Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Кудрявцев, О скорости сходимости орторекурсивных разложений по неортогональным всплескам, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2012, том 76, выпуск 4, 49–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7301>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 12:23:11

УДК 517.518+517.982

А. Ю. Кудрявцев

О скорости сходимости орторекурсивных разложений по неортогональным всплескам

Рассмотрены орторекурсивные разложения, являющиеся обобщением ортогональных рядов, по семействам неортогональных всплесков – двоичных сжатий и целочисленных сдвигов заданной функции φ . При некоторых не слишком жестких ограничениях на функцию φ даны оценки скорости сходимости орторекурсивных разложений по неортогональным всплескам. Приведены примеры оценок для конкретных функций φ .

Библиография: 13 наименований.

Ключевые слова: орторекурсивное разложение, всплески, вейвлеты, равенство Парсевала, жадный алгоритм, скорость сходимости, вычислительная устойчивость, система Фабера–Шаудера.

Введение

Орторекурсивные разложения, являющиеся обобщением ортогональных разложений, были предложены Т.П. Лукашенко в работах [1], [2]. Идея их использования восходит еще к заметке Б.С. и С.Б. Стечкиных [3]. Приведем определение и некоторые свойства этого способа разложения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ – система ненулевых элементов $\mathcal{H}$. Для произвольного элемента $f \in \mathcal{H}$ определим коэффициенты разложения $\{\hat{f}_j\}_{j=1}^\infty$ следующим образом:

1) положим

$$\hat{f}_1 = \frac{(f, e_1)}{\|e_1\|^2};$$

2) если уже определены $\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n$, то положим

$$\hat{f}_{n+1} = \frac{(r_n(f), e_{n+1})}{\|e_{n+1}\|^2},$$

где $r_n(f) = f - \sum_{j=1}^n \hat{f}_j e_j$.

Коэффициенты $\{\hat{f}_j\}_{j=1}^\infty$ будем называть *орторекурсивными коэффициентами Фурье* элемента f по системе $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ (для ортогональной системы они совпадают с обычными коэффициентами Фурье), а формальный ряд $\sum_{j=1}^\infty \hat{f}_j e_j$ – *орторекурсивным рядом Фурье* элемента f по системе $\{e_j\}_{j=1}^\infty$.

Графическая иллюстрация процесса разложения приведена на рис. 1.

Рис. 1. Двумерная иллюстрация процесса разложения

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 [2]. Для любых элемента $f \in \mathcal{H}$ и системы $\{e_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{H} \setminus \{0\}$ справедливы тождество Бесселя

$$\left\| f - \sum_{j=1}^n \hat{f}_j e_j \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{j=1}^n |\hat{f}_j|^2 \|e_j\|^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

и неравенство Бесселя $\sum_{j=1}^{\infty} |\hat{f}_j|^2 \|e_j\|^2 \leq \|f\|^2$. Орторекурсивный ряд Фурье элемента f по системе $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ сходится к f тогда и только тогда, когда выполняется равенство Парсеваля $\sum_{j=1}^{\infty} |\hat{f}_j|^2 \|e_j\|^2 = \|f\|^2$.

Таким образом, для орторекурсивных разложений справедливы аналоги свойств разложений по ортогональным семействам. К сожалению, орторекурсивное разложение даже на плоскости может расходиться или сходиться к элементу, отличному от разлагаемого.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Систему $\{e_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{H} \setminus \{0\}$ назовем *орторекурсивной системой разложения* в $\mathcal{H}$, если для любого элемента $f \in \mathcal{H}$ орторекурсивный ряд Фурье f по системе $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ сходится к f в $\mathcal{H}$.

Пусть φ – действительно- или комплекснозначная функция на вещественной прямой, принадлежащая пространству Лебега $L^2(\mathbb{R})$ над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ соответственно. Функции

$$\varphi_{k,l}(x) = 2^{k/2} \varphi(2^k x - l), \quad x \in \mathbb{R}, \quad k, l \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

будем называть *всплесками*, порожденными функцией φ . При этом мы, как и в книге [4], вообще говоря, не требуем от функций (2) ортогональности.

В настоящей работе рассматривается семейство функций

$$\Phi = \{\varphi_{k,l} : k \geq 0, l \in \mathbb{Z}\}. \quad (3)$$

Набор функций $\Pi_k = \{\varphi_{k,l} : l \in \mathbb{Z}\}$ называется k -й *пачкой*.

В. И. Филиппов и П. Освальд в статье [5] доказали, в частности, что если $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, $|\varphi(x)| = O(|x|^{-1-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, при $|x| \rightarrow \infty$ и $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx \neq 0$, то семейство всплесков (2), порожденных функцией φ , является системой представления в пространстве $L^2(\mathbb{R})$, т.е. для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ найдется ряд вида $\sum_{k,l \in \mathbb{Z}} c_{k,l}(f) \varphi_{k,l}(x)$, сходящийся к f в $L^2(\mathbb{R})$.

В настоящей работе мы определим орторекурсивные разложения по системе Φ и получим оценку скорости их сходимости. Для того чтобы определить разложения по системе Φ , пачки которой содержат бесконечное число функций, мы обобщаем орторекурсивный процесс разложения в § 1. Основные результаты сформулированы в § 2. Несколько более слабые теоремы для случая, когда $\text{supp } \varphi \subset [0, 1]$, были получены ранее в работах автора [6], [7]. Данный случай также рассматривается в статье [8]. Доказательства результатов приведены в § 3, 4. Примеры применения полученных результатов даны в § 5.

То, что на каждом шаге орторекурсивных разложений ищется приближение остатка, полученного на предыдущем шаге, роднит их с так называемыми “жадными” алгоритмами (Greedy Algorithms). В последних после получения остатка $r_n(f)$ выбирается элемент $e_{n+1} = e_{n+1}(f)$ из некоторого заранее заданного множества $D \subset \mathcal{H}$, который наилучшим образом приближает $r_n(f)$ (см. [9]). При таком подходе имеется возможность оптимизации (в различных смыслах) процесса разложения, но не имеет место линейность разложения. Орторекурсивные разложения характеризуются линейностью и отсутствием усложняющего разложение алгоритма выбора следующего элемента.

