Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Е. Широков, Энтропийные характеристики подмножеств состояний. II, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2007, том 71, выпуск 1, 187–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im731>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 16:37:47

УДК 519.722

М. Е. Широков

Энтропийные характеристики подмножеств состояний. II

Исследуются свойства χ -емкости как функции множества квантовых состояний в бесконечномерном случае. Рассмотрены различные типы подмножеств состояний, для которых определены χ -емкость и оптимальное среднее. Построены контрпримеры, иллюстрирующие общие результаты. Показана возможность “конечномерной аппроксимации” χ -емкости и оптимального среднего произвольного множества квантовых состояний.

Библиография: 14 наименований.

§ 1. Введение

Настоящая статья посвящена систематическому изучению свойств квантовой энтропии и χ -емкости¹ и является логическим продолжением работы [11].

В § 2 рассматриваются общие свойства χ -емкости как функции множества состояний (теорема 1 и следствия 1, 4, 5). В частности, исследуются свойства непрерывности χ -емкости по отношению к монотонным семействам множеств и вопрос о существовании минимального замкнутого множества с данной χ -емкостью. Показана устойчивость χ -емкости и оптимального среднего по отношению к квантовому шуму. Получены оценки снизу и сверху для χ -емкости конечных объединений (предложение 1, замечание 3). Из полученных результатов, связанных с χ -емкостью, вытекает несколько наблюдений об общих свойствах множеств состояний и квантовой энтропии (следствия 2, 3, замечание 2, наблюдение, приведенное после следствия 4).

В § 3 общие результаты, полученные в работе [11] и § 2 настоящей статьи, использованы для исследования свойств различных множеств состояний. Получены условия ограниченности и непрерывности сужения энтропии на различные множества состояний (предложения 2, 8, 10 и следствие 6). Определены χ -емкость и оптимальное среднее для различных множеств состояний и исследованы связанные с ними вопросы такие, как существование оптимальной меры, регулярность и др. (предложения 3–7, 9, 10). Построены следующие примеры множеств с конечной χ -емкостью (в пп. 3.1–3.3 и 3.5 соответственно):

- i) замкнутое счетное множество, не имеющее оптимальной меры;
- ii) замкнутое множество, не содержащее минимального замкнутого подмножества с той же самой χ -емкостью;
- iii) убывающая последовательность замкнутых множеств с одинаковой положительной χ -емкостью, пересечение которых имеет нулевую χ -емкость;
- iv) замкнутое множество, имеющее оптимальную меру, но не имеющее атомической оптимальной меры.

¹Эта величина, называемая в зарубежной литературе *the Holevo capacity*, обычно связывается с понятием квантового канала связи (см., например, [9]).

Работа выполнена при поддержке научной программы отделения математики РАН “Современные проблемы теоретической математики” и РФФИ (проект № 06-01-00164-а).

В § 4 рассматривается “конструктивный” подход к определению χ -емкости и оптимального среднего для произвольного множества квантовых состояний. Показано, что, подобно случаю энтропии и относительной энтропии, χ -емкость и оптимальное среднее можно сначала определить для множеств квантовых состояний в конечномерном гильбертовом пространстве, а затем расширить это определение на множества квантовых состояний в бесконечномерном гильбертовом пространстве посредством предельного перехода (теорема 2). Такое определение дает принципиальную возможность численной аппроксимации χ -емкости и оптимального среднего произвольного множества квантовых состояний.

Используемые в статье обозначения полностью согласуются с обозначениями, принятыми в ч. I настоящей работы [11].

§ 2. О свойствах χ -емкости

В данном параграфе рассмотрены общие свойства χ -емкости как функции множества состояний и особая роль оптимального среднего. В работе [11] получено достаточное условие существования оптимальной меры для замкнутого множества состояний (теорема 2), которое заключается в выполнении для этого множества одного из двух условий непрерывности. Как будет показано далее, от выполнения этих условий зависят также некоторые другие свойства множества состояний, связанные с χ -емкостью. Поэтому удобно ввести следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Произвольное множество $\mathcal{A}$ с конечной χ -емкостью называется *регулярным*, если выполнено одно из следующих условий:

- 1) $H(\Omega(\mathcal{A})) < +\infty$ и $\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\rho_n) = H(\Omega(\mathcal{A}))$ для любой последовательности $\{\rho_n\}$ состояний из $\text{co}(\mathcal{A})$, H -сходящейся² к состоянию $\Omega(\mathcal{A})$;
- 2) функция $\rho \mapsto H(\rho \parallel \Omega(\mathcal{A}))$ непрерывна³ на множестве $\overline{\mathcal{A}}$.

Заметим, что непрерывность энтропии на множестве $\overline{\text{co}}(\mathcal{A})$ гарантирует регулярность множества $\mathcal{A}$, однако это слишком ограничительное требование. В некотором смысле условия в данном определении являются минимальными требованиями непрерывности, обеспечивающими “хорошие” свойства χ -емкости; в частности, в силу [11, теорема 2] они гарантируют существование оптимальной меры. Эти условия различны: существуют множества, для которых выполнено первое условие, но не выполнено второе, и наоборот. В большинстве примеров, рассмотренных в § 3, множества с конечной χ -емкостью являются регулярными. Примеры нерегулярных множеств с конечной χ -емкостью и следствия этой нерегулярности рассмотрены в пп. 3.1–3.3.

