Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Фроленков, Среднее значение чисел Фробениуса с тремя аргументами, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2012, том 76, выпуск 4, 125–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7302>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 12:04:05

УДК 511.335+511.336

Д. А. Фроленков

Среднее значение чисел Фробениуса с тремя аргументами

Получена асимптотическая формула для среднего значения чисел Фробениуса с тремя аргументами при усреднении по трем параметрам.

Библиография: 13 наименований.

Ключевые слова: числа Фробениуса, тригонометрические суммы.

§ 1. Введение

Числом Фробениуса $g(a_1, \dots, a_n)$ натуральных чисел $a_1, \dots, a_n$, взаимно простых в совокупности, называется наибольшее целое k , не представимое в виде суммы

$$x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = k, \quad x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \quad (1)$$

Во многих задачах оказывается удобно рассматривать функцию

$$f(a_1, \dots, a_n) = g(a_1, \dots, a_n) + a_1 + \dots + a_n, \quad (2)$$

равную наибольшему целому k , не представимому в виде суммы (1), но уже с натуральными коэффициентами $x_1, \dots, x_n$. Наиболее обширный обзор результатов и задач, связанных с числом Фробениуса, приведен в книге [1]. А. В. Устиновым в работе [2] было доказано, что функция $f(a, b, c)$ в среднем ведет себя как $\frac{8}{\pi} \sqrt{abc}$.

ТЕОРЕМА 1 (А. В. Устинов). Пусть a – натуральное число, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $\varepsilon > 0$ – действительные числа. Тогда

$$\frac{1}{a^{3/2} |M_a(x_1, x_2)|} \sum_{(b, c) \in M_a(x_1, x_2)} \left(f(a, b, c) - \frac{8}{\pi} \sqrt{abc} \right) = O_\varepsilon(R_\varepsilon(a; x_1, x_2)),$$

где

$$\begin{aligned} R_\varepsilon(a; x_1, x_2) &= (a^{-1/6}(x_1 + x_2) + a^{-1/4}(x_1^{3/2} + x_2^{3/2})(x_1 x_2)^{-1/4} + a^{-1/2}) a^\varepsilon \\ &\ll_{x_1, x_2} a^{-1/6+\varepsilon}, \\ M_a(x_1, x_2) &= \{(b, c) : 1 \leq b \leq x_1 a, 1 \leq c \leq x_2 a, (a, b, c) = 1\}. \end{aligned}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-00759-а).

Пусть $N > 0$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$ – действительные числа. Тогда обозначим через $S_N(x_1, x_2, x_3)$ следующую область:

$$S_N(x_1, x_2, x_3) = \{(a, b, c) : 1 \leq a \leq x_1 N, 1 \leq b \leq x_2 N, 1 \leq c \leq x_3 N, (a, b, c) = 1\}. \quad (3)$$

Заметим, что $|S_N(x_1, x_2, x_3)| \asymp x_1 x_2 x_3 N^3$. Дж. Л. Дейвисон (см. [3]) сформулировал следующие две гипотезы.

ГИПОТЕЗА 1. Выполнено условие

$$\sup_N \frac{1}{|S_N(1, 1, 1)|} \sum_{(a, b, c) \in S_N(1, 1, 1)} \frac{f(a, b, c)}{\sqrt{abc}} < \infty.$$

ГИПОТЕЗА 2. Существует конечный предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|S_N(1, 1, 1)|} \sum_{(a, b, c) \in S_N(1, 1, 1)} \frac{f(a, b, c)}{\sqrt{abc}}.$$

Используя теорему 1, А. В. Устинов (см. [2]) доказал гипотезу 2 в более сильной форме.

ТЕОРЕМА 2 (А. В. Устинов). *Справедлива оценка*

$$\frac{1}{|M_a(1, 1)|} \sum_{(b, c) \in M_a(1, 1)} \frac{f(a, b, c)}{\sqrt{abc}} = \frac{8}{\pi} + O_\varepsilon(a^{-1/12+\varepsilon}),$$

где $\varepsilon > 0$ – действительное число.

Используя теорему 1, А. Стромбергссон¹ доказал следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 3 (А. Стромбергссон). *Пусть a – натуральное число. Справедлива оценка*

$$\frac{1}{|M_a(x_1, x_2)|} \sum_{(b, c) \in M_a(x_1, x_2)} \frac{f(a, b, c)}{\sqrt{abc}} = \frac{8}{\pi} + O_\varepsilon(R_\varepsilon(a; x_1, x_2)(x_1 x_2)^{-1/2}),$$

где $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $\varepsilon > 0$ – действительные числа.

ТЕОРЕМА 4 (А. Стромбергссон). *Справедлива оценка*

$$\begin{aligned} \frac{1}{|S_N(x_1, x_2, x_3)|} \sum_{(a, b, c) \in S_N(x_1, x_2, x_3)} \frac{f(a, b, c)}{\sqrt{abc}} \\ = \frac{8}{\pi} + O_\varepsilon(N^{-1/6+\varepsilon} R_\varepsilon(x_1; x_2, x_3)(x_2 x_3)^{-1/2}), \end{aligned}$$

где $N > 0$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$ – действительные числа.

¹Частное сообщение А. Стромбергссона, переданное А. В. Устинову.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Используя теорему 1, можно легко получить оценку

$$\frac{1}{N^{3/2}|S_N(x_1, x_2, x_3)|} \sum_{(a,b,c) \in S_N(x_1, x_2, x_3)} \left(f(a, b, c) - \frac{8}{\pi} \sqrt{abc} \right) = O_{\varepsilon, x_1, x_2, x_3}(N^{-1/6+\varepsilon}).$$

Сформулируем основной результат настоящей работы.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $N > 0$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$ – действительные числа. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^{3/2}|S_N(x_1, x_2, x_3)|} \sum_{(a,b,c) \in S_N(x_1, x_2, x_3)} \left(f(a, b, c) - \frac{8}{\pi} \sqrt{abc} \right) \\ = O(N^{-1/2+\varepsilon} T_{\varepsilon}(x_1, x_2, x_3)), \end{aligned}$$

где

$$T_{\varepsilon}(x_1, x_2, x_3) = x_1^{1+\varepsilon} \frac{x_3^{\varepsilon}}{x_2^{\varepsilon}} + x_2^{1+\varepsilon} \frac{x_3^{\varepsilon}}{x_1^{\varepsilon}} + x_3^{1+\varepsilon}.$$

Это утверждение было сформулировано А. В. Устиновым в работе [2] в виде гипотезы. Используя теорему 5, получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Справедлива оценка

$$\begin{aligned} \frac{1}{|S_N(x_1, x_2, x_3)|} \sum_{(a,b,c) \in S_N(x_1, x_2, x_3)} \frac{f(a, b, c)}{\sqrt{abc}} \\ = \frac{8}{\pi} + O_{\varepsilon}(N^{-1/2+\varepsilon} T_{\varepsilon}(x_1, x_2, x_3)(x_1 x_2 x_3)^{-1/2}), \end{aligned}$$

где $N > 0$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$ – действительные числа.

В доказательстве теоремы 5 используются идеи из работ [2], [4] и [5], также используются классические оценки тригонометрических сумм.

Автор благодарен И. Д. Кану за указания на недочеты, имевшиеся в первоначальной версии статьи, и глубоко признателен Н. Г. Мощевитину за неоднократные обсуждения полученных результатов. Также автор благодарит А. В. Устинова за указания на работу [3] и частное сообщение А. Стромбергс-сона.

§ 2. Вспомогательные утверждения и обозначения

Разложим рациональное число r в стандартную цепную дробь:

$$r = [0; a_1, \dots, a_s] = \frac{1}{a_1 + \cfrac{\cdot}{\cdot + \cfrac{1}{a_s}}}, \quad (4)$$

длиной $s = s(r)$, где $a_1, \dots, a_s$ – натуральные числа и $a_s \geq 2$ при $s \geq 1$. Через $s_1(r)$ обозначим сумму неполных частных:

$$s_1(r) = \sum_{1 \leq i \leq s} a_i.$$

ЛЕММА 1. Для любого натурального $b > 1$ выполнено

$$\sum_{a \leq b} s_1\left(\frac{a}{b}\right) \ll b \log^2 b.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в работе [6].

ЛЕММА 2. Пусть $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$ – число делителей натурального числа n ; тогда

$$\tau(n) = o(n^\varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [7, гл. 6, § 3, теорема 5].

Следующая лемма общеизвестна (преобразование Абеля).

ЛЕММА 3. Пусть $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[a, b]$, c_n – произвольные числа,

$$C(x) = \sum_{a < n \leq x} c_n.$$

Тогда

$$\sum_{a < n \leq b} c_n f(n) = C(b)f(b) - \int_a^b C(x)f'(x) dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [8, гл. 2, § 5].

ЛЕММА 4. Пусть $u(x_1, x_2, x_3) \in C^1(\mathbb{R}_+^3)$, $c(n_1, n_2, n_3)$ – произвольные числа,

$$C(y_1, y_2, y_3) = \sum_{1 \leq a \leq y_1} \sum_{1 \leq b \leq y_2} \sum_{1 \leq c \leq y_3} c(a, b, c).$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq a \leq x_1} \sum_{1 \leq b \leq x_2} \sum_{1 \leq c \leq x_3} c(a, b, c) u(a, b, c) = C(x_1, x_2, x_3) u(x_1, x_2, x_3) \\ & - \int_1^{x_1} \int_1^{x_2} \int_1^{x_3} \frac{\partial^3 f(y_1, y_2, y_3)}{\partial y_1 \partial y_2 \partial y_3} C(y_1, y_2, y_3) dy_1 dy_2 dy_3 \\ & + \int_1^{x_1} \int_1^{x_2} \frac{\partial^2 f(y_1, y_2, x_3)}{\partial y_1 \partial y_2} C(y_1, y_2, x_3) dy_1 dy_2 \\ & + \int_1^{x_1} \int_1^{x_3} \frac{\partial^2 f(y_1, x_2, y_3)}{\partial y_1 \partial y_3} C(y_1, x_2, y_3) dy_1 dy_3 \\ & + \int_1^{x_2} \int_1^{x_3} \frac{\partial^2 f(x_1, y_2, y_3)}{\partial y_2 \partial y_3} C(x_1, y_2, y_3) dy_2 dy_3 \\ & - \int_1^{x_1} \frac{\partial f(y_1, x_2, x_3)}{\partial y_1} C(y_1, x_2, x_3) dy_1 - \int_1^{x_2} \frac{\partial f(x_1, y_2, x_3)}{\partial y_2} C(x_1, y_2, x_3) dy_2 \\ & - \int_1^{x_3} \frac{\partial f(x_1, x_2, y_3)}{\partial y_3} C(x_1, x_2, y_3) dy_3. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно последовательно применять лемму 3.

ЛЕММА 5. Пусть α – произвольное действительное число, Q – целое и P – натуральное числа. Тогда

$$\left| \sum_{x=Q+1}^{Q+P} \exp(2\pi i \alpha x) \right| \leq \min \left(P, \frac{1}{2\|\alpha\|} \right),$$

где $\|\alpha\|$ – расстояние от α до ближайшего целого.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [9, гл. 1, § 1].

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть α – произвольное действительное число. Если $f(x)$ – монотонная и непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[Q, Q+P]$, то

$$\left| \sum_{x=Q+1}^{Q+P} \exp(2\pi i \alpha x) f(x) \right| \ll (|f(P+Q)| + |f(Q)|) \min \left(P, \frac{1}{\|\alpha\|} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. После применения лемм 3, 5 получаем

$$\left| \sum_{x=Q+1}^{Q+P} \exp(2\pi i \alpha x) f(x) \right| \ll \left(|f(P+Q)| + \int_Q^{Q+P} |f'(x)| dx \right) \min \left(P, \frac{1}{\|\alpha\|} \right).$$

Используя монотонность функции $f(x)$, получаем нужную оценку.

ЛЕММА 6. Пусть τ, p – произвольные натуральные числа, a и b – действительные числа. Тогда справедливы оценки

$$\sum_{\substack{a < n \leq b \\ \tau \nmid n}} \frac{1}{\left\| \frac{n}{\tau} \right\|} \ll (b-a) \log \tau + \tau \log \tau, \quad (5)$$

$$\sum_{\substack{a < n \leq b \\ \tau \nmid n}} \frac{1}{n \left\| \frac{n}{\tau} \right\|} \ll \log \frac{b}{a} \log \tau + \log \tau + \frac{\tau}{a} \log \tau, \quad (6)$$

$$\sum_{\substack{a < n \leq b \\ \tau \nmid n}} \frac{1}{n^2 \left\| \frac{n}{\tau} \right\|} \ll \frac{1}{a} \log \tau + \frac{\tau}{a^2} \log \tau, \quad (7)$$

$$\sum_{\substack{a < n \leq b \\ \tau \nmid n}} \frac{n^p}{\left\| \frac{n}{\tau} \right\|} \ll b^p (b-a) \log \tau + b^p \tau \log \tau. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство (5) можно найти в [9, гл. 1, § 1]. Для доказательства (6)–(8) достаточно воспользоваться леммой 3.

Обозначим, следуя Н. М. Коробову, через $\delta_q(a)$ характеристическую функцию делимости на натуральное число q :

$$\delta_q(a) = \frac{1}{q} \sum_{x=1}^q \exp \left(2\pi i \frac{ax}{q} \right) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \equiv 0 \pmod{q}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (9)$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие обозначения.

Знак “звездочка” в суммах вида

$$\sum_{x=1}^a{}^*, \quad \sum_a \sum_x{}^*$$

означает, что суммирование ведется по числам, удовлетворяющим условию $(a, x) = 1$. В суммах вида $\sum_{d|n}$ суммирование ведется по делителям числа n . В суммах вида $\sum_{\substack{n \leq R \\ d|n}}$, $\sum_{\substack{n \leq R \\ d \nmid n}}$ суммирование ведется по n , удовлетворяющим условию $n \equiv 0 \pmod{d}$, $n \not\equiv 0 \pmod{d}$ соответственно. Если A – некоторое утверждение, то $[A]$ означает 1, если A истинно, и 0 в противном случае.

§ 3. О функции Рёдсета

В работе [10] доказан следующий метод для подсчета функции $f(a, b, c)$. Пусть a, b, c – натуральные числа и $(a, b) = 1$, $(a, c) = 1$; тогда существует натуральное число l такое, что

$$c \equiv bl \pmod{a}, \quad 1 \leq l \leq a, \quad (l, a) = 1.$$

Разложим число $\frac{a}{l}$ в приведенную регулярную цепную дробь (см., например, [11, гл. 1]):

$$\frac{a}{l} = \langle a_1; a_2, \dots, a_m \rangle = a_1 - \frac{1}{a_2 - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{a_m}}}, \quad (10)$$

и определим последовательности $\{s_j\}$ и $\{q_j\}$ при $-1 \leq j \leq m$ следующим образом:

$$\begin{aligned} s_m &= 0, & s_{m-1} &= 1, & s_{j-1} &= a_{j+1}s_j - s_{j+1}, & 0 \leq j \leq m-1, \\ q_{-1} &= 0, & q_0 &= 1, & q_{j+1} &= a_{j+1}q_j - q_{j-1}, & 0 \leq j \leq m-1. \end{aligned}$$

Легко доказать (см. [10] или [2]), что для последовательностей $\{s_j\}$, $\{q_j\}$ выполнены соотношения

$$0 = \frac{s_m}{q_m} < \frac{s_{m-1}}{q_{m-1}} < \dots < \frac{s_0}{q_0} < \frac{s_{-1}}{q_{-1}} = \infty.$$

Функция Рёдсета $\rho_{l,a}(t_1, t_2)$ для $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 0$ таких, что

$$\frac{s_n}{q_n} \leq \frac{t_2}{t_1} < \frac{s_{n-1}}{q_{n-1}},$$

задается формулой

$$\rho_{l,a}(t_1, t_2) = t_1 s_{n-1} + t_2 q_n - \min\{t_1 s_n, t_2 q_{n-1}\};$$

тогда функция $f(a, b, c)$, определенная в (2), находится по формуле

$$f(a, b, c) = \rho_{l,a}(b, c). \quad (11)$$

Также нам понадобится следующее утверждение [2] о последовательностях $\{s_j\}$, $\{q_j\}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Четверки $(q_n, s_{n-1}, q_{n-1}, s_n)$ при $0 \leq n \leq t$ находятся во взаимно однозначном соответствии с решениями (u_1, u_2, v_1, v_2) уравнения

$$u_1 u_2 - v_1 v_2 = a,$$

для которых $0 \leq v_1 < u_1 \leq a$, $(u_1, v_1) = 1$, $0 \leq v_2 < u_2 \leq a$, $(u_2, v_2) = 1$.

Определим функцию $\rho_{l,a}(\alpha)$ следующим образом:

$$\rho_{l,a}(\alpha) = s_{n-1} + \alpha q_n - \min\{s_n, \alpha q_{n-1}\}, \quad \frac{s_n}{q_n} \leq \alpha < \frac{s_{n-1}}{q_{n-1}}.$$

Тогда в силу однородности функции Рёдсета получим

$$\rho_{l,a}(t_1, t_2) = t_1 \rho_{l,a}\left(\frac{t_2}{t_1}\right). \quad (12)$$

В дальнейшем нам понадобятся еще две функции

$$\rho_a^*(t_1, t_2) = \sum_{l=1}^a \rho_{l,a}(t_1, t_2), \quad \rho_a^*(\alpha) = \sum_{l=1}^a \rho_{l,a}(\alpha). \quad (13)$$

Очевидно, что

$$\rho_a^*(t_1, t_2) = t_1 \rho_a^*\left(\frac{t_2}{t_1}\right). \quad (14)$$

Используя утверждение 1, можно получить следующую формулу (см. [2, § 6]):

$$\rho_a^*(\alpha) = \lambda^*(a, \alpha) + \alpha \lambda^*\left(a, \frac{1}{\alpha}\right), \quad (15)$$

где

$$\lambda^*(a, \alpha) = \sum_{x=1}^a \sum_{z=1}^x \sum_{y=1}^a \sum_{w=0}^{a-1} \left[xy + wz = a, \frac{w}{x} \leq \alpha < \frac{w}{x-z} \right] (y + w + \alpha z). \quad (16)$$

Освобождаясь от условий взаимной простоты, получаем

$$\lambda^*(a, \alpha) = \sum_{d_1 d_2 | a} \mu(d_1) \mu(d_2) d_2 \lambda\left(\frac{a}{d_1 d_2}, \frac{d_1 \alpha}{d_2}\right), \quad (17)$$

где

$$\lambda(a, \alpha) = \sum_{x \geq 1} \sum_{z=1}^x \sum_{y \geq 1} \sum_{w \geq 0} \left[xy + wz = a, \frac{w}{x} \leq \alpha < \frac{w}{x-z} \right] (y + w + \alpha z). \quad (18)$$

§ 4. Выделение плотности

Этот параграф является переработкой § 5 из работы [2] с учетом того, что теперь усреднение ведется по трем переменным. Обозначим через F и G следующие суммы:

$$F = \sum_{a \leq x_3 N} \sum_{b \leq x_1 N} \sum_{\substack{c \leq x_2 N \\ (a,b,c)=1}} f(a, b, c), \quad G = \sum_{a \leq x_3 N} \sum_{b \leq x_1 N} \sum_{\substack{c \leq x_2 N \\ (a,b,c)=1}} \frac{8}{\pi} \sqrt{abc}. \quad (19)$$

ЛЕММА 7. Пусть $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $\varepsilon > 0$ – действительные числа. Тогда справедливо следующее равенство:

$$F = \sum_{\substack{d_1 d_2 \leq x_3 N \\ (d_1, d_2) = 1}} d_1 d_2 \sum_{\delta_1 \leq \frac{x_3 N}{d_1}} \sum_{\delta_2 \leq \frac{x_3 N}{d_2}} \frac{\mu(\delta_1)}{\delta_1} \frac{\mu(\delta_2)}{\delta_2} (\delta_1, \delta_2) \\ \times \int_0^{\frac{x_1 N}{d_1}} \int_0^{\frac{x_2 N}{d_2}} \sum_{\substack{a \leq \frac{x_3 N}{d_1 d_2} \\ \delta | a}} \frac{t_1 \lambda^*(a, \frac{t_2}{t_1}) + t_2 \lambda^*(a, \frac{t_1}{t_2})}{a} dt_1 dt_2 + O(x_1 x_2 x_3^{2+\varepsilon} N^{4+\varepsilon}),$$

где $\delta = \text{НОК}(\frac{\delta_1}{(\delta_1, d_2)}, \frac{\delta_2}{(\delta_2, d_1)})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$d_1 = (a, b), \quad d_2 = (a, c), \quad a_1 = \frac{a}{d_1 d_2}, \quad b_1 = \frac{b}{d_1}, \quad c_1 = \frac{c}{d_2}.$$

Поскольку $(a, b, c) = 1$, то $(d_1, d_2) = 1$. Получаем

$$F = \sum_{a \leq x_3 N} \sum_{\substack{d_1 d_2 | a \\ (d_1, d_2) = 1}} \sum_{\substack{b \leq x_1 N \\ (b, a) = d_1}} \sum_{\substack{c \leq x_2 N \\ (c, a) = d_2}} f(d_1 d_2 a_1, d_1 b_1, d_2 c_1) \\ = \sum_{\substack{d_1 d_2 \leq x_3 N \\ (d_1, d_2) = 1}} \sum_{a_1 \leq \frac{x_3 N}{d_1 d_2}} \sum_{\substack{b_1 \leq \frac{x_1 N}{d_1} \\ (b_1, a_1 d_2) = 1}} \sum_{\substack{c_1 \leq \frac{x_2 N}{d_2} \\ (c_1, a_1 d_1) = 1}} d_1 d_2 f(a_1, b_1, c_1).$$

В последнем равенстве мы воспользовались тождеством Джонсона (см. [12])

$$f(da, db, c) = d f(a, b, c).$$

Выражая функцию $f(a, b, c)$ через функцию Рёдсета, получим

$$F = \sum_{\substack{d_1 d_2 \leq x_3 N \\ (d_1, d_2) = 1}} d_1 d_2 \sum_{a_1 \leq \frac{x_3 N}{d_1 d_2}} \sum_{\substack{b_1 \leq \frac{x_1 N}{d_1} \\ (b_1, a_1 d_2) = 1}} \sum_{\substack{c_1 \leq \frac{x_2 N}{d_2} \\ (c_1, a_1 d_1) = 1}} \sum_{l=1}^{a_1} \delta_{a_1}(b_1 l - c_1) \rho_{l, a_1}(b_1, c_1) \\ = \sum_{\substack{d_1 d_2 \leq x_3 N \\ (d_1, d_2) = 1}} d_1 d_2 \sum_{a_1 \leq \frac{x_3 N}{d_1 d_2}} \sum_{\delta_1 | d_2 a_1} \mu(\delta_1) \sum_{\delta_2 | d_1 a_1} \mu(\delta_2) \\ \times \sum_{l=1}^{a_1} \sum_{\substack{b_1 \leq \frac{x_1 N}{d_1} \\ \delta_1 | b_1}} \sum_{\substack{c_1 \leq \frac{x_2 N}{d_2} \\ \delta_2 | c_1}} \delta_{a_1}(b_1 l - c_1) \rho_{l, a_1}(b_1, c_1). \quad (20)$$

Используя [2, § 5, лемма 2], имеем

$$S_{l, a_1} = \sum_{\substack{b_1 \leq \frac{x_1 N}{d_1} \\ \delta_1 | b_1}} \sum_{\substack{c_1 \leq \frac{x_2 N}{d_2} \\ \delta_2 | c_1}} \delta_{a_1}(b_1 l - c_1) \rho_{l, a_1}(b_1, c_1) \\ = \frac{(a_1, \delta_1, \delta_2)}{a_1 \delta_1 \delta_2} \int_0^{\frac{x_1 N}{d_1}} \int_0^{\frac{x_2 N}{d_2}} \rho_{l, a_1}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + O\left(\frac{x_1 x_2}{d_1 d_2} N^{2s_1} \left(\frac{l}{a_1}\right)\right). \quad (21)$$

Следовательно, подставляя (21) в соотношение (20), получаем

$$\begin{aligned}
 F = & \sum_{\substack{d_1 d_2 \leq x_3 N \\ (d_1, d_2)=1}} d_1 d_2 \sum_{a_1 \leq \frac{x_3 N}{d_1 d_2}} \sum_{\delta_1 | d_2 a_1} \mu(\delta_1) \sum_{\delta_2 | d_1 a_1} \mu(\delta_2) \frac{(a_1, \delta_1, \delta_2)}{a_1 \delta_1 \delta_2} \\
 & \times \int_0^{\frac{x_1 N}{d_1}} \int_0^{\frac{x_2 N}{d_2}} \sum_{l=1}^{a_1} \rho_{l, a_1}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\
 & + O\left(x_1 x_2 N^2 \sum_{\substack{d_1 d_2 \leq x_3 N \\ (d_1, d_2)=1}} \sum_{a_1 \leq \frac{x_3 N}{d_1 d_2}} \sum_{\delta_1 | d_2 a_1} \sum_{\delta_2 | d_1 a_1} \sum_{l=1}^{a_1} s_1\left(\frac{l}{a_1}\right)\right). \quad (22)
 \end{aligned}$$

Для оценки остаточного члена в (22) воспользуемся леммами 1, 2; получим

$$\begin{aligned}
 & O\left(x_1 x_2 N^2 \sum_{\substack{d_1 d_2 \leq x_3 N \\ (d_1, d_2)=1}} \sum_{a_1 \leq \frac{x_3 N}{d_1 d_2}} \sum_{\delta_1 | d_2 a_1} \sum_{\delta_2 | d_1 a_1} \sum_{l=1}^{a_1} s_1\left(\frac{l}{a_1}\right)\right) \\
 & = O\left(x_1 x_2 N^2 \sum_{\substack{d_1 d_2 \leq x_3 N \\ (d_1, d_2)=1}} \sum_{a_1 \leq \frac{x_3 N}{d_1 d_2}} \tau(d_1 a_1) \tau(d_2 a_1) a_1 \log^2 a_1\right) \\
 & = O\left(x_1 x_2 N^2 \sum_{\substack{d_1 d_2 \leq x_3 N \\ (d_1, d_2)=1}} (d_1 d_2)^{\varepsilon_1} \sum_{a_1 \leq \frac{x_3 N}{d_1 d_2}} a_1^{1+\varepsilon}\right) = O(x_1 x_2 x_3^{2+\varepsilon} N^{4+\varepsilon}).
 \end{aligned}$$

Подставляя последнюю оценку в (22) и используя формулы (12)–(15), имеем

$$\begin{aligned}
 F = & \sum_{\substack{d_1 d_2 \leq x_3 N \\ (d_1, d_2)=1}} d_1 d_2 \sum_{a_1 \leq \frac{x_3 N}{d_1 d_2}} \sum_{\delta_1 | d_2 a_1} \mu(\delta_1) \sum_{\delta_2 | d_1 a_1} \mu(\delta_2) \frac{(a_1, \delta_1, \delta_2)}{a_1 \delta_1 \delta_2} \\
 & \times \int_0^{\frac{x_1 N}{d_1}} \int_0^{\frac{x_2 N}{d_2}} \left(t_1 \lambda^*\left(a_1, \frac{t_2}{t_1}\right) + t_2 \lambda^*\left(a_1, \frac{t_1}{t_2}\right)\right) dt_1 dt_2 + O(x_1 x_2 x_3^{2+\varepsilon} N^{4+\varepsilon}). \quad (23)
 \end{aligned}$$

Меняем порядок суммирования:

$$\begin{aligned}
 F = & \sum_{\substack{d_1 d_2 \leq x_3 N \\ (d_1, d_2)=1}} d_1 d_2 \sum_{\delta_1 \leq \frac{x_3 N}{d_1}} \frac{\mu(\delta_1)}{\delta_1} \sum_{\delta_2 \leq \frac{x_3 N}{d_2}} \frac{\mu(\delta_2)}{\delta_2} \sum_{\substack{a_1 \leq \frac{x_3 N}{d_1 d_2} \\ \delta_1 | d_2 a_1, \delta_2 | d_1 a_1}} (a_1, \delta_1, \delta_2) \\
 & \times \int_0^{\frac{x_1 N}{d_1}} \int_0^{\frac{x_2 N}{d_2}} \frac{t_1 \lambda^*\left(a_1, \frac{t_2}{t_1}\right) + t_2 \lambda^*\left(a_1, \frac{t_1}{t_2}\right)}{a_1} dt_1 dt_2 + O(x_1 x_2 x_3^{2+\varepsilon} N^{4+\varepsilon}). \quad (24)
 \end{aligned}$$

Заметим, что $(\delta_1, \delta_2) | (d_1 a_1, d_2 a_1)$, но $(d_1 a_1, d_2 a_1) = a_1 (d_1, d_2) = a_1$. Следовательно, $(\delta_1, \delta_2) | a_1$, и тогда

$$(a_1, \delta_1, \delta_2) = (a_1, (\delta_1, \delta_2)) = (\delta_1, \delta_2).$$

Условия $\delta_1 | d_2 a_1, \delta_2 | d_1 a_1$ равносильны условию $\delta | a_1$, где

$$\delta = \text{НОК}\left(\frac{\delta_1}{(\delta_1, d_2)}, \frac{\delta_2}{(\delta_2, d_1)}\right).$$

Тем самым, лемма доказана.

