, что для произвольных $g \in E_\varphi$ и $\varepsilon > 0$ существует функция $F(t) \in C_T$ такая, что

$$\|g - F\|_\varphi < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \|F\|_\varphi < 2\|g\|_\varphi, \quad \text{mes}\{t \in T : F(t) = g(t)\} > 1 - \frac{\varepsilon}{4}. \quad (14)$$

Для произвольной непрерывной функции $F(t)$ существует ступенчатая функция $S_1(t)$ такая, что

$$|F(t) - S_1(t)| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad t \in T, \quad (15)$$

$$\|g(t) - S_1(t)\|_\varphi < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (16)$$

$$\|S_1(t)\|_\varphi \leq 2\|g(t)\|_\varphi. \quad (17)$$

Представим функцию $S_1(t)$ в виде $S_1(t) = S_1^+(t) - S_1^-(t)$, где

$$S_1^+(t) = \begin{cases} S_1(t), & \text{если } S_1(t) \geq 0, \\ 0, & \text{если } S_1(t) < 0, \end{cases} \quad S_1^-(t) = \begin{cases} -S_1(t), & \text{если } S_1(t) < 0, \\ 0, & \text{если } S_1(t) \geq 0. \end{cases}$$

Из лемм 1, 2 следует, что можно построить такие полиномы по подсистеме $\{\psi_{n_{l_1}, \dots, n_{l_m}}\}$, что

$$\text{mes}\left\{t \in T: \left|S_1^+(t) - \sum_{l_1=N_1^1}^{k_1^1} \cdots \sum_{l_m=N_m^1}^{k_m^1} c_{l_1, \dots, l_m} \xi_{l_1, \dots, l_m}(t)\right| > \frac{\varepsilon}{4}\right\} < \frac{\varepsilon}{4}, \quad (18)$$

$$\left\|S_1^+(t) - \sum_{l_1=N_1^1}^{k_1^1} \cdots \sum_{l_m=N_m^1}^{k_m^1} c_{l_1, \dots, l_m} \xi_{l_1, \dots, l_m}(t)\right\|_\varphi < \frac{\varepsilon}{4}, \quad (19)$$

$$\left\|\sum_{l_1=N_1^1}^{n_1} \cdots \sum_{l_m=N_m^1}^{n_m} c_{l_1, \dots, l_m} \xi_{l_1, \dots, l_m}(t)\right\|_\varphi \leq \|S_1^+(t)\|_\varphi, \quad (20)$$

$$N_1^1 \leq n_1 \leq k_1^1, \quad \dots, \quad N_m^1 \leq n_m \leq k_m^1.$$

Аналогично для функции $S_1^-(t)$ имеем

$$\left\|S_1^-(t) - \sum_{l_1=N_1^2}^{k_1^2} \cdots \sum_{l_m=N_m^2}^{k_m^2} c_{l_1, \dots, l_m} \xi_{l_1, \dots, l_m}(t)\right\|_\varphi < \frac{\varepsilon}{4}, \quad (21)$$

$$\left\|\sum_{l_1=N_1^2}^{n_1} \cdots \sum_{l_m=N_m^2}^{n_m} c_{l_1, \dots, l_m} \xi_{l_1, \dots, l_m}(t)\right\|_\varphi \leq \|S_1^-(t)\|_\varphi, \quad (22)$$

$$k_1^1 < N_1^2 \leq n_1 \leq k_1^2, \quad \dots, \quad k_m^1 < N_m^2 \leq n_m \leq k_m^2,$$

$$\text{mes}\left\{t \in T: \left|S_1^-(t) - \sum_{l_1=N_1^2}^{k_1^2} \cdots \sum_{l_m=N_m^2}^{k_m^2} c_{l_1, \dots, l_m} \xi_{l_1, \dots, l_m}(t)\right| > \frac{\varepsilon}{4}\right\} < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (23)$$