Важным свойством орторекурсивных разложений является их устойчивость к ошибкам в вычислении коэффициентов. Об этом подробнее говорится в работе [10].

Алгоритмы, подобные представленному в работе, находят применение в цифровой обработке сигналов, сжатии изображений, распознавании образов и других областях.

Автор благодарен Т. П. Лукашенко, А. И. Подкопаеву и рецензенту работы за ряд полезных замечаний.

§ 1. Обобщенные орторекурсивные разложения

Обобщим определение 1 следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $\mathcal{L}$ – линейное пространство, $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ – совокупность линейных операторов в $\mathcal{L}$. Для произвольного элемента $f \in \mathcal{L}$ определим последовательность элементов $\{\hat{f}_k\}_{k=1}^{\infty}$ следующим образом:

- 1) положим $\hat{f}_1 = P_1(f)$;
- 2) если уже определены элементы $\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n$, то положим

$$\hat{f}_{n+1} = P_{n+1}R_n(f),$$

где $R_n(f) = f - \sum_{k=1}^n \hat{f}_k$.

Формальный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_k$ будем называть *рекурсивным рядом* (или *рекурсивным разложением*) элемента f по семейству операторов $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $\mathcal{N}$ – нормированное пространство. Последовательность линейных операторов $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $\mathcal{N}$ назовем *рекурсивной последовательностью в пространстве $\mathcal{N}$* , если для любого $f \in \mathcal{N}$ рекурсивный ряд элемента f по семейству операторов $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к f в $\mathcal{N}$.

Всюду далее для произвольного оператора P будем использовать обозначение $P' = I - P$, где I – тождественный оператор. Легко видеть, что

$$R_n(f) = P'_n P'_{n-1} \cdots P'_1(f), \quad \hat{f}_n = P_n P'_{n-1} \cdots P'_1(f).$$

§ 2. Основные результаты

Далее через $\|\cdot\|$ будет обозначаться норма в $L^2(\mathbb{R})$.

Предположим, что система $\{\varphi(x-l): l \in \mathbb{Z}\}$ имеет верхнюю границу Рисса $B > 0$, т. е. для любой последовательности $\{a_l\}_{l=-\infty}^{+\infty}$, имеющей лишь конечное число отличных от нуля членов, выполняется неравенство

$$\left\| \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l \varphi(x-l) \right\|^2 \leq B^2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} |a_l|^2. \quad (4)$$

Пусть каждая пачка Π_k занумерована натуральными числами, т. е. задано взаимно однозначное отображение $\theta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ такое, что $\Pi_k = \{\varphi_{k, \theta(j)}\}_{j=1}^{\infty}$. Пусть отображение θ одно и то же для всех $k \geq 0$, т. е. все пачки упорядочены одинаково. Пусть P_k , $k \geq 0$, – оператор орторекурсивного разложения по пачке Π_k семейства Φ , т. е. для любой функции $g \in L^2(\mathbb{R})$

$$P_k(g) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{g}_{k,l} \varphi_{k,l}(x), \quad (5)$$

где $\hat{g}_{k,l}$ – орторекурсивные коэффициенты функции g , вычисляемые в соответствии с определением 1 по пачке Π_k в том порядке, в котором она занумерована. Оператор P_k определен корректно, так как ряд (5) сходится в $L^2(\mathbb{R})$ в силу условия (4) и неравенства Бесселя (см. утверждение 1). Рекурсивное разложение по семейству операторов $\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$ будем называть *орторекурсивным разложением по системе Φ* . При этом $R_n(f) = P'_n P'_{n-1} \cdots P'_0(f)$ – остаток этого разложения для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Возможен и другой подход. Пусть P_k° – оператор ортогонального проектирования на замыкание линейной оболочки пачки Π_k . Рекурсивное разложение по семейству операторов $\{P_k^{\circ}\}_{k=0}^{\infty}$ будем называть *ортогональным рекурсивным разложением по системе Φ* . При этом $R_n^{\circ}(f) = (P_n^{\circ})'(P_{n-1}^{\circ})' \cdots (P_0^{\circ})'(f)$ – остаток этого разложения для $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Преобразование Фурье в $L^1(\mathbb{R})$ и $L^2(\mathbb{R})$ будем определять выражением

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \omega x} dx, \quad (6)$$

где в случае, когда $f \in L^2(\mathbb{R})$, интеграл понимается как предел в метрике пространства $L^2(\mathbb{R})$ интегралов того же выражения по отрезкам $[-A, A]$ при $A \rightarrow +\infty$ (о существовании этого предела см. [11, гл. 8, § 5, п. 1]). Выражение (6) удобно тем, что в равенстве Парсеваля–Планшереля отсутствует постоянный множитель, содержащий 2π : $(f, g) = (\hat{f}, \hat{g})$ для любых функций $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.

Обозначим через $\mathcal{L}_1^2(\mathbb{R})$ множество измеримых на действительной оси функций φ , для которых

$$\int_0^1 \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\varphi(x+m)| \right)^2 dx < \infty.$$

Поскольку каждая интегрируемая с квадратом на отрезке $[0, 1]$ функция интегрируема на $[0, 1]$, то $\mathcal{L}_1^2(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$. Так как сумма квадратов неотрицательных чисел не превосходит квадрата суммы, то $\mathcal{L}_1^2(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$. Таким образом, $\mathcal{L}_1^2(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

В следующей теореме формулируется оценка скорости сходимости орторекурсивных разложений по системе Φ .