ЛЕММА 8. *Справедливо следующее равенство:*

$$\begin{aligned} G = & \sum_{\substack{d_1 d_2 \leq x_3 N \\ (d_1, d_2) = 1}} d_1 d_2 \sum_{\delta_1 \leq \frac{x_3 N}{d_1}} \sum_{\delta_2 \leq \frac{x_3 N}{d_2}} \frac{\mu(\delta_1)}{\delta_1} \frac{\mu(\delta_2)}{\delta_2} (\delta_1, \delta_2) \\ & \times \int_0^{\frac{x_1 N}{d_1}} \int_0^{\frac{x_2 N}{d_2}} \sum_{\substack{a \leq \frac{x_3 N}{d_1 d_2} \\ \delta | a}} \frac{8}{\pi} \frac{\varphi(a)}{\sqrt{a}} \sqrt{t_1 t_2} dt_1 dt_2 + O(x_1 x_2 x_3^{2+\varepsilon} N^{4+\varepsilon}). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 7.

Из леммы 7 следует, что для доказательства теоремы 5 необходимо исследовать сумму вида

$$\sum_{\substack{a \leq R \\ \delta | a}} \frac{\lambda^*(a, \alpha)}{a}.$$

Используя формулу (17), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{a \leq R \\ \delta | a}} \frac{\lambda^*(a, \alpha)}{a} &= \sum_{d_1 d_2 \leq R} \sum_{\substack{a \leq R \\ \delta | a, d_1 d_2 | a}} \mu(d_1) \mu(d_2) \frac{d_2}{a} \lambda\left(\frac{a}{d_1 d_2}, \frac{d_1 \alpha}{d_2}\right) \\ &= \sum_{n | \delta} \sum_{\substack{d_1 d_2 \leq R \\ (d_1 d_2, \delta) = n}} \sum_{\substack{a \leq R \\ \frac{\delta}{n} d_1 d_2 | a}} \mu(d_1) \mu(d_2) \frac{d_2}{a} \lambda\left(\frac{a}{d_1 d_2}, \frac{d_1 \alpha}{d_2}\right) \\ &= \sum_{n | \delta} \sum_{\substack{d_1 d_2 \leq R \\ (d_1 d_2, \delta) = n}} \frac{\mu(d_1) \mu(d_2)}{d_1} \sum_{\substack{a \leq \frac{R}{d_1 d_2} \\ \frac{\delta}{n} | a}} \frac{\lambda(a, \frac{d_1}{d_2} \alpha)}{a}. \end{aligned} \quad (25)$$

Теперь, используя лемму 3, получаем

$$\sum_{\substack{a \leq R \\ \delta | a}} \frac{\lambda(a, \alpha)}{a} = \frac{1}{R} \sum_{\substack{a \leq R \\ \delta | a}} \lambda(a, \alpha) + \int_1^R \frac{1}{t^2} \sum_{\substack{a \leq t \\ \delta | a}} \lambda(a, \alpha) dt. \quad (26)$$

Следовательно, задача свелась к нахождению асимптотической формулы для суммы

$$\sum_{\substack{a \leq R \\ \delta | a}} \lambda(a, \alpha).$$

Нахождению этой формулы и посвящены последующие параграфы.

§ 5. Разделение задачи на отдельные случаи

Используя формулу (9), из формулы (18) получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} \delta \sum_{\substack{a \leq R \\ \delta | a}} \lambda(a, \alpha) &= \sum_{z=1}^{\delta} \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n \sum_{Q' \geq 1} \sum_{Q \geq 0} [nQ' + kQ \leq R, \alpha(n-k) < Q \leq \alpha n] \\ &\quad \times \exp\left(2\pi i \frac{nQ' + kQ}{\delta} z\right) (Q' + Q + \alpha k) \\ &= \sum_{z=1}^{\delta} \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n \sum_{Q' \geq 1} \sum_{Q \geq 0} [nQ' + kQ \leq R, \alpha(n-k) < Q \leq \alpha n] \\ &\quad \times \exp\left(2\pi i \frac{nQ'}{\delta} z\right) \exp\left(2\pi i \frac{kQ}{\delta} z\right) (Q' + Q + \alpha k). \quad (27) \end{aligned}$$

Разобьем область суммирования по переменным (n, k, Q', Q) ,

$$nQ' + kQ \leq R, \quad \alpha(n-k) < Q \leq \alpha n, \quad 1 \leq k \leq n, \quad 0 \leq Q, \quad 1 \leq Q', \quad (28)$$

на пять подобластей. Тогда получим

$$\delta \sum_{\substack{a \leq R \\ \delta | a}} \lambda(a, \alpha) = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 + \Sigma_5, \quad (29)$$

где Σ_i – сумма по i -й подобласти (далее случай i). Для этого введем параметры

$$U_1 = \sqrt{\frac{R}{\alpha}}, \quad U_2 = \sqrt{R\alpha}. \quad (30)$$

Очевидно, что выполнено

$$U_1 U_2 = R, \quad U_2 = \alpha U_1. \quad (31)$$

В случае 1 мы рассматриваем ситуацию, когда $n \leq U_1$. Следовательно, в остальных случаях рассматриваются ситуации $n > U_1$, но тогда $Q' \leq U_2$. В случаях 2, 3 рассматривается ситуация, когда $k \leq U_1$, а в случаях 4, 5 – когда $k > U_1$.

5.1. Случай 1. Пусть $n \leq U_1$ и внешнее суммирование в Σ_1 ведется по области $\Omega_1 = \{n \leq U_1, k \leq n\}$. Тогда переменные Q, Q' должны удовлетворять условиям

$$\alpha(n-k) < Q \leq \min\left(\alpha n, \frac{R}{k}\right), \quad Q' \leq \frac{R-kQ}{n}.$$

В силу выбора параметров получаем, что внутреннее суммирование по переменным Q, Q' ведется по области (рис. 1)

$$\Omega_{11} = \left\{ \alpha(n-k) < Q \leq \alpha n, 1 \leq Q' \leq \frac{R-kQ}{n} \right\}.$$

Рис. 1

Следовательно, имеем

$$\Sigma_1 = \sum_{z=1}^{\delta} \sum_{(n,k) \in \Omega_1} \sum_{(Q,Q') \in \Omega_{11}} \exp\left(2\pi i \frac{zn}{\delta} Q'\right) \exp\left(2\pi i \frac{zk}{\delta} Q\right) (Q' + Q + \alpha k).$$

Преобразование

$$\sum_{z=1}^{\delta} \sum_{n \leq U_1} \sum_{k \leq n} = \sum_{z=1}^{\delta} \sum_{\substack{n \leq U_1 \\ \delta | zn}} \sum_{\substack{k \leq n \\ \delta | zk}} + \sum_{z=1}^{\delta} \sum_{\substack{n \leq U_1 \\ \delta | zn}} \sum_{\substack{k \leq n \\ \delta \nmid zk}} + \sum_{z=1}^{\delta} \sum_{\substack{n \leq U_1 \\ \delta \nmid zn}} \sum_{k \leq n} \quad (32)$$

очевидно. Преобразуем первое слагаемое в (32), учитывая, что мы суммируем функцию, в которую z и δ входят только в виде $\frac{z}{\delta}$:

$$\sum_{z=1}^{\delta} \sum_{\substack{n \leq U_1 \\ \delta | zn}} \sum_{\substack{k \leq n \\ \delta | zk}} = \sum_{d|\delta} \sum_{\substack{z=1 \\ (\delta, z)=d}}^{\delta} \sum_{\substack{n \leq U_1 \\ \frac{\delta}{d} | n}} \sum_{\substack{k \leq n \\ \frac{\delta}{d} | k}} = \sum_{\tau|\delta} \sum_{z=1}^{\tau} \sum_{\substack{n \leq U_1 \\ \tau | n}} \sum_{\substack{k \leq n \\ \tau | k}}.$$

Аналогично, для второго слагаемого в (32) получаем

$$\sum_{z=1}^{\delta} \sum_{\substack{n \leq U_1 \\ \delta | zn}} \sum_{\substack{k \leq n \\ \delta \nmid zk}} = \sum_{\tau|\delta} \sum_{z=1}^{\tau} \sum_{\substack{n \leq U_1 \\ \tau | n}} \sum_{\substack{k \leq n \\ \tau \nmid k}}.$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{\tau|\delta} \sum_{z=1}^{\tau} \sum_{\substack{(n,k) \in \Omega_1 \\ \tau | n, \tau | k}} \sum_{(Q,Q') \in \Omega_{11}} (Q' + Q + \alpha k) \\ &\quad + \sum_{\tau|\delta} \sum_{z=1}^{\tau} \sum_{\substack{(n,k) \in \Omega_1 \\ \tau | n, \tau \nmid k}} \sum_{(Q,Q') \in \Omega_{11}} \exp\left(2\pi i \frac{zk}{\tau} Q\right) (Q' + Q + \alpha k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{z=1}^{\delta} \sum_{(n,k) \in \Omega_1} \sum_{\substack{(Q,Q') \in \Omega_{11} \\ \delta \nmid zn}} \exp\left(2\pi i \frac{zk}{\delta} Q\right) \exp\left(2\pi i \frac{zn}{\delta} Q'\right) (Q' + Q + \alpha k) \\
& = \Sigma_{11} + \Sigma_{12} + \Sigma_{13}. \quad (33)
\end{aligned}$$

5.2. Случай 2. Пусть $n > U_1$, тогда $Q' \leq U_2$, и пусть $k \leq U_1$. Пусть также $U_1 \leq \frac{R}{Q' + \alpha k}$. Тогда внешнее суммирование в Σ_2 ведется по области $\Omega_2 = \{k \leq U_1, 1 \leq Q' \leq U_2 - \alpha k\}$.

Рис. 2

Пусть в плоскости (n, Q) , представленной на рис. 2, A – точка пересечения прямых $Q = \alpha n$ и $Q = \frac{R - nQ'}{k}$, B – точка пересечения прямых $Q = \alpha(n - k)$ и $Q = \frac{R - nQ'}{k}$. Тогда их координаты суть

$$A\left(\frac{R}{Q' + \alpha k}, \frac{R\alpha}{Q' + \alpha k}\right), \quad B\left(\frac{R + \alpha k^2}{Q' + \alpha k}, \alpha \frac{R - \alpha Q'}{Q' + \alpha k}\right).$$

Внутреннее суммирование в Σ_2 ведется по объединению непересекающихся областей

$$\begin{aligned}
\Omega_{21} &= \left\{ U_1 < n \leq \frac{R}{Q' + \alpha k}, \alpha(n - k) < Q \leq \alpha n \right\}, \\
\Omega_{22} &= \left\{ \frac{R}{Q' + \alpha k} < n \leq \frac{R + \alpha k^2}{Q' + \alpha k}, \alpha(n - k) < Q \leq \frac{R - nQ'}{k} \right\}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\Sigma_2 &= \sum_{z=1}^{\delta} \sum_{(k,Q') \in \Omega_2} \left(\sum_{(n,Q) \in \Omega_{21}} + \sum_{(n,Q) \in \Omega_{22}} \right) \exp\left(2\pi i \frac{zn}{\delta} Q'\right) \\
&\quad \times \exp\left(2\pi i \frac{zk}{\delta} Q\right) (Q' + Q + \alpha k).
\end{aligned}$$

Проводя преобразования, аналогичные тем, что были выполнены для суммы Σ_1 , получаем

$$\begin{aligned}
 \Sigma_2 = & \sum_{\tau|\delta} \sum_{z=1}^{\tau} \sum_{\substack{(k,Q') \in \Omega_2 \\ \tau|k, \tau \nmid Q'}} \left(\sum_{(n,Q) \in \Omega_{21}} + \sum_{(n,Q) \in \Omega_{22}} \right) (Q' + Q + \alpha k) \\
 & + \sum_{\tau|\delta} \sum_{z=1}^{\tau} \sum_{\substack{(k,Q') \in \Omega_2 \\ \tau|k, \tau \nmid Q'}} \left(\sum_{(n,Q) \in \Omega_{21}} + \sum_{(n,Q) \in \Omega_{22}} \right) \exp\left(2\pi i \frac{zQ'}{\tau} n\right) (Q' + Q + \alpha k) \\
 & + \sum_{z=1}^{\delta} \sum_{\substack{(k,Q') \in \Omega_2 \\ \delta \nmid zk}} \left(\sum_{(n,Q) \in \Omega_{21}} + \sum_{(n,Q) \in \Omega_{22}} \right) \exp\left(2\pi i \frac{zQ'}{\delta} n\right) \\
 & \times \exp\left(2\pi i \frac{zk}{\delta} Q\right) (Q' + Q + \alpha k) = \Sigma_{21} + \Sigma_{22} + \Sigma_{23}. \quad (34)
 \end{aligned}$$

5.3. Случай 3. Пусть $n > U_1$, тогда $Q' \leq U_2$, и пусть $k \leq U_1$ и выполнено

$$\frac{R}{Q' + \alpha k} < U_1 \leq \frac{R + \alpha k^2}{Q' + \alpha k}.$$

Пусть, кроме того, внешнее суммирование в Σ_3 ведется по области

$$\Omega_3 = \left\{ k \leq U_1, U_2 - \alpha k < Q' \leq U_2 - \alpha k + \frac{\alpha k^2}{U_1} \right\},$$

а внутреннее – по области

$$\Omega_{31} = \left\{ U_1 < n \leq \frac{R + \alpha k^2}{Q' + \alpha k}, \alpha(n - k) < Q \leq \frac{R - nQ'}{k} \right\}.$$

Следовательно, имеем

$$\Sigma_3 = \sum_{z=1}^{\delta} \sum_{(k,Q') \in \Omega_3} \sum_{(n,Q) \in \Omega_{31}} \exp\left(2\pi i \frac{zn}{\delta} Q'\right) \exp\left(2\pi i \frac{zk}{\delta} Q\right) (Q' + Q + \alpha k).$$

Проводя преобразования, аналогичные тем, что были выполнены для Σ_1 , получаем

$$\begin{aligned}
 \Sigma_3 = & \sum_{\tau|\delta} \sum_{z=1}^{\tau} \sum_{\substack{(k,Q') \in \Omega_3 \\ \tau|k, \tau \nmid Q'}} \sum_{(n,Q) \in \Omega_{31}} (Q' + Q + \alpha k) \\
 & + \sum_{\tau|\delta} \sum_{z=1}^{\tau} \sum_{\substack{(k,Q') \in \Omega_3 \\ \tau|k, \tau \nmid Q'}} \sum_{(n,Q) \in \Omega_{31}} \exp\left(2\pi i \frac{zQ'}{\tau} n\right) (Q' + Q + \alpha k) \\
 & + \sum_{z=1}^{\delta} \sum_{\substack{(k,Q') \in \Omega_3 \\ \delta \nmid zk}} \sum_{(n,Q) \in \Omega_{31}} \exp\left(2\pi i \frac{zQ'}{\delta} n\right) \exp\left(2\pi i \frac{zk}{\delta} Q\right) (Q' + Q + \alpha k) \\
 & = \Sigma_{31} + \Sigma_{32} + \Sigma_{33}. \quad (35)
 \end{aligned}$$

5.4. Случай 4. Пусть $n > U_1$, тогда $Q' \leq U_2$. Пусть $k > U_1$, и тогда $Q \leq U_2$. В Σ_4 будем вести внешнее суммирование по Q, Q' .

Рис. 3

Пусть в плоскости (n, k) , представленной на рис. 3, A, B, E, C – точки пересечения прямой $k = \frac{R-nQ'}{Q}$ соответственно с прямыми $n = U_1, k = U_1, k = n, k = n - \frac{Q}{\alpha}$, а D – точка пересечения прямой $k = n - \frac{Q}{\alpha}$ с прямой $k = U_1$, F – точка пересечения прямой $k = U_1$ с прямой $n = U_1$. Точки имеют следующие координаты:

$$A\left(U_1, \frac{R-U_1Q'}{Q}\right), \quad B\left(\frac{R-U_1Q}{Q'}, U_1\right), \quad C\left(\frac{R+\frac{Q^2}{\alpha}}{Q+Q'}, \frac{R-\frac{QQ'}{\alpha}}{Q+Q'}\right), \\ D\left(U_1+\frac{Q}{\alpha}, U_1\right), \quad F(U_1, U_1), \quad E\left(\frac{R}{Q+Q'}, \frac{R}{Q+Q'}\right).$$

Чтобы $\triangle AFB$ был невырожденным, необходимо выполнение неравенства

$$Q + Q' \leq U_2.$$

Рассмотрим случай, когда точка C принадлежит отрезку AB . Тогда

$$\frac{R+\frac{Q^2}{\alpha}}{Q+Q'} \leq \frac{R-U_1Q}{Q'}.$$

Получаем, что

$$Q' \leq \frac{R-U_1Q}{U_1+\frac{Q}{\alpha}} = U_2 \frac{U_2-Q}{U_2+Q},$$

и условие $Q + Q' \leq U_2$ выполнено. Тогда внешнее суммирование в Σ_4 ведется по области

$$\Omega_4 = \left\{ Q \leq U_2, \quad Q' \leq U_2 \frac{U_2-Q}{U_2+Q} \right\},$$

а внутреннее – по области $FECD$, которую мы разбиваем следующим образом:

$$FECD = \Omega_{41} + \Omega_{42} - \Omega_{43},$$

где

$$\begin{aligned}\Omega_{41} &= \left\{ U_1 < n \leq \frac{R}{Q+Q'}, U_1 < k \leq n \right\}, \\ \Omega_{42} &= \left\{ \frac{R}{Q+Q'} < n \leq \frac{R + \frac{Q^2}{\alpha}}{Q+Q'}, U_1 < k \leq \frac{R - nQ'}{Q} \right\}, \\ \Omega_{43} &= \left\{ U_1 + \frac{Q}{\alpha} < n \leq \frac{R + \frac{Q^2}{\alpha}}{Q+Q'}, U_1 < k \leq n - \frac{Q}{\alpha} \right\}.\end{aligned}$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned}\Sigma_4 &= \sum_{z=1}^{\delta} \sum_{(Q, Q') \in \Omega_4} \left(\sum_{(n, k) \in \Omega_{41}} + \sum_{(n, k) \in \Omega_{42}} - \sum_{(n, k) \in \Omega_{43}} \right) \exp\left(2\pi i \frac{zQ'}{\delta} n\right) \\ &\quad \times \exp\left(2\pi i \frac{zQ}{\delta} k\right) (Q' + Q + \alpha k).\end{aligned}$$

Проводя преобразования, аналогичные тем, что были выполнены для суммы Σ_1 , получаем

$$\begin{aligned}\Sigma_4 &= \sum_{\tau|\delta} \sum_{z=1}^{\tau} \sum_{\substack{(Q, Q') \in \Omega_4 \\ \tau|Q, \tau|Q'}} \left(\sum_{(n, k) \in \Omega_{41}} + \sum_{(n, k) \in \Omega_{42}} - \sum_{(n, k) \in \Omega_{43}} \right) (Q' + Q + \alpha k) \\ &\quad + \sum_{\tau|\delta} \sum_{z=1}^{\tau} \sum_{\substack{(Q, Q') \in \Omega_4 \\ \tau|Q, \tau \nmid Q'}} \left(\sum_{(n, k) \in \Omega_{41}} + \sum_{(n, k) \in \Omega_{42}} - \sum_{(n, k) \in \Omega_{43}} \right) \\ &\quad \times \exp\left(2\pi i \frac{zQ'}{\tau} n\right) (Q' + Q + \alpha k) \\ &\quad + \sum_{z=1}^{\delta} \sum_{\substack{(Q, Q') \in \Omega_4 \\ \delta \nmid z k}} \left(\sum_{(n, k) \in \Omega_{41}} + \sum_{(n, k) \in \Omega_{42}} - \sum_{(n, k) \in \Omega_{43}} \right) \exp\left(2\pi i \frac{zQ'}{\delta} n\right) \\ &\quad \times \exp\left(2\pi i \frac{zQ}{\delta} k\right) (Q' + Q + \alpha k) = \Sigma_{41} + \Sigma_{42} + \Sigma_{43}. \quad (36)\end{aligned}$$

5.5. Случай 5. Пусть $n > U_1$, тогда $Q' \leq U_2$. Пусть $k > U_1$, и тогда $Q \leq U_2$. В Σ_5 будем вести внешнее суммирование по Q, Q' . Рассмотрим случай, когда точка C не принадлежит отрезку AB . Тогда

$$\frac{R + \frac{Q^2}{\alpha}}{Q + Q'} > \frac{R - U_1 Q}{Q'}.$$

Получаем

$$Q' > \frac{R - U_1 Q}{U_1 + \frac{Q}{\alpha}} = U_2 \frac{U_2 - Q}{U_2 + Q},$$

откуда следует, что условие $Q + Q' \leq U_2$ необходимо учитывать. Тогда внешнее суммирование в Σ_5 ведется по области

$$\Omega_5 = \left\{ Q \leq U_2, U_2 \frac{U_2 - Q}{U_2 + Q} < Q \leq U_2 - Q \right\},$$

а внутреннее – по треугольнику $\triangle FBE$, который мы разбиваем следующим образом:

$$\triangle FBE = \Omega_{51} + \Omega_{52},$$

где

$$\Omega_{51} = \left\{ U_1 < n \leq \frac{R}{Q+Q'}, U_1 < k \leq n \right\},$$

$$\Omega_{52} = \left\{ \frac{R}{Q+Q'} < n \leq \frac{R-U_1Q}{Q'}, U_1 < k \leq \frac{R-nQ'}{Q} \right\}.$$

Следовательно, имеем

$$\Sigma_5 = \sum_{z=1}^{\delta} \sum_{(Q,Q') \in \Omega_5} \left(\sum_{(n,k) \in \Omega_{51}} + \sum_{(n,k) \in \Omega_{52}} \right) \exp\left(2\pi i \frac{zQ'}{\delta} n\right) \times \exp\left(2\pi i \frac{zQ}{\delta} k\right) (Q' + Q + \alpha k).$$

Проводя преобразования, аналогичные тем, что были выполнены для суммы Σ_1 , получаем

$$\begin{aligned} \Sigma_5 &= \sum_{\tau|\delta} \sum_{z=1}^{\tau} \sum_{\substack{(Q,Q') \in \Omega_5 \\ \tau|Q, \tau|Q'}} \left(\sum_{(n,k) \in \Omega_{51}} + \sum_{(n,k) \in \Omega_{52}} \right) (Q' + Q + \alpha k) \\ &\quad + \sum_{\tau|\delta} \sum_{z=1}^{\tau} \sum_{\substack{(Q,Q') \in \Omega_5 \\ \tau|Q, \tau \nmid Q'}} \left(\sum_{(n,k) \in \Omega_{51}} + \sum_{(n,k) \in \Omega_{52}} \right) \exp\left(2\pi i \frac{zQ'}{\tau} n\right) (Q' + Q + \alpha k) \\ &\quad + \sum_{z=1}^{\delta} \sum_{\substack{(Q,Q') \in \Omega_4 \\ \delta \nmid z k}} \left(\sum_{(n,k) \in \Omega_{51}} + \sum_{(n,k) \in \Omega_{52}} \right) \exp\left(2\pi i \frac{zQ'}{\delta} n\right) \\ &\quad \times \exp\left(2\pi i \frac{zQ}{\delta} k\right) (Q' + Q + \alpha k) = \Sigma_{51} + \Sigma_{52} + \Sigma_{53}. \quad (37) \end{aligned}$$

§ 6. Вычисление сумм первого типа

В этом параграфе мы вычислим суммы Σ_{11} , Σ_{21} , Σ_{31} , Σ_{41} , Σ_{51} .