Из (14), (15), (18) и (23) следует, что

$$\text{mes}\left\{t \in T: \left|g(t) - \sum_{l_1=N_1^1}^{k_1^2} \cdots \sum_{l_m=N_m^1}^{k_m^2} c_{l_1, \dots, l_m} \xi_{l_1, \dots, l_m}(t)\right| > \varepsilon\right\} < \varepsilon. \quad (24)$$

Из неравенств (21), (19) и (16) получим

$$\left\|g(t) - \sum_{l_1=N_1^1}^{k_1^2} \cdots \sum_{l_m=N_m^1}^{k_m^2} c_{l_1, \dots, l_m} \xi_{l_1, \dots, l_m}(t)\right\|_\varphi < \varepsilon, \quad (25)$$

а из (17), (20) и (22) получаем

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{l_1=N_1^1}^{n_1} \cdots \sum_{l_m=N_m^1}^{n_m} |c_{l_1, \dots, l_m} \xi_{l_1, \dots, l_m}(t)| \right\|_{\varphi} \\ & \leq \left\| \sum_{l_1=N_1^1}^{k_1^2} \cdots \sum_{l_m=N_m^1}^{k_m^2} |c_{l_1, \dots, l_m} \xi_{l_1, \dots, l_m}(t)| \right\|_{\varphi} \leq 2\|S\|_{\varphi} \leq 4\|g\|_{\varphi}, \\ & N_1^1 \leq n_1 \leq k_1^2, \quad \dots, \quad N_m^1 \leq n_m \leq k_m^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Построим по индукции числа

$$\begin{aligned} N_{1,1}^1 &= N_1^1 < k_{1,1}^1 = k_1^1 < N_{1,1}^2 = N_{1,1}^2 < k_{1,1}^2 = k_1^2 < \dots \\ &\dots < N_{1,n}^1 < k_{1,n}^1 < N_{1,n}^2 < k_{1,n}^2, \dots \\ &\dots, N_{m,1}^1 < k_{m,1}^1 < N_{m,1}^2 < k_{m,1}^2 < \dots < N_{m,n}^1 < k_{m,n}^1 < N_{m,n}^2 < k_{m,n}^2, \end{aligned}$$

функции $S_n(t) = S_n^+(t) - S_n^-(t)$ и суммы

$$\begin{aligned} \sum_{l_1=N_{1,n}^1}^{k_{1,n}^2} \cdots \sum_{l_m=N_{m,n}^1}^{k_{m,n}^2} c_{l_1, \dots, l_m} \xi_{l_1, \dots, l_m}(t) &= \sum_{l_1=N_{1,n}^1}^{k_{1,n}^1} \cdots \sum_{l_m=N_{m,n}^1}^{k_{m,n}^1} c_{l_1, \dots, l_m} \xi_{l_1, \dots, l_m}(t) \\ &- \sum_{l_1=N_{1,n}^2}^{k_{1,n}^2} \cdots \sum_{l_m=N_{m,n}^2}^{k_{m,n}^2} c_{l_1, \dots, l_m} \xi_{l_1, \dots, l_m}(t) \quad (27) \end{aligned}$$

такие, что

$$\begin{aligned} & \left\| g(t) - \sum_{j=1}^n \left(\sum_{l_1=N_{1,j}^1}^{k_{1,j}^2} \cdots \sum_{l_m=N_{m,j}^1}^{k_{m,j}^2} c_{l_1, \dots, l_m} \xi_{l_1, \dots, l_m}(t) \right) \right\|_{\varphi} < \frac{\varepsilon}{2^n}, \quad n \geq 2, \quad (28) \\ & \left\| \sum_{l_1=N_{1,n}^1}^{n_1} \cdots \sum_{l_m=N_{m,n}^1}^{n_m} |c_{l_1, \dots, l_m} \xi_{l_1, \dots, l_m}(t)| \right\|_{\varphi} \leq \left\| \sum_{l_1=N_{1,n}^1}^{k_{1,n}^2} \cdots \sum_{l_m=N_{m,n}^1}^{k_{m,n}^2} |c_{l_1, \dots, l_m} \xi_{l_1, \dots, l_m}(t)| \right\|_{\varphi} \\ & \leq 2\|S_n\|_{\varphi} \leq 4 \left\| g(t) - \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{l_1=N_{1,j}^1}^{k_{1,j}^2} \cdots \sum_{l_m=N_{m,j}^1}^{k_{m,j}^2} c_{l_1, \dots, l_m} \xi_{l_1, \dots, l_m}(t) \right) \right\|_{\varphi} < \frac{4\varepsilon}{2^{n-1}}, \quad (29) \end{aligned}$$