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция φ удовлетворяет следующим условиям:

(A0) $\varphi \in \mathcal{L}_1^2(\mathbb{R})$;

(A1) $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx \neq 0$;

(A2) существует функция $F(\omega)$, невозрастающая на промежутке $[0, +\infty)$ и такая, что $|\hat{\varphi}(\omega)| \leq F(|\omega|)$ при всех $\omega \in \mathbb{R}$ и

$$\int_0^\infty F^2(\omega) \ln(1 + \omega) d\omega < \infty. \quad (7)$$

Тогда существуют $\delta > 0$ и невозрастающая функция $\bar{\sigma}(m) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ такие, что для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ и любых целых n и k , $0 \leq k \leq n$, выполняется неравенство

$$\|R_n(f)\| \leq \left\{ \int_{|\omega| > 2^k \delta} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \right\}^{1/2} + \bar{\sigma}(n-k) \|f\|. \quad (8)$$

Если $|\hat{\varphi}(\omega)| = O(|\omega|^{-1/2-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, при $|\omega| \rightarrow \infty$, то существует такое число $0 \leq \lambda < 1$, что $\bar{\sigma}(m) = O(\lambda^{m/\ln m})$ при $m \rightarrow \infty$.

Доказательство теоремы 1 приведено в § 4.

Примеры оценок скорости сходимости разложений по конкретным системам неортогональных всплесков приведены в § 5.

Следующая теорема дает оценку скорости сходимости для ортогональных рекурсивных разложений по системе Φ .

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция φ удовлетворяет следующим условиям:

(A0') $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ и $\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + m)|^2 \leq B^2$ при почти всех $\omega \in \mathbb{R}$, где $B > 0$;

(A1') существует $\Delta > 0$ такое, что $\text{essinf}_{|\omega| < \Delta} |\hat{\varphi}(\omega)| > 0$;

(A2') существуют числа $\tau_r > 0$, $r = 1, 2, \dots$, такие, что при почти всех $\omega \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$\sum_{|m| \geq 2^{r-1}} |\widehat{\varphi}(\omega + m)|^2 \leq \tau_r^2 \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\omega + m)|^2, \quad (9)$$

причем $\sum_{r=1}^{\infty} \tau_r^2 < \infty$.

Тогда существуют $\delta > 0$ и невозрастающая функция $\bar{\sigma}(m) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ такие, что для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ и любых целых n и k , $0 \leq k \leq n$, выполняется неравенство

$$\|R_n^o(f)\| \leq \left\{ \int_{|\omega| > 2^k \delta} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \right\}^{1/2} + \bar{\sigma}(n - k) \|f\|.$$

Если $|\widehat{\varphi}(\omega)| = O(|\omega|^{-1/2-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, при $|\omega| \rightarrow \infty$, то существует такое число $0 \leq \lambda < 1$, что $\bar{\sigma}(m) = O(\lambda^{m/\ln m})$ при $m \rightarrow \infty$.

Доказательство теоремы 2 также дано в § 4.

Вопрос об улучшаемости полученных оценок скорости сходимости в настоящее время является открытым.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Согласно [12, гл. 7, § 1, лемма 1] для существования у системы $\{\varphi(x - l) : l \in \mathbb{Z}\}$ верхней границы Рисса $B > 0$ необходимо и достаточно, чтобы при почти всех $\omega \in \mathbb{R}$ выполнялось неравенство

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\omega + l)|^2 \leq B^2.$$

Поэтому наличие верхней границы Рисса следует из условия (A2) теоремы 1 или условия (A0') теоремы 2. При этом в теореме 1 имеет место неравенство $B^2 \leq 2 \sum_{m=0}^{\infty} F^2(m)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Результаты, аналогичные приведенным в настоящем параграфе, остаются справедливыми и для системы $\{\varphi_{k,l} : k \geq K, l \in \mathbb{Z}\}$, где K – произвольное целое число.

§ 3. О сходимости обобщенных орторекурсивных разложений

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство, $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ – такая последовательность непрерывных линейных операторов в $\mathcal{H}$ с условием $\|P'_k\| \leq 1$ при $k \in \mathbb{N}$, что найдется последовательность $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ непрерывных линейных операторов в $\mathcal{H}$, для которой выполняются следующие условия:

- 1) $V_n(f) \rightarrow f$ при $n \rightarrow \infty$ для любого элемента $f \in \mathcal{H}$;
- 2) существует постоянная $\sigma < 1$ такая, что $\|P'_n V_n\| \leq \sigma$ при всех $n \in \mathbb{N}$;
- 3) существуют числа $\tau_{n,k} \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k = 1, \dots, n-1$, такие, что:
 - a) $\|V'_n P_k(g)\| \leq \tau_{n,k} \{\|g\|^2 - \|P'_k(g)\|^2\}^{1/2}$ для любого элемента $g \in \mathcal{H}$;
 - b) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n-1} \tau_{n,k}^2 = C^2 < \infty$.

Тогда $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ – рекурсивная последовательность в пространстве $\mathcal{H}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольный элемент $f \in \mathcal{H}$. Обозначим предел невозрастающей числовой последовательности $\|R_n(f)\|$ через R .

При любых целых $n > 1$ и $1 \leq m < n$ имеем

$$\begin{aligned} \|R_n(f)\| &= \|P'_n R_{n-1}(f)\| = \|P'_n(V_n + V'_n)R_{n-1}(f)\| \\ &\leq \sigma \|R_{n-1}(f)\| + \left\| V'_n \left(R_m(f) - \sum_{k=m+1}^{n-1} \hat{f}_k \right) \right\| \\ &\leq \sigma \|R_{n-1}(f)\| + \|V'_n R_m(f)\| + \sum_{k=m+1}^{n-1} \|V'_n P_k R_{k-1}(f)\| \\ &\leq \sigma \|R_{n-1}(f)\| + \|V'_n R_m(f)\| + \sum_{k=m+1}^{n-1} \tau_{n,k} \{ \|R_{k-1}(f)\|^2 - \|R_k(f)\|^2 \}^{1/2} \\ &\leq \sigma \|R_{n-1}(f)\| + \|V'_n R_m(f)\| + C \{ \|R_m(f)\|^2 - R^2 \}^{1/2}. \end{aligned}$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу сначала по n , а затем по m , с учетом условия 1) получаем, что $R \leq \sigma R$, т. е. $R = 0$. Теорема доказана.

Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство, $\{P_k\}_{k=0}^\infty$ – система непрерывных линейных операторов в $\mathcal{H}$, удовлетворяющих условиям теоремы 3 и дополнительному условию: существует постоянная $\beta > 0$ такая, что при всех $k = 0, 1, \dots$ для любого элемента $g \in \mathcal{H}$ выполняется неравенство

$$\|P_k(g)\| \leq \beta \{ \|g\|^2 - \|P'_k(g)\|^2 \}^{1/2}. \quad (10)$$

Предположим, что $\{V_k\}_{k=0}^\infty$ – операторы ортогонального проектирования на замкнутые линейные подпространства $\{\mathcal{V}_k\}_{k=0}^\infty$ такие, что $\mathcal{V}_k \subset \mathcal{V}_{k+1}$ при $k \geq 0$. Пусть существует унитарный оператор D такой, что для любого целого числа $k \geq 0$ выполняются равенства

$$P_k = D^k P_0 D^{-k}, \quad V_k = D^k V_0 D^{-k}. \quad (11)$$

В силу условия (11) можно считать, что числа $\tau_{n,k}$ зависят лишь от $n - k$, т. е. $\tau_{n,k} = \tau_{n-k}$, причем $\sum_{j=0}^\infty \tau_j^2 < \infty$ по условию 3), б) теоремы 3.

Заметим, что операторы P_k и V_k определены равенствами (11) и при отрицательных целых значениях k .

ТЕОРЕМА 4. При выполнении условий теоремы 3 и согласно (10), (11) существует невозрастающая функция $\bar{\sigma}(m): \mathbb{Z}_+ \rightarrow [0, 1]$ с условием $\bar{\sigma}(m) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ такая, что для любого элемента $f \in \mathcal{H}$ при любых целых $l \leq k \leq n$ справедлива оценка скорости сходимости

$$\|P'_n \cdots P'_l(f)\| \leq \|V_k^\perp(f)\| + \bar{\sigma}(n - k) \|f\|. \quad (12)$$

Если существует $0 \leq \alpha < 1$ такое, что $\tau_j = O(\alpha^j)$ при $j \rightarrow \infty$, то существует $0 \leq \lambda < 1$ такое, что $\bar{\sigma}(m) = O(\lambda^{m/\ln m})$ при $m \rightarrow \infty$.

ЛЕММА 1. Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство, $\{P_k\}_{k=1}^m$ – набор непрерывных линейных операторов в $\mathcal{H}$, удовлетворяющих условиям $\|P'_k\| \leq 1$, $k = 1, \dots, m$, и условию (10). Тогда для любого элемента $f \in \mathcal{H}$ справедливо неравенство

$$\|R_m(f)\|^2 \leq \|f\|^2 - \frac{1}{4m\beta^2} \|P_m(f)\|^2. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Считая, что $R_0(f) = f$, имеем

$$\begin{aligned} \|f\|^2 - \|R_m(f)\|^2 &= \sum_{k=1}^m [\|R_{k-1}(f)\|^2 - \|R_k(f)\|^2] \\ &\geq \frac{1}{m} \left\{ \sum_{k=1}^m [\|R_{k-1}(f)\|^2 - \|P'_k R_{k-1}(f)\|^2]^{1/2} \right\}^2 \geq \frac{1}{m\beta^2} \left(\sum_{k=1}^m \|\hat{f}_k\| \right)^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Из равенств

$$f - \sum_{k=1}^m \hat{f}_k = R_m(f) = P'_m \left(f - \sum_{k=1}^{m-1} \hat{f}_k \right)$$

следует, что $\|P_m(f)\| \leq 2 \sum_{k=1}^m \|\hat{f}_k\|$. Подставляя последнее в (14), получаем требуемое неравенство. Лемма доказана.

Положим при целых $m \geq 0$

$$\bar{\sigma}(m) = \sup_{n \geq 0} \|P'_{n+m} \cdots P'_0 V_n\|. \quad (15)$$

ЛЕММА 2. Существует $m_0 \geq 0$ такое, что $\bar{\sigma}(m_0) < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v \in \mathcal{V}_n$, $f = P'_{n-1} \cdots P'_0(v) = v - \sum_{k=0}^{n-1} \hat{v}_k$ (при $n = 0$ положим $f = v$). Пользуясь условиями 2), 3) теоремы 3, получим

$$\begin{aligned} \|P'_{n+m}(f)\| &= \|P'_{n+m}(V_{n+m} + V'_{n+m})f\| \\ &\leq \sigma \|f\| + \|V'_{n+m}(f)\| \leq \sigma \|f\| + \sum_{k=0}^{n-1} \|V'_{n+m}(\hat{v}_k)\| \\ &\leq \sigma \|f\| + \sum_{k=0}^{n-1} \tau_{n+m-k} \{ \|R_{k-1}(v)\|^2 - \|R_k(v)\|^2 \}^{1/2} \\ &\leq \sigma \|f\| + \left(\sum_{j=m+1}^{\infty} \tau_j^2 \right)^{1/2} \|v\|. \end{aligned} \quad (16)$$

Выберем $m_0 \geq 0$ такое, что $\sigma + \left(\sum_{j=m_0+1}^{\infty} \tau_j^2 \right)^{1/2} = \eta < 1$. Тогда, так как $\|f\| \leq \|v\|$, из (16) получаем, что $\|P'_{n+m_0}(f)\| \leq \eta \|v\|$.

Оценим теперь $\|\tilde{R}_{m_0}(f)\|$, где $\tilde{R}_{m_0}(f) = P'_{n+m_0} \cdots P'_n(f)$. Возьмем произвольное $\mu \in (\eta, 1)$. Возможны два случая:

- 1) если $\|f\| \leq \mu \|v\|$, то $\|\tilde{R}_{m_0}(f)\| \leq \mu \|v\|$;
- 2) если $\|f\| > \mu \|v\|$, то по доказанному $\|P_{n+m_0}(f)\| \geq \|f\| - \|P'_{n+m_0}(f)\| > (\mu - \eta)\|v\|$.