6.1. Случай 1. Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 9. *Справедлива асимптотическая формула*

$$\Sigma_{11} = \frac{53}{150} R^{5/2} \sqrt{\alpha} \sum_{\tau|\delta} \frac{\varphi(\tau)}{\tau^2} + \sum_{\tau|\delta} \varphi(\tau) O\left(\frac{\alpha R^2}{\tau} \left(1 + \log \frac{U_1}{\tau}\right) + \frac{R^2}{\tau^2} \log \frac{U_1}{\tau}\right),$$

где сумма Σ_{11} определена в формуле (33).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Производя суммирование по переменной Q' , получаем

$$\begin{aligned}
 \sum_{Q' \leq \frac{R-kQ}{n}} (Q' + Q + \alpha k) &= (Q + \alpha k) \frac{R - kQ}{n} + \frac{(R - kQ)^2}{2n^2} + O(Q + \alpha k) + O\left(\frac{R - kQ}{n}\right) \\
 &= Q^2 \left(\frac{k^2}{2n^2} - \frac{k}{n} \right) + Q \left(\frac{R}{n} - \frac{\alpha k^2}{n} - R \frac{k}{n^2} \right) + \left(\alpha R \frac{k}{n} + \frac{R^2}{2n^2} \right) \\
 &\quad + O(Q + \alpha k) + O\left(\frac{R - kQ}{n}\right).
 \end{aligned}$$

Далее необходимо просуммировать полученное выражение по переменной Q . Учитывая, что

$$(n, k) \in \Omega_1 = \{n \leq U_1, k \leq n\}, \quad U_1 = \sqrt{\frac{R}{\alpha}},$$

получаем следующие соотношения, необходимые для вывода оценки остаточного члена:

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{k^2}{2n^2} - \frac{k}{n} \right| \alpha^2 n^2 &\ll \alpha^2 k n, \quad \left| \frac{R}{n} - \frac{\alpha k^2}{n} - R \frac{k}{n^2} \right| \alpha n \ll \alpha R, \quad \left| \alpha R \frac{k}{n} + \frac{R^2}{2n^2} \right| \ll \frac{R^2}{n^2}, \\
 \sum_{\alpha(n-k) < Q \leq \alpha n} (Q + \alpha k) &\ll \alpha^2 n k, \quad \sum_{\alpha(n-k) < Q \leq \alpha n} \frac{R - kQ}{n} \ll \frac{R}{n} \alpha k, \\
 \alpha^2 k n + \alpha R + \frac{R}{n} \alpha k &\ll \frac{R^2}{n^2}.
 \end{aligned}$$

Напомним, что $\Omega_{11} = \{\alpha(n - k) < Q \leq \alpha n, 1 \leq Q' \leq \frac{R - kQ}{n}\}$. Применяя следствие 4, 1) (см. § 10), получаем

$$\begin{aligned}
 \sum_{(Q, Q') \in \Omega_{11}} (Q' + Q + \alpha k) &= \frac{\alpha^3}{3} \left(\frac{k^2}{2n^2} - \frac{k}{n} \right) (n^3 - (n - k)^3) \\
 &\quad + \frac{\alpha^2}{2} \left(\frac{R}{n} - \frac{\alpha k^2}{n} - \frac{Rk}{n^2} \right) (n^2 - (n - k)^2) + \alpha k \left(\alpha R \frac{k}{n} + \frac{R^2}{2n^2} \right) + O\left(\frac{R^2}{n^2}\right) \\
 &= \alpha^3 \left(\frac{k^3}{2} - \frac{k^4}{3n} + \frac{k^5}{6n^2} - n k^2 \right) + \alpha^2 \left(Rk - R \frac{k^2}{2n} + R \frac{k^3}{2n^2} \right) + \alpha R^2 \frac{k}{2n^2} + O\left(\frac{R^2}{n^2}\right).
 \end{aligned}$$

Последнее выражение необходимо просуммировать по переменным $(n, k) \in \Omega_1$, $\tau|n, \tau|k$. Получаем

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{(n, k) \in \Omega_1 \\ \tau|n, \tau|k}} \sum_{(Q, Q') \in \Omega_{11}} (Q' + Q + \alpha k) &= \sum_{n \leq \frac{U_1}{\tau}} \sum_{k \leq n} \alpha^3 \tau^3 \left(\frac{k^3}{2} - \frac{k^4}{3n} + \frac{k^5}{6n^2} - n k^2 \right) + \alpha^2 \tau \left(Rk - R \frac{k^2}{2n} + R \frac{k^3}{2n^2} \right) \\
 &\quad + \alpha R^2 \frac{k}{2n^2 \tau} + O\left(\frac{R^2}{\tau^2 n^2}\right).
 \end{aligned}$$

Применяя следствие 4, 1) (см. § 10) сначала при суммировании по k , а потом при суммировании по n , получаем

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{(n,k) \in \Omega_1 \\ \tau|n, \tau|k}} \sum_{(Q, Q') \in \Omega_{11}} (Q' + Q + \alpha k) &= \sum_{n \leq \frac{U_1}{\tau}} \left(\alpha^3 \tau^3 \left(\frac{n^4}{8} - \frac{n^4}{15} + \frac{n^4}{36} - \frac{n^4}{3} + O(n^3) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \alpha^2 \tau \left(R \frac{n^2}{2} - R \frac{n^2}{6} + R \frac{n^2}{8} + O(Rn) \right) + \alpha R^2 \frac{1}{4\tau} + O\left(\frac{\alpha R^2}{\tau n}\right) + O\left(\frac{R^2}{\tau^2 n}\right) \right) \\
 &= \sum_{n \leq \frac{U_1}{\tau}} \left(-\frac{89}{360} \alpha^3 \tau^3 n^4 + \frac{11}{24} \alpha^2 \tau R n^2 + \frac{\alpha R^2}{4\tau} + O\left(\alpha^3 \tau^3 n^3 + \alpha^2 \tau R n + \frac{\alpha R^2}{\tau n}\right) \right. \\
 &\quad \left. + O\left(\frac{R^2}{\tau^2 n}\right) \right) \\
 &= \frac{R^{5/2} \sqrt{\alpha}}{\tau^2} \left(-\frac{89}{5 \cdot 360} + \frac{11}{3 \cdot 24} + \frac{1}{4} \right) + O\left(\frac{\alpha R^2}{\tau} \left(1 + \log \frac{U_1}{\tau}\right) + \frac{R^2}{\tau^2} \log \frac{U_1}{\tau}\right) \\
 &= \frac{R^{5/2} \sqrt{\alpha}}{\tau^2} \frac{53}{150} + O\left(\frac{\alpha R^2}{\tau} \left(1 + \log \frac{U_1}{\tau}\right) + \frac{R^2}{\tau^2} \log \frac{U_1}{\tau}\right).
 \end{aligned}$$

Используя определение функции Эйлера

$$\varphi(\tau) = \sum_{z=1}^{\tau}{}^* 1,$$

находим асимптотическую формулу для Σ_{11} :

$$\Sigma_{11} = \frac{53}{150} R^{5/2} \sqrt{\alpha} \sum_{\tau|\delta} \frac{\varphi(\tau)}{\tau^2} + \sum_{\tau|\delta} \varphi(\tau) O\left(\frac{\alpha R^2}{\tau} \left(1 + \log \frac{U_1}{\tau}\right) + \frac{R^2}{\tau^2} \log \frac{U_1}{\tau}\right).$$

Тем самым, лемма доказана.

6.2. Случай 2. Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 10. *Справедлива асимптотическая формула*

$$\Sigma_{21} = \frac{19}{75} R^{5/2} \sqrt{\alpha} \sum_{\tau|\delta} \frac{\varphi(\tau)}{\tau^2} + \sum_{\tau|\delta} \varphi(\tau) O\left(\frac{R^2}{\tau} (1 + \alpha) + \frac{R^2}{\tau} (1 + \alpha) \log \frac{U_1}{\tau}\right),$$

где сумма Σ_{21} определена в формуле (34).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим отдельно суммы по областям

$$\begin{aligned}
 \Omega_{21} &= \left\{ U_1 < n \leq \frac{R}{Q' + \alpha k}, \alpha(n - k) < Q \leq \alpha n \right\}, \\
 \Omega_{22} &= \left\{ \frac{R}{Q' + \alpha k} < n \leq \frac{R + \alpha k^2}{Q' + \alpha k}, \alpha(n - k) < Q \leq \frac{R - nQ'}{k} \right\}.
 \end{aligned}$$

1. Вычислим сумму $\sum_{(n,Q) \in \Omega_{21}} (Q' + Q + \alpha k)$:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{U_1 < n \leq \frac{R}{Q' + \alpha k}} \sum_{\alpha(n-k) < Q \leq \alpha n} (Q' + Q + \alpha k) \\
 &= \sum_{U_1 < n \leq \frac{R}{Q' + \alpha k}} \left(\alpha^2 n k + \alpha^2 \frac{k^2}{2} + \alpha k Q' + O(\alpha n) + O(Q' + \alpha k) \right) \\
 &= \left(\alpha^2 \frac{k^2}{2} + \alpha k Q' \right) \left(\frac{R}{Q' + \alpha k} - U_1 \right) + \frac{\alpha^2 k}{2} \left(\frac{R^2}{(Q' + \alpha k)^2} - U_1^2 \right) \\
 &\quad + O\left(\alpha^2 k \frac{R}{Q' + \alpha k} \right) + O(\alpha^2 k^2 + \alpha k Q') + O\left(\alpha \frac{R^2}{(Q' + \alpha k)^2} \right) + O(R) \\
 &= \alpha k (R - U_1(Q' + \alpha k)) - \frac{\alpha^2 k^2}{2} \left(\frac{R}{Q' + \alpha k} - U_1 \right) \\
 &\quad + \frac{\alpha^2 k}{2} \left(\frac{R^2}{(Q' + \alpha k)^2} - U_1^2 \right) + O\left(\alpha^2 k \frac{R}{Q' + \alpha k} \right) + O\left(\alpha \frac{R^2}{(Q' + \alpha k)^2} \right).
 \end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что из $Q' \leq U_2 - \alpha k$ следует

$$\alpha k (Q' + \alpha k) \leq \alpha^2 k \frac{R}{Q' + \alpha k}, \quad R \leq \alpha \frac{R^2}{(Q' + \alpha k)^2}.$$

2. Вычислим сумму $\sum_{(n,Q) \in \Omega_{22}} (Q' + Q + \alpha k)$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{\alpha(n-k) < Q \leq \frac{R - nQ'}{k}} (Q' + Q + \alpha k) &= (Q' + \alpha k) \left(\frac{R - nQ'}{k} - \alpha(n-k) \right) + O(Q' + \alpha k) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{(R - nQ')^2}{k^2} - \alpha^2 (n-k)^2 \right) + O\left(\frac{R - nQ'}{k} \right) \\
 &= \frac{R + \alpha k^2}{k} \left(\frac{R + \alpha k^2}{2k} + Q' \right) - n \frac{Q'}{k} \left(\frac{R + \alpha k^2}{k} + Q' + \alpha k \right) + \frac{n^2}{2} \frac{(Q')^2 - \alpha^2 k^2}{k^2} \\
 &\quad + O(Q' + \alpha k) + O\left(\frac{R - nQ'}{k} \right). \quad (38)
 \end{aligned}$$

При суммировании по n воспользуемся следствием 3 (см. § 10). В данном случае определим функцию $f(x)$ следующим образом:

$$f(x) = \frac{R + \alpha k^2}{k} \left(\frac{R + \alpha k^2}{2k} + Q' \right) - x \frac{Q'}{k} \left(\frac{R + \alpha k^2}{k} + Q' + \alpha k \right) + \frac{x^2}{2} \frac{(Q')^2 - \alpha^2 k^2}{k^2}. \quad (39)$$

Используя последнее равенство, получим другое выражение для функции $f(x)$:

$$f(x) = (Q' + \alpha k) \left(\frac{R - xQ'}{k} - \alpha(x-k) \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{(R - xQ')^2}{k^2} - \alpha^2 (x-k)^2 \right). \quad (40)$$

Дифференцируя формулу (39), получаем

$$f'(x) = -\frac{Q'}{k} \left(\frac{R}{k} + \alpha k \right) - \frac{Q'}{k} (Q' + \alpha k) + x \left(\frac{Q'}{k} - \alpha \right) \frac{Q' + \alpha k}{k}.$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned}
 f'\left(\frac{R}{Q' + \alpha k}\right) &= -\frac{Q'}{k}\left(\frac{R}{k} + \alpha k\right) - \frac{Q'}{k}(Q' + \alpha k) + \frac{R}{k}\left(\frac{Q'}{k} - \alpha\right) \\
 &= -Q'\alpha - \frac{Q'}{k}(Q' + \alpha k) - \frac{R\alpha}{k} < 0, \\
 f'\left(\frac{R + \alpha k^2}{Q' + \alpha k}\right) &= -\frac{Q'}{k}\left(\frac{R}{k} + \alpha k\right) - \frac{Q'}{k}(Q' + \alpha k) + \frac{R + \alpha k^2}{k}\left(\frac{Q'}{k} - \alpha\right) \\
 &= -\frac{Q'}{k}(Q' + \alpha k) - \frac{R + \alpha k^2}{k}\alpha < 0.
 \end{aligned}$$

Получаем, что функция $f(x)$ монотонно убывает на промежутке

$$\frac{R}{Q' + \alpha k} < x \leq \frac{R + \alpha k^2}{Q' + \alpha k}.$$

Из формулы (40) получаем $f\left(\frac{R + \alpha k^2}{Q' + \alpha k}\right) = 0$. Следовательно, имеем

$$\begin{aligned}
 \sum_{(n, Q) \in \Omega_{22}} (Q' + Q + \alpha k) &= \int_{\frac{R}{Q' + \alpha k}}^{\frac{R + \alpha k^2}{Q' + \alpha k}} f(x) dx + O\left(f\left(\frac{R}{Q' + \alpha k}\right)\right) \\
 &\quad + \sum_{\frac{R}{Q' + \alpha k} < n \leq \frac{R + \alpha k^2}{Q' + \alpha k}} \left(O(Q' + \alpha k) + O\left(\frac{R - nQ'}{k}\right)\right).
 \end{aligned}$$

Вычислим интеграл в последнем равенстве, используя формулу (39). Интегрируя каждое слагаемое формулы (39), получаем

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{R}{Q' + \alpha k}}^{\frac{R + \alpha k^2}{Q' + \alpha k}} f(x) dx &= \frac{\alpha k^2}{Q' + \alpha k} \frac{R + \alpha k^2}{k} \left(\frac{R + \alpha k^2}{2k} + Q'\right) \\
 &\quad - \frac{Q'}{k} \left(\frac{R + \alpha k^2}{k} + Q' + \alpha k\right) \frac{(R + \alpha k^2)^2 - R^2}{2(Q' + \alpha k)^2} + \frac{(Q')^2 - \alpha^2 k^2}{k^2} \frac{(R + \alpha k^2)^3 - R^3}{6(Q' + \alpha k)^3}.
 \end{aligned}$$

Преобразовывая отдельно каждое слагаемое, получаем

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{R}{Q' + \alpha k}}^{\frac{R + \alpha k^2}{Q' + \alpha k}} f(x) dx &= \alpha k \frac{R + \alpha k^2}{Q' + \alpha k} \left(Q' + \alpha k + \frac{R - \alpha k^2}{2k}\right) \\
 &\quad - \left(\frac{Q' + \alpha k}{k} - \alpha\right) \left(\frac{R + \alpha k^2}{k} + Q' + \alpha k\right) \frac{(R + \alpha k^2)^2 - R^2}{2(Q' + \alpha k)^2} \\
 &\quad + \frac{(R + \alpha k^2)^3 - R^3}{6(Q' + \alpha k)^2 k^2} (Q' + \alpha k - 2\alpha k).
 \end{aligned}$$

Раскрывая здесь скобки и группируя слагаемые по одинаковым степеням величины $Q' + \alpha k$, имеем

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{R}{Q' + \alpha k}}^{\frac{R + \alpha k^2}{Q' + \alpha k}} f(x) dx &= \alpha k(R + \alpha k^2) - \frac{(R + \alpha k^2)^2 - R^2}{2k} + \frac{1}{Q' + \alpha k} \left(\frac{\alpha(R + \alpha k^2)(R - \alpha k^2)}{2}\right) \\
 &\quad - \left(\frac{R + \alpha k^2}{k^2} - \alpha\right) \frac{(R + \alpha k^2)^2 - R^2}{2} + \frac{(R + \alpha k^2)^3 - R^3}{6k^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{(Q' + \alpha k)^2} \left(\alpha \frac{R + \alpha k^2}{k} \frac{(R + \alpha k^2)^2 - R^2}{2} - \alpha \frac{(R + \alpha k^2)^3 - R^3}{3k} \right) \\
& = \frac{\alpha^2 k^3}{2} - \frac{1}{Q' + \alpha k} \frac{\alpha^3 k^4}{3} + \frac{1}{(Q' + \alpha k)^2} \left(R \frac{\alpha^3 k^3}{2} + \frac{\alpha^4 k^5}{6} \right).
\end{aligned}$$

Вычислим асимптотический член суммы $\sum_{(n, Q) \in \Omega_{22}} (Q' + Q + \alpha k)$. Используя формулу (40), получаем

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{R}{Q' + \alpha k}\right) &= (Q' + \alpha k)\alpha k + \frac{\alpha k}{2} \left(\frac{2R\alpha}{Q' + \alpha k} - \alpha k \right) \\
&= \frac{\alpha^2 k^2}{2} + \alpha k Q' + \frac{R\alpha^2 k}{Q' + \alpha k}.
\end{aligned}$$

Также легко получить, что

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{\frac{R}{Q' + \alpha k} < n \leq \frac{R + \alpha k^2}{Q' + \alpha k}}} (Q' + \alpha k) = O(\alpha k^2), \\
& \sum_{\substack{\frac{R}{Q' + \alpha k} < n \leq \frac{R + \alpha k^2}{Q' + \alpha k}}} O\left(\frac{R - nQ'}{k}\right) = O\left(\frac{R\alpha k}{Q' + \alpha k}\right).
\end{aligned}$$

Учитывая неравенства $k \leq U_1$, $Q' \leq U_2 - \alpha k$ и формулы (30) и (31), получаем

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha^2 k^2}{2} + \alpha k Q' + \frac{R\alpha^2 k}{Q' + \alpha k} &\leq \alpha k \left(Q' + \alpha k + \frac{R\alpha}{Q' + \alpha k} \right) \leq \frac{R\alpha^2 k}{Q' + \alpha k}, \\
\alpha k^2 &\leq \frac{R\alpha k}{Q' + \alpha k}.
\end{aligned}$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{(n, Q) \in \Omega_{22}} (Q' + Q + \alpha k) &= \frac{\alpha^2 k^3}{2} - \frac{1}{Q' + \alpha k} \frac{\alpha^3 k^4}{3} + \frac{1}{(Q' + \alpha k)^2} \left(R \frac{\alpha^3 k^3}{2} + \frac{\alpha^4 k^5}{6} \right) \\
&\quad + O\left(\frac{R\alpha k}{Q' + \alpha k} + \frac{R\alpha^2 k}{Q' + \alpha k}\right).
\end{aligned}$$

Получаем

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{(n, Q) \in \Omega_{21}} + \sum_{(n, Q) \in \Omega_{22}} \right) (Q' + Q + \alpha k) \\
&= \alpha k (R - U_1(Q' + \alpha k)) - \frac{\alpha^2 k^2}{2} \left(\frac{R}{Q' + \alpha k} - U_1 \right) + \frac{\alpha^2 k}{2} \left(\frac{R^2}{(Q' + \alpha k)^2} - U_1^2 \right) \\
&\quad + \frac{\alpha^2 k^3}{2} - \frac{1}{Q' + \alpha k} \frac{\alpha^3 k^4}{3} + \frac{1}{(Q' + \alpha k)^2} \left(R \frac{\alpha^3 k^3}{2} + \frac{\alpha^4 k^5}{6} \right) \\
&\quad + O\left(\frac{\alpha R^2}{(Q' + \alpha k)^2} + \frac{R\alpha^2 k}{Q' + \alpha k}\right).
\end{aligned}$$

Последнее выражение необходимо просуммировать по $(k, Q') \in \Omega_2 = \{k \leq U_1, Q' \leq U_2 - \alpha k\}$, $\tau \mid k$, $\tau \mid Q'$. Имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{k \leq \frac{U_1}{\tau}} \sum_{Q' \leq \alpha(\frac{U_1}{\tau} - k)} \left(\alpha \tau R k + \frac{\alpha^2 \tau^2 U_1}{2} k^2 - \frac{\alpha^2 \tau U_1^2}{2} k + \frac{\alpha^2 \tau^3}{2} k^3 - \alpha \tau^2 U_1 k (Q' + \alpha k) \right. \\ & - \frac{1}{Q' + \alpha k} \left(\frac{R \alpha^2 \tau}{2} k^2 + \frac{\alpha^3 \tau^3}{3} k^4 \right) + \frac{1}{(Q' + \alpha k)^2} \left(\frac{R^2 \alpha^2}{2 \tau} k + \frac{R \alpha^3 \tau}{2} k^3 + \frac{\alpha^4 \tau^3}{6} k^5 \right) \\ & \left. + O\left(\frac{\alpha R^2}{\tau^2 (Q' + \alpha k)^2} + \frac{R \alpha^2 k}{Q' + \alpha k} \right) \right). \end{aligned}$$

Используя следствие 3 (см. § 10), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{Q' \leq \alpha(\frac{U_1}{\tau} - k)} (Q' + \alpha k) &= \frac{\alpha^2}{2} \left(\frac{U_1^2}{\tau^2} - k^2 \right) + O\left(\frac{\alpha U_1}{\tau} \right), \\ \sum_{Q' \leq \alpha(\frac{U_1}{\tau} - k)} \frac{1}{Q' + \alpha k} &= \log \frac{U_1}{\tau k} + O\left(\frac{1}{\alpha k} \right), \\ \sum_{Q' \leq \alpha(\frac{U_1}{\tau} - k)} \frac{1}{(Q' + \alpha k)^2} &= \frac{1}{\alpha k} - \frac{\tau}{\alpha U_1} + O\left(\frac{1}{\alpha^2 k^2} \right), \\ \sum_{Q' \leq \alpha(\frac{U_1}{\tau} - k)} 1 &= \frac{\alpha U_1}{\tau} - \alpha k + O(1). \end{aligned}$$

Применяя эти соотношения, находим

$$\begin{aligned} & \sum_{k \leq \frac{U_1}{\tau}} \left(\frac{R^2 \alpha}{2 \tau} + k \left(\alpha^2 R U_1 - \frac{\alpha^3 U_1^3}{2} - \frac{\alpha^3 U_1^3}{2} - \frac{R^2 \alpha}{2 U_1} \right) \right. \\ & + k^2 \left(\frac{\alpha^3 \tau U_1^2}{2} - \alpha^2 \tau R + \frac{\alpha^3 \tau U_1^2}{2} + \frac{R \alpha^2 \tau}{2} \right) \\ & + k^3 \left(\frac{\alpha^3 \tau^2 U_1}{2} - \frac{\alpha^3 \tau^2 U_1}{2} + \frac{\alpha^3 \tau^2 U_1}{2} - \frac{R \alpha^2 \tau^2}{2} \right) + k^4 \left(-\frac{\alpha^3 \tau^3}{2} + \frac{\alpha^3 \tau^3}{6} \right) \\ & \left. - \frac{\alpha^3 \tau^4}{6 U_1} k^5 - \left(\frac{R \alpha^2 \tau}{2} k^2 + \frac{\alpha^3 \tau^3}{3} k^4 \right) \log \frac{U_1}{\tau k} \right) + O\left(\frac{R^2}{\tau} (1 + \alpha) + \frac{R^2}{\tau} \log \frac{U_1}{\tau} \right). \end{aligned}$$

При суммировании асимптотических слагаемых мы воспользовались следствием 4, 1), 2) (см. § 10) и оценкой

$$\sum_{k \leq \frac{U_1}{\tau}} \frac{1}{k} = O\left(\log \frac{U_1}{\tau} \right).$$

Используя еще раз следствие 4, 1), 2) (см. § 10), получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{k \leq \frac{U_1}{\tau}} \left(\frac{R^2 \alpha}{2 \tau} - \frac{\alpha^3 U_1^3}{2} k + \frac{\alpha^3 \tau U_1^2}{2} k^2 - \frac{\alpha^3 \tau^3}{3} k^4 - \frac{\alpha^3 \tau^4}{6 U_1} k^5 \right. \\ & \left. - \left(\frac{R \alpha^2 \tau}{2} k^2 + \frac{\alpha^3 \tau^3}{3} k^4 \right) \log \frac{U_1}{\tau k} \right) + O\left(\frac{R^2}{\tau} (1 + \alpha) + \frac{R^2}{\tau} \log \frac{U_1}{\tau} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{R^{5/2}\sqrt{\alpha}}{\tau^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{15} - \frac{1}{36} - \frac{1}{18} - \frac{1}{75} \right) + O\left(\frac{R^2}{\tau}(1+\alpha) + \frac{R^2}{\tau} \log \frac{U_1}{\tau}\right).$$

Следовательно, имеем

$$\sum_{\substack{(k, Q') \in \Omega_2 \\ \tau | k, \tau | Q'}} \left(\sum_{(n, Q) \in \Omega_{21}} + \sum_{(n, Q) \in \Omega_{22}} \right) (Q' + Q + \alpha k) = \frac{19}{75} \frac{R^{5/2}\sqrt{\alpha}}{\tau^2} + O\left(\frac{R^2}{\tau}(1+\alpha) + \frac{R^2}{\tau}(1+\alpha) \log \frac{U_1}{\tau}\right).$$

Подставляя последнее выражение в формулу

$$\Sigma_{21} = \sum_{\tau | \delta} \sum_{z=1}^{\tau} \sum_{\substack{(k, Q') \in \Omega_2 \\ \tau | k, \tau | Q'}} \left(\sum_{(n, Q) \in \Omega_{21}} + \sum_{(n, Q) \in \Omega_{22}} \right) (Q' + Q + \alpha k),$$

получаем утверждение леммы.