где $N_{1,n}^1 \leq n_1 \leq k_{1,n}^2, \dots, N_{m,n}^1 \leq n_m \leq k_{m,n}^2$,

$$\text{mes} \left\{ t \in T : \left| g(t) - \sum_{j=1}^n \left(\sum_{l_1=N_{1,j}^1}^{k_{1,j}^2} \cdots \sum_{l_m=N_{m,j}^1}^{k_{m,j}^2} c_{l_1, \dots, l_m} \xi_{l_1, \dots, l_m}(t) \right) \right| > \frac{\varepsilon}{2^{n-1}} \right\} \leq \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}. \quad (30)$$

Тогда для любых $n_1 \geq k_{1,1}^2, \dots, n_m \geq k_{m,1}^2$ найдутся $n' \geq n \geq 2$ такие, что $N_{1,n}^1 \leq n_1 \leq k_{1,n'}^2, \dots, N_{m,n}^1 \leq n_m \leq k_{m,n'}^2$. Из (25), (27)–(29) следует, что

$$\begin{aligned} & \left\| g(t) - \sum_{l_1=N_{1,1}^1}^{n_1} \cdots \sum_{l_m=N_{m,1}^1}^{n_m} c_{l_1, \dots, l_m} \xi_{l_1, \dots, l_m}(t) \right\|_\varphi \\ & \leq \left\| g(t) - \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{l_1=N_{1,j}^1}^{k_{1,j}^2} \cdots \sum_{l_m=N_{m,j}^1}^{k_{m,j}^2} c_{l_1, \dots, l_m} \xi_{l_1, \dots, l_m}(t) \right) \right\|_\varphi \\ & \quad + \sum_{j=n}^{n'} \left\| \sum_{l_1=N_{1,j}^1}^{k_{1,j}^2} \cdots \sum_{l_m=N_{m,j}^1}^{k_{m,j}^2} |c_{l_1, \dots, l_m} \xi_{l_1, \dots, l_m}(t)| \right\|_\varphi \leq \frac{\varepsilon}{2^{n-1}} + \frac{4\varepsilon}{2^{n-1}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Кроме того, из (26), (29) следует, что ряд $\sum_{l_1=N_{1,1}^1}^\infty \cdots \sum_{l_m=N_{m,1}^1}^\infty c_{l_1, \dots, l_m} \times \xi_{l_1, \dots, l_m}(t)$ сходится абсолютно. Действительно,

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{l_1=N_{1,1}^1}^{n_1} \cdots \sum_{l_m=N_{m,1}^1}^{n_m} |c_{l_1, \dots, l_m} \xi_{l_1, \dots, l_m}(t)| \right\|_\varphi \\ & \leq \sum_{j=1}^{n-1} \left\| \sum_{l_1=N_{1,j}^1}^{k_{1,j}^2} \cdots \sum_{l_m=N_{m,j}^1}^{k_{m,j}^2} |c_{l_1, \dots, l_m} \xi_{l_1, \dots, l_m}(t)| \right\|_\varphi \\ & \quad + \sum_{j=n}^{n'} \left\| \sum_{l_1=N_{1,j}^1}^{k_{1,j}^2} \cdots \sum_{l_m=N_{m,j}^1}^{k_{m,j}^2} |c_{l_1, \dots, l_m} \xi_{l_1, \dots, l_m}(t)| \right\|_\varphi \\ & \leq 4\|g(t)\|_\varphi + 4 \sum_{i=2}^{n-1} \frac{\varepsilon}{2^{i-1}} + \frac{4\varepsilon}{2^{n-2}} < 12\|g(t)\|_\varphi \end{aligned}$$

для всех $n_1 \geq N_{1,1}^1, \dots, n_m \geq N_{m,1}^1$.