В следующей теореме собраны различные свойства χ -емкости и оптимального среднего, которые будут использованы далее.

ТЕОРЕМА 1. *Имеют место следующие свойства⁴:*

- 1) $\overline{C}(\mathcal{A}) \geq 0$ для любого множества $\mathcal{A}$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда множество $\mathcal{A}$ состоит из одного состояния;
- 2) $\overline{C}(\mathcal{A}) = \overline{C}(\overline{\text{co}}(\mathcal{A}))$ и $\Omega(\mathcal{A}) = \Omega(\overline{\text{co}}(\mathcal{A}))$ для любого множества $\mathcal{A}$;

²Это значит, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\rho_n \parallel \Omega(\mathcal{A})) = 0$.

³Здесь и далее имеется в виду непрерывность относительно следовой нормы.

⁴Во всех утверждениях, в которых упомянуто оптимальное среднее состояния некоторого множества, предполагается, что это множество имеет конечную χ -емкость.

3) если $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, то $\overline{C}(\mathcal{A}) \leq \overline{C}(\mathcal{B})$, причем если имеет место равенство⁵ в этом неравенстве, то $\Omega(\mathcal{A}) = \Omega(\mathcal{B})$;

4) если $\overline{C}(\mathcal{A}) < +\infty$, то множество $\mathcal{A}$ предкомпактно и, следовательно, $\overline{C}(\mathcal{A}) = \overline{C}(\text{Ext}(\overline{\mathcal{A}}))$;

5) если $d(\Omega(\mathcal{A})) < 1$, то множество $\mathcal{A}$ регулярно и энтропия ограничена на множестве $\overline{\text{co}}(\mathcal{A})$, если $d(\Omega(\mathcal{A})) = 0$, то энтропия непрерывна на множестве $\overline{\text{co}}(\mathcal{A})$;

6) если $\{\mathcal{A}_n\}$ – последовательность множеств такая, что $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+1}$ для всех n , то

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \overline{C}(\mathcal{A}_n) = \overline{C}\left(\bigcup_n \mathcal{A}_n\right), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \Omega(\mathcal{A}_n) = \Omega\left(\bigcup_n \mathcal{A}_n\right);$$

7) если $\{\mathcal{A}_n\}$ – последовательность замкнутых множеств такая, что $\mathcal{A}_n \supseteq \mathcal{A}_{n+1}$ для всех n , то равенства

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \overline{C}(\mathcal{A}_n) = \overline{C}\left(\bigcap_n \mathcal{A}_n\right), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \Omega(\mathcal{A}_n) = \Omega\left(\bigcap_n \mathcal{A}_n\right)$$

имеют место при выполнении одного из следующих условий⁶:

- а) множество $\mathcal{A}_1$ регулярно и $\Omega(\mathcal{A}_n) = \Omega(\mathcal{A}_1)$ для всех n ;
- б) сужение энтропии $H(\rho)$ на множество $\overline{\text{co}}(\mathcal{A}_1)$ непрерывно в некоторой предельной точке⁷ ω последовательности $\{\Omega(\mathcal{A}_n)\}$;
- в) функция $\rho \mapsto H(\rho \| \omega)$ непрерывна на множестве $\mathcal{A}_1$ для некоторой предельной точки ω последовательности $\{\Omega(\mathcal{A}_n)\}$;

8) множество $\mathcal{A}$ с конечной χ -емкостью содержится в максимальном множестве $\mathcal{V}_{\Omega(\mathcal{A}), \overline{C}(\mathcal{A})}$ с той же самой χ -емкостью⁸;

9) каждое регулярное замкнутое множество $\mathcal{A}$ с конечной χ -емкостью содержит минимальное замкнутое подмножество с той же самой χ -емкостью⁹;

10) если $\overline{C}(\mathcal{A}) < +\infty$ и $\overline{C}(\mathcal{B}) < +\infty$, то $\overline{C}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) < +\infty$, в частности $\overline{C}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \max(\overline{C}(\mathcal{A}), \overline{C}(\mathcal{B}))$ в случае $\Omega(\mathcal{A}) = \Omega(\mathcal{B})$;

11) если $\Phi: \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \mapsto \mathfrak{S}(\mathcal{H}')$ – произвольный канал, то $\overline{C}(\Phi(\mathcal{A})) \leq \overline{C}(\mathcal{A})$, причем из $\overline{C}(\Phi(\mathcal{A})) = \overline{C}(\mathcal{A})$ следует $\Omega(\Phi(\mathcal{A})) = \Phi(\Omega(\mathcal{A}))$;

12) если $\{\Phi_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ – произвольное семейство каналов из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ в $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ такое, что $\lim_{t \rightarrow +0} \Phi_t(\rho) = \rho$ для всех состояний ρ из $\mathcal{A}$, то¹⁰

$$\lim_{t \rightarrow +0} \overline{C}(\Phi_t(\mathcal{A})) = \overline{C}(\mathcal{A}), \quad \lim_{t \rightarrow +0} \Omega(\Phi_t(\mathcal{A})) = \Omega(\mathcal{A}).$$

⁵Заметим, что из $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{B}$ не следует, что $\overline{C}(\mathcal{A}) < \overline{C}(\mathcal{B})$ даже в случае выпуклых и замкнутых множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ (см. примеры в §3).