6.3. Случай 3. Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 11. *Справедлива асимптотическая формула*

$$\Sigma_{31} = \left(\frac{2\pi}{15} - \frac{2 \log 2}{5} - \frac{91}{900} \right) R^{5/2} \sqrt{\alpha} \sum_{\tau | \delta} \frac{\varphi(\tau)}{\tau^2} + \sum_{\tau | \delta} \varphi(\tau) O\left(\frac{R^2}{\tau}(1+\alpha)\right),$$

где сумма Σ_{31} определена в формуле (35).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что внутреннее суммирование в Σ_{31} ведется по области

$$\Omega_{31} = \left\{ U_1 < n \leq \frac{R + \alpha k^2}{Q' + \alpha k}, \alpha(n - k) < Q \leq \frac{R - nQ'}{k} \right\}.$$

Заметим, что внутреннее суммирование по Q в Σ_{31} аналогично проведенному суммированию в п. 2 доказательства леммы 10. Поэтому имеем

$$\sum_{\alpha(n-k) < Q \leq \frac{R-nQ'}{k}} (Q' + Q + \alpha k) = f(n) + O(Q' + \alpha k) + O\left(\frac{R - nQ'}{k}\right),$$

где $f(n)$ определяется формулой (39). При суммировании по n воспользуемся следствием 3 (см. § 10). Определим функцию $F_1(k, Q')$ следующим образом:

$$\begin{aligned} F_1(k, Q') &= \frac{(Q')^2 - \alpha^2 k^2}{6k^2} \left(\frac{(R + \alpha k^2)^3}{(Q' + \alpha k)^3} - U_1^3 \right) \\ &\quad - \frac{Q'}{2k} \left(\frac{R + \alpha k^2}{k} + Q' + \alpha k \right) \left(\frac{(R + \alpha k^2)^2}{(Q' + \alpha k)^2} - U_1^2 \right) \\ &\quad + \frac{R + \alpha k^2}{k} \left(\frac{R + \alpha k^2}{2k} + Q' \right) \left(\frac{R + \alpha k^2}{Q' + \alpha k} - U_1 \right). \end{aligned} \quad (41)$$

Тогда

$$\sum_{(n, Q) \in \Omega_{31}} (Q' + Q + \alpha k) = F_1(k, Q') + O(f(U_1)) \\ + \sum_{U_1 < n \leq \frac{R + \alpha k^2}{Q' + \alpha k}} \left(O(Q' + \alpha k) + O\left(\frac{R - nQ'}{k}\right) \right).$$

Последнее выражение необходимо просуммировать по

$$(k, Q') \in \Omega_3 = \left\{ k \leq U_1, U_2 - \alpha k < Q' \leq U_2 - \alpha k + \frac{\alpha k^2}{U_1} \right\}, \quad \tau \mid k, \quad \tau \mid Q'.$$

Учитывая эти ограничения и формулы (30), (31), получаем

$$\sum_{U_1 < n \leq \frac{R + \alpha k^2}{Q' + \alpha k}} \left(O(Q' + \alpha k) + O\left(\frac{R - nQ'}{k}\right) \right) \ll O(R) + O\left(\frac{R^2}{k(Q' + \alpha k)}\right), \\ f(U_1) = \frac{R + \alpha k^2}{k} \left(\frac{R + \alpha k^2}{2k} + Q' \right) - U_1 \frac{Q'}{k} \left(\frac{R + \alpha k^2}{k} + Q' + \alpha k \right) \\ + \frac{U_1^2}{2} \left(\frac{(Q')^2 - \alpha^2 k^2}{k^2} \right) \ll \frac{R}{k} \frac{R}{k} + U_1 \frac{Q'}{k} \frac{R}{k} + \frac{U_1^2 U_2^2}{k^2} = \frac{R^2}{k^2}.$$

Имеем

$$O(f(U_1)) + \sum_{U_1 < n \leq \frac{R + \alpha k^2}{Q' + \alpha k}} \left(O(Q' + \alpha k) + O\left(\frac{R - nQ'}{k}\right) \right) \\ \leq O\left(\frac{R^2}{k(Q' + \alpha k)}\right) + O\left(\frac{R^2}{k^2}\right).$$

Определим функцию $F_2(k, Q')$ следующим образом. Разложим в $F_1(k, Q')$ слагаемые по степеням $(Q' + \alpha k)$:

$$F_1(k, Q') = \frac{(R + \alpha k^2)^3}{k^2(Q' + \alpha k)^2} \left(\frac{Q' - \alpha k}{6} - \frac{Q'}{2} \right) + \frac{(R + \alpha k^2)^3}{2k^2(Q' + \alpha k)} \\ + \frac{(R + \alpha k^2)^3}{2k} \frac{Q'}{Q' + \alpha k} - \frac{(Q')^2 - \alpha^2 k^2}{6k^2} U_1^3 \\ + \frac{U_1^2}{2k} \left(Q'(Q' + \alpha k) + \frac{R + \alpha k^2}{k} Q' \right) - U_1 \frac{R + \alpha k^2}{k} \left(\frac{R + \alpha k^2}{2k} + Q' \right) \\ = -\frac{(R + \alpha k^2)^3}{3k^2(Q' + \alpha k)} + \frac{(R + \alpha k^2)^3 \alpha k}{6k^2(Q' + \alpha k)^2} + \frac{(R + \alpha k^2)^3}{2k^2(Q' + \alpha k)} \\ + \frac{(R + \alpha k^2)^2}{2k} - \frac{(R + \alpha k^2)^2 \alpha k}{2k(Q' + \alpha k)} - \frac{(Q')^2 - \alpha^2 k^2}{6k^2} U_1^3 \\ + \frac{U_1^2}{2k} \left((Q' + \alpha k)^2 + \frac{R}{k} (Q' + \alpha k) - (R + \alpha k^2) \alpha \right) \\ - U_1 \frac{R + \alpha k^2}{k} \left(\frac{R - \alpha k^2}{2k} + (Q' + \alpha k) \right),$$

и пусть

$$F_2(k, Q') = F_1(\tau k, \tau Q').$$

Тогда, проведя элементарные преобразования с $F_1(k, Q')$, получаем

$$\begin{aligned} F_2(k, Q') &= \frac{(R + \alpha\tau^2 k^2)^3}{6\tau^3 k^2} \frac{1}{Q' + \alpha k} + \frac{(R + \alpha\tau^2 k^2)^3 \alpha}{6\tau^3 k} \frac{1}{(Q' + \alpha k)^2} \\ &\quad - \frac{(R + \alpha\tau^2 k^2)^2 \alpha}{2\tau} \frac{1}{Q' + \alpha k} + \frac{(R + \alpha\tau^2 k^2)^2}{2\tau k} - \frac{(Q')^2 - \alpha^2 k^2}{6k^2} U_1^3 \\ &\quad + \frac{U_1^2}{2\tau k} \left(\tau^2 (Q' + \alpha k)^2 + \frac{R}{k} (Q' + \alpha k) - (R + \alpha\tau^2 k^2) \alpha \right) \\ &\quad - U_1 \frac{R + \alpha\tau^2 k^2}{\tau k} \left(\frac{R - \alpha\tau^2 k^2}{2\tau k} + \tau (Q' + \alpha k) \right). \end{aligned}$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{(k, Q') \in \Omega_3 \\ \tau|k, \tau|Q'}} \sum_{(n, Q) \in \Omega_{31}} (Q' + Q + \alpha k) \\ &= \sum_{k \leq \frac{U_1}{\tau}} \sum_{\frac{U_2}{\tau} - \alpha k < Q' \leq \frac{U_2}{\tau} - \alpha k + \frac{\alpha\tau k^2}{U_1}} \left(F_2(k, Q') + O\left(\frac{R^2}{\tau^2 k (Q' + \alpha k)}\right) + O\left(\frac{R^2}{\tau^2 k^2}\right) \right). \end{aligned}$$

Легко проверить, что функция $F_2(k, Q')$ не является монотонной по переменной Q' . Поэтому непосредственное применение следствия 3 невозможно. Однако в данном случае утверждение следствия 3 оказывается верным. Заметим, что уравнение

$$\frac{\partial F_2(k, Q')}{\partial Q'} = 0$$

имеет конечное число решений на рассматриваемом полуинтервале. Следовательно,

$$\left| \int_{\frac{U_2}{\tau} - \alpha k}^{\frac{U_2}{\tau} - \alpha k + \frac{\alpha\tau k^2}{U_1}} \rho(x) F_2'(k, x) dx \right| \ll \max_{\frac{U_2}{\tau} - \alpha k < Q' \leq \frac{U_2}{\tau} - \alpha k + \frac{\alpha\tau k^2}{U_1}} |F_2(k, Q')|.$$

Функция $F_1(k, Q')$ является главным членом в асимптотической формуле для

$$\sum_{(n, Q) \in \Omega_{31}} (Q' + Q + \alpha k),$$

поэтому $F_1(k, Q') > 0$, следовательно, и $F_2(k, Q') > 0$. Поскольку $U_2 < Q' + \alpha k \leq 2U_2$, а область суммирования максимальна при $Q' = U_2 - \alpha k$, то

$$\max_{U_2 - \alpha k < Q' \leq U_2 - \alpha k + \frac{\alpha\tau k^2}{U_1}} F_1(k, Q') \ll F_1(k, U_2 - \alpha k).$$

Таким образом,

$$\max_{\frac{U_2}{\tau} - \alpha k < Q' \leq \frac{U_2}{\tau} - \alpha k + \frac{\alpha\tau k^2}{U_1}} |F_2(k, Q')| \ll F_2\left(k, \frac{U_2}{\tau} - \alpha k\right).$$

Из формулы (41) следует, что

$$F_2\left(k, \frac{U_2}{\tau} - \alpha k + \frac{\alpha \tau k^2}{U_1}\right) = F_1\left(\tau k, U_2 - \alpha \tau k + \frac{\alpha \tau^2 k^2}{U_1}\right) = 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{\frac{U_2}{\tau} - \alpha k < Q' \leq \frac{U_2}{\tau} - \alpha k + \frac{\alpha \tau k^2}{U_1}} F_2(k, Q') \\ &= \int_{\frac{U_2}{\tau} - \alpha k}^{\frac{U_2}{\tau} - \alpha k + \frac{\alpha \tau k^2}{U_1}} F_2(k, Q') dQ' + O\left(F_2\left(k, \frac{U_2}{\tau} - \alpha k\right)\right). \end{aligned} \quad (42)$$

Следовательно, получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{(k, Q') \in \Omega_3} \sum_{\substack{(n, Q) \in \Omega_{31} \\ \tau | k, \tau | Q'}} (Q' + Q + \alpha k) \\ &= \sum_{k \leq \frac{U_1}{\tau}} \left(\int_{\frac{U_2}{\tau} - \alpha k}^{\frac{U_2}{\tau} - \alpha k + \frac{\alpha \tau k^2}{U_1}} F_2(k, Q') dQ' + O\left(F_2\left(k, \frac{U_2}{\tau} - \alpha k\right)\right) \right) \\ &+ \sum_{k \leq \frac{U_1}{\tau}} \sum_{\frac{U_2}{\tau} - \alpha k < Q' \leq \frac{U_2}{\tau} - \alpha k + \frac{\alpha \tau k^2}{U_1}} \left(O\left(\frac{R^2}{\tau^2 k(Q' + \alpha k)}\right) + O\left(\frac{R^2}{\tau^2 k^2}\right) \right). \end{aligned}$$

Просуммируем полученные асимптотические слагаемые.

1. Используя соотношение $F_2(k, Q') = F_1(\tau k, \tau Q')$ и формулу (41), в которой мы сделаем замену

$$\frac{Q'}{2k} \left(\frac{R + \alpha k^2}{k} + Q' + \alpha k \right) = \frac{1}{2k} \left((Q' + \alpha k)^2 + \frac{R}{k} Q' - \alpha^2 k^2 \right),$$

получаем

$$\begin{aligned} F_2\left(k, \frac{U_2}{\tau} - \alpha k\right) &= \frac{1}{6k^2} \frac{U_2}{\tau} \left(\frac{U_2}{\tau} - 2\alpha k \right) \left(\frac{(R + \alpha \tau^2 k^2)^3}{U_2^3} - U_1^3 \right) \\ &- \frac{1}{2} \left(\frac{R}{\tau k^2} \left(\frac{U_2}{\tau} - \alpha k \right) - \alpha^2 \tau k + \frac{U_2^2}{\tau k} \right) \left(\frac{(R + \alpha \tau^2 k^2)^2}{U_2^2} - U_1^2 \right) \\ &+ \left(\frac{R^2 - \alpha^2 \tau^4 k^4}{2\tau^2 k^2} + \frac{R + \alpha \tau^2 k^2}{\tau k} U_2 \right) \left(\frac{R + \alpha \tau^2 k^2}{U_2} - U_1 \right). \end{aligned}$$

Применяя формулы разности квадратов и кубов и формулы (30), (31), получим

$$\begin{aligned} F_2\left(k, \frac{U_2}{\tau} - \alpha k\right) &= \frac{\alpha^2 \tau}{6} \left(\frac{U_1}{\tau} - 2k \right) \left(\left(U_1 + \frac{\tau^2 k^2}{U_1} \right)^2 + \frac{R}{\alpha} + \tau^2 k^2 + U_1^2 \right) \\ &- \left(\frac{R\alpha}{\tau k^2} \left(\frac{U_1}{\tau} - k \right) + \frac{\alpha^2}{\tau k} (U_1^2 - \tau^2 k^2) \right) \left(\tau^2 k^2 + \frac{\tau^4 k^4}{2U_1^2} \right) \\ &+ \frac{R^2 - \alpha^2 \tau^4 k^4}{2U_1} + (R + \alpha \tau^2 k^2) \alpha \tau k. \end{aligned}$$

Поскольку $k \leq \frac{U_1}{\tau}$, находим

$$O\left(F_2\left(k, \frac{U_2}{\tau} - \alpha k\right)\right) < O(RU_1\alpha).$$

Следовательно, имеем

$$\sum_{k \leq \frac{U_1}{\tau}} O\left(F_2\left(k, \frac{U_2}{\tau} - \alpha k\right)\right) = O\left(\frac{R^2}{\tau}\right).$$

2. Используя асимптотические формулы

$$\begin{aligned} \sum_{\frac{U_2}{\tau} - \alpha k < Q' \leq \frac{U_2}{\tau} - \alpha k + \frac{\alpha \tau k^2}{U_1}} \frac{1}{Q' + \alpha k} &= \log\left(1 + \frac{\alpha \tau^2}{R} k^2\right) + O\left(\frac{\tau}{U_2}\right), \\ \sum_{n \leq a} \frac{1}{n} \log\left(1 + \frac{n^2}{a^2}\right) &= O(1), \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq \frac{U_1}{\tau}} \sum_{\frac{U_2}{\tau} - \alpha k < Q' \leq \frac{U_2}{\tau} - \alpha k + \frac{\alpha \tau k^2}{U_1}} O\left(\frac{R^2}{\tau^2 k (Q' + \alpha k)}\right) \\ = \sum_{k \leq \frac{U_1}{\tau}} O\left(\frac{R^2}{\tau^2 k} \log\left(1 + \frac{\alpha \tau^2}{R} k^2\right)\right) = O\left(\frac{R^2}{\tau^2}\right). \end{aligned}$$

3. Очевидно, что выполнено равенство

$$\sum_{k \leq \frac{U_1}{\tau}} \sum_{\frac{U_2}{\tau} - \alpha k < Q' \leq \frac{U_2}{\tau} - \alpha k + \frac{\alpha \tau k^2}{U_1}} O\left(\frac{R^2}{\tau^2 k^2}\right) = O\left(\frac{R^2 \alpha}{\tau^2}\right).$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{(k, Q') \in \Omega_3 \\ \tau | k, \tau | Q'}} \sum_{(n, Q) \in \Omega_{31}} (Q' + Q + \alpha k) \\ = \sum_{k \leq \frac{U_1}{\tau}} \int_{\frac{U_2}{\tau} - \alpha k}^{\frac{U_2}{\tau} - \alpha k + \frac{\alpha \tau k^2}{U_1}} F_2(k, Q') dQ' + O\left(\frac{R^2}{\tau} (1 + \alpha)\right). \quad (43) \end{aligned}$$

Вычислим интегралы

$$\int_{\frac{U_2}{\tau} - \alpha k}^{\frac{U_2}{\tau} - \alpha k + \frac{\alpha \tau k^2}{U_1}} \frac{1}{Q' + \alpha k} dQ' = \log\left(1 + \frac{\alpha \tau^2}{R} k^2\right), \quad (44)$$

$$\int_{\frac{U_2}{\tau} - \alpha k}^{\frac{U_2}{\tau} - \alpha k + \frac{\alpha \tau k^2}{U_1}} \frac{1}{(Q' + \alpha k)^2} dQ' = \frac{\tau}{U_2} - \frac{U_1 \tau}{R + \alpha \tau^2 k^2} = \frac{\alpha \tau^3 k^2}{U_2 (R + \alpha \tau^2 k^2)}, \quad (45)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{U_2}{\tau} - \alpha k}^{\frac{U_2}{\tau} - \alpha k + \frac{\alpha \tau k^2}{U_1}} \left(-\frac{(Q')^2 - \alpha^2 k^2}{6k^2} U_1^3 + \frac{U_1^2}{2} \left(\frac{\tau}{k} (Q' + \alpha k)^2 + \frac{R}{\tau k^2} (Q' + \alpha k) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (R + \alpha \tau^2 k^2) \frac{\alpha}{\tau k} \right) - U_1 \frac{R + \alpha \tau^2 k^2}{\tau k} \left(\frac{R - \alpha \tau^2 k^2}{2\tau k} + \tau (Q' + \alpha k) \right) \right) dQ' \\
& = -\frac{U_1^3}{6k^2} \left(\frac{\alpha^3 U_1}{\tau} k^2 + \frac{\tau \alpha^3}{U_1} k^4 + \frac{\tau^3 \alpha^3}{3U_1^3} k^6 - \frac{\tau^2 \alpha^3}{U_1^2} k^5 - 2\alpha^3 k^3 \right) \\
& \quad + \frac{U_1^2}{2} \left(\frac{R}{2\tau k^2} \left(\frac{\tau^2 \alpha^2}{U_1^2} k^4 + 2\alpha^2 k^2 \right) + \frac{\tau}{3k} \left(\frac{3}{\tau} \alpha^3 U_1 k^2 + 3\tau \frac{\alpha^3}{U_1} k^4 + \frac{\tau^3 \alpha^3}{U_1^3} k^6 \right) \right. \\
& \quad \left. - (R + \alpha \tau^2 k^2) \frac{\alpha}{\tau k} \frac{\alpha \tau}{U_1} k^2 \right) \\
& \quad - U_1 \left(\frac{R^2 - \alpha^2 \tau^4 k^4}{2\tau^2 k^2} \frac{\alpha \tau}{U_1} k^2 + \frac{R + \alpha \tau^2 k^2}{2k} \left(\frac{\tau^2 \alpha^2}{U_1^2} k^4 + 2\alpha^2 k^2 \right) \right) \\
& = -\frac{R^2 \alpha}{6\tau} - \frac{2}{3} R^{3/2} \alpha^{3/2} k + \frac{1}{12} R \alpha^2 \tau k^2 - \frac{4}{3} R^{1/2} \alpha^{5/2} \tau^2 k^3 \\
& \quad + \frac{4}{9} \alpha^3 \tau^3 k^4 - \frac{1}{3} R^{-1/2} \alpha^{7/2} \tau^4 k^5. \quad (46)
\end{aligned}$$

Используя соотношения (44)–(46), получаем

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{U_2}{\tau} - \alpha k}^{\frac{U_2}{\tau} - \alpha k + \frac{\alpha \tau k^2}{U_1}} F_2(k, Q') dQ' = \frac{(R + \alpha \tau^2 k^2)^3}{6\tau^3 k^2} \log \left(1 + \frac{\alpha \tau^2}{R} k^2 \right) + \frac{(R + \alpha \tau^2 k^2)^2}{6U_2} \alpha^2 k \\
& \quad - \frac{(R + \alpha \tau^2 k^2)^2 \alpha}{2\tau} \log \left(1 + \frac{\alpha \tau^2}{R} k^2 \right) + \frac{(R + \alpha \tau^2 k^2)^2}{2U_1} \alpha k - \frac{R^2 \alpha}{6\tau} - \frac{2}{3} R^{3/2} \alpha^{3/2} k \\
& \quad + \frac{1}{12} R \alpha^2 \tau k^2 - \frac{4}{3} R^{1/2} \alpha^{5/2} \tau^2 k^3 + \frac{4}{9} \alpha^3 \tau^3 k^4 - \frac{1}{3} R^{-1/2} \alpha^{7/2} \tau^4 k^5. \quad (47)
\end{aligned}$$

Осталось просуммировать по k в равенстве (43), подставив в него (47).

1) Обозначим $a = \frac{U_1}{\tau}$, тогда $a^2 = \frac{R}{\alpha \tau^2}$. Следовательно,

$$\sum_{k \leq \frac{U_1}{\tau}} \frac{(R + \alpha \tau^2 k^2)^3}{6\tau^3 k^2} \log \left(1 + \frac{\alpha \tau^2}{R} k^2 \right) = \frac{R^3}{6\tau^3} \sum_{k \leq a} \frac{1}{k^2} \left(1 + \frac{k^2}{a^2} \right)^3 \log \left(1 + \frac{k^2}{a^2} \right).$$

Применяя лемму 25 (см. § 10) и формулы

$$\begin{aligned}
& \int \frac{\log(1+x^2)}{x^2} dx = -\frac{\log(1+x^2)}{x} + 2 \operatorname{arctg} x, \\
& \int \log(1+x^2) dx = x \log(1+x^2) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x, \\
& \int x^2 \log(1+x^2) dx = \frac{1}{3} \left(x^3 \log(1+x^2) - \frac{2}{3} x^3 + 2x - 2 \operatorname{arctg} x \right), \\
& \int x^4 \log(1+x^2) dx = \frac{1}{5} \left(x^5 \log(1+x^2) - \frac{2}{5} x^5 + \frac{2}{3} x^3 - 2x + 2 \operatorname{arctg} x \right),
\end{aligned}$$

получаем

$$\sum_{k \leq a} \frac{1}{k^2} \left(1 + \frac{k^2}{a^2} \right)^3 \log \left(1 + \frac{k^2}{a^2} \right) = \frac{1}{a} \left(\frac{16}{5} \log 2 + \frac{8\pi}{5} - \frac{376}{75} \right) + O\left(\frac{1}{a^2}\right).$$

Следовательно, имеем

$$\sum_{k \leq \frac{U_1}{\tau}} \frac{(R + \alpha \tau^2 k^2)^3}{6\tau^3 k^2} \log \left(1 + \frac{\alpha \tau^2}{R} k^2 \right) = \frac{R^{5/2} \sqrt{\alpha}}{\tau^2} \left(\frac{8}{15} \log 2 + \frac{4\pi}{15} - \frac{188}{225} \right) + O \left(\frac{R^2 \alpha}{\tau} \right).$$

2) Применяя следствие 4, 1) (см. § 10), получаем

$$\sum_{k \leq \frac{U_1}{\tau}} \frac{(R + \alpha \tau^2 k^2)^2}{6U_2} \alpha^2 k = \frac{R^2 \alpha^2}{6U_2} \sum_{k \leq \frac{U_1}{\tau}} \left(1 + \frac{\alpha \tau^2}{R} k^2 \right)^2 k = \frac{7}{36} \frac{R^{5/2} \sqrt{\alpha}}{\tau^2} + O \left(\frac{R^2 \alpha}{\tau} \right).$$

3) Аналогично пункту 1) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq \frac{U_1}{\tau}} \frac{(R + \alpha \tau^2 k^2)^2 \alpha}{2\tau} \log \left(1 + \frac{\alpha \tau^2}{R} k^2 \right) &= \frac{R^2 \alpha}{2\tau} \sum_{k \leq a} \left(1 + \frac{k^2}{a^2} \right)^2 \log \left(1 + \frac{k^2}{a^2} \right) \\ &= \frac{R^{5/2} \sqrt{\alpha}}{\tau^2} \left(\frac{14}{15} \log 2 + \frac{2\pi}{15} - \frac{164}{225} \right) + O \left(\frac{R^2 \alpha}{\tau} \right). \end{aligned}$$

4) Применяя следствие 4, 1) (см. § 10), получаем

$$\sum_{k \leq \frac{U_1}{\tau}} \frac{(R + \alpha \tau^2 k^2)^2}{2U_1} \alpha k = \frac{R^2 \alpha}{2U_1} \sum_{k \leq \frac{U_1}{\tau}} \left(1 + \frac{\alpha \tau^2}{R} k^2 \right)^2 k = \frac{7}{12} \frac{R^{5/2} \sqrt{\alpha}}{\tau^2} + O \left(\frac{R^2 \alpha}{\tau} \right).$$

5) Применяя следствие 4, 1) (см. § 10), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq \frac{U_1}{\tau}} \left(-\frac{R^2 \alpha}{6\tau} - \frac{2}{3} R^{3/2} \alpha^{3/2} k + \frac{1}{12} R \alpha^2 \tau k^2 - \frac{4}{3} R^{1/2} \alpha^{5/2} \tau^2 k^3 \right. \\ \left. + \frac{4}{9} \alpha^3 \tau^3 k^4 - \frac{1}{3} R^{-1/2} \alpha^{7/2} \tau^4 k^5 \right) = -\frac{139}{180} \frac{R^{5/2} \sqrt{\alpha}}{\tau^2} + O \left(\frac{R^2 \alpha}{\tau} \right). \end{aligned}$$

Следовательно, имеем

$$\sum_{\substack{(k, Q') \in \Omega_3 \\ \tau | k, \tau | Q'}} \sum_{(n, Q) \in \Omega_{31}} (Q' + Q + \alpha k) = \left(\frac{2\pi}{15} - \frac{2 \log 2}{5} - \frac{91}{900} \right) \frac{R^{5/2} \sqrt{\alpha}}{\tau^2} + O \left(\frac{R^2}{\tau} (1 + \alpha) \right).$$

Тем самым, лемма доказана.