ТЕОРЕМА 2. Для того чтобы подсистема $\{\psi_{n_{l_1}, \dots, n_{l_m}}\}$ системы (2) была системой представления в $S(T)$ в смысле сходимости почти всюду, необходимо и достаточно, чтобы для любых $\varepsilon > 0$, $N_1 \in \mathbb{N}, \dots, N_m \in \mathbb{N}$ существовали $p_1 \in \mathbb{N}, \dots, p_m \in \mathbb{N}$ такие, что

$$\text{mes} \left\{ t \in T: \sum_{l_1=N_1}^{p_1} \cdots \sum_{l_m=N_m}^{p_m} \psi_{n_{l_1}, \dots, n_{l_m}}(t_1, \dots, t_m) \neq 0 \right\} > 1 - \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Предположим противное. Тогда существуют $\varepsilon > 0$, $N_1 \in \mathbb{N}, \dots, N_m \in \mathbb{N}$ такие, что для всех $p_1 > N_1, \dots, p_m > N_m$

$$\text{mes} \left\{ t \in T: \sum_{l_1=N_1}^{p_1} \cdots \sum_{l_m=N_m}^{p_m} \psi_{n_{l_1}, \dots, n_{l_m}}(t_1, \dots, t_m) = 0 \right\} > \varepsilon.$$

Зафиксируем такие $N_1, \dots, N_m$. Пусть

$$A_\varepsilon = \left\{ t \in T: \sum_{l_1=N_1}^\infty \cdots \sum_{l_m=N_m}^\infty \psi_{n_{l_1}, \dots, n_{l_m}}(t_1, \dots, t_m) = 0 \right\}.$$

Ясно, что $|A_\varepsilon| > 0$.

Пусть $M_1 = \max\{n_{N_1}, \dots, n_{N_m}\}$. Тогда существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $2^{n_0} \leq M_1 \leq 2^{n_0+1}$. Пусть $M = 2^{n_0+3}$. Заметим, что, в силу определения системы $\{\psi_{n,k}\}$ в теореме 1, для произвольного элемента $\psi_{n_{l_1}, \dots, n_{l_m}}$ существует неотрицательное целое n такое, что выполнены неравенства $2^n \leq n_{l_i} \leq 2^{n+1}$ для всех $1 \leq i \leq m$, где n одно и то же для всех i .

Очевидно, что существует неотрицательная функция $f_0(t) \in S(T)$ такая, что $f_0(t)\chi_{A_\varepsilon}(t) \in S(T)$ и

$$\inf_{\{l_1, \dots, l_m\}} \text{mes} \left\{ t \in T : \left| f_0(t)\chi_{A_\varepsilon}(t) - \sum_{l_1=1}^M \cdots \sum_{l_m=1}^M c_{l_1, \dots, l_m} \psi_{l_1, \dots, l_m}(t) \chi_{A_\varepsilon}(t) \right| \neq 0 \right\} = \delta > 0,$$