⁶Эти условия существенны (см. ниже замечание 1).

⁷В силу утверждения 4) множество предельных точек последовательности $\{\Omega(\mathcal{A}_n)\}$ не пусто.

⁸Множество называется максимальным множеством с данной χ -емкостью, если оно не является собственным подмножеством множества с той же самой χ -емкостью.

⁹Множество называется минимальным замкнутым множеством с данной χ -емкостью, если оно не содержит замкнутых подмножеств с той же самой χ -емкостью.

¹⁰Это утверждение можно рассматривать как свойство устойчивости χ -емкости и оптимального среднего состояния по отношению к квантовому шуму.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Требования регулярности и непрерывности в утверждениях 7) и 9) теоремы 1 существенны. Существуют последовательности множеств, для которых утверждение 7) не имеет места, как показывает пример в конце п. 3.3. Пример замкнутого множества с конечной χ -емкостью, не имеющего минимального замкнутого подмножества с той же самой χ -емкостью, рассмотрен в п. 3.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения 1), 2) и первая часть утверждения 3) непосредственно следуют из определения χ -емкости в силу полунепрерывности снизу и выпуклости относительной энтропии. Вторая часть 3) доказывается следующим образом. Пусть $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ и $\overline{C}(\mathcal{A}) = \overline{C}(\mathcal{B})$. В силу [11, теорема 1] имеет место неравенство $H(\rho \| \Omega(\mathcal{B})) \leq \overline{C}(\mathcal{B}) = \overline{C}(\mathcal{A})$ для всех состояний ρ из $\mathcal{B}$. Поскольку $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, это неравенство выполнено для всех состояний ρ из $\mathcal{A}$. Таким образом, из утверждения единственности в теореме 1 из работы [11] следует $\Omega(\mathcal{A}) = \Omega(\mathcal{B})$.

Первая часть утверждения 4) получена в [11, следствие 5]. Вторая часть вытекает из свойства 2) и теоремы Крейна–Мильмана.

Поскольку в силу [11, теорема 1] имеем $\overline{co}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{V}_{\Omega(\mathcal{A}), \overline{C}(\mathcal{A})}$, утверждение 5) следует из [11, предложения 2 и 3].

Для доказательства утверждения 6) заметим, что из 3) следуют существование указанного предела и неравенство

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \overline{C}(\mathcal{A}_n) \leq \overline{C}\left(\bigcup_n \mathcal{A}_n\right). \quad (1)$$

Пусть $\{\{\pi_i^k, \rho_i^k\}\}_k$ – произвольная аппроксимирующая последовательность ансамблей для множества $\bigcup_n \mathcal{A}_n$, что означает

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \chi(\{\pi_i^k, \rho_i^k\}) = \overline{C}\left(\bigcup_n \mathcal{A}_n\right). \quad (2)$$

Поскольку ансамбль – это *конечный* набор состояний, для каждого k существует $n(k)$ такое, что $\rho_i^k \in \mathcal{A}_{n(k)}$ для всех i и, следовательно, $\overline{C}(\mathcal{A}_{n(k)}) \geq \chi(\{\pi_i^k, \rho_i^k\})$. Отсюда и из (2) следует выполнение равенства в (1).

Предположим, что $\overline{C}(\bigcup_n \mathcal{A}_n) = \overline{C}(\overline{co}(\bigcup_n \mathcal{A}_n)) < +\infty$. В силу утверждения 4) множество $\overline{co}(\bigcup_n \mathcal{A}_n)$ компактно. Следовательно, последовательность $\{\Omega(\mathcal{A}_n)\}$ имеет частичные пределы. Пусть $\omega = \lim_{k \rightarrow +\infty} \Omega(\mathcal{A}_{n_k})$ для некоторой подпоследовательности n_k .

По теореме 1 из [11] для каждого n существует такой ансамбль $\{\pi_i^n, \rho_i^n\}$ состояний из $\mathcal{A}_n$ со средним состоянием $\bar{\rho}_n$, что

$$\chi(\{\pi_i^n, \rho_i^n\}) \geq \overline{C}(\mathcal{A}_n) - \frac{1}{n}, \quad \|\bar{\rho}_n - \Omega(\mathcal{A}_n)\|_1 \leq \frac{1}{n}. \quad (3)$$

В силу доказанного равенства в (1) и первого неравенства в (3) последовательность $\{\{\pi_i^n, \rho_i^n\}\}_n$ является аппроксимирующей для множества $\bigcup_n \mathcal{A}_n$ и, следовательно, в силу [11, теорема 1] последовательность $\{\bar{\rho}_n\}_n$ сходится к состоянию $\Omega(\bigcup_n \mathcal{A}_n)$ при $n \rightarrow +\infty$. В силу второго неравенства в (3) подпоследовательность $\{\bar{\rho}_{n_k}\}_k$ сходится к состоянию ω . Поэтому $\omega = \Omega(\bigcup_n \mathcal{A}_n)$. Таким образом, каждый частичный предел последовательности $\{\Omega(\mathcal{A}_n)\}$ совпадает с состоянием $\Omega(\bigcup_n \mathcal{A}_n)$.