6.4. Случай 4. Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 12. *Справедлива асимптотическая формула*

$$\begin{aligned} \Sigma_{41} = \left(\frac{11\pi}{120} - \frac{251}{60} \log 2 + \frac{14}{5} \right) R^{5/2} \sqrt{\alpha} \sum_{\tau | \delta} \frac{\varphi(\tau)}{\tau^2} \\ + \sum_{\tau | \delta} \varphi(\tau) O \left(\frac{R^2}{\tau} \left(1 + \log \frac{U_2}{\tau} \right) + \frac{R^2 \alpha}{\tau^2} \log \frac{U_2}{\tau} \right), \end{aligned}$$

где сумма Σ_{41} определена в формуле (36).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В Σ_{41} рассмотрим отдельно суммы по областям

$$\begin{aligned}\Omega_{41} &= \left\{ U_1 < n \leq \frac{R}{Q+Q'}, U_1 < k \leq n \right\}, \\ \Omega_{42} &= \left\{ \frac{R}{Q+Q'} < n \leq \frac{R + \frac{Q^2}{\alpha}}{Q+Q'}, U_1 < k \leq \frac{R - nQ'}{Q} \right\}, \\ \Omega_{43} &= \left\{ U_1 + \frac{Q}{\alpha} < n \leq \frac{R + \frac{Q^2}{\alpha}}{Q+Q'}, U_1 < k \leq n - \frac{Q}{\alpha} \right\}.\end{aligned}$$

1. Вычислим сумму по области Ω_{41} . Используя следствие 3 (см. § 10), получаем

$$\begin{aligned}\sum_{(n,k) \in \Omega_{41}} (Q + Q' + \alpha k) &= \sum_{U_1 < n \leq \frac{R}{Q+Q'}} \left((Q + Q')(n - U_1) + \frac{\alpha}{2}(n^2 - U_1^2) + O(Q + Q') + O(\alpha n) \right) \\ &= \int_{U_1}^{\frac{R}{Q+Q'}} \left((Q + Q')(n - U_1) + \frac{\alpha}{2}(n^2 - U_1^2) \right) dn + O\left(\alpha \frac{R^2}{(Q + Q')^2}\right) + O(R) \\ &= \frac{Q + Q'}{2} \left(\frac{R}{Q + Q'} - U_1 \right)^2 + \frac{\alpha}{6} \left(\frac{R^3}{(Q + Q')^3} - U_1^3 \right) \\ &\quad - \frac{\alpha U_1^2}{2} \left(\frac{R}{Q + Q'} - U_1 \right) + O\left(\alpha \left(\frac{R^2}{(Q + Q')^2} \right)\right).\end{aligned}$$

При вычислении асимптотики мы учли, что $Q + Q' \leq U_2 < \alpha n$.

2. Вычислим сумму по области Ω_{42} . Используя следствие 3 (см. § 10), получим

$$\begin{aligned}\sum_{(n,k) \in \Omega_{42}} (Q + Q' + \alpha k) &= \sum_{\frac{R}{Q+Q'} < n \leq \frac{R + Q^2/\alpha}{Q+Q'}} \left((Q + Q') \left(\frac{R - nQ'}{Q} - U_1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{(R - nQ')^2}{Q^2} - U_1^2 \right) + O(Q + Q') + O\left(\alpha \frac{R - nQ'}{Q}\right) \right) \\ &= \int_{\frac{R}{Q+Q'}}^{\frac{R + Q^2/\alpha}{Q+Q'}} \left((Q + Q') \left(\frac{R - nQ'}{Q} - U_1 \right) + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{(R - nQ')^2}{Q^2} - U_1^2 \right) \right) dn \\ &\quad + O(R) + O\left(\frac{\alpha R^2}{(Q + Q')^2}\right) + O\left(\frac{Q^2}{\alpha}\right) + O\left(\frac{RQ}{Q + Q'}\right).\end{aligned}$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned}\sum_{(n,k) \in \Omega_{42}} (Q + Q' + \alpha k) &= \frac{Q + Q'}{2QQ'} \left(\left(R - Q' \frac{R}{Q + Q'} \right)^2 - \left(R - Q' \frac{R + \frac{Q^2}{\alpha}}{Q + Q'} \right)^2 \right) \\ &\quad - U_1 \frac{Q^2}{\alpha} + \frac{\alpha}{6Q'Q^2} \left(\left(R - Q' \frac{R}{Q + Q'} \right)^3 - \left(R - Q' \frac{R + \frac{Q^2}{\alpha}}{Q + Q'} \right)^3 \right) \\ &\quad - U_1^2 \frac{Q^2}{2(Q + Q')} + O\left(\frac{\alpha R^2}{(Q + Q')^2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{Q}{2Q'(Q+Q')}\left(R^2 - \left(R - \frac{QQ'}{\alpha}\right)^2\right) - U_1 \frac{Q^2}{\alpha} \\
&\quad + \frac{\alpha Q}{6Q'(Q+Q')^3}\left(R^3 - \left(R - \frac{QQ'}{\alpha}\right)^3\right) - U_1^2 \frac{Q^2}{2(Q+Q')} + O\left(\frac{\alpha R^2}{(Q+Q')^2}\right).
\end{aligned}$$

3. Вычислим сумму по области Ω_{43} . Используя следствие 3 (см. § 10), получим

$$\begin{aligned}
\sum_{(n,k) \in \Omega_{43}} (Q+Q'+\alpha k) &= \sum_{U_1 + \frac{Q}{\alpha} < n \leq \frac{R+Q^2/\alpha}{Q+Q'}} \left((Q+Q') \left(n - \frac{Q}{\alpha} - U_1 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha}{2} \left(\left(n - \frac{Q}{\alpha} \right)^2 - U_1^2 \right) + O(Q+Q') + O\left(\alpha \left(n - \frac{Q}{\alpha} \right) \right) \right) \\
&= \int_{U_1 + \frac{Q}{\alpha}}^{\frac{R+Q^2/\alpha}{Q+Q'}} \left((Q+Q') \left(n - \frac{Q}{\alpha} - U_1 \right) + \frac{\alpha}{2} \left(\left(n - \frac{Q}{\alpha} \right)^2 - U_1^2 \right) \right) dn \\
&\quad + O(R) + O\left(\frac{\alpha R^2}{(Q+Q')^2} \right) \\
&= \frac{Q+Q'}{2} \left(\frac{R - \frac{QQ'}{\alpha}}{Q+Q'} - U_1 \right)^2 + \frac{\alpha}{6} \left(\frac{(R - \frac{QQ'}{\alpha})^3}{(Q+Q')^3} - U_1^3 \right) \\
&\quad - \frac{\alpha U_1^2}{2} \left(\frac{R - \frac{QQ'}{\alpha}}{Q+Q'} - U_1 \right) + O\left(\frac{\alpha R^2}{(Q+Q')^2} \right).
\end{aligned}$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{(n,k) \in \Omega_{41}} + \sum_{(n,k) \in \Omega_{42}} - \sum_{(n,k) \in \Omega_{43}} \right) (Q' + Q + \alpha k) \\
&= \frac{Q+Q'}{2} \left(\frac{R^2 - (R - \frac{QQ'}{\alpha})^2}{(Q+Q')^2} - 2U_1 \frac{\frac{QQ'}{\alpha}}{Q+Q'} \right) + \frac{\alpha}{6} \frac{R^3 - (R - \frac{QQ'}{\alpha})^3}{(Q+Q')^3} \\
&\quad - \frac{\alpha U_1^2}{2} \frac{\frac{QQ'}{\alpha}}{Q+Q'} + \frac{Q}{2Q'(Q+Q')}\left(R^2 - \left(R - \frac{QQ'}{\alpha}\right)^2\right) - U_1 \frac{Q^2}{\alpha} \\
&\quad + \frac{\alpha Q}{6Q'(Q+Q')^3}\left(R^3 - \left(R - \frac{QQ'}{\alpha}\right)^3\right) - U_1^2 \frac{Q^2}{2(Q+Q')} + O\left(\frac{\alpha R^2}{(Q+Q')^2}\right) \\
&= \frac{1}{2Q'} \left(R^2 - \left(R - \frac{QQ'}{\alpha} \right)^2 \right) + \frac{\alpha}{6Q'(Q+Q')^2} \left(R^3 - \left(R - \frac{QQ'}{\alpha} \right)^3 \right) \\
&\quad - \frac{U_1}{\alpha} Q(Q+Q') - \frac{U_1^2}{2} Q + O\left(\frac{\alpha R^2}{(Q+Q')^2} \right). \quad (48)
\end{aligned}$$

Последнее выражение необходимо просуммировать по

$$(Q, Q') \in \Omega_4 = \left\{ Q \leq U_2, \quad Q' \leq U_2 \frac{U_2 - Q}{U_2 + Q} \right\}, \quad \tau \mid Q, \quad \tau \mid Q'.$$

1) Суммируем первое слагаемое в (48):

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{(Q, Q') \in \Omega_4 \\ \tau | Q, \tau | Q'}} \frac{1}{2Q'} \left(R^2 - \left(R - \frac{QQ'}{\alpha} \right)^2 \right) &= \sum_{Q \leq \frac{U_2}{\tau}} \sum_{Q' \leq \frac{U_2}{\tau} \frac{U_2 - \tau Q}{U_2 + \tau Q}} \left(\frac{R\tau}{\alpha} Q - \frac{\tau^3}{2\alpha^2} Q^2 Q' \right) \\ &= \sum_{Q \leq \frac{U_2}{\tau}} \left(\frac{RU_2}{\alpha} Q \frac{U_2 - \tau Q}{U_2 + \tau Q} - \frac{U_2^2 \tau}{4\alpha^2} Q^2 \frac{(U_2 - \tau Q)^2}{(U_2 + \tau Q)^2} + O\left(\frac{R\tau}{\alpha} Q \right) \right). \end{aligned}$$

Применяя формулы (69), (70) из следствия 4 (см. § 10), получаем

$$\sum_{\substack{(Q, Q') \in \Omega_4 \\ \tau | Q, \tau | Q'}} \frac{1}{2Q'} \left(R^2 - \left(R - \frac{QQ'}{\alpha} \right)^2 \right) = \frac{R^{5/2} \sqrt{\alpha}}{\tau^2} \left(\log 2 - \frac{7}{12} \right) + O\left(\frac{R^2}{\tau} \right).$$

2) Суммируем второе слагаемое в (48):

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{(Q, Q') \in \Omega_4 \\ \tau | Q, \tau | Q'}} \frac{\alpha}{6Q'(Q + Q')^2} \left(R^3 - \left(R - \frac{QQ'}{\alpha} \right)^3 \right) \\ = \sum_{Q \leq \frac{U_2}{\tau}} \sum_{Q' \leq \frac{U_2}{\tau} \frac{U_2 - \tau Q}{U_2 + \tau Q}} \frac{1}{(Q + Q')^2} \left(\frac{R^2}{2\tau} Q - \frac{R\tau}{2\alpha} Q^2 Q' + \frac{\tau^3}{6\alpha^2} Q^3 (Q')^2 \right). \end{aligned} \quad (49)$$

Для упрощения записи в следующих формулах положим $a = \frac{U_2}{\tau}$.

(а) Для первого слагаемого в (49) получаем

$$\sum_{Q' \leq a \frac{a-Q}{a+Q}} \frac{1}{(Q + Q')^2} = \frac{a(a-Q)}{Q(Q^2 + a^2)} + O\left(\frac{1}{Q^2} \right).$$

Используя формулу (71) из следствия 4 (см. § 10), имеем

$$\sum_{Q \leq \frac{U_2}{\tau}} \sum_{Q' \leq \frac{U_2}{\tau} \frac{U_2 - \tau Q}{U_2 + \tau Q}} \frac{R^2}{2\tau} \frac{Q}{(Q + Q')^2} = \frac{R^{5/2} \sqrt{\alpha}}{\tau^2} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\log 2}{4} \right) + O\left(\frac{R^2}{\tau} \left(1 + \log \frac{U_2}{\tau} \right) \right).$$

(b) Для второго слагаемого в (49) получаем

$$\sum_{Q' \leq a \frac{a-Q}{a+Q}} \frac{Q'}{(Q + Q')^2} = \log \left(1 + \frac{a}{Q} \frac{a-Q}{a+Q} \right) - \frac{a(a-Q)}{Q^2 + a^2} + O\left(\frac{1}{Q} \right).$$

Используя формулы (72), (73) из следствия 4 (см. § 10), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{Q \leq \frac{U_2}{\tau}} \sum_{Q' \leq \frac{U_2}{\tau} \frac{U_2 - \tau Q}{U_2 + \tau Q}} \frac{R\tau}{2\alpha} \frac{Q^2 Q'}{(Q + Q')^2} \\ = \frac{R^{5/2} \sqrt{\alpha}}{\tau^2} \left(\frac{\pi}{24} - \frac{5 \log 2}{12} + \frac{1}{6} \right) + O\left(\frac{R^2}{\tau} \left(1 + \log \frac{U_2}{\tau} \right) \right). \end{aligned}$$

(с) Для третьего слагаемого в (49) получаем

$$\sum_{Q' \leq a \frac{a-Q}{a+Q}} \frac{(Q')^2}{(Q+Q')^2} = a \frac{a-Q}{a+Q} - 2Q \log \left(1 + \frac{a}{Q} \frac{a-Q}{a+Q} \right) + Q \frac{a(a-Q)}{Q^2 + a^2} + O(1).$$

Используя формулы (74)–(76) из следствия 4 (см. § 10), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{Q \leq \frac{U_2}{\tau}} \sum_{Q' \leq \frac{U_2}{\tau} \frac{U_2 - \tau Q}{U_2 + \tau Q}} \frac{\tau^3}{6\alpha^2} \frac{Q^3(Q')^2}{(Q+Q')^2} \\ = \frac{R^{5/2}\sqrt{\alpha}}{\tau^2} \left(\frac{\pi}{120} - \frac{7 \log 2}{20} + \frac{13}{60} \right) + O \left(\frac{R^2}{\tau} \left(1 + \log \frac{U_2}{\tau} \right) \right). \end{aligned}$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{(Q, Q') \in \Omega_4 \\ \tau | Q, \tau | Q'}} \frac{\alpha}{6Q'(Q+Q')^2} \left(R^3 - \left(R - \frac{QQ'}{\alpha} \right)^3 \right) \\ = \frac{R^{5/2}\sqrt{\alpha}}{\tau^2} \left(\frac{11\pi}{120} - \frac{11 \log 2}{60} + \frac{1}{20} \right) + O \left(\frac{R^2}{\tau} \left(1 + \log \frac{U_2}{\tau} \right) \right). \end{aligned}$$

3) Суммируем третье слагаемое в (48):

$$\sum_{\substack{(Q, Q') \in \Omega_4 \\ \tau | Q, \tau | Q'}} \frac{U_1}{\alpha} Q(Q+Q') = \sum_{Q \leq \frac{U_2}{\tau}} \sum_{Q' \leq \frac{U_2}{\tau} \frac{U_2 - \tau Q}{U_2 + \tau Q}} \frac{U_1 \tau^2}{\alpha} Q(Q+Q'). \quad (50)$$

(а) Для первого слагаемого в (50) получаем

$$\sum_{Q' \leq a \frac{a-Q}{a+Q}} Q^2 = aQ^2 \frac{a-Q}{a+Q} + O(Q^2).$$

Используя формулу (77) из следствия 4 (см. § 10), имеем

$$\sum_{Q \leq \frac{U_2}{\tau}} \sum_{Q' \leq \frac{U_2}{\tau} \frac{U_2 - \tau Q}{U_2 + \tau Q}} \frac{U_1 \tau^2}{\alpha} Q^2 = \frac{R^{5/2}\sqrt{\alpha}}{\tau^2} \left(2 \log 2 - \frac{4}{3} \right) + O \left(\frac{R^2}{\tau} \right).$$

(б) Для второго слагаемого в (50) получаем

$$\sum_{Q' \leq a \frac{a-Q}{a+Q}} QQ' = \frac{a^2}{2} Q \frac{(a-Q)^2}{(a+Q)^2} + O \left(aQ \frac{a-Q}{a+Q} \right).$$

Используя формулы (69), (78) из следствия 4 (см. § 10), имеем

$$\sum_{Q \leq \frac{U_2}{\tau}} \sum_{Q' \leq \frac{U_2}{\tau} \frac{U_2 - \tau Q}{U_2 + \tau Q}} \frac{U_1 \tau^2}{\alpha} QQ' = \frac{R^{5/2}\sqrt{\alpha}}{\tau^2} \left(4 \log 2 - \frac{11}{4} \right) + O \left(\frac{R^2}{\tau} \right).$$

Следовательно, выполнено равенство

$$\sum_{\substack{(Q, Q') \in \Omega_4 \\ \tau | Q, \tau | Q'}} \frac{U_1}{\alpha} Q(Q + Q') = \frac{R^{5/2} \sqrt{\alpha}}{\tau^2} \left(6 \log 2 - \frac{49}{12} \right) + O\left(\frac{R^2}{\tau}\right).$$

4) Суммируем четвертое слагаемое в (48). Используя формулу (69) из следствия 4 (см. § 10), получаем

$$\sum_{\substack{(Q, Q') \in \Omega_4 \\ \tau | Q, \tau | Q'}} \frac{U_1^2}{2} Q = \sum_{Q \leq \frac{U_2}{\tau}} \sum_{Q' \leq \frac{U_2}{\tau} \frac{U_2 - \tau Q}{U_2 + \tau Q}} \frac{U_1^2}{2} \tau Q = \frac{R^{5/2} \sqrt{\alpha}}{\tau^2} \left(\frac{3}{4} - \log 2 \right) + O\left(\frac{R^2}{\tau}\right).$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{(Q, Q') \in \Omega_4 \\ \tau | Q, \tau | Q'}} \left(\sum_{(n, k) \in \Omega_{41}} + \sum_{(n, k) \in \Omega_{42}} - \sum_{(n, k) \in \Omega_{43}} \right) (Q' + Q + \alpha k) \\ = \frac{R^{5/2} \sqrt{\alpha}}{\tau^2} \left(\frac{11}{120} \pi - \frac{251}{60} \log 2 + \frac{14}{5} \right) \\ + O\left(\frac{R^2}{\tau} \left(1 + \log \frac{U_2}{\tau} \right)\right) + O\left(\frac{R^2 \alpha}{\tau^2} \log \frac{U_2}{\tau}\right). \end{aligned}$$

Тем самым, лемма доказана.

6.5. Случай 5. Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 13. *Справедлива асимптотическая формула*

$$\begin{aligned} \Sigma_{51} = \left(\frac{\pi}{24} + \frac{55}{12} \log 2 - \frac{119}{36} \right) R^{5/2} \sqrt{\alpha} \sum_{\tau | \delta} \frac{\varphi(\tau)}{\tau^2} \\ + \sum_{\tau | \delta} \varphi(\tau) O\left(\frac{R^2}{\tau} \left(1 + \log \frac{U_2}{\tau} \right) + \frac{\alpha R^2}{\tau^2}\right), \end{aligned}$$

где сумма Σ_{51} определена в формуле (37).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим в Σ_{51} отдельно суммы по областям

$$\begin{aligned} \Omega_{51} &= \left\{ U_1 < n \leq \frac{R}{Q + Q'}, U_1 < k \leq n \right\}, \\ \Omega_{52} &= \left\{ \frac{R}{Q + Q'} < n \leq \frac{R - U_1 Q}{Q'}, U_1 < k \leq \frac{R - n Q'}{Q} \right\}. \end{aligned}$$

1. Вычисление суммы по области Ω_{51} аналогично вычислению в случае 1 доказательства леммы 12:

$$\begin{aligned} \sum_{(n, k) \in \Omega_{51}} (Q + Q' + \alpha k) \\ = \sum_{U_1 < n \leq \frac{R}{Q + Q'}} \left((Q + Q')(n - U_1) + \frac{\alpha}{2}(n^2 - U_1^2) + O(Q + Q' + \alpha n) \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{Q + Q'}{2} \left(\frac{R}{Q + Q'} - U_1 \right)^2 + \frac{\alpha}{6} \left(\frac{R^3}{(Q + Q')^3} - U_1^3 \right) - \frac{\alpha U_1^2}{2} \left(\frac{R}{Q + Q'} - U_1 \right) + O \left(\alpha \left(\frac{R^2}{(Q + Q')^2} \right) \right).$$

При вычислении асимптотики мы учли, что $Q + Q' \leq U_2 < \alpha n$.

2. Вычислим сумму по области Ω_{52} . Используя следствие 3 (см. § 10), получим

$$\begin{aligned} \sum_{(n,k) \in \Omega_{52}} (Q + Q' + \alpha k) &= \sum_{\substack{\frac{R}{Q+Q'} < n \leq \frac{R-U_1Q}{Q'}}} \left((Q + Q') \left(\frac{R - nQ'}{Q} - U_1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{(R - nQ')^2}{Q^2} - U_1^2 \right) + O(Q + Q') + O \left(\alpha \frac{R - nQ'}{Q} \right) \right) \\ &= \int_{\frac{R}{Q+Q'}}^{\frac{R-U_1Q}{Q'}} \left((Q + Q') \left(\frac{R - nQ'}{Q} - U_1 \right) + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{(R - nQ')^2}{Q^2} - U_1^2 \right) \right) dn \\ &\quad + O \left(\alpha \frac{R^2}{(Q + Q')^2} \right) + O(R) + O \left((Q + Q') \left(\frac{R - U_1Q}{Q'} - \frac{R}{Q + Q'} \right) \right) \\ &\quad + O \left(\frac{\alpha}{2} \frac{Q}{Q'} \left(\frac{R^2}{(Q + Q')^2} - U_1^2 \right) \right). \end{aligned}$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{(n,k) \in \Omega_{52}} (Q + Q' + \alpha k) &= (Q + Q') \frac{Q}{2Q'} \left(\frac{R}{Q + Q'} - U_1 \right)^2 \\ &\quad + \frac{\alpha}{6} \frac{Q}{Q'} \left(\frac{R^3}{(Q + Q')^3} - U_1^3 \right) - \frac{\alpha}{2} U_1^2 \left(\frac{R - U_1Q}{Q'} - \frac{R}{Q + Q'} \right) \\ &\quad + O \left((Q + Q') \left(\frac{R - U_1Q}{Q'} - \frac{R}{Q + Q'} \right) \right) + O \left(\frac{\alpha}{2} \frac{Q}{Q'} \left(\frac{R^2}{(Q + Q')^2} - U_1^2 \right) \right). \end{aligned}$$

Поскольку $(Q, Q') \in \Omega_5$, из определения области Ω_5 легко получить

$$Q' > U_2 \frac{U_2 - Q}{U_2 + Q} = \frac{R - U_1Q}{U_1 + \frac{Q}{\alpha}}.$$

Таким образом, выполнено

$$\frac{R - U_1Q}{Q'} < \frac{R + \frac{Q^2}{\alpha}}{Q + Q'}. \quad (51)$$

Поэтому имеем

$$O \left((Q + Q') \left(\frac{R - U_1Q}{Q'} - \frac{R}{Q + Q'} \right) \right) < O \left(\frac{Q^2}{\alpha} \right) < O \left(\alpha \frac{R^2}{(Q + Q')^2} \right).$$

Из неравенства (51) следует

$$R - \frac{QQ'}{\alpha} < U_1(Q + Q'), \quad (52)$$

поэтому

$$O\left(\frac{\alpha}{2} \frac{Q}{Q'} \left(\frac{R^2}{(Q+Q')^2} - U_1^2\right)\right) < O\left(\frac{Q\alpha}{2Q'(Q+Q')^2} \left(R^2 - \left(R - \frac{QQ'}{\alpha}\right)^2\right)\right) < O\left(\alpha \frac{R^2}{(Q+Q')^2}\right).$$

Следовательно,

$$\left(\sum_{(n,k) \in \Omega_{51}} + \sum_{(n,k) \in \Omega_{52}}\right)(Q' + Q + \alpha k) = \frac{1}{2Q'}(Q+Q')^2 \left(\frac{R}{Q+Q'} - U_1\right)^2 + \frac{\alpha}{6} \frac{Q+Q'}{Q'} \left(\frac{R^3}{(Q+Q')^3} - U_1^3\right) - \frac{\alpha}{2} U_1^2 \left(\frac{R - U_1 Q}{Q'} - U_1\right) + O\left(\frac{\alpha R^2}{(Q+Q')^2}\right).$$

Последнее выражение необходимо просуммировать по

$$(Q, Q') \in \Omega_5 = \left\{Q \leq U_2, U_2 \frac{U_2 - Q}{U_2 + Q} < Q' \leq U_2 - Q\right\}, \quad \tau \mid Q, \quad \tau \mid Q'.$$

Для упрощения записи в следующих формулах часто используется обозначение $a = \frac{U_2}{\tau}$. Определим функцию

$$G(Q, Q') = \left(-\frac{2}{3}RU_1Q + \frac{U_1^2\tau}{2}Q^2\right) \frac{1}{Q'} + \frac{\alpha R^3}{6\tau^3 Q'(Q+Q')^2} + \left(U_1^2\tau Q - \frac{2}{3}RU_1\right) + \frac{U_1^2\tau}{2}Q'.$$

Используя соотношение

$$\frac{1}{2Q'}(Q+Q')^2 \left(\frac{R}{Q+Q'} - U_1\right)^2 = \left(\frac{R^2}{2} - RU_1Q + \frac{U_1^2}{2}Q^2\right) \frac{1}{Q'} - RU_1 + U_1^2Q + \frac{U_1^2}{2}Q',$$