В случае 2) применим неравенство (13) к набору операторов $\{P_k\}_{k=n}^{n+m_0}$:

$$\begin{aligned}\|\tilde{R}_{m_0}(f)\|^2 &\leq \|f\|^2 - \frac{1}{4(m_0+1)\beta^2} \|P_{n+m_0}(f)\|^2 \\ &\leq \left(1 - \frac{(\mu-\eta)^2}{4(m_0+1)\beta^2}\right) \|v\|^2 = \kappa^2 \|v\|^2.\end{aligned}$$

Полагая $\zeta = \max(\mu, \kappa) < 1$, получаем, что в любом случае $\|\tilde{R}_{m_0}(f)\| = \|P'_{n+m_0} \cdots P'_0(v)\| \leq \zeta \|v\|$. Это означает, что $\bar{\sigma}(m_0) < 1$. Лемма доказана.

Обозначим при $m \geq 0$

$$C(m) = \left(\sum_{j=m}^{\infty} \tau_j^2 \right)^{1/2}.$$

ЛЕММА 3. При любых целых числах $k, l \geq 0$ и $m \geq 1$ справедливо неравенство

$$\bar{\sigma}(k+l+m) \leq \bar{\sigma}(k)\bar{\sigma}(l) + C(m).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем любое целое число $n \geq 0$, и пусть $v \in \mathcal{V}_n$, $\|v\| = 1$. Справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned}\|P'_{n+k+l+m} \cdots P'_0(v)\| &= \|P'_{n+k+l+m} \cdots P'_{n+l+1}(V_{n+l+m} + V'_{n+l+m})R_{n+l}(v)\| \\ &\leq \|P'_{n+k+l+m} \cdots P'_{n+l+1}V_{n+l+m}\| \cdot \|R_{n+l}(v)\| + \left\| V'_{n+l+m} \left(v - \sum_{j=0}^{n+l} \hat{v}_j \right) \right\| \\ &\leq \|P'_{k+m-1} \cdots P'_0V_{m-1}\| \bar{\sigma}(l) + \left(\sum_{j=0}^{n+l} \tau_{n+l+m-j}^2 \right)^{1/2} \leq \bar{\sigma}(k)\bar{\sigma}(l) + C(m).\end{aligned}$$

Таким образом, $\bar{\sigma}(k+l+m) \leq \bar{\sigma}(k)\bar{\sigma}(l) + C(m)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Функция $\bar{\sigma}(m)$ стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$. Если $C(m) \leq A\alpha^m$ при $m \geq 0$, где $A \geq 0$ и $0 \leq \alpha < 1$, то существуют $M \geq 0$ и $0 \leq \lambda < 1$ такие, что $\bar{\sigma}(m) \leq M\lambda^{m/\ln m}$ при $m \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, функция $\bar{\sigma}(m)$ не возрастает. Обозначим ее предел через L . По лемме 2 имеем $L < 1$, а из леммы 3 следует, что $L \leq L^2$. Значит, $L = 0$.

Пусть $C(m) \leq A\alpha^m$. По лемме 3 для любых целых $k \geq 0$ и $m \geq 1$ справедливо неравенство

$$\bar{\sigma}(2k+m) \leq \bar{\sigma}^2(k) + A\alpha^m. \quad (17)$$

Обозначим $x_n = \bar{\sigma}(n2^n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Поскольку $(n+1)2^{n+1} = 2n2^n + 2^{n+1}$, из неравенства (17) вытекает, что при $n \geq 0$

$$x_{n+1} \leq x_n^2 + A\alpha^{2^{n+1}}. \quad (18)$$

Найдем $N \geq 0$ такое, что $x_N < 1/2$ и $A\alpha^{2^N} < 1/4$. Выберем $\mu, \alpha < \mu < 1$, таким, чтобы $x_N/\mu^{2^N} \leq 1/2$ и $A(\alpha/\mu)^{2^N} \leq 1/4$. Обозначив $y_n = x_n/\mu^{2^n}$ и разделив неравенство (18) на $\mu^{2^{n+1}}$, при $n \geq N$ получим

$$y_{n+1} \leq y_n^2 + \frac{1}{4},$$

причем $y_N \leq 1/2$. Отсюда имеем $y_{N+1} \leq (1/2)^2 + 1/4 = 1/2$. Следовательно, $y_n \leq 1/2$ при $n \geq N$, откуда $\bar{\sigma}(n2^n) \leq (1/2)\mu^{2^n}$ при $n \geq N$. Легко видеть, что существует $0 \leq \lambda < 1$ такое, что $\bar{\sigma}(m) = O(\lambda^{m/\ln m})$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть элемент f принадлежит $\mathcal{H}$. Возьмем любые целые $l \leq k \leq n$ и получим оценку

$$\|P'_n \cdots P'_l(f)\| \leq \|P'_n \cdots P'_l(f)(V_k^\perp + V_k)f\| \leq \|V_k^\perp(f)\| + \bar{\sigma}(n-k)\|f\|.$$

Оценка функции $\bar{\sigma}(m)$ вытекает из леммы 4. Теорема доказана.

§ 4. Доказательство теорем о скорости сходимости

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1, 2. Проверим, что при условиях теорем 1, 2 соответственно последовательности операторов P_k орторекурсивного разложения по пачке Π_k и операторов P_k^o ортогональной проекции на замыкание линейной оболочки пачки Π_k удовлетворяют условиям теоремы 3 и всем условиям, перечисленным в § 3.

Неравенство $\|P'_k\| \leq 1$ при $k \geq 0$ следует из тождества Бесселя (1), а неравенство $\|(P'_k)^o\| \leq 1$ – из определения ортогональной проекции. Проверим условия 1)–3) теоремы 3.

1) В силу условий (A1) или (A1') найдутся число $c > 0$ и целое неотрицательное число d такие, что $|\hat{\varphi}(\omega)| \geq c$ при почти всех ω , $|\omega| \leq 2^{-d-1}$. Рассмотрим при $n \geq d$ подпространства

$$\mathcal{V}_n = \{v \in L^2(\mathbb{R}) : \hat{v}(\omega) = 0 \text{ при } |\omega| > 2^{n-d-1}\}. \quad (19)$$

Пусть V_n – оператор ортогонального проектирования на подпространство $\mathcal{V}_n$ в $L^2(\mathbb{R})$. Условие 1) теоремы 3, очевидно, выполняется.