Для доказательства 7) заметим, что из 3) следуют существование указанного предела и неравенство

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \overline{C}(\mathcal{A}_n) \geq \overline{C}\left(\bigcap_n \mathcal{A}_n\right). \quad (4)$$

Дополнительные условия в 7) обеспечивают различные способы доказательства равенства в неравенстве (4).

Рассмотрим сначала условия b) и c). Без ограничения общности можно считать, что существует

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Omega(\mathcal{A}_n) = \omega. \quad (5)$$

В силу [11, теорема 1] для каждого натурального n существует мера μ_n с конечным носителем, лежащим внутри $\mathcal{A}_n$, такая, что

$$\chi(\mu_n) \geq \overline{C}(\mathcal{A}_n) - \frac{1}{n}, \quad \|\bar{\rho}(\mu_n) - \Omega(\mathcal{A}_n)\|_1 \leq \frac{1}{n}. \quad (6)$$

Носители всех мер последовательности $\{\mu_n\}$ лежат в множестве $\mathcal{A}_1$, которое компактно в силу утверждения 4). Поэтому последовательность $\{\mu_n\}$ слабо компактна и содержит подпоследовательность $\{\mu_{n_k}\}$, слабо сходящуюся к некоторой мере μ_* . Из непрерывности отображения $\mu \mapsto \bar{\rho}(\mu)$ в силу соотношений (5), (6) следует, что $\omega = \bar{\rho}(\mu_*) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \bar{\rho}(\mu_{n_k})$. Используя [7, теорема 6.1], нетрудно видеть, что $\text{supp } \mu_* \subseteq \bigcap_n \mathcal{A}_n$.

Предположим, что выполнено условие b) в 7). Тогда существует

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} H(\bar{\rho}(\mu_{n_k})) = H(\bar{\rho}(\mu_*)) = H(\omega) < +\infty \quad (7)$$

и, используя выражение (2) из [11], получаем

$$\chi(\mu_{n_k}) = H(\bar{\rho}(\mu_{n_k})) - \hat{H}(\mu_{n_k})$$

для достаточно больших k . Учитывая (7) и полунепрерывность снизу функционала $\hat{H}(\mu)$, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \overline{C}(\mathcal{A}_n) &= \limsup_{k \rightarrow +\infty} \chi(\mu_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} H(\bar{\rho}(\mu_{n_k})) - \liminf_{k \rightarrow +\infty} \hat{H}(\mu_{n_k}) \\ &\leq H(\bar{\rho}(\mu_*)) - \hat{H}(\mu_*) = \chi(\mu_*) \leq \overline{C}\left(\bigcap_n \mathcal{A}_n\right), \end{aligned}$$

что гарантирует выполнение равенства в (4).

Предположим, что выполнено условие c) утверждения 7). Поскольку это условие означает непрерывность функции $H(\rho \parallel \omega)$ на компактном множестве $\mathcal{A}_1$, из определения слабой сходимости следует

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int H(\rho \parallel \omega) \mu_{n_k}(d\rho) = \int H(\rho \parallel \omega) \mu_*(d\rho) = \chi(\mu_*) \leq \overline{C}\left(\bigcap_n \mathcal{A}_n\right).$$

В силу обобщенного тождества Дональда (см. [11, тождество (4)]) имеем

$$\int H(\rho \parallel \omega) \mu_{n_k}(d\rho) = \chi(\mu_{n_k}) + H(\bar{\rho}(\mu_{n_k}) \parallel \omega) \geq \chi(\mu_{n_k})$$

и из предыдущего неравенства получаем

$$\overline{C}\left(\bigcap_n \mathcal{A}_n\right) \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} \int H(\rho \parallel \omega) \mu_{n_k}(d\rho) \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} \chi(\mu_{n_k}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \overline{C}(\mathcal{A}_n),$$

что гарантирует выполнение равенства в (4).

Для завершения рассмотрения условий б) и в) утверждения 7) достаточно показать, что предельное состояние ω в (5) является оптимальным средним состоянием множества $\bigcap_n \mathcal{A}_n$. По теореме 1 из [11] $H(\rho \parallel \Omega(\mathcal{A}_n)) \leq \overline{C}(\mathcal{A}_n)$ для любого состояния ρ из $\bigcap_n \mathcal{A}_n$ и для произвольного n . Используя (5), доказанное равенство в (4) и полунепрерывность снизу относительной энтропии, получаем

$$H(\rho \parallel \omega) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} H(\rho \parallel \Omega(\mathcal{A}_n)) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \overline{C}(\mathcal{A}_n) = \overline{C}\left(\bigcap_n \mathcal{A}_n\right)$$

для всех таких ρ . Из [11, теорема 1] следует, что $\omega = \Omega\left(\bigcap_n \mathcal{A}_n\right)$.