после простых преобразований получим

$$\sum_{\substack{(Q, Q') \in \Omega_5 \\ \tau \mid Q, \tau \mid Q'}} \left(\sum_{(n,k) \in \Omega_{51}} + \sum_{(n,k) \in \Omega_{52}}\right)(Q' + Q + \alpha k) = \sum_{Q \leq a} \sum_{a \frac{a-Q}{a+Q} < Q' \leq a-Q} \left(G(Q, Q') + O\left(\frac{\alpha R^2}{\tau^2(Q+Q')^2}\right)\right).$$

Заметим, что $2(\sqrt{2}-1)U_2 < Q+Q' \leq U_2$, поэтому, используя те же рассуждения, что и при выводе формулы (42), имеем

$$\sum_{\substack{(Q, Q') \in \Omega_5 \\ \tau \mid Q, \tau \mid Q'}} \left(\sum_{(n,k) \in \Omega_{51}} + \sum_{(n,k) \in \Omega_{52}}\right)(Q' + Q + \alpha k) = \sum_{Q \leq a} \left(\int_{a \frac{a-Q}{a+Q}}^{a-Q} G(Q, Q') dQ' + G\left(Q, a \frac{a-Q}{a+Q}\right)\right) + O\left(\frac{\alpha R^2}{\tau^2}\right).$$

Используя оценки

$$\sum_{Q \leq a} Q \frac{a+Q}{a-Q} = O(a^2 \log a), \quad \sum_{Q \leq a} Q^2 \frac{a+Q}{a-Q} = O(a^3 \log a),$$

$$\sum_{Q \leq a} \frac{(a+Q)^3}{(a-Q)(a^2+Q^2)^2} = O\left(\frac{\log a}{a}\right),$$

получаем

$$\sum_{Q \leq a} G\left(Q, a \frac{a-Q}{a+Q}\right) = O\left(\frac{R^2}{\tau} \left(1 + \log \frac{U_2}{\tau}\right)\right).$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{(Q, Q') \in \Omega_5 \\ \tau | Q, \tau | Q'}} \left(\sum_{(n, k) \in \Omega_{51}} + \sum_{(n, k) \in \Omega_{52}} \right) (Q' + Q + \alpha k) \\ &= \sum_{Q \leq a} \left(\left(-\frac{2}{3} R U_1 Q + \frac{U_1^2 \tau}{2} Q^2 \right) \log \left(1 + \frac{Q}{a} \right) \right. \\ & \quad + \frac{\alpha R^3}{6\tau^3} \left(\frac{1}{Q^2} \log \left(1 + \frac{Q^2}{a^2} \right) - \frac{1}{a} \frac{a-Q}{a^2+Q^2} \right) \\ & \quad + \left(U_1^2 \tau Q - \frac{2}{3} R U_1 \right) Q \frac{a-Q}{a+Q} + \frac{U_1^2 \tau}{4} (a-Q)^2 \frac{(a+Q)^2 - a^2}{(a+Q)^2} \\ & \quad \left. + O\left(\frac{\alpha R^2}{\tau^2}\right) + O\left(\frac{R^2}{\tau} \left(1 + \log \frac{U_2}{\tau}\right)\right) \right). \end{aligned} \quad (53)$$

1) Суммируем первое слагаемое в (53). Используя формулы (79), (80) из следствия 4 (см. § 10), получаем

$$\sum_{Q \leq a} \left(-\frac{2}{3} R U_1 Q + \frac{U_1^2 \tau}{2} Q^2 \right) \log \left(1 + \frac{Q}{a} \right) = \frac{R^{5/2} \sqrt{\alpha}}{\tau^2} \left(\frac{1}{3} \log 2 - \frac{11}{36} \right) + O\left(\frac{R^2}{\tau}\right).$$

2) Суммируем второе слагаемое в (53). Используя формулы (81), (71) из следствия 4 (см. § 10), получаем

$$\sum_{Q \leq a} \frac{\alpha R^3}{6\tau^3} \left(\frac{1}{Q^2} \log \left(1 + \frac{Q^2}{a^2} \right) - \frac{1}{a} \frac{a-Q}{a^2+Q^2} \right) = \frac{R^{5/2} \sqrt{\alpha}}{\tau^2} \left(\frac{\pi}{24} - \frac{1}{12} \log 2 \right) + O\left(\frac{R^2}{\tau}\right).$$

3) Суммируем третье слагаемое в (53). Используя формулы (69), (77) из следствия 4 (см. § 10), получаем

$$\sum_{Q \leq a} \left(U_1^2 \tau Q - \frac{2}{3} R U_1 \right) Q \frac{a-Q}{a+Q} = \frac{R^{5/2} \sqrt{\alpha}}{\tau^2} \left(\frac{10}{3} \log 2 - \frac{7}{3} \right) + O\left(\frac{R^2}{\tau}\right).$$

4) Суммируем четвертое слагаемое в (53). Используя формулу (82) из следствия 4 (см. § 10), получаем

$$\sum_{Q \leq a} \frac{U_1^2 \tau}{4} (a-Q)^2 \frac{(a+Q)^2 - a^2}{(a+Q)^2} = \frac{R^{5/2} \sqrt{\alpha}}{\tau^2} \left(\log 2 - \frac{2}{3} \right) + O\left(\frac{R^2}{\tau}\right).$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{(Q, Q') \in \Omega_5 \\ \tau | Q, \tau | Q'}} \left(\sum_{(n, k) \in \Omega_{51}} + \sum_{(n, k) \in \Omega_{52}} \right) (Q' + Q + \alpha k) \\ &= \frac{R^{5/2} \sqrt{\alpha}}{\tau^2} \left(\frac{\pi}{24} + \frac{55}{12} \log 2 - \frac{119}{36} \right) + O\left(\frac{\alpha R^2}{\tau^2}\right) + O\left(\frac{R^2}{\tau} \left(1 + \log \frac{U_2}{\tau}\right)\right). \end{aligned}$$

Тем самым, лемма доказана.

§ 7. Вычисление сумм второго типа

В этом параграфе мы вычислим суммы Σ_{12} , Σ_{22} , Σ_{32} , Σ_{42} , Σ_{52} .

7.1. Случай 1. Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 14. *Справедлива асимптотическая формула*

$$\begin{aligned} \Sigma_{12} &= \sum_{\tau | \delta} \sum_{z=1}^{\tau^*} \sum_{\substack{(n, k) \in \Omega_{11} \\ \tau | n, \tau \nmid k}} \sum_{(Q, Q') \in \Omega_{11}} \exp\left(2\pi i \frac{zk}{\tau} Q\right) (Q' + Q + \alpha k) \\ &= \sum_{\tau | \delta} \varphi(\tau) O\left(\frac{R^2}{\tau} \left(1 + \log \frac{U_1}{\tau} \log \tau\right)\right), \end{aligned}$$

где сумма Σ_{12} определена в формуле (33).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Суммирование по Q' было проведено в лемме 9. Используя лемму 5 и следствие 2, получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{(Q, Q') \in \Omega_{11}} \exp\left(2\pi i \frac{zk}{\tau} Q\right) (Q' + Q + \alpha k) \\ & \ll \frac{1}{\left\| \frac{zk}{\tau} \right\|} \left(\left| \frac{k^2}{2n^2} - \frac{k}{n} \right| \alpha^2 n^2 + \left| \frac{R}{n} - \frac{\alpha k^2}{n} - R \frac{k}{n^2} \right| \alpha n + \left| \alpha R \frac{k}{n} + \frac{R^2}{2n^2} \right| \right) \\ & \quad + \sum_{\alpha(n-k) < Q \leq \alpha n} O(Q + \alpha k) + \sum_{\alpha(n-k) < Q \leq \alpha n} O\left(\frac{R - kQ}{n}\right). \end{aligned}$$

Применяя оценки из леммы 9, имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{(Q, Q') \in \Omega_{11}} \exp\left(2\pi i \frac{zk}{\tau} Q\right) (Q' + Q + \alpha k) \\ & \ll \frac{1}{\left\| \frac{zk}{\tau} \right\|} \left(\alpha^2 kn + R\alpha + \frac{R^2}{n^2} \right) + O(R\alpha) \ll \frac{1}{\left\| \frac{zk}{\tau} \right\|} \frac{R^2}{n^2} + O(R\alpha). \end{aligned}$$

Последнее выражение необходимо просуммировать по переменным $(n, k) \in \Omega_1$, $\tau \mid n$, $\tau \nmid k$, используя лемму 6:

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{(n,k) \in \Omega_1 \\ \tau \mid n, \tau \nmid k}} \left(\frac{1}{\left\| \frac{zk}{\tau} \right\|} \frac{R^2}{n^2} + O(R\alpha) \right) \\ & \ll \sum_{n \leq \frac{U_1}{\tau}} \frac{R^2}{\tau^2 n^2} \tau(n+1) \log \tau + O\left(\frac{R^2}{\tau}\right) = O\left(\frac{R^2}{\tau} \left(1 + \log \frac{U_1}{\tau} \log \tau\right)\right). \end{aligned}$$

Тем самым, лемма доказана.

7.2. Случай 2. Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 15. *Справедлива асимптотическая формула*

$$\Sigma_{22} = \sum_{\tau \mid \delta} \varphi(\tau) O\left(\frac{R^2}{\tau} \left(1 + \log \frac{U_1}{\tau}\right) + \frac{R^2 \alpha}{\tau} \log \tau + R^{3/2} \sqrt{\alpha} \log \tau\right),$$

где сумма Σ_{22} определена в формуле (34).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим в Σ_{22} отдельно суммы по областям Ω_{21} и Ω_{22} .

1. Используя вычисления, проведенные в п. 1 доказательства леммы 10, а также лемму 5 и следствие 2, получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{(n,Q) \in \Omega_{21}} \exp\left(2\pi i \frac{zQ'}{\tau} n\right) (Q' + Q + \alpha k) \\ & = \sum_{U_1 < n \leq \frac{R}{Q' + \alpha k}} \exp\left(2\pi i \frac{zQ'}{\tau} n\right) \left(\alpha^2 nk + \alpha^2 \frac{k^2}{2} + \alpha k Q' + O(\alpha n) + O(Q' + \alpha k)\right) \\ & \ll \frac{1}{\left\| \frac{zQ'}{\tau} \right\|} \left(\frac{R\alpha^2 k}{Q' + \alpha k} + \alpha k Q' + \frac{\alpha^2 k^2}{2}\right) + O\left(\alpha \frac{R^2}{(Q' + \alpha k)^2}\right) \\ & \ll \frac{1}{\left\| \frac{zQ'}{\tau} \right\|} \frac{R\alpha^2 k}{Q' + \alpha k} + O\left(\alpha \frac{R^2}{(Q' + \alpha k)^2}\right). \end{aligned}$$

2. Используя вычисления, проведенные в п. 2 доказательства леммы 10, а также лемму 5 и следствие 2, получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{(n,Q) \in \Omega_{22}} \exp\left(2\pi i \frac{zQ'}{\tau} n\right) (Q' + Q + \alpha k) \\ & = \sum_{U_1 < n \leq \frac{R}{Q' + \alpha k}} \exp\left(2\pi i \frac{zQ'}{\tau} n\right) f(n) + O\left(\frac{R\alpha^2 k^2}{(Q' + \alpha k)^2}\right), \end{aligned}$$

где функция $f(n)$ определена в лемме 10. Применим следствие 2 с учетом того, что $f\left(\frac{R + \alpha k^2}{Q' + \alpha k}\right) = 0$. Заметим, что удобно использовать следующее преобразование:

$$f\left(\frac{R}{Q' + \alpha k}\right) = f\left(\frac{R}{Q' + \alpha k}\right) - f\left(\frac{R + \alpha k^2}{Q' + \alpha k}\right) = \frac{R\alpha^2 k}{Q' + \alpha k} + Q' \alpha k + \frac{\alpha^2 k^2}{2}.$$

Тогда легко получить оценку

$$\sum_{(n, Q') \in \Omega_{22}} \exp\left(2\pi i \frac{zQ'}{\tau} n\right) (Q' + Q + \alpha k) \ll \frac{1}{\left\|\frac{zQ'}{\tau}\right\|} \left(\frac{R\alpha^2 k}{Q' + \alpha k} + Q' \alpha k + \frac{\alpha^2 k^2}{2}\right) + O\left(\frac{R\alpha^2 k^2}{(Q' + \alpha k)^2}\right).$$

Следовательно, имеем

$$\left(\sum_{(n, Q') \in \Omega_{21}} + \sum_{(n, Q') \in \Omega_{22}}\right) \exp\left(2\pi i \frac{zQ'}{\tau} n\right) (Q' + Q + \alpha k) \ll \frac{1}{\left\|\frac{zQ'}{\tau}\right\|} \frac{R\alpha^2 k}{Q' + \alpha k} + O\left(\frac{\alpha R^2}{(Q' + \alpha k)^2}\right).$$

Последнее выражение необходимо просуммировать по

$$(k, Q') \in \Omega_2 = \{k \leq U_1, Q' \leq U_2 - \alpha k\}, \quad \tau \mid k, \quad \tau \nmid Q'.$$

1) Применяя леммы 3, 5, получаем

$$\sum_{\substack{Q' \leq U_2 - \alpha k \\ \tau \nmid Q'}} \frac{1}{\left\|\frac{zQ'}{\tau}\right\|} \frac{1}{Q' + \alpha k} \ll \left(\frac{U_2 - \alpha k}{U_2} + \log \frac{U_2}{\alpha k} + \frac{\tau}{\alpha k}\right) \log \tau.$$

Далее, используя формулы из следствия 4, имеем

$$\sum_{\substack{k \leq U_1 \\ \tau \mid k}} R\alpha^2 k \left(\frac{U_1 - k}{U_1} + \log \frac{U_1}{k} + \frac{\tau}{\alpha k}\right) \log \tau \ll \frac{R^2 \alpha}{\tau} \log \tau + \frac{R^2 \alpha}{\tau} \log \tau + R^{3/2} \sqrt{\alpha} \log \tau.$$

2) Применяя лемму 25, получаем

$$\sum_{\substack{(k, Q') \in \Omega_2 \\ \tau \mid k, \tau \nmid Q'}} O\left(\frac{\alpha R^2}{(Q' + \alpha k)^2}\right) = O\left(\frac{R^2}{\tau} \left(1 + \log \frac{U_1}{\tau}\right)\right).$$

Тем самым, лемма доказана.

7.3. Случай 3. Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 16. *Справедлива асимптотическая формула*

$$\Sigma_{32} = \sum_{\tau \mid \delta} \varphi(\tau) O\left(\frac{R^2}{\tau} + \frac{R^2}{\tau} (1 + \alpha) \log \tau\right),$$

где сумма Σ_{32} определена в формуле (35).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя вычисления, проведенные в лемме 11, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{(n, Q) \in \Omega_{31}} \exp\left(2\pi i \frac{zQ'}{\tau} n\right) (Q' + Q + \alpha k) \\ = \sum_{U_1 < n \leq \frac{R + \alpha k^2}{Q' + \alpha k}} \exp\left(2\pi i \frac{zQ'}{\tau} n\right) f(n) + O\left(\frac{R^2}{k(Q' + \alpha k)}\right), \end{aligned} \quad (54)$$

где функция $f(n)$ определена в лемме 10. Теперь применим следствие 2 с учетом того, что

$$\begin{aligned} f\left(\frac{R + \alpha k^2}{Q' + \alpha k}\right) &= 0, \\ f(U_1) &= (Q')^2 \left(\frac{U_1^2}{2k^2} - \frac{U_1}{k}\right) - Q' \left(U_1 \alpha + \frac{R + \alpha k^2}{k^2} U_1 - \frac{R + \alpha k^2}{k}\right) \\ &\quad + \frac{(R + \alpha k^2)^2}{k^2} - \frac{U_1^2 \alpha^2}{2}, \end{aligned}$$

в результате получим

$$\begin{aligned} \sum_{U_1 < n \leq \frac{R + \alpha k^2}{Q' + \alpha k}} \exp\left(2\pi i \frac{zQ'}{\tau} n\right) f(n) &\ll \frac{1}{\left\|\frac{zQ'}{\tau}\right\|} f(U_1) \\ &\ll \frac{1}{\left\|\frac{zQ'}{\tau}\right\|} \left((Q')^2 \frac{U_1^2}{k^2} + Q' \frac{R + \alpha k^2}{k^2} U_1 + \frac{R^2}{k^2}\right). \end{aligned} \quad (55)$$

Последнее выражение необходимо просуммировать по

$$(k, Q') \in \Omega_3 = \left\{k \leq U_1, U_2 - \alpha k < Q' \leq U_2 - \alpha k + \frac{\alpha k^2}{U_1}\right\}, \quad \tau \mid k, \quad \tau \nmid Q'.$$

Оценим каждое слагаемое в (55), используя лемму 6.

1. Суммируем первое слагаемое в (55):

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{U_2 - \alpha k < Q' \leq U_2 - \alpha k + \frac{\alpha k^2}{U_1} \\ \tau \nmid Q'}} \frac{(Q')^2}{\left\|\frac{zQ'}{\tau}\right\|} \frac{U_1^2}{k^2} &\ll \frac{U_1^2}{k^2} \left(U_2 - \alpha k + \frac{\alpha k^2}{U_1}\right)^2 \left(\frac{\alpha k^2}{U_1} + \tau\right) \log \tau \\ &\ll \frac{U_1^4 \alpha^2}{k^2} \left(\frac{\alpha k^2}{U_1} + \tau\right) \log \tau \ll \left(U_1^3 \alpha^2 + \frac{U_1^4 \alpha^2 \tau}{k^2}\right) \log \tau. \end{aligned}$$

Следовательно, имеем

$$\sum_{\substack{(k, Q') \in \Omega_3 \\ \tau \mid k, \tau \nmid Q'}} \frac{(Q')^2}{\left\|\frac{zQ'}{\tau}\right\|} \frac{U_1^2}{k^2} \ll \frac{R^2}{\tau} \log \tau.$$

2. Суммируем второе слагаемое в (55):

$$\sum_{\substack{U_2 - \alpha k < Q' \leq U_2 - \alpha k + \frac{\alpha k^2}{U_1} \\ \tau \nmid Q'}} \frac{Q'}{\| \frac{zQ'}{\tau} \|} \frac{R + \alpha k^2}{k^2} U_1 \ll \frac{R + \alpha k^2}{k^2} U_1^2 \alpha \left(\frac{\alpha k^2}{U_1} + \tau \right) \log \tau \\ \ll \left(R U_1 \alpha^2 + \frac{R^2}{k^2} \tau \right) \log \tau.$$

Следовательно, имеем

$$\sum_{\substack{(k, Q') \in \Omega_3 \\ \tau \mid k, \tau \nmid Q'}} \frac{Q'}{\| \frac{zQ'}{\tau} \|} \frac{R + \alpha k^2}{k^2} U_1 \ll \frac{R^2}{\tau} (1 + \alpha) \log \tau.$$

3. Суммируем третье слагаемое в (55):

$$\sum_{\substack{(k, Q') \in \Omega_3 \\ \tau \mid k, \tau \nmid Q'}} \frac{1}{\| \frac{zQ'}{\tau} \|} \frac{R^2}{k^2} \ll \sum_{\substack{k \leq U_1 \\ \tau \mid k}} \frac{R^2}{k^2} \left(\frac{\alpha k^2}{U_1} + \tau \right) \log \tau \ll \frac{R^2}{\tau} (1 + \alpha) \log \tau.$$

4. Суммируем асимптотическое слагаемое в (54):

$$\sum_{\substack{(k, Q') \in \Omega_3 \\ \tau \mid k, \tau \nmid Q'}} O\left(\frac{R^2}{k(Q' + \alpha k)}\right) = \sum_{\substack{k \leq U_1 \\ \tau \mid k}} O\left(\frac{R^2}{k} \log\left(1 + \frac{k^2}{U_1^2}\right)\right) \\ \ll \sum_{\substack{k \leq U_1 \\ \tau \mid k}} O\left(\frac{R^2 k}{U_1^2}\right) = O\left(\frac{R^2}{\tau}\right).$$

Тем самым, лемма доказана.

7.4. Случай 4. Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 17. *Справедлива асимптотическая формула*

$$\Sigma_{42} = \sum_{\tau \mid \delta} \varphi(\tau) O\left(\frac{R^2 \alpha}{\tau} (1 + \log \tau) \left(1 + \log \frac{U_2}{\tau}\right)\right),$$

где сумма Σ_{42} определена в формуле (36).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим каждую из трех внутренних сумм в Σ_{42} .

1. Для вычисления первой суммы определим функцию

$$g_1(n) = \frac{\alpha}{2} n^2 + (Q + Q')n - U_1(Q + Q') - \frac{\alpha}{2} U_1^2.$$

Тогда

$$\sum_{U_1 < k \leq n} (Q + Q' + \alpha k) = g_1(n) + O(Q + Q') + O(\alpha n).$$

Заметим, что $g_1(n)$ возрастает на промежутке $U_1 < n \leq \frac{R}{Q+Q'}$. Очевидно, что

$$g_1(U_1) = 0, \quad g_1\left(\frac{R}{Q+Q'}\right) \ll \frac{R^2\alpha}{(Q+Q')^2}.$$

Применив следствие 2, получаем

$$\sum_{(n,k) \in \Omega_{41}} \exp\left(2\pi i \frac{zQ'}{\tau} n\right) (Q' + Q + \alpha k) \ll \frac{1}{\|\frac{zQ'}{\tau}\|} \frac{R^2\alpha}{(Q+Q')^2}.$$

2. Вычислим вторую сумму:

$$\begin{aligned} \sum_{U_1 < k \leq \frac{R-nQ'}{Q}} (Q + Q' + \alpha k) &= (Q + Q') \left(\frac{R-nQ'}{Q} - U_1 \right) + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{(R-nQ')^2}{Q^2} - U_1^2 \right) \\ &\quad + O(Q + Q') + Q \left(\alpha \frac{R-nQ'}{Q} \right) \\ &= \frac{\alpha(Q')^2}{2Q^2} n^2 - \left(Q + Q' + \frac{R\alpha}{Q} \right) \frac{Q'}{Q} n + (Q + Q') \left(\frac{R}{Q} - U_1 \right) \\ &\quad + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{R^2}{Q^2} - U_1^2 \right) + O(Q + Q') + O\left(\alpha \frac{R-nQ'}{Q} \right) \\ &= g_2(n) + O(Q + Q') + O\left(\alpha \frac{R-nQ'}{Q} \right). \end{aligned}$$

Заметим, что $g_2(n)$ убывает на промежутке

$$\frac{R}{Q+Q'} < n \leq \frac{R + \frac{Q^2}{\alpha}}{Q+Q'}.$$

Действительно,

$$g_2'(n) = \frac{\alpha(Q')^2}{Q^2} n - \left(Q + Q' + \frac{R\alpha}{Q} \right) \frac{Q'}{Q} = \frac{\alpha Q'}{Q^2} (nQ' - R) - \frac{Q'}{Q} (Q + Q') < 0.$$

Мы воспользовались тем, что $nQ' \leq R$ (см. (28)). Очевидно, что

$$g_2\left(\frac{R}{Q+Q'}\right) \ll \frac{R^2\alpha}{(Q+Q')^2}.$$

Применяя следствие 2, получаем

$$\sum_{(n,k) \in \Omega_{42}} \exp\left(2\pi i \frac{zQ'}{\tau} n\right) (Q' + Q + \alpha k) \ll \frac{1}{\|\frac{zQ'}{\tau}\|} \frac{R^2\alpha}{(Q+Q')^2}.$$

3. Вычислим третью сумму:

$$\begin{aligned} \sum_{U_1 < k \leq n - \frac{Q}{\alpha}} (Q + Q' + \alpha k) &= \frac{\alpha}{2} n^2 + nQ' - (Q + Q') \left(\frac{Q}{\alpha} + U_1 \right) \\ &\quad + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{Q^2}{\alpha^2} - U_1^2 \right) + O(Q + Q') + O(\alpha n - Q) \\ &= g_3(n) + O(Q + Q') + O(\alpha n - Q). \end{aligned}$$

Заметим, что $g_3(n)$ возрастает на промежутке $U_1 + \frac{Q}{\alpha} < \frac{R+Q^2/\alpha}{Q+Q'}$. Очевидно, что

$$g_3\left(U_1 + \frac{Q}{\alpha}\right) = 0, \quad g_3\left(\frac{R + \frac{Q^2}{\alpha}}{Q + Q'}\right) \ll \frac{R^2\alpha}{(Q + Q')^2}.$$

Применяя следствие 2, получаем

$$\sum_{(n,k) \in \Omega_{43}} \exp\left(2\pi i \frac{zQ'}{\tau} n\right) (Q' + Q + \alpha k) \ll \frac{1}{\left\|\frac{zQ'}{\tau}\right\|} \frac{R^2\alpha}{(Q + Q')^2}.$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{(n,k) \in \Omega_{41}} + \sum_{(n,k) \in \Omega_{42}} - \sum_{(n,k) \in \Omega_{43}} \right) \exp\left(2\pi i \frac{zQ'}{\tau} n\right) (Q' + Q + \alpha k) \\ & \ll \frac{1}{\left\|\frac{zQ'}{\tau}\right\|} \frac{R^2\alpha}{(Q + Q')^2} + O\left(\frac{R^2\alpha}{(Q + Q')^2}\right) + O(R). \end{aligned}$$

Последнее выражение необходимо просуммировать по

$$(Q, Q') \in \Omega_4 = \left\{ Q \leq U_2, \quad Q' \leq U_2 \frac{U_2 - Q}{U_2 + Q} \right\}, \quad \tau \mid Q, \quad \tau \nmid Q'.$$

Увеличим область суммирования по Q' до области $Q' \leq U_2 - Q$. Используя леммы 3, 6, получаем

$$\sum_{\substack{Q' \leq U_2 - Q \\ \tau \nmid Q'}} \frac{1}{\left\|\frac{zQ'}{\tau}\right\|} \frac{R^2\alpha}{(Q + Q')^2} \ll R^2\alpha \left(\frac{U_2 - Q}{U_2^2} + \frac{(U_2 - Q)^2}{QU_2^2} + \frac{\tau}{Q^2} \right) \log \tau.$$

Теперь имеем

$$R^2\alpha \sum_{\substack{Q \leq U_2 \\ \tau \mid Q'}} \left(\frac{U_2 - Q}{U_2^2} + \frac{(U_2 - Q)^2}{QU_2^2} + \frac{\tau}{Q^2} \right) \log \tau = O\left(\frac{R^2\alpha}{\tau} \left(1 + \log \frac{U_2}{\tau}\right) \log \tau\right).$$

4. Осталось просуммировать асимптотические слагаемые:

$$\sum_{\substack{Q \leq U_2, Q' \leq U_2 - Q \\ \tau \mid Q'}} \left(O\left(\frac{R^2\alpha}{(Q + Q')^2}\right) + O(R) \right) = O\left(\frac{R^2\alpha}{\tau} \left(1 + \log \frac{U_2}{\tau}\right)\right).$$

Тем самым, лемма доказана.