2) Пусть $v \in \mathcal{V}_n$. Поскольку $\hat{\varphi}_{n,l}(\omega) = 2^{-n/2}e^{-2\pi il\omega/2^n}\hat{\varphi}(\omega/2^n)$, то в силу равенства Парсеваля–Планшереля

$$(v, \varphi_{n,l}) = 2^{n/2-d} \int_{-1/2}^{1/2} \hat{v}(2^{n-d}\omega) \overline{\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^d}\right)} e^{2\pi il\omega/2^d} d\omega.$$

Обозначим $y(\omega) = 2^{n/2-d} \hat{v}(2^{n-d}\omega) \overline{\hat{\varphi}(\omega/2^d)}$. При $l = 2^d m, m \in \mathbb{Z}$, имеем, что

$$(v, \varphi_{n,2^d m}) = \int_{-1/2}^{1/2} y(\omega) e^{2\pi i m \omega} d\omega = c_{-m}(y)$$

– коэффициент Фурье функции y по тригонометрической системе на отрезке $[-1/2, 1/2]$. Используя равенство Парсеваля для этой системы, получим следующую оценку:

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} |(v, \varphi_{n,l})|^2 \geq \sum_{m \in \mathbb{Z}} |(v, \varphi_{n,2^d m})|^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}} |c_{-m}(y)|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |y(\omega)|^2 d\omega.$$

Из определения числа d следует, что $|\widehat{\varphi}(\omega/2^d)| > c$ при почти всех ω , $|\omega| \leq 1/2$, значит,

$$\int_{-1/2}^{1/2} |y(\omega)|^2 d\omega = 2^{n-2d} \int_{-1/2}^{1/2} \left| \widehat{v}(2^{n-d}\omega) \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^d}\right) \right|^2 d\omega \geq 2^{-d} c^2 \|v\|^2.$$

Следовательно, имеем

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} |(v, \varphi_{n,l})|^2 \geq \gamma^2(\varphi) \|v\|^2, \quad (20)$$

где $\gamma(\varphi) > 0$ – постоянная, зависящая только от φ .

Пусть теперь $\hat{v}_{n,l}$, $l \in \mathbb{Z}$, – орторекурсивные коэффициенты Фурье функции v по n -й пачке Π_n , вычисляемые в порядке ее нумерации. Кроме того, пусть $\Lambda_l \subset \mathbb{Z}$ – множество индексов, предшествующих индексу l при вычислении орторекурсивных коэффициентов $\hat{v}_{n,l}$, включая l (т.е. $l \in \Lambda_l$). Тогда по определению 1 имеем

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \mathbb{Z}} |(v, \varphi_{n,l})|^2 &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{l' \in \Lambda_l} \hat{v}_{n,l'}(\varphi_{n,l'}, \varphi_{n,l}) \overline{(v, \varphi_{n,l})} \\ &\leq \sum_{m \in \mathbb{Z}} |(\varphi, \varphi_{0,m})| \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{v}_{n,l}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} |(v, \varphi_{n,l})|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Постоянная

$$\tilde{B}(\varphi) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} |(\varphi, \varphi_{0,m})| \leq \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)| \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\varphi(x-m)| dx = \int_0^1 \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\varphi(x-m)| \right)^2 dx$$

конечна, так как $\varphi \in \mathcal{L}_1^2(\mathbb{R})$ (см. (A0)).

Разделив неравенство (21) на $(\sum_{l \in \mathbb{Z}} |(v, \varphi_{n,l})|^2)^{1/2}$ и возведя в квадрат, получим

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} |(v, \varphi_{n,l})|^2 \leq \tilde{B}^2(\varphi) \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{v}_{n,l}|^2. \quad (22)$$

Согласно тождеству Бесселя (1) из неравенств (20) и (22) окончательно получаем

$$\|P'_n(v)\|^2 = \|v\|^2 - \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{v}_{n,l}|^2 \leq \left(1 - \frac{\gamma^2(\varphi)}{\tilde{B}^2(\varphi)} \right) \|v\|^2 = \sigma_1^2 \|v\|^2, \quad (23)$$

т.е. $\|P'_n V_n\| \leq \sigma_1 = \sigma_1(\varphi) < 1$, что и требовалось доказать.

Для ортогональных рекурсивных разложений из наличия верхней границы Рисса B (см. замечание 1) можно вывести неравенство

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} |(v, \varphi_{n,l})|^2 \leq B^2 \|P_n^o(v)\|^2.$$

Следовательно, учитывая неравенство (20), имеем

$$\|(P_n^o)'(v)\|^2 = \|v\|^2 - \|P_n^o(v)\|^2 \leq \left(1 - \frac{\gamma^2(\varphi)}{B^2}\right) \|v\|^2 = \sigma_2^2 \|v\|^2,$$

т. е. $\|(P_n^o)'V_n\| \leq \sigma_2 = \sigma_2(\varphi) < 1$.

3) Пусть $g \in L^2(\mathbb{R})$, $p = P_k(g) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{g}_{k,l} \varphi_{k,l}(x)$. Возьмем $0 \leq k < n - d$. Преобразование Фурье функции p имеет вид

$$\hat{p}(\omega) = 2^{-k/2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{g}_{k,l} e^{-2\pi i l \omega / 2^k} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^k}\right) = 2^{-k/2} Q\left(\frac{\omega}{2^k}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^k}\right), \quad (24)$$

где Q – 1-периодическая функция и $\|Q\|_{L^2[0,1]}^2 = \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{g}_{k,l}|^2$. Представление вида (24) справедливо и в случае, если $p = P_k^o(g)$, причем $\|p\|^2 = \int_0^1 |Q(\omega)|^2 \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + m)|^2 d\omega$.