Рассмотрим условие а) утверждения 7). Заметим, что из предполагаемой регулярности множества $\mathcal{A}_1$ и условия $\Omega(\mathcal{A}_n) = \Omega(\mathcal{A}_1)$ для каждого n следует регулярность множества $\mathcal{A}_n$ для каждого n . В силу [11, теорема 2] для каждого n существует оптимальная мера μ_n с носителем на множестве $\mathcal{A}_n$, для которой $\chi(\mu_n) = \overline{C}(\mathcal{A}_n)$ и $\bar{\rho}(\mu_n) = \Omega(\mathcal{A}_n)$. Если условие 1) в определении 1 выполнено, то соотношение (7) в этом случае очевидно и повторение рассуждений в доказательстве условия б) утверждения 7) завершает доказательство. Если условие 2) в определении 1 выполнено, то рассуждения из доказательства условия в) утверждения 7) применяются непосредственно.

Утверждение 8) следует из [11, теорема 1].

Для доказательства утверждения 9) рассмотрим непустое семейство $\mathfrak{A}$ всех замкнутых подмножеств $\mathcal{A}$, имеющих такую же χ -емкость, что и множество $\mathcal{A}$, снабженное отношением частичного порядка $\prec$, определяемого включением

$$\mathcal{B} \prec \mathcal{C} \iff \mathcal{B} \supseteq \mathcal{C}.$$

Ясно, что утверждение 9) означает существование максимального элемента в $\mathfrak{A}$. Поэтому для доказательства 9) достаточно (в силу леммы Цорна) показать, что произвольная цепь в $\mathfrak{A}$ имеет максимальный элемент. Максимальным элементом для данной цепи будет пересечение всех элементов – подмножеств этой цепи – при условии, что это пересечение есть элемент $\mathfrak{A}$. Поскольку 4) гарантирует компактность множества $\mathcal{A}$, пересечение произвольного убывающего семейства подмножеств множества $\mathcal{A}$ совпадает с пересечением некоторого его счетного подсемейства. Таким образом, достаточно показать, что

$$\overline{C}\left(\bigcap_n \mathcal{B}_n\right) = \overline{C}(\mathcal{A})$$

для любой убывающей последовательности $\{\mathcal{B}_n\}$ замкнутых подмножеств множества $\mathcal{A}$ такой, что $\overline{C}(\mathcal{B}_n) = \overline{C}(\mathcal{A})$ для всех n . Но данное свойство следует из регулярности множества $\mathcal{A}$ и утверждения 7) с первым условием, поскольку утверждение 3) гарантирует $\Omega(\mathcal{B}_n) = \Omega(\mathcal{A})$ для всех n .

Первая часть утверждения 10) следует из приведенного ниже предложения 1. Вторая часть является следствием утверждения 3) и теоремы 1 из [11], поскольку

$$H(\rho \parallel \Omega(\mathcal{A})) \leq \max(\overline{C}(\mathcal{A}), \overline{C}(\mathcal{B})), \quad \Omega(\mathcal{A}) = \Omega(\mathcal{B})$$

для всех ρ из $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

Первая часть утверждения 11) непосредственно вытекает из определения χ -емкости и свойства монотонности относительной энтропии.

Для доказательства второй части 11) предположим, что $\overline{C}(\Phi(\mathcal{A})) = \overline{C}(\mathcal{A})$. Используя свойство монотонности относительной энтропии и [11, теорема 1], получаем

$$H(\Phi(\rho) \parallel \Phi(\Omega(\mathcal{A}))) \leq H(\rho \parallel \Omega(\mathcal{A})) \leq \overline{C}(\mathcal{A}) = \overline{C}(\Phi(\mathcal{A}))$$

для любого состояния ρ из $\mathcal{A}$. Из [11, теорема 1] следует, что $\Omega(\Phi(\mathcal{A})) = \Phi(\Omega(\mathcal{A}))$.

Утверждение 12) следует из первой части 11) и приведенной ниже леммы 1.

В силу утверждения 4) теоремы 1 и определения 1 получаем следующую модификацию теоремы 2 из [11].

СЛЕДСТВИЕ 1. *Достаточным условием существования оптимальной меры для замкнутого множества $\mathcal{A}$ с конечной χ -емкостью является регулярность множества $\text{Ext}(\mathcal{A})$.*

Из утверждения 5) теоремы 1 вытекает следующее наблюдение.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть $\mathcal{A}$ – замкнутое выпуклое множество с конечной χ -емкостью. Тогда:*

- 1) *если $d(\rho) < 1$ для всех ρ из $\mathcal{A}$, то множество $\mathcal{A}$ регулярно и энтропия ограничена на множестве $\mathcal{A}$;*
- 2) *если $d(\rho) = 0$ для всех ρ из $\mathcal{A}$, то энтропия непрерывна на множестве $\mathcal{A}$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Следствие 2 показывает, в частности, что из ограниченности энтропии на некотором замкнутом выпуклом множестве состояний с нулевым коэффициентом убывания (например, гауссовских состояний) следует непрерывность энтропии на этом множестве.