где инфимум берется для $l_1 = \overline{1, M}, \dots, l_m = \overline{1, M}$. Если бы это было не так, то конечномерные системы функций были бы системами представления в пространстве $S(T)$, но пространство $S(T)$ является бесконечномерным. Значит, будем иметь

$$\begin{aligned} & \inf_{\{c_{l_1, \dots, l_m}\}} \text{mes} \left\{ t \in T : \left| f_0(t)\chi_{A_\varepsilon}(t) - \sum_{l_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{l_m=1}^{\infty} c_{l_1, \dots, l_m} \psi_{n_{l_1}, \dots, n_{l_m}}(t) \right| \neq 0 \right\} \\ & \geq \inf_{\{c_{l_1, \dots, l_m}\}} \text{mes} \left\{ t \in T : \left| f_0(t)\chi_{A_\varepsilon}(t) - \left(\sum_{r_1=1}^M \cdots \sum_{r_m=1}^M c_{r_1, \dots, r_m} \psi_{r_1, \dots, r_m}(t) \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. + \sum_{l_1=N_1}^{\infty} \cdots \sum_{l_m=N_m}^{\infty} c_{l_1, \dots, l_m} \psi_{n_{l_1}, \dots, n_{l_m}}(t) \right) \chi_{A_\varepsilon}(t) \right| \neq 0 \right\} \\ & \geq \inf_{\{c_{r_1, \dots, r_m}\}} \text{mes} \left\{ t \in T : \left| f_0(t)\chi_{A_\varepsilon}(t) - \sum_{r_1=1}^M \cdots \sum_{r_m=1}^M c_{r_1, \dots, r_m} \psi_{r_1, \dots, r_m}(t) \chi_{A_\varepsilon}(t) \right| \neq 0 \right\} = \delta > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что система $\{\psi_{n_{l_1}, \dots, n_{l_m}}\}$ не полна в пространстве $S(T)$. Получили противоречие с условием теоремы.

Достаточность. Поскольку $S(T) = \bigcup_{\varphi \in \Phi} E_\varphi$, из (24), (30) получаем, что

$$g(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{k_{1,n}^2, \dots, k_{m,n}^2}(t) \quad (31)$$

почти всюду. Из построения суммы $\sum_{l_1=N_{1,n}}^{k_{1,n}^2} \cdots \sum_{l_m=N_{m,n}}^{k_{m,n}^2} c_{l_1, \dots, l_m} \xi_{l_1, \dots, l_m}(t)$ следует, что в каждой точке множества T все слагаемые в этой сумме имеют один и тот же знак (зависящий от точки), поэтому

$$\begin{aligned} \min\{S_{k_{1,n}^2, \dots, k_{m,n}^2}^2(t), S_{k_{1,n-1}^2, \dots, k_{m,n-1}^2}^2(t)\} & \leq S_{p_1, \dots, p_m}(t) \\ & \leq \max\{S_{k_{1,n}^2, \dots, k_{m,n}^2}^2(t), S_{k_{1,n-1}^2, \dots, k_{m,n-1}^2}^2(t)\} \end{aligned}$$

при $k_{1,n-1}^2 \leq p_1 \leq k_{1,n}^2, \dots, k_{m,n-1}^2 \leq p_m \leq k_{m,n}^2$, а это вместе с (31) означает, что

$$g(t) = \lim_{p_1 \rightarrow \infty, \dots, p_m \rightarrow \infty} S_{p_1, \dots, p_m}(t)$$

почти всюду.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Доказывая достаточное условие теоремы 1, кроме того, получили, что построенный ряд $\sum_{l_1=1}^{\infty} \dots \sum_{l_m=1}^{\infty} c_{l_1, \dots, l_m} \xi_{l_1, \dots, l_m}(t)$ сходится еще почти всюду к данной функции $g(t)$ в смысле сходимости, как в конце доказательства достаточности теоремы 2.