Рассмотрим функцию $v \in \mathcal{V}_n$ такую, что $\hat{v}(\omega) = \hat{p}(\omega)$ при $|\omega| < 2^{n-d-1}$. Полагая $r = n - d - k$, имеем

$$\begin{aligned} \|p - v\|^2 &= \int_{|\omega| > 2^{n-d-1}} \left| 2^{-k/2} Q\left(\frac{\omega}{2^k}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^k}\right) \right|^2 d\omega \\ &= \int_{|\omega| > 2^{r-1}} |Q(\omega) \hat{\varphi}(\omega)|^2 d\omega = \int_0^1 |Q(\omega)|^2 \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus [-2^{r-1}, 2^{r-1})} |\hat{\varphi}(\omega + m)|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (25)$$

Для орторекурсивных разложений в условиях теоремы 1 последнее выражение оценивается величиной

$$\sum_{|m| \geq 2^{r-1}} F^2(m) \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{g}_{k,l}|^2,$$

где $F(\omega)$ – функция из условия (A2). Из тождества Бесселя $\|g\|^2 - \|P_k'(g)\|^2 = \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{g}_{k,l}|^2$ следует, что условие 3), а) теоремы 3 будет выполняться при $0 \leq k < n - d$, если положить

$$\tau_{n,k}^2 = \sum_{|m| \geq 2^{n-d-k-1}} F^2(m).$$

При $n - d \leq k < n$ положим, что $\tau_{n,k} = B$ – верхняя граница Рисса системы функций $\{\varphi_{0,l}\}_{l \in \mathbb{Z}}$. Учитывая условие (A2), для некоторой постоянной $C > 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\sum_{k=0}^{n-1} \tau_{n,k}^2 \leq C$.

Для ортогональных рекурсивных разложений по условию (A2') выражение (25) оценивается величиной

$$\begin{aligned} \tau_r^2 \int_0^1 |Q(\omega)|^2 \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\omega + m)|^2 d\omega &= \tau_{n-d-k}^2 \|P_k^\circ(g)\|^2 \\ &= \tau_{n-d-k}^2 \{ \|g\|^2 - \|(P_k^\circ)'(g)\|^2 \}. \end{aligned}$$

Таким образом, в обоих случаях условие 3) теоремы 3 выполняется.

Условие (10) выполняется для орторекурсивных разложений с постоянной $\beta = B$ – верхней границей Рисса системы $\{\varphi_{0,l}\}_{l \in \mathbb{Z}}$, а для ортогональных рекурсивных разложений – с $\beta = 1$. Если D – оператор сжатия в 2 раза в $L^2(\mathbb{R})$, определяемый формулой $Dg(x) = \sqrt{2}g(2x)$, то условия (11) выполняются (здесь использовано то, что при вычислении орторекурсивных коэффициентов все пачки упорядочены одинаково).

Таким образом, доказываемое утверждение вытекает из теоремы 4.

§ 5. Примеры оценок скорости сходимости

ПРИМЕР 1. Пусть $\varphi = \chi_{[0,1]}$ – характеристическая функция единичного полуинтервала. Разложения по системе сжатий и сдвигов такой функции подробно изучаются в работе [2]. В данном случае операторы $\{P_k\}_{k=0}^\infty$ являются операторами ортогонального проектирования на подпространства $\mathcal{H}_k = \overline{\langle \Pi_k \rangle}$ – замыкания линейных оболочек пачек Π_k . Подпространства $\mathcal{H}_k$ являются вложенными: $\mathcal{H}_k \subset \mathcal{H}_{k+1}$ при $k \in \mathbb{N}$. Если в качестве подпространств $\mathcal{V}_k$ взять подпространства $\mathcal{H}_k$, то функция $\bar{\sigma}(m)$, определенная равенством (15), обратится в нуль. Можно записать равенство

$$\|R_n(f)\| = \|f - S_n(f)\|, \quad (26)$$

где $S_n(f)$ – функция из $L^2(\mathbb{R})$, постоянная на полуинтервалах $[l/2^n, (l+1)/2^n)$ при $l \in \mathbb{Z}$, наилучшим образом приближающая f в метрике $L^2(\mathbb{R})$. Пусть

$$\omega_2(f, \delta) = \sup_{0 < h \leq \delta} \left\{ \int_{\mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)|^2 dx \right\}^{1/2} \quad (27)$$

– интегральный модуль непрерывности функции f в пространстве $L^2(\mathbb{R})$. Тогда аналогично доказательству неравенства в [12, гл. 3, § 2, теорема 3] можно получить неравенство

$$\|f - S_n(f)\| \leq \sqrt{2} \omega_2(f, 2^{-n}). \quad (28)$$

Отсюда и из (26) следует оценка скорости сходимости

$$\|R_n(f)\| \leq \sqrt{2} \omega_2(f, 2^{-n}).$$

ПРИМЕР 2. Пусть функция φ определена следующими равенствами:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1/2, \\ 2(1-x), & 1/2 \leq x < 1, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1). \end{cases}$$

Система функций $\{1, x\} \cup \{\varphi_{k,l}(x) : k = 0, 1, 2, \dots, l = 0, \dots, 2^k - 1\}$ называется *системой Фабера–Шаудера* (см. [12, гл. 6, § 1]). Мы рассматриваем неортogonalные всплески, порожденные такой функцией φ , на всей числовой оси. В качестве подпространств $\mathcal{V}_k$ можно взять подпространства $\mathcal{L}_k$ функций из $L^2(\mathbb{R})$, линейных на каждом полуинтервале $[l/2^k, (l+1)/2^k)$ при $l \in \mathbb{Z}$ и непрерывных на всей оси. Можно показать непосредственно (или используя методы из [13, гл. 7]), что $\bar{\sigma}(m) \leq C\lambda^m$, где

$$\lambda = \sqrt{(5 + \sqrt{153})/32} \approx 0.737, \quad (29)$$

а $C > 0$. Для любых целых n и k , $0 \leq k \leq n$, оценка скорости сходимости принимает вид

$$\|R_n(f)\| \leq \|f - L_k(f)\| + C\lambda^{n-k}\|f\|, \quad (30)$$

где $L_k(f)$ – функция из $L^2(\mathbb{R})$, линейная на полуинтервалах $[l/2^k, (l+1)/2^k)$ при $l \in \mathbb{Z}$ и непрерывная на всей оси, наилучшим образом приближающая f в метрике $L^2(\mathbb{R})$.