Утверждения 4) и 6) теоремы 1 дают достаточное условие компактности объединений множеств состояний.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Если $\{\mathcal{A}_n\}$ – последовательность множеств состояний такая, что $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+1}$ и $\overline{C}(\mathcal{A}_n) \leq M < +\infty$ для всех n , то множество $\bigcup_n \mathcal{A}_n$ предкомпактно.*

Из утверждения 11) теоремы 1 вытекает следующее свойство оптимальных средних.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Пусть $\mathcal{A}$ – множество с конечной χ -емкостью $\overline{C}(\mathcal{A})$. Тогда $\Omega(\mathcal{A})$ – инвариантное состояние для любого канала Φ такого, что $\Phi(\mathcal{A}) \subseteq \overline{\text{co}}(\mathcal{A})$ и $\overline{C}(\Phi(\mathcal{A})) = \overline{C}(\mathcal{A})$. В частности, $\Omega(\mathcal{A})$ – инвариантное состояние для любого автоморфизма¹¹ α пространства $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ такого, что $\alpha(\mathcal{A}) \subseteq \overline{\text{co}}(\mathcal{A})$.*

Пусть $\mathfrak{F}(\mathcal{A})$ – множество всех каналов Φ из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ в $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ таких, что $\Phi(\mathcal{A}) \subseteq \overline{\text{co}}(\mathcal{A})$ и $\overline{C}(\Phi(\mathcal{A})) = \overline{C}(\mathcal{A})$. Это множество непусто и содержит все автоморфизмы α пространства $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ такие, что $\alpha(\mathcal{A}) \subseteq \overline{\text{co}}(\mathcal{A})$.

Из следствия 4 вытекает следующее наблюдение: для произвольного множества $\mathcal{A}$ с конечной χ -емкостью множество $\overline{\text{co}}(\mathcal{A})$ содержит по крайней мере одно инвариантное состояние для всех каналов из $\mathfrak{F}(\mathcal{A})$.

Из [11, теорема 1] и следствия 4 получаем следующий результат.

¹¹По теореме Вигнера каждый автоморфизм $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ имеет вид $U(\cdot)U^*$, где U – либо унитарный, либо антиунитарный оператор в $\mathcal{H}$ [10].

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $\mathcal{A}$ – произвольное множество состояний и $\mathfrak{F}_0$ – произвольное подмножество $\mathfrak{F}(\mathcal{A})$. Пусть $\text{Inv } \mathfrak{F}_0$ – множество инвариантных состояний для всех каналов из $\mathfrak{F}_0$. Тогда χ -емкость множества $\mathcal{A}$ определяется выражением

$$\overline{C}(\mathcal{A}) = \inf_{\sigma \in \text{Inv } \mathfrak{F}_0 \cap \overline{\text{co}}(\mathcal{A})} \sup_{\rho \in \mathcal{A}} H(\rho \| \sigma),$$

в котором подразумевается, что $\overline{C}(\mathcal{A}) = +\infty$, если $\text{Inv } \mathfrak{F}_0 \cap \overline{\text{co}}(\mathcal{A}) = \emptyset$.

В частности, если в $\overline{\text{co}}(\mathcal{A})$ существует единственное состояние σ_0 , инвариантное для всех каналов из $\mathfrak{F}_0$, то $\overline{C}(\mathcal{A}) = \sup_{\rho \in \mathcal{A}} H(\rho \| \sigma_0)$, и если $\overline{C}(\mathcal{A}) < +\infty$, то $\Omega(\mathcal{A}) = \sigma_0$.

Следствия 4 и 5 позволяют определять или по крайней мере локализовать оптимальное среднее состояние и вычислять χ -емкость произвольного множества состояний $\mathcal{A}$ путем поиска достаточно большого семейства $\mathfrak{F}_0$ каналов из $\mathfrak{F}(\mathcal{A})$. Этот прием будет использован в следующем параграфе.

Рассмотрим вопрос об оценке χ -емкости конечных объединений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если $\{\mathcal{A}_k\}_{k=1}^n$ – конечный набор множеств, то

$$\max_{\{\lambda_k\}} \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \overline{C}(\mathcal{A}_k) + \chi(\{\lambda_k, \Omega(\mathcal{A}_k)\}) \right) \leq \overline{C} \left(\bigcup_{k=1}^n \mathcal{A}_k \right) \leq \max_{1 \leq k \leq n} \overline{C}(\mathcal{A}_k) + \log n,$$

где первый максимум берется по всем распределениям вероятностей с n исходами.