ТЕОРЕМА 3. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) подсистема $\{\psi_{n_{l_1}, \dots, n_{l_m}}\}$ системы (2) является системой представления в E_φ ;
- 2) подсистема $\{\psi_{n_{l_1}, \dots, n_{l_m}}\}$ системы (2) является абсолютной системой представления в E_φ ;
- 3) подсистема $\{\psi_{n_{l_1}, \dots, n_{l_m}}\}$ системы (2) удовлетворяет условию (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 1 следует, что 3) $\Leftrightarrow$ 1) и 3) $\Rightarrow$ 2), а из определений системы представления и абсолютной системы представления получаем, что 2) $\Rightarrow$ 1).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Поскольку система Фабера–Шаудера является частным случаем системы типа (2), из доказательства необходимости теоремы 2 и работы [7] следует, что условие (3) необходимо и достаточно для того, чтобы подсистема $\{\psi_{n_{l_1}, \dots, n_{l_m}}\}$ системы Фабера–Шаудера была системой представления в смысле сходимости почти всюду в классе всех измеримых и конечных почти всюду на $[0, 1]$ функций.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Легко видеть, что из доказательства достаточности теоремы 1 следует, что система (1) является системой представления в пространствах E_φ .

Список литературы

1. В. И. Филиппов, “Системы функций, получающиеся сжатиями и сдвигами одной функции, в пространствах E_φ с $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t)}{t} = 0$ ”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:2 (2001), 187–200; англ. пер.: V. I. Filippov, “Function systems obtained using translates and dilates of a single function in the spaces E_φ with $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t)}{t} = 0$ ”, *Izv. Math.*, **65**:2 (2001), 389–402.
2. П. Л. Ульянов, “Представление функций рядами и классы $\varphi(L)$ ”, *УМН*, **27**:2 (1972), 3–52; англ. пер.: P. L. Ul'yanov, “Representation of functions by series and classes $\varphi(L)$ ”, *Russian Math. Surveys*, **27**:2 (1972), 1–54.
3. П. Л. Ульянов, “Замечания о сходимости в среднем”, *Матем. заметки*, **21**:6 (1977), 807–816; англ. пер.: P. L. Ul'yanov, “Remarks on mean convergence”, *Math. Notes*, **21**:6 (1977), 455–461.
4. V. I. Filippov, P. Oswald, “Representation in L^p by series of translates and dilates of one function”, *J. Approx. Theory*, **82**:1 (1995), 15–29.
5. V. I. Filippov, “On the completeness and other properties of some function systems in L_p , $0 < p < \infty$ ”, *J. Approx. Theory*, **94**:1 (1998), 42–53.

6. В. И. Филиппов, “О подсистемах системы Фабера–Шаудера в функциональных пространствах”, *Изв. вузов. Матем.*, 1991, № 2, 78–85; англ. пер.: V. I. Filippov, “On subsystems of the Faber–Schauder system in functional spaces”, *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, **35**:2 (1991), 90–97.
7. R. E. Zink, “On a theorem of Goffman concerning Schauder series”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **21**:3 (1969), 523–529.
8. В. Г. Кротов, “Представление измеримых функций рядами по системе Фабера–Шаудера и универсальные ряды”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **41**:1 (1977), 215–229; англ. пер.: V. G. Krotov, “Representation of measurable functions by series in the Faber–Schauder system, and universal series”, *Math. USSR-Izv.*, **11**:1 (1977), 205–218.
9. V. I. Filippov, “Linear continuous functionals and representation of functions by series in the spaces E_φ ”, *Anal. Math.*, **27**:4 (2001), 239–260.
10. J. Musielak, *Orlicz spaces and modular spaces*, Lecture Notes in Math., **1034**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
11. К. Иосида, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967; пер. с англ.: K. Yosida, *Functional analysis*, Grundlehren Math. Wiss., **123**, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg; Academic Press, New York, 1965.
12. А. А. Талалян, “Об аппроксимационных свойствах некоторых неполных систем”, *Матем. сб.*, **115(157)**:4(8) (1981), 499–531; англ. пер.: A. A. Talaljan, “On approximation properties of certain incomplete systems”, *Math. USSR-Sb.*, **43**:4 (1982), 443–471.

В. И. Филиппов (V. I. Filippov)
Саратовский государственный
социально-экономический университет
E-mail: 888vadim@mail.ru

Поступило в редакцию
25.02.2011
14.08.2011