Функция $S_k(f)$, постоянная на полуинтервалах $[l/2^k, (l+1)/2^k)$ при $l \in \mathbb{Z}$ и приближающая f наилучшим образом в метрике $L^2(\mathbb{R})$, принимает на полуинтервале $[l/2^k, (l+1)/2^k)$ значение

$$c_l = 2^k \int_{l/2^k}^{(l+1)/2^k} f(x) dx.$$

Взяв в качестве $\tilde{L}_k(f)$ функцию, линейную на полуинтервалах $[l/2^k, (l+1)/2^k)$ при $l \in \mathbb{Z}$, непрерывную на всей оси и принимающую при $l \in \mathbb{Z}$ в точке $l/2^k$ значение c_l , можно непосредственно проверить, что

$$\|S_k(f) - \tilde{L}_k(f)\|^2 = \frac{1}{3 \cdot 2^k} \sum_{l \in \mathbb{Z}} |c_{l+1} - c_l|^2 \leq \frac{1}{3} \omega_2^2(f, 2^{-k}). \quad (31)$$

Таким образом, если $L_k(f)$ – функция, линейная на полуинтервалах $[l/2^k, (l+1)/2^k)$ при $l \in \mathbb{Z}$, непрерывная на всей оси и наилучшим образом приближающая f в метрике $L^2(\mathbb{R})$, то с учетом неравенств (28) и (31) получаем

$$\|f - L_k(f)\| \leq \left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \omega_2(f, 2^{-k}).$$

Для любых целых n и k , $0 \leq k \leq n$, оценка (30) принимает окончательный вид

$$\|R_n(f)\| \leq \left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \omega_2(f, 2^{-k}) + C\lambda^{n-k}\|f\|, \quad (32)$$

где значение λ указано в (29), а $C > 0$.

Пусть функция f принадлежит классу Липшица $\text{Lip } \alpha$ в смысле интегрального модуля непрерывности (27) в пространстве $L^2(\mathbb{R})$, т. е. $\omega_2(f, \delta) = O(\delta^\alpha)$ при $\delta \rightarrow +0$, где $0 < \alpha \leq 1$. В этом случае выражение, стоящее в правой части оценки (32), можно минимизировать относительно параметра k . Оптимальное значение k получаем по формуле

$$k = \frac{n}{1 - \frac{\alpha}{\log_2 \lambda}} + D(\alpha, \lambda),$$

где $D(\alpha, \lambda)$ – постоянная, не зависящая от n .

Список литературы

1. Т. П. Лукашенко, “Рекурсивные разложения, подобные ортогональным”, *Математика, Экономика, Экология, Образование, VII Международн. конф. Ряды Фурье и их приложения* (1999), Ростов-на-Дону, 1999.
2. Т. П. Лукашенко, “О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2001, № 1, 6–10; англ. пер.: Т. Р. Lukashenko, “Properties of orthorecursive expansions over nonorthogonal systems”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **56**:1 (2001), 5–9.
3. Б. С. Стечкин, С. Б. Стечкин, “Среднее квадратическое и среднее арифметическое”, *Докл. АН СССР*, **137**:2 (1961), 287–290; англ. пер.: B. S. Stechkin, S. B. Stechkin, “Mean square value and arithmetic mean”, *Soviet Math. Dokl.*, **2** (1961), 279–281.
4. Ч. Чуи, *Введение в вэйвлеты*, Мир, М., 2001; пер. с англ.: Ch. K. Chui, *An introduction to wavelets*, Wavelet Anal. Appl., **1**, Academic Press, Boston, MA, 1992.
5. V. I. Filippov, P. Oswald, “Representation in L_p by series of translates and dilates of one function”, *J. Approx. Theory*, **82**:1 (1995), 15–29.
6. А. Ю. Кудрявцев, “Орторекурсивные разложения по системам сжатий и сдвигов”, *Современные проблемы теории функций и их приложения, Тез. докладов 11-й Саратовской зимней школы*, Изд-во ГосУНЦ “Колледж”, Саратов, 2002, 106–108.
7. А. Ю. Кудрявцев, “Орторекурсивные разложения по системам сжатий и сдвигов фиксированной функции”, *Международн. школа-семинар по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова* (Абрау-Дюрсо, 2002), Ростовский гос. ун-т, Ростов-на-Дону, 2002, 133–135.
8. А. В. Политов, “Орторекурсивные разложения в гильбертовых пространствах”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2010, № 3, 3–7; англ. пер.: A. V. Politov, “Orthorecursive expansions in Hilbert spaces”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **65**:3 (2010), 95–99.
9. R. A. DeVore, V. N. Temlyakov, “Some remarks on greedy algorithms”, *Adv. Comput. Math.*, **5**:1 (1996), 173–187.
10. В. В. Галатенко, “Об орторекурсивном разложении с ошибками в вычислении коэффициентов”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:1 (2005), 3–16; англ. пер.: V. V. Galatenko, “On orthorecursive expansions with errors in the calculation of coefficients”, *Izv. Math.*, **69**:1 (2005), 1–14.
11. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 4-е изд., Наука, М., 1976; англ. пер. 2-го изд.: A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Introductory real analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1970.

12. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, 2-е изд., Изд-во АФЦ, М., 1999; англ. пер. 1-го изд.: B. S. Kashin, A. A. Saakyan, *Orthogonal series*, Transl. Math. Monogr., **75**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.
13. И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков*, Физматлит, М., 2005; англ. пер.: I. Ya. Novikov, V. Yu. Protasov, M. A. Skopina, *Wavelet theory*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.

А. Ю. КУДРЯВЦЕВ (A. YU. KUDRYAVTSEV)
Московский государственный институт
международных отношений (Университет)
Министерства иностранных дел Российской Федерации
E-mail: kudral@inbox.ru

Поступило в редакцию
25.02.2011
19.07.2011