В случае $\overline{C}(\mathcal{A}_k) = C$ для всех $k = \overline{1, n}$ имеет место неравенство

$$C + \overline{C}(\{\Omega(\mathcal{A}_1), \dots, \Omega(\mathcal{A}_n)\}) \leq \overline{C} \left(\bigcup_{k=1}^n \mathcal{A}_k \right) \leq C + \log n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу [11, теорема 1] для каждого натурального m и каждого $k = \overline{1, n}$ существует ансамбль μ_k^m такой, что

$$\chi(\mu_k^m) \geq \overline{C}(\mathcal{A}_k) - \frac{1}{m}, \quad \|\bar{\rho}(\mu_k^m) - \Omega(\mathcal{A}_k)\|_1 \leq \frac{1}{m}. \quad (8)$$

Зафиксировав произвольное распределение вероятностей $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$, рассмотрим ансамбль $\mu_m = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mu_k^m$ состояний из $\bigcup_{k=1}^n \mathcal{A}_k$. Используя [11, лемма 1], полунепрерывность снизу относительной энтропии и неравенства (8), получаем

$$\begin{aligned} \overline{C} \left(\bigcup_{k=1}^n \mathcal{A}_k \right) &\geq \liminf_{m \rightarrow +\infty} \chi(\mu_m) = \liminf_{m \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \chi(\mu_k^m) + \chi(\{\lambda_k, \bar{\rho}(\mu_k^m)\}) \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k \overline{C}(\mathcal{A}_k) + \liminf_{m \rightarrow +\infty} \chi(\{\lambda_k, \bar{\rho}(\mu_k^m)\}) \geq \sum_{k=1}^n \lambda_k \overline{C}(\mathcal{A}_k) + \chi(\{\lambda_k, \Omega(\mathcal{A}_k)\}), \end{aligned}$$

откуда следует оценка снизу для χ -емкости объединения.

Для доказательства оценки сверху заметим, что произвольный ансамбль μ состояний из $\bigcup_{k=1}^n \mathcal{A}_k$ можно представить в виде $\sum_{k=1}^n \lambda_k \mu_k$, где μ_k – ансамбль

состояний из $\mathcal{A}_k$ при каждом $k = \overline{1, n}$ и $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ – распределение вероятностей. Используя [11, лемма 1] и предложение 3 из следующего параграфа, получаем

$$\chi(\mu) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \chi(\mu_k) + \chi(\{\lambda_k, \bar{\rho}(\mu_k)\}) \leq \max_{1 \leq k \leq n} \bar{C}(\mathcal{A}_k) + \log n.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Предложение 1 показывает, что χ -емкость объединения множеств с данной χ -емкостью зависит от взаимного расположения оптимальных средних состояний этих множеств. Если оптимальные средние состояния совпадают друг с другом, то в силу утверждения 10) теоремы 1 χ -емкость объединения минимальна и равна максимальной χ -емкости объединяемых множеств. Чем больше расхождение оптимальных средних, тем больше χ -емкость объединения. Наиболее очевидно это проявляется в случае объединения двух множеств, для которого из предложения 1 и оценки снизу относительной энтропии (см. [11, неравенство (1)]) следует, что

$$\bar{C}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \geq \max_{\lambda \in [0,1]} \left(\lambda \bar{C}(\mathcal{A}) + (1 - \lambda) \bar{C}(\mathcal{B}) + \frac{1}{2} \lambda(1 - \lambda) \|\Omega(\mathcal{A}) - \Omega(\mathcal{B})\|_1^2 \right).$$

Заметим также, что нижняя и верхняя границы в предложении 1 совпадают тогда и только тогда, когда $\bar{C}(\mathcal{A}_i) = \bar{C}(\mathcal{A}_j)$ и

$$\bigcup_{\rho \in \mathcal{A}_i} \text{supp } \rho \perp \bigcup_{\rho \in \mathcal{A}_j} \text{supp } \rho \quad \text{для всех } i \neq j.$$

В доказательстве теоремы 1 был использован следующий результат, который также лежит в основе доказательства теоремы 2 в § 4.

ЛЕММА 1. Пусть $\{\Psi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ – семейство непрерывных отображений из множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ в себя, индексированное упорядоченным множеством Λ , такое, что $\lim_\lambda \Psi_\lambda(\rho) = \rho$ для всех состояний ρ из некоторого множества состояний $\mathcal{A}$. Тогда:

- 1) $\liminf_\lambda \bar{C}(\Psi_\lambda(\mathcal{A})) \geq \bar{C}(\mathcal{A})$;
- 2) если $\lim_\lambda \bar{C}(\Psi_\lambda(\mathcal{A})) = \bar{C}(\mathcal{A}) < +\infty$, то $\lim_\lambda \Omega(\Psi_\lambda(\mathcal{A})) = \Omega(\mathcal{A})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) леммы следует из полунепрерывности снизу относительной энтропии. Действительно, для произвольного $\varepsilon > 0$ существует ансамбль $\{\pi_i, \rho_i\}$ такой, что

$$\chi(\{\pi_i, \rho_i\}) \geq C(\varepsilon) = \begin{cases} \bar{C}(\mathcal{A}) - \varepsilon, & \bar{C}(\mathcal{A}) < +\infty, \\ \varepsilon, & \bar{C}(\mathcal{A}) = +\infty. \end{cases}$$

Используя полунепрерывность снизу относительной энтропии, получаем

$$\liminf_\lambda \bar{C}(\Psi_\lambda(\mathcal{A})) \geq \liminf_\lambda \chi(\{\pi_i, \Psi_\lambda(\rho_i)\}) \geq \chi(\{\pi_i, \rho_i\}) \geq C(\varepsilon).$$

В силу произвольности ε из данного неравенства следует утверждение 1) леммы.