7.5. Случай 5. Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 18. *Справедлива асимптотическая формула*

$$\Sigma_{52} = \sum_{\tau \mid \delta} \varphi(\tau) O\left(\frac{R^2\alpha}{\tau}\right),$$

где сумма Σ_{52} определена в формуле (37).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим каждую из трех внутренних сумм в Σ_{52} .

1. Первая сумма совпадает с первой суммой в лемме 17. Поскольку в лемме 17 мы увеличивали область суммирования по Q' до области $Q' \leq U_2 - Q$, тем самым, мы уже все сосчитали.

2. Вычислим вторую сумму:

$$\begin{aligned} \sum_{U_1 < k \leq \frac{R-nQ'}{Q}} (Q + Q' + \alpha k) &= (Q + Q') \left(\frac{R - nQ'}{Q} - U_1 \right) + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{(R - nQ')^2}{Q^2} - U_1^2 \right) \\ &+ O(Q + Q') + Q \left(\alpha \frac{R - nQ'}{Q} \right) = g_2(n) + O(Q + Q') + Q \left(\alpha \frac{R - nQ'}{Q} \right). \end{aligned}$$

Заметим, что $g_2(n)$ убывает на промежутке

$$\frac{R}{Q + Q'} < n \leq \frac{R - U_1 Q}{Q'}.$$

Кроме того, отметим, что

$$g_2 \left(\frac{R}{Q + Q'} \right) \ll \frac{R^2 \alpha}{(Q + Q')^2}.$$

Применяя следствие 2, имеем

$$\sum_{(n,k) \in \Omega_{52}} \exp \left(2\pi i \frac{zQ'}{\tau} n \right) (Q' + Q + \alpha k) \ll \frac{1}{\| \frac{zQ'}{\tau} \|} \frac{R^2 \alpha}{(Q + Q')^2}.$$

Получим ту же оценку, что и в лемме 17, а так как в лемме 17 мы увеличивали область суммирования по Q' до области $Q' \leq U_2 - Q$, тем самым, уже вычислены суммы, не входящие в асимптотические слагаемые.

Суммируем асимптотические слагаемые по n :

$$\sum_{\frac{R}{Q+Q'} < n \leq \frac{R-U_1Q}{Q'}} \left(O(Q + Q') + O \left(\alpha \frac{R - nQ'}{Q} \right) \right) \ll O \left(R \frac{Q}{Q'} \right) + O \left(\alpha \frac{R^2 Q}{Q'(Q + Q')^2} \right). \quad (56)$$

Последнее выражение необходимо просуммировать по

$$(Q, Q') \in \Omega_5 = \left\{ Q \leq U_2, \ U_2 \frac{U_2 - Q}{U_2 + Q} < Q' \leq U_2 - Q \right\}, \quad \tau \mid Q, \quad \tau \nmid Q'.$$

1) Суммируем первое слагаемое в (56):

$$\sum_{U_2 \frac{U_2 - Q}{U_2 + Q} < Q' \leq U_2 - Q} O \left(R \frac{Q}{Q'} \right) = O \left(R Q \log \left(1 + \frac{Q}{U_2} \right) \right) \ll O \left(R \frac{Q^2}{U_2} \right).$$

Следовательно, имеем

$$\sum_{\substack{(Q, Q') \in \Omega_5 \\ \tau \mid Q, \tau \nmid Q'}} O \left(R \frac{Q}{Q'} \right) \ll O \left(\frac{R^2 \alpha}{\tau} \right).$$

2) Суммируем второе слагаемое в (56):

$$\begin{aligned} \sum_{U_2 \frac{U_2-Q}{U_2+Q} < Q' \leq U_2-Q} \frac{1}{Q'(Q+Q')^2} &\ll \int_{\frac{Q^2+U_2^2}{Q+U_2}}^{U_2} \frac{1}{(x-Q)x^2} dx \\ &= \int_{\frac{Q^2+U_2^2}{Q+U_2}}^{U_2} \left(-\frac{1}{Q^2 x} - \frac{1}{Q x^2} + \frac{1}{Q^2(x-Q)} \right) dx = \frac{1}{Q^2} \log \left(1 + \frac{Q^2}{U_2^2} \right) - \frac{U_2-Q}{U_2(U_2^2+Q^2)}. \end{aligned}$$

Следовательно, имеем

$$\sum_{U_2 \frac{U_2-Q}{U_2+Q} < Q' \leq U_2-Q} O\left(\alpha \frac{R^2 Q}{Q'(Q+Q')^2}\right) \ll O\left(\alpha \frac{R^2 Q}{U_2^2}\right) + O\left(\alpha R^2 \frac{U_2-Q}{U_2^2+Q^2}\right).$$

Используя формулу (71) из следствия 4, получаем

$$\sum_{\substack{(Q, Q') \in \Omega_5 \\ \tau \nmid Q, \tau \nmid Q'}} O\left(\alpha \frac{R^2 Q}{Q'(Q+Q')^2}\right) \ll O\left(\frac{R^2 \alpha}{\tau}\right).$$

Тем самым, лемма доказана.

§ 8. Вычисление сумм третьего типа

В этом параграфе мы вычислим суммы Σ_{13} , Σ_{23} , Σ_{33} , Σ_{43} , Σ_{53} .

8.1. Случай 1. Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 19. *Справедлива асимптотическая формула*

$$\Sigma_{13} = O\left(R^2 \sum_{d|\delta} d \log d\right),$$

где сумма Σ_{13} определена в формуле (33).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценивая внутреннюю сумму в Σ_{13} при использовании следствия 2, получим

$$\sum_{Q' \leq \frac{R-kQ}{n}} \exp\left(2\pi i \frac{zn}{\tau} Q'\right) (Q' + Q + \alpha k) \ll \frac{1}{\left\| \frac{zn}{\delta} \right\|} \left(\frac{R-kQ}{n} + Q + \alpha k \right) \ll \frac{1}{\left\| \frac{zn}{\delta} \right\|} \frac{R}{n}.$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{(Q, Q') \in \Omega_{11}} \exp\left(2\pi i \frac{zn}{\tau} Q'\right) (Q' + Q + \alpha k) &\ll \frac{R}{n} \alpha k \frac{1}{\left\| \frac{zn}{\delta} \right\|}, \\ \sum_{k \leq n} \frac{R}{n} \alpha k \frac{1}{\left\| \frac{zn}{\delta} \right\|} &\ll R \alpha \frac{n}{\left\| \frac{zn}{\delta} \right\|}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\Sigma_{13} \ll \sum_{z=1}^{\delta} \sum_{\substack{n \leq U_1 \\ \delta \nmid zn}} R\alpha \frac{n}{\| \frac{zn}{\delta} \|} = \sum_{n \leq U_1} R\alpha n \sum_{\substack{z \leq \delta \\ \delta \nmid zn}} \frac{1}{\| \frac{zn}{\delta} \|} = \sum_{d|\delta} \sum_{\substack{n \leq \frac{U_1}{d} \\ (n, \frac{\delta}{d})=1}} R\alpha n d \sum_{\substack{z \leq \delta \\ \frac{\delta}{d} \nmid zn}} \frac{1}{\| \frac{zn}{\delta/d} \|}.$$

Поскольку $\sum_{z \leq \delta, \frac{\delta}{d} \nmid zn} \frac{1}{\| \frac{zn}{\delta/d} \|} \ll \delta \log \frac{\delta}{d}$, имеем

$$\Sigma_{13} \ll \sum_{d|\delta} d \delta \log \frac{\delta}{d} \sum_{n \leq \frac{U_1}{d}} R\alpha n \ll R^2 \sum_{d|\delta} d \log d.$$

Тем самым, лемма доказана.

8.2. Случай 2. Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 20. *Справедлива асимптотическая формула*

$$\Sigma_{23} = O\left(R^2 \sum_{d|\delta} d \log d \left(1 + \log \frac{U_1}{\delta}\right)\right),$$

где сумма Σ_{23} определена в формуле (34).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим в Σ_{23} отдельно суммы по областям Ω_{21} и Ω_{22} .

1. Используя следствие 2, получаем

$$\sum_{\alpha(n-k) < Q \leq \alpha n} \exp\left(2\pi i \frac{zk}{\delta} Q\right) (Q' + Q + \alpha k) \ll \frac{1}{\| \frac{zk}{\delta} \|} (Q' + \alpha n + \alpha n) \ll \frac{1}{\| \frac{zk}{\delta} \|} \alpha n.$$

Следовательно, имеем

$$\sum_{(n, Q) \in \Omega_{21}} \exp\left(2\pi i \frac{zk}{\delta} Q\right) (Q' + Q + \alpha k) \ll \frac{R^2 \alpha}{(Q' + \alpha k)^2} \frac{1}{\| \frac{zk}{\delta} \|}. \quad (57)$$

Суммируем (57) по Q' и получаем

$$\sum_{Q' \leq U_2 - \alpha k} \sum_{(n, Q) \in \Omega_{21}} \exp\left(2\pi i \frac{zk}{\delta} Q\right) (Q' + Q + \alpha k) \ll \frac{R^2}{k} \frac{1}{\| \frac{zk}{\delta} \|}.$$

2. Используя следствие 2, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha(n-k) < Q \leq \frac{R-nQ'}{k}} \exp\left(2\pi i \frac{zk}{\delta} Q\right) (Q' + Q + \alpha k) \\ \ll \frac{1}{\| \frac{zk}{\delta} \|} \left(\frac{R-nQ'}{k} + Q' + \alpha n \right) \ll \frac{1}{\| \frac{zk}{\delta} \|} \frac{R}{k}. \end{aligned}$$

Следовательно, имеем

$$\sum_{(n, Q) \in \Omega_{22}} \exp\left(2\pi i \frac{zk}{\delta} Q\right) (Q' + Q + \alpha k) \ll \frac{R\alpha k}{Q' + \alpha k} \frac{1}{\| \frac{zk}{\delta} \|}. \quad (58)$$

Суммируем (58) по Q' и получаем

$$\sum_{Q' \leq U_2 - \alpha k} \sum_{(n, Q) \in \Omega_{22}} \exp\left(2\pi i \frac{zk}{\delta} Q\right) (Q' + Q + \alpha k) \ll R\alpha k \frac{1}{\left\|\frac{zk}{\delta}\right\|} \log \frac{U_1}{k}.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \Sigma_{23} &\ll \sum_{z=1}^{\delta} \sum_{\substack{k \leq U_1 \\ \delta \nmid zk}} \left(\frac{R^2}{k} + R\alpha k \log \frac{U_1}{k} \right) \frac{1}{\left\|\frac{zn}{\delta}\right\|} \\ &\ll \sum_{d|\delta} \delta \log \frac{\delta}{d} \sum_{\substack{k \leq \frac{U_1}{d}}} \left(\frac{R^2}{dk} + R\alpha dk \log \frac{U_1}{dk} \right). \end{aligned}$$

Используя следствие 4, 2), получаем

$$\Sigma_{23} \ll \sum_{d|\delta} \delta \log \frac{\delta}{d} \left(\frac{R^2}{d} \log \frac{U_1}{d} + \frac{R^2}{d} \right).$$

Тем самым, лемма доказана.

8.3. Случай 3. Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 21. *Справедлива асимптотическая формула*

$$\Sigma_{33} = O\left(R^2 \sum_{d|\delta} d \log d\right),$$

где сумма Σ_{33} определена в формуле (35).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя следствие 2, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha(n-k) < Q \leq \frac{R-nQ'}{k}} \exp\left(2\pi i \frac{zk}{\delta} Q\right) (Q' + Q + \alpha k) \\ \ll \frac{1}{\left\|\frac{zk}{\delta}\right\|} \left(\frac{R-nQ'}{k} + Q' + \alpha k \right) \ll \frac{1}{\left\|\frac{zk}{\delta}\right\|} \frac{R}{k}. \end{aligned}$$

Следовательно, имеем

$$\sum_{(n, Q) \in \Omega_{31}} \exp\left(2\pi i \frac{zk}{\delta} Q\right) (Q' + Q + \alpha k) \ll \frac{R(R + \alpha k^2)}{k(Q' + \alpha k)} \frac{1}{\left\|\frac{zk}{\delta}\right\|}. \quad (59)$$

Суммируем (59) по Q' и получаем

$$\begin{aligned} \sum_{U_2 - \alpha k < Q' \leq U_2 - \alpha k + \frac{\alpha k^2}{U_1}} \sum_{(n, Q) \in \Omega_{31}} \exp\left(2\pi i \frac{zk}{\delta} Q\right) (Q' + Q + \alpha k) \\ \ll \frac{R}{k} (R + \alpha k^2) \log\left(1 + \frac{k^2}{U_1^2}\right) \frac{1}{\left\|\frac{zk}{\delta}\right\|} \ll \frac{R^2}{k} \log\left(1 + \frac{k^2}{U_1^2}\right) \frac{1}{\left\|\frac{zk}{\delta}\right\|}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}\Sigma_{33} &\ll \sum_{z=1}^{\delta} \sum_{\substack{k \leq U_1 \\ \delta \nmid zk}} \frac{R^2}{k} \log \left(1 + \frac{k^2}{U_1^2} \right) \frac{1}{\| \frac{zk}{\delta} \|} \ll \sum_{d|\delta} \delta \log \frac{\delta}{d} \sum_{k \leq \frac{U_1}{d}} \frac{R^2}{dk} \log \left(1 + \frac{d^2 k^2}{U_1^2} \right) \\ &\ll \sum_{d|\delta} \delta \log \frac{\delta}{d} \sum_{k \leq \frac{U_1}{d}} \frac{R^2}{U_1^2} dk \ll R^2 \sum_{d|\delta} d \log d.\end{aligned}$$

Тем самым, лемма доказана.

8.4. Случай 4. Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 22. *Справедлива асимптотическая формула*

$$\Sigma_{43} = O \left(R^2 \alpha \sum_{d|\delta} d \log d \left(1 + \log \frac{U_2}{\frac{\delta}{d}} \right) \right),$$

где сумма Σ_{43} определена в формуле (36).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим в Σ_{43} отдельно суммы по трем областям.

1. Используя следствие 2, получаем

$$\begin{aligned}\sum_{(n,k) \in \Omega_{41}} \exp \left(2\pi i \frac{zQ}{\delta} k \right) (Q' + Q + \alpha k) &\ll \frac{1}{\| \frac{zQ}{\delta} \|} \sum_{U_1 < n \leq \frac{R}{Q+Q'}} (Q' + Q + \alpha n) \\ &\ll \frac{1}{\| \frac{zQ}{\delta} \|} \sum_{U_1 < n \leq \frac{R}{Q+Q'}} \alpha n \ll \frac{1}{\| \frac{zQ}{\delta} \|} \frac{R^2 \alpha}{(Q + Q')^2}.\end{aligned}\quad (60)$$

Суммируя в (60) по Q' , имеем

$$\sum_{Q' \leq U_2 \frac{U_2 - Q}{U_2 + Q}} \frac{1}{\| \frac{zQ}{\delta} \|} \frac{R^2 \alpha}{(Q + Q')^2} \ll \frac{1}{\| \frac{zQ}{\delta} \|} \frac{R^2 \alpha}{Q}.$$

2. Используя следствие 2, получаем

$$\begin{aligned}\sum_{(n,k) \in \Omega_{42}} \exp \left(2\pi i \frac{zQ}{\delta} k \right) (Q' + Q + \alpha k) \\ &\ll \frac{1}{\| \frac{zQ}{\delta} \|} \sum_{\frac{R}{Q+Q'} < n \leq \frac{R+Q^2/\alpha}{Q+Q'}} \left(Q' + Q + \alpha \frac{R - nQ'}{Q} \right) \\ &\ll \frac{1}{\| \frac{zQ}{\delta} \|} \sum_{\frac{R}{Q+Q'} < n \leq \frac{R+Q^2/\alpha}{Q+Q'}} \frac{R\alpha}{Q} \ll \frac{1}{\| \frac{zQ}{\delta} \|} \frac{RQ}{Q + Q'}.\end{aligned}\quad (61)$$

Суммируя в (61) по Q' , имеем

$$\sum_{Q' \leq U_2 \frac{U_2 - Q}{U_2 + Q}} \frac{1}{\| \frac{zQ}{\delta} \|} \frac{RQ}{Q + Q'} \ll \frac{1}{\| \frac{zQ}{\delta} \|} RQ \log \left(\frac{U_2^2 + Q^2}{Q(U_2 + Q)} \right).$$

3. Используя следствие 2, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{(n,k) \in \Omega_{43}} \exp\left(2\pi i \frac{zQ}{\delta} k\right) (Q' + Q + \alpha k) \\ \ll \frac{1}{\left\| \frac{zQ}{\delta} \right\|} \sum_{U_1 + \frac{Q}{\alpha} < n \leq \frac{R+Q^2/\alpha}{Q+Q'}} \alpha n \ll \frac{1}{\left\| \frac{zQ}{\delta} \right\|} \alpha \frac{(R + \frac{Q^2}{\alpha})^2}{(Q + Q')^2}. \end{aligned} \quad (62)$$

Суммируя в (62) по Q' , имеем

$$\sum_{Q' \leq U_2 \frac{U_2 - Q}{U_2 + Q}} \frac{1}{\left\| \frac{zQ}{\delta} \right\|} \alpha \frac{(R + \frac{Q^2}{\alpha})^2}{(Q + Q')^2} \ll \frac{1}{\left\| \frac{zQ}{\delta} \right\|} \alpha \frac{(R + \frac{Q^2}{\alpha})^2}{Q} \ll \frac{1}{\left\| \frac{zQ}{\delta} \right\|} \frac{R^2 \alpha}{Q}.$$

Следовательно, верна оценка

$$\begin{aligned} \Sigma_{43} &\ll \sum_{z=1}^{\delta} \sum_{\substack{Q \leq U_2 \\ \delta \nmid zQ}} \frac{1}{\left\| \frac{zQ}{\delta} \right\|} \left(\frac{R^2 \alpha}{Q} + RQ \log \left(\frac{U_2^2 + Q^2}{Q(U_2 + Q)} \right) + \frac{R^2 \alpha}{Q} \right) \\ &\ll \sum_{d|\delta} \delta \log \frac{\delta}{d} \sum_{Q \leq \frac{U_2}{d}} \left(\frac{R^2 \alpha}{dQ} + RdQ \log \left(\frac{U_2^2 + d^2 Q^2}{dQ(U_2 + dQ)} \right) \right). \end{aligned}$$

Используя формулу (83) из следствия 4 (см. § 10), получаем

$$\Sigma_{43} \ll \sum_{d|\delta} \frac{\delta}{d} \log \frac{\delta}{d} \left(R^2 \alpha \log \frac{U_2}{d} + R^2 \alpha \right).$$

Тем самым, лемма доказана.

8.5. Случай 5. Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 23. *Справедлива асимптотическая формула*

$$\Sigma_{53} = O\left(R^2 \alpha \sum_{d|\delta} d \log d\right),$$

где сумма Σ_{53} определена в формуле (37).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим в Σ_{53} отдельно суммы по двум областям.

1. Используя следствие 2, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{(n,k) \in \Omega_{51}} \exp\left(2\pi i \frac{zQ}{\delta} k\right) (Q' + Q + \alpha k) &\ll \frac{1}{\left\| \frac{zQ}{\delta} \right\|} \sum_{U_1 < n \leq \frac{R}{Q+Q'}} (Q' + Q + \alpha n) \\ &\ll \frac{1}{\left\| \frac{zQ}{\delta} \right\|} \sum_{U_1 < n \leq \frac{R}{Q+Q'}} \alpha n \ll \frac{1}{\left\| \frac{zQ}{\delta} \right\|} \frac{R^2 \alpha}{(Q + Q')^2}. \end{aligned} \quad (63)$$

Суммируя в (63) по Q' , имеем

$$\sum_{U_2 \frac{U_2 - Q}{U_2 + Q} < Q' \leq U_2 - Q} \frac{1}{\left\| \frac{zQ}{\delta} \right\|} \frac{R^2 \alpha}{(Q + Q')^2} \ll \frac{1}{\left\| \frac{zQ}{\delta} \right\|} R^2 \alpha \frac{U_2 + Q}{U_2^2 + Q^2}.$$

2. Используя следствие 2, получаем

$$\begin{aligned}
 \sum_{(n,k) \in \Omega_{52}} \exp\left(2\pi i \frac{zQ}{\delta} k\right) (Q' + Q + \alpha k) \\
 \ll \frac{1}{\left\|\frac{zQ}{\delta}\right\|} \sum_{\frac{R}{Q+Q'} < n \leq \frac{R-U_1Q}{Q'}} \left(Q' + Q + \alpha \frac{R-nQ'}{Q}\right) \\
 \ll \frac{1}{\left\|\frac{zQ}{\delta}\right\|} \sum_{\frac{R}{Q+Q'} < n \leq \frac{R-U_1Q}{Q'}} \frac{R\alpha}{Q} \ll \frac{1}{\left\|\frac{zQ}{\delta}\right\|} \frac{R^2\alpha}{Q} \left(\frac{1}{Q'} - \frac{1}{Q+Q'}\right). \quad (64)
 \end{aligned}$$

Суммируя в (64) по Q' , имеем

$$\begin{aligned}
 \sum_{U_2 \frac{U_2-Q}{U_2+Q} < Q' \leq U_2-Q} \frac{R^2\alpha}{Q} \left(\frac{1}{Q'} - \frac{1}{Q+Q'}\right) \frac{1}{\left\|\frac{zQ}{\delta}\right\|} &\ll \frac{1}{\left\|\frac{zQ}{\delta}\right\|} \frac{R^2\alpha}{Q} \log\left(1 + \frac{Q^2}{U_2^2}\right) \\
 &\ll \frac{1}{\left\|\frac{zQ}{\delta}\right\|} \frac{R^2Q\alpha}{U_2^2}.
 \end{aligned}$$

Следовательно, используя формулу (84) из следствия 4 (см. § 10), получаем

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{53} &\ll \sum_{z=1}^{\delta} \sum_{\substack{Q \leq U_2 \\ \delta \nmid zQ}} \frac{1}{\left\|\frac{zQ}{\delta}\right\|} \left(R^2\alpha \frac{U_2+Q}{U_2^2+Q^2} + \frac{R^2Q\alpha}{U_2^2}\right) \\
 &\ll \sum_{d|\delta} \delta \log \frac{\delta}{d} \sum_{\substack{Q \leq \frac{U_2}{d}}} \left(R^2\alpha \frac{U_2+dQ}{U_2^2+d^2Q^2} + \frac{R^2dQ\alpha}{U_2^2}\right) \ll R^2\alpha \sum_{d|\delta} \frac{\delta}{d} \log \frac{\delta}{d}.
 \end{aligned}$$

Тем самым, лемма доказана.

§ 9. Доказательство основного результата

ТЕОРЕМА 6. *Справедлива оценка*

$$F - G = O\left(N^{4+\varepsilon} \left(x_1^{1+\varepsilon} \frac{x_3^\varepsilon}{x_2^\varepsilon} + x_2^{1+\varepsilon} \frac{x_3^\varepsilon}{x_1^\varepsilon} + x_3^{1+\varepsilon}\right)\right),$$

где $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$, $\varepsilon > 0$ – действительные числа, F и G определены в (19).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя в (29) полученные в леммах 9–23 асимптотические формулы и используя равенство

$$\begin{aligned}
 \frac{53}{150} + \frac{19}{75} + \left(\frac{2\pi}{15} - \frac{2\log 2}{5} - \frac{91}{900}\right) \\
 + \left(\frac{11\pi}{120} - \frac{251}{60} \log 2 + \frac{14}{5}\right) + \left(\frac{\pi}{24} + \frac{55}{12} \log 2 - \frac{119}{36}\right) = \frac{4\pi}{15},
 \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} \delta \sum_{\substack{a \leq R \\ \delta | a}} \lambda(a, \alpha) &= \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^5 \Sigma_{ij} = \frac{4\pi}{15} R^{5/2} \sqrt{\alpha} \sum_{\tau | \delta} \frac{\varphi(\tau)}{\tau^2} \\ &+ \sum_{\tau | \delta} \varphi(\tau) \left(\frac{R^2}{\tau} (1 + \log \tau) \left(1 + \log \frac{U_1}{\tau} + \log \frac{U_2}{\tau} \right) (1 + \alpha) + R^{3/2} \sqrt{\alpha} \log \tau \right) \\ &+ O \left(R^2 (1 + \alpha) \sum_{d | \delta} d \log d \right) + O \left(R^2 \sum_{d | \delta} d \log d \left(\log \frac{U_1}{\delta} + \alpha \log \frac{U_2}{\delta} \right) \right). \quad (65) \end{aligned}$$

Для оценки выражений из (65) воспользуемся тривиальными оценками функции Эйлера, логарифма и леммой 2.

1. Оценим первое асимптотическое слагаемое в (65). Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(\tau)}{\tau} (1 + \log \tau) \left(1 + \log \frac{U_1}{\tau} + \log \frac{U_2}{\tau} \right) &\ll (1 + \tau^\varepsilon) (1 + R^\varepsilon \tau^\varepsilon (\alpha^\varepsilon + \alpha^{-\varepsilon})) \\ &\ll R^\varepsilon \tau^\varepsilon (\alpha^\varepsilon + \alpha^{-\varepsilon}), \end{aligned}$$

имеют место оценки

$$\begin{aligned} R^\varepsilon \tau^\varepsilon (\alpha^\varepsilon + \alpha^{-\varepsilon}) (1 + \alpha) &\ll R^\varepsilon \tau^\varepsilon (\alpha^{1+\varepsilon} + \alpha^{-\varepsilon}), \\ \varphi(\tau) \sqrt{\alpha} \log \tau &\ll \sqrt{\alpha} \tau^{1+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\tau | \delta} \varphi(\tau) \left(\frac{R^2}{\tau} (1 + \log \tau) \left(1 + \log \frac{U_1}{\tau} + \log \frac{U_2}{\tau} \right) (1 + \alpha) + R^{3/2} \sqrt{\alpha} \log \tau \right) \\ \ll R^{2+\varepsilon} \delta^\varepsilon (\alpha^{1+\varepsilon} + \alpha^{-\varepsilon}) + R^{3/2} \sqrt{\alpha} \delta^{1+\varepsilon}. \end{aligned}$$

2. Оценим второе асимптотическое слагаемое в (65):

$$R^2 (1 + \alpha) \sum_{d | \delta} d \log d \ll R^2 (1 + \alpha) \delta^{1+\varepsilon}.$$

3. Оценим третье асимптотическое слагаемое в (65):

$$R^2 \sum_{d | \delta} d \log d \left(\log \frac{U_1}{\delta} + \alpha \log \frac{U_2}{\delta} \right) \ll R^{2+\varepsilon} \delta^{1+\varepsilon} (\alpha^{1+\varepsilon} + \alpha^{-\varepsilon}).$$

Используя полученные оценки асимптотических слагаемых, имеем

$$\delta \sum_{\substack{a \leq R \\ \delta | a}} \lambda(a, \alpha) = \frac{4\pi}{15} R^{5/2} \sqrt{\alpha} \sum_{\tau | \delta} \frac{\varphi(\tau)}{\tau^2} + O(R^{2+\varepsilon} \delta^{1+\varepsilon} (\alpha^{1+\varepsilon} + \alpha^{-\varepsilon})). \quad (66)$$

Далее нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 24. *Справедливо асимптотическое равенство*

$$\sum_{\substack{a \leq R \\ \delta | a}} \sigma_{-1}(a) a^{3/2} = \frac{\pi^2}{15} \frac{R^{5/2}}{\delta} \sum_{\tau | \delta} \frac{\varphi(\tau)}{\tau^2} + O(R^{3/2+\varepsilon} \delta^\varepsilon), \quad (67)$$

где $\sigma_{-1}(a) = \sum_{d|a} d^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем левую часть в (67):

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{a \leq R \\ \delta | a}} \sigma_{-1}(a) a^{3/2} &= \sum_{d \leq R} \frac{1}{d} \sum_{\substack{a \leq \frac{R}{d} \\ \delta | ad}} a^{3/2} d^{3/2} = \sum_{\tau | \delta} \sum_{\substack{d \leq R \\ (d, \delta) = \tau}} \sqrt{d} \sum_{\substack{a \leq \frac{R}{d} \\ \frac{\delta}{\tau} | a}} a^{3/2} \\ &= \sum_{\tau | \delta} \sum_{\substack{d \leq R \\ (d, \delta) = \tau}} \sqrt{d} \left(\frac{2R^{5/2}\tau}{5d^{5/2}\delta} + O\left(\frac{R^{3/2}}{d^{3/2}}\right) \right) \\ &= \frac{2}{5} \frac{R^{5/2}}{\delta} \sum_{\tau | \delta} \sum_{\substack{d \leq \frac{R}{\tau} \\ (d, \frac{\delta}{\tau}) = 1}} \frac{1}{\tau d^2} + O\left(R^{3/2} \sum_{\tau | \delta} \sum_{\substack{d \leq \frac{R}{\tau} \\ (d, \frac{\delta}{\tau}) = 1}} \frac{1}{\tau d}\right). \end{aligned}$$

Совершая замену переменных $\delta_1 = \frac{\delta}{\tau}$ и обозначая $\tau = \delta_1$, получаем

$$\sum_{\substack{a \leq R \\ \delta | a}} \sigma_{-1}(a) a^{3/2} = \frac{2}{5} \frac{R^{5/2}}{\delta^2} \sum_{\tau | \delta} \tau \sum_{\substack{d \leq \frac{R\tau}{\delta} \\ (d, \tau) = 1}} \frac{1}{d^2} + O\left(\frac{R^{3/2}}{\delta} \sum_{\tau | \delta} \tau \sum_{\substack{d \leq \frac{R\tau}{\delta} \\ (d, \tau) = 1}} \frac{1}{d}\right). \quad (68)$$

Преобразуем обе внутренние суммы в последнем равенстве.

1. Преобразуем первое слагаемое в (68):

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{d \leq \frac{R\tau}{\delta} \\ (d, \tau) = 1}} \frac{1}{d^2} &= \sum_{d \leq \frac{R\tau}{\delta}} \frac{1}{d^2} \sum_{l | (d, \tau)} \mu(l) = \sum_{l | \tau} \frac{\mu(l)}{l^2} \sum_{d \leq \frac{R}{l\delta}} \frac{1}{d^2} \\ &= \zeta(2) \sum_{l | \tau} \frac{\mu(l)}{l^2} + \sum_{l | \tau} O\left(\frac{\delta}{R\tau l}\right) = \zeta(2) \sum_{l | \tau} \frac{\mu(l)}{l^2} + O\left(\frac{\delta \sigma_{-1}(\tau)}{R\tau}\right). \end{aligned}$$

2. Для оценки остаточного члена в (68) используем очевидное соотношение

$$\sum_{\substack{d \leq \frac{R\tau}{\delta} \\ (d, \tau) = 1}} \frac{1}{d} = O\left(\log \frac{R}{\frac{\delta}{\tau}}\right).$$

Следовательно, имеем

$$O\left(\frac{R^{3/2}}{\delta} \sum_{\tau | \delta} \tau \sum_{\substack{d \leq \frac{R\tau}{\delta} \\ (d, \tau) = 1}} \frac{1}{d}\right) = O\left(R^{3/2} \sum_{\tau | \delta} \frac{\log \frac{R}{\tau}}{\tau}\right) = O(R^{3/2+\varepsilon} \delta^\varepsilon).$$

Таким образом, получаем

$$\sum_{\substack{a \leq R \\ \delta | a}} \sigma_{-1}(a) a^{3/2} = \frac{2\zeta(2)}{5} \frac{R^{5/2}}{\delta^2} \sum_{\tau | \delta} \tau \sum_{l | \tau} \frac{\mu(l)}{l^2} + O\left(\frac{R^{3/2}}{\delta} \sum_{\tau | \delta} \sigma_{-1}(\tau)\right) + O(R^{3/2+\varepsilon} \delta^\varepsilon).$$

Используя соотношение

$$\sum_{\tau | \delta} \tau \sum_{l | \tau} \frac{\mu(l)}{l^2} = \sum_{l | \delta} \frac{\mu(l)}{l^2} \sum_{\tau | \frac{\delta}{l}} l \tau = \sum_{\tau | \delta} \tau \sum_{l | \frac{\delta}{\tau}} \frac{\mu(l)}{l} = \sum_{\tau | \delta} \frac{\tau^2}{\delta} \varphi\left(\frac{\delta}{\tau}\right) = \delta \sum_{\tau | \delta} \frac{\varphi(\tau)}{\tau^2},$$

получаем

$$\sum_{\substack{a \leq R \\ \delta | a}} \sigma_{-1}(a) a^{3/2} = \frac{\pi^2}{15} \frac{R^{5/2}}{\delta} \sum_{\tau | \delta} \frac{\varphi(\tau)}{\tau^2} + O(R^{3/2+\varepsilon} \delta^\varepsilon).$$

Тем самым, лемма доказана.

Подставляя результат леммы 24 в формулу (66), получаем

$$\sum_{\substack{a \leq R \\ \delta | a}} \lambda(a, \alpha) = \sum_{\substack{a \leq R \\ \delta | a}} \frac{4}{\pi} \sigma_{-1}(a) a^{3/2} \sqrt{\alpha} + O(R^{2+\varepsilon} \delta^\varepsilon (\alpha^{1+\varepsilon} + \alpha^{-\varepsilon})).$$

Подставляя последнюю формулу в (26), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{a \leq R \\ \delta | a}} \frac{\lambda(a, \alpha)}{a} &= \frac{1}{R} \sum_{\substack{a \leq R \\ \delta | a}} \frac{4}{\pi} \sigma_{-1}(a) a^{3/2} \sqrt{\alpha} + O(R^{1+\varepsilon} \delta^\varepsilon (\alpha^{1+\varepsilon} + \alpha^{-\varepsilon})) \\ &\quad + \int_1^R \left(\frac{1}{t^2} \sum_{\substack{a \leq t \\ \delta | a}} \frac{4}{\pi} \sigma_{-1}(a) a^{3/2} \sqrt{\alpha} + O(t^\varepsilon \delta^\varepsilon (\alpha^{1+\varepsilon} + \alpha^{-\varepsilon})) \right) dt. \end{aligned}$$

Применяя преобразование Абеля (лемма 3), получаем

$$\sum_{\substack{a \leq R \\ \delta | a}} \frac{\lambda(a, \alpha)}{a} = \sum_{\substack{a \leq R \\ \delta | a}} \frac{4}{\pi} \sigma_{-1}(a) \sqrt{a} \sqrt{\alpha} + O(R^{1+\varepsilon} \delta^\varepsilon (\alpha^{1+\varepsilon} + \alpha^{-\varepsilon})).$$

Следовательно, используя формулу (25), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{a \leq R \\ \delta | a}} \frac{\lambda^*(a, \alpha)}{a} &= \sum_{n | \delta} \sum_{\substack{d_1 d_2 \leq R \\ (d_1 d_2, \delta) = n}} \frac{\mu(d_1) \mu(d_2)}{d_1} \sum_{\substack{a \leq \frac{R}{d_1 d_2} \\ \frac{\delta}{n} | a}} \frac{4}{\pi} \sigma_{-1}(a) \sqrt{a} \sqrt{\frac{d_1 \alpha}{d_2}} \\ &\quad + O\left(\sum_{n | \delta} \sum_{\substack{d_1 d_2 \leq R \\ (d_1 d_2, \delta) = n}} \frac{1}{d_1} \frac{R^{1+\varepsilon}}{(d_1 d_2)^{1+\varepsilon}} \frac{\delta^\varepsilon}{n^\varepsilon} \left(\alpha^{1+\varepsilon} \frac{d_1^{1+\varepsilon}}{d_2^{1+\varepsilon}} + \alpha^{-\varepsilon} \frac{d_1^{-\varepsilon}}{d_2^{-\varepsilon}} \right) \right). \end{aligned}$$

Совершая в обратной последовательности преобразования, проведенные в формуле (25), получаем

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n|\delta} \sum_{\substack{d_1 d_2 \leq R \\ (d_1 d_2, \delta) = n}} \frac{\mu(d_1)\mu(d_2)}{d_1} \sum_{\substack{a \leq \frac{R}{d_1 d_2} \\ \frac{\delta}{n} | a}} \sigma_{-1}(a) \sqrt{a} \sqrt{\frac{d_1}{d_2}} \\
 &= \sum_{n|\delta} \sum_{\substack{d_1 d_2 \leq R \\ (d_1 d_2, \delta) = n}} \frac{\mu(d_1)\mu(d_2)}{d_1} \sum_{\substack{a \leq \frac{R}{d_1 d_2} \\ \frac{\delta}{n} d_1 d_2 | a}} \sigma_{-1}\left(\frac{a}{d_1 d_2}\right) \sqrt{\frac{a}{d_1 d_2}} \sqrt{\frac{d_1}{d_2}} \\
 &= \sum_{\substack{a \leq R \\ \delta | a}} \sqrt{a} \sum_{d_1 d_2 | a} \frac{\mu(d_1)\mu(d_2)}{d_1 d_2} \sigma_{-1}\left(\frac{a}{d_1 d_2}\right).
 \end{aligned}$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{a \leq R \\ \delta | a}} \frac{\lambda^*(a, \alpha)}{a} &= \frac{4}{\pi} \sqrt{\alpha} \sum_{\substack{a \leq R \\ \delta | a}} \sqrt{a} \sum_{d_1 d_2 | a} \frac{\mu(d_1)\mu(d_2)}{d_1 d_2} \sigma_{-1}\left(\frac{a}{d_1 d_2}\right) \\
 &\quad + O(R^{1+\varepsilon} \delta^\varepsilon (\alpha^{1+\varepsilon} + \alpha^{-\varepsilon})).
 \end{aligned}$$

Используя формулу

$$\sum_{d_1 d_2 | a} \frac{\mu(d_1)\mu(d_2)}{d_1 d_2} \sigma_{-1}\left(\frac{a}{d_1 d_2}\right) = \frac{\varphi(a)}{a},$$

доказанную в статье [13, § 4], получаем

$$\sum_{\substack{a \leq R \\ \delta | a}} \frac{\lambda^*(a, \alpha)}{a} = \frac{4}{\pi} \sqrt{\alpha} \sum_{\substack{a \leq R \\ \delta | a}} \frac{\varphi(a)}{\sqrt{a}} + O(R^{1+\varepsilon} \delta^\varepsilon (\alpha^{1+\varepsilon} + \alpha^{-\varepsilon})).$$

Подставляя последнее выражение в лемму 7, имеем

$$\begin{aligned}
 F &= \sum_{a \leq x_3 N} \sum_{b \leq x_1 N} \sum_{\substack{c \leq x_2 N \\ (a, b, c) = 1}} f(a, b, c) = \sum_{\substack{d_1 d_2 \leq x_3 N \\ (d_1, d_2) = 1}} d_1 d_2 \sum_{\delta_1 \leq \frac{x_3 N}{d_1}} \sum_{\delta_2 \leq \frac{x_3 N}{d_2}} \frac{\mu(\delta_1)}{\delta_1} \frac{\mu(\delta_2)}{\delta_2} (\delta_1, \delta_2) \\
 &\quad \times \int_0^{\frac{x_1 N}{d_1}} \int_0^{\frac{x_2 N}{d_2}} \left(\sum_{\substack{a \leq \frac{x_3 N}{d_1 d_2} \\ \delta | a}} \frac{8}{\pi} \frac{\varphi(a)}{\sqrt{a}} \sqrt{t_1 t_2} + \left(\frac{x_3 N}{d_1 d_2} \right)^{1+\varepsilon} \delta^\varepsilon O\left(\frac{t_2^{1+\varepsilon}}{t_1^\varepsilon} + \frac{t_1^{1+\varepsilon}}{t_2^\varepsilon} \right) \right) dt_1 dt_2 \\
 &\quad + O(x_1 x_2 x_3^{2+\varepsilon} N^{4+\varepsilon}).
 \end{aligned}$$

Учитывая лемму 8, получаем

$$\begin{aligned}
 F - G &= \sum_{a \leq x_3 N} \sum_{b \leq x_1 N} \sum_{\substack{c \leq x_2 N \\ (a, b, c) = 1}} \left(f(a, b, c) - \frac{8}{\pi} \sqrt{abc} \right) \\
 &= \sum_{\substack{d_1 d_2 \leq x_3 N \\ (d_1, d_2) = 1}} d_1 d_2 \sum_{\delta_1 \leq \frac{x_3 N}{d_1}} \sum_{\delta_2 \leq \frac{x_3 N}{d_2}} \frac{\mu(\delta_1)}{\delta_1} \frac{\mu(\delta_2)}{\delta_2} (\delta_1, \delta_2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_0^{\frac{x_1 N}{d_1}} \int_0^{\frac{x_2 N}{d_2}} \left(\frac{x_3 N}{d_1 d_2} \right)^{1+\varepsilon} \delta^\varepsilon O\left(\frac{t_2^{1+\varepsilon}}{t_1^\varepsilon} + \frac{t_1^{1+\varepsilon}}{t_2^\varepsilon} \right) dt_1 dt_2 + O(x_1 x_2 x_3^{2+\varepsilon} N^{4+\varepsilon}) \\
& = x_3^{1+\varepsilon} N^{4+\varepsilon} \sum_{\substack{d_1 d_2 \leq x_3 N \\ (d_1, d_2)=1}} \left(\frac{x_1^{1-\varepsilon} x_2^{2+\varepsilon}}{d_1^{1+\varepsilon} d_2^{2+\varepsilon}} + \frac{x_2^{1-\varepsilon} x_1^{2+\varepsilon}}{d_2^{1+\varepsilon} d_1^{2+\varepsilon}} \right) \\
& \quad \times \sum_{\delta_1 \leq \frac{x_3 N}{d_1}} \sum_{\delta_2 \leq \frac{x_3 N}{d_2}} \frac{(\delta_1, \delta_2)}{\delta_1 \delta_2} \delta^\varepsilon + O(x_1 x_2 x_3^{2+\varepsilon} N^{4+\varepsilon}).
\end{aligned}$$

Поскольку

$$\delta = \text{НОК}\left(\frac{\delta_1}{(\delta_1, d_2)}, \frac{\delta_2}{(\delta_2, d_1)}\right) \leq \text{НОК}(\delta_1, \delta_2) = \frac{(\delta_1, \delta_2)}{\delta_1 \delta_2},$$

имеет место оценка

$$\sum_{\delta_1 \leq \frac{x_3 N}{d_1}} \sum_{\delta_2 \leq \frac{x_3 N}{d_2}} \frac{(\delta_1, \delta_2)}{\delta_1 \delta_2} \delta^\varepsilon \ll \sum_{d \leq \frac{x_3 N}{\max(d_1, d_2)}} \sum_{\delta_1 \leq \frac{x_3 N}{d d_1}} \sum_{\delta_2 \leq \frac{x_3 N}{d d_2}} \frac{1}{(d \delta_1 \delta_2)^{1-\varepsilon}} \ll \frac{x_3^\varepsilon N^\varepsilon}{(d_1 d_2)^\varepsilon}.$$

Следовательно, получаем

$$F - G = O\left(N^{4+\varepsilon} x_1 x_2 x_3 \left(\frac{x_2^{1+\varepsilon} x_3^\varepsilon}{x_1^\varepsilon} + \frac{x_1^{1+\varepsilon} x_3^\varepsilon}{x_2^\varepsilon} + x_3^{1+\varepsilon} \right)\right).$$

Тем самым, теорема доказана.

Из теоремы 6 следует утверждение теоремы 5.

Применяя лемму 4, где

$$u(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2 x_3}}, \quad c(n_1, n_2, n_3) = f(n_1, n_2, n_3) - \frac{8}{\pi} \sqrt{n_1 n_2 n_3},$$

и учитывая результат теоремы 5, получаем утверждение следствия 1.

§ 10. Приложение

Следующая лемма также общеизвестна (формула суммирования Эйлера–Маклорена).

ЛЕММА 25. Пусть функции $\rho(x)$, $\sigma(x)$ определяются равенствами

$$\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}, \quad \sigma(x) = \int_0^x \rho(t) dt.$$

Тогда:

(а) если функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, то

$$\begin{aligned}
\sum_{a < x \leq b} f(x) &= \int_a^b f(x) dx + \rho(b)f(b) - \rho(a)f(a) + \sigma(a)f'(a) - \sigma(b)f'(b) \\
&\quad + \int_a^b \sigma(x)f''(x) dx;
\end{aligned}$$

(b) если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, то

$$\sum_{a < x \leq b} f(x) = \int_a^b f(x) dx + \rho(b)f(b) - \rho(a)f(a) - \int_a^b \rho(x)f'(x) dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [8].

СЛЕДСТВИЕ 3. Если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и монотонна, то

$$\sum_{a < x \leq b} f(x) = \int_a^b f(x) dx + O(f(b)) + O(f(a)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если функция монотонна, то

$$\left| \int_a^b \rho(x)f'(x) dx \right| \ll \int_a^b |f'(x)| dx = O(f(b)) + O(f(a)).$$

Теперь утверждение непосредственно следует из леммы 25, (b).

СЛЕДСТВИЕ 4. 1) Для любого натурального p выполнено равенство

$$\sum_{n \leq R} n^p = \frac{R^{p+1}}{p+1} + O(R^p).$$

2) Для любого натурального p выполнено равенство

$$\sum_{n \leq R} n^p \log \frac{R}{n} = \frac{R^{p+1}}{(p+1)^2} + O(R^p \log R).$$

3) Справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\sum_{n \leq R} n \frac{R-n}{R+n} = \left(\frac{3}{2} - 2 \log 2 \right) R^2 + O(R), \quad (69)$$

$$\sum_{n \leq R} n^2 \frac{(R-n)^2}{(R+n)^2} = \left(\frac{25}{3} - 12 \log 2 \right) R^3 + O(R^2), \quad (70)$$

$$\sum_{n \leq R} \frac{(R-n)}{n^2 + R^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2 + O\left(\frac{1}{R}\right), \quad (71)$$

$$\sum_{n \leq R} n^2 \log \left(1 + \frac{R}{n} \frac{R-n}{R+n} \right) = \left(\frac{5}{6} - \frac{\log 2}{3} - \frac{\pi}{6} \right) R^3 + O(R^2 \log R), \quad (72)$$

$$\sum_{n \leq R} n^2 \frac{R-n}{R^2 + n^2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\log 2}{2} - \frac{\pi}{4} \right) R^2 + O(R), \quad (73)$$

$$\sum_{n \leq R} n^3 \frac{R-n}{R+n} = \left(\frac{17}{12} - 2 \log 2 \right) R^4 + O(R^3), \quad (74)$$

$$\sum_{n \leq R} n^4 \log \left(1 + \frac{R}{n} \frac{R-n}{R+n} \right) = \left(\frac{\pi}{10} - \frac{3}{20} - \frac{\log 2}{5} \right) R^5 + O(R^4 \log R), \quad (75)$$

$$\sum_{n \leq R} n^4 \frac{R-n}{R^2+n^2} = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{5}{12} - \frac{\log 2}{2} \right) R^4 + O(R^3), \quad (76)$$

$$\sum_{n \leq R} n^2 \frac{R-n}{R+n} = \left(2 \log 2 - \frac{4}{3} \right) R^3 + O(R^2), \quad (77)$$

$$\sum_{n \leq R} n \frac{(R-n)^2}{(R+n)^2} = \left(8 \log 2 - \frac{11}{2} \right) R^2 + O(R), \quad (78)$$

$$\sum_{n \leq R} n \log \left(1 + \frac{n}{R} \right) = \frac{R^2}{4} + O(R), \quad (79)$$

$$\sum_{n \leq R} n^2 \log \left(1 + \frac{n}{R} \right) = \left(\frac{2}{3} \log 2 - \frac{5}{18} \right) R^3 + O(R^2), \quad (80)$$

$$\sum_{n \leq R} \frac{1}{n^2} \log \left(1 + \frac{n^2}{R^2} \right) = \left(\frac{\pi}{2} - \log 2 \right) \frac{1}{R} + O\left(\frac{1}{R^2} \right), \quad (81)$$

$$\sum_{n \leq R} \frac{(R-n)^2}{(R+n)^2} = (3 - 4 \log 2) R + O(1), \quad (82)$$

$$\sum_{n \leq R} n \log \frac{R^2 + n^2}{n(R+n)} = O(R^2), \quad (83)$$

$$\sum_{n \leq R} \frac{R+n}{n^2 + R^2} = O(1). \quad (84)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно применяем лемму 25, (b).

Список литературы

1. J. L. Ramirez Alfonsin, *The Diophantine Frobenius problem*, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., **30**, Oxford Univ. Press, Oxford, 2005.
2. А. В. Устинов, “Решение задачи Арнольда о слабой асимптотике для чисел Фробениуса с тремя аргументами”, *Матем. сб.*, **200**:4 (2009), 131–160; англ. пер.: A. V. Ustinov, “The solution of Arnold’s problem on the weak asymptotics of Frobenius numbers with three arguments”, *Sb. Math.*, **200**:4 (2009), 597–627.
3. J. L. Davison, “On the linear Diophantine problem of Frobenius”, *J. Number Theory*, **48**:3 (1994), 353–363.
4. А. В. Устинов, “Асимптотическое поведение первого и второго моментов для числа шагов в алгоритме Евклида”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72**:5 (2008), 189–224; англ. пер.: A. V. Ustinov, “Asymptotic behaviour of the first and second moments for the number of steps in the Euclidean algorithm”, *Izv. Math.*, **72**:5 (2008), 1023–1059.
5. Е. Н. Жабицкая, “Средняя длина приведенной регулярной непрерывной дроби”, *Матем. сб.*, **200**:8 (2009), 79–110; англ. пер.: E. N. Zhabitskaya, “The average length of reduced regular continued fractions”, *Sb. Math.*, **200**:8 (2009), 1181–1214.
6. D. E. Knuth, A. C. Yao, “Analysis of the subtractive algorithm for greatest common divisors”, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **72**:12 (1975), 4720–4722.
7. К. Чандрасекхаран, *Введение в аналитическую теорию чисел*, Мир, М., 1974; пер. с англ.: K. Chandrasekharan, *Introduction to analytic number theory*, Springer-Verlag, New York, 1968.

8. А. А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, Наука, М., 1983; англ. пер.: A. Karatsuba, *Basic analytic number theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
9. Н. М. Коробов, *Тригонометрические суммы и их приложения*, Наука, М., 1989.
10. Ö. J. Rödseth, “On a linear Diophantine problem of Frobenius”, *J. Reine Angew. Math.*, **301** (1978), 171–178.
11. О. Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Bd. I. *Elementare Kettenbrüche*, Teuber, Stuttgart, 1954.
12. S. M. Johnson, “A linear Diophantine problem”, *Canad. J. Math.*, **12** (1960), 390–398.
13. Н. Heilbronn, “On the average length of a class of finite continued fractions”, *Number Theory and Analysis*, Plenum, New York, 1969, 87–96.

Д. А. ФРОЛЕНКОВ (D. A. FROLENKOV)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет
E-mail: frolenkov_adv@mail.ru

Поступило в редакцию
28.02.2011
14.06.2011