Пусть $\lim_\lambda \bar{C}(\Psi_\lambda(\mathcal{A})) = \bar{C}(\mathcal{A}) < +\infty$. В силу [11, теорема 1] для любого $\varepsilon > 0$ существует ансамбль $\{\pi_i, \rho_i\}$ такой, что

$$\chi(\{\pi_i, \rho_i\}) \geq \bar{C}(\mathcal{A}) - \varepsilon, \quad \left\| \sum_i \pi_i \rho_i - \Omega(\mathcal{A}) \right\|_1 < \varepsilon. \quad (9)$$

Рассуждения из первой части доказательства показывают существование такого λ_ε^1 , что

$$\chi(\{\pi_i, \Psi_\lambda(\rho_i)\}) \geq \chi(\{\pi_i, \rho_i\}) - \varepsilon \quad \forall \lambda \geq \lambda_\varepsilon^1.$$

По предположению существует такое λ_ε^2 , что

$$\overline{C}(\Psi_\lambda(\mathcal{A})) \leq \overline{C}(\mathcal{A}) + \varepsilon \quad \forall \lambda \geq \lambda_\varepsilon^2.$$

Таким образом, для всех $\lambda \geq \max(\lambda_\varepsilon^1, \lambda_\varepsilon^2)$ имеем

$$0 \leq \overline{C}(\Psi_\lambda(\mathcal{A})) - \chi(\{\pi_i, \Psi_\lambda(\rho_i)\}) \leq \overline{C}(\mathcal{A}) - \chi(\{\pi_i, \rho_i\}) + 2\varepsilon \leq 3\varepsilon$$

и, используя [11, следствие 4], получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\| \sum_i \pi_i \Psi_\lambda(\rho_i) - \Omega(\Psi_\lambda(\mathcal{A})) \right\|_1^2 &\leq H \left(\sum_i \pi_i \Psi_\lambda(\rho_i) \parallel \Omega(\Psi_\lambda(\mathcal{A})) \right) \\ &\leq \overline{C}(\Psi_\lambda(\mathcal{A})) - \chi(\{\pi_i, \Psi_\lambda(\rho_i)\}) \leq 3\varepsilon. \end{aligned} \quad (10)$$

Из условия непрерывности семейства $\{\Psi_\lambda\}$ следует существование такого λ_ε^3 , что

$$\left\| \sum_i \pi_i \Psi_\lambda(\rho_i) - \sum_i \pi_i \rho_i \right\|_1 \leq \varepsilon \quad \forall \lambda \geq \lambda_\varepsilon^3. \quad (11)$$

Используя (9)–(11), получаем

$$\begin{aligned} \left\| \Omega(\Psi_\lambda(\mathcal{A})) - \Omega(\mathcal{A}) \right\|_1 &\leq \left\| \Omega(\Psi_\lambda(\mathcal{A})) - \sum_i \pi_i \Psi_\lambda(\rho_i) \right\|_1 \\ &+ \left\| \sum_i \pi_i \Psi_\lambda(\rho_i) - \sum_i \pi_i \rho_i \right\|_1 + \left\| \sum_i \pi_i \rho_i - \Omega(\mathcal{A}) \right\|_1 \leq 2\varepsilon + \sqrt{6\varepsilon} \end{aligned}$$

для всех $\lambda \geq \max(\lambda_\varepsilon^1, \lambda_\varepsilon^2, \lambda_\varepsilon^3)$. В силу произвольности ε это неравенство доказывает утверждение 2) леммы.

§ 3. Примеры

В настоящем параграфе рассматриваются несколько типов множеств состояний, для исследования которых применяются общие результаты из [11] и предыдущего параграфа.

3.1. Конечные множества состояний и сходящиеся последовательности. В силу утверждения 4) теоремы 1 каждое множество состояний с конечной χ -емкостью является предкомпактным. Рассмотрим следующие простейшие примеры предкомпактных множеств состояний:

- 1) конечный набор состояний $\{\rho_n\}_{n=1}^N$;
- 2) последовательность состояний $\{\rho_n\}_{n=1}^{+\infty}$, сходящаяся к некоторому состоянию ρ_* ;
- 3) последовательность состояний $\{\rho_n\}_{n=1}^{+\infty}$, H -сходящаяся¹² к некоторому состоянию ρ_* .

Свойства сужения энтропии на выпуклые замыкания этих множеств рассмотрены в следующем предложении.

¹²Это значит, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\rho_n \parallel \rho_*) = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. 1) Пусть $\{\rho_n\}_{n=1}^N$ – конечный набор состояний из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Энтропия непрерывна на (замкнутом) множестве $\overline{\text{co}}(\{\rho_n\}_{n=1}^N)$ тогда и только тогда, когда

$$H(\rho_n) < +\infty \quad \text{для всех } n = 1, 2, \dots, N.$$

2) Пусть $\{\rho_n\}_{n=1}^{+\infty}$ – последовательность состояний, сходящаяся к состоянию ρ_* . Энтропия ограничена на множестве $\overline{\text{co}}(\{\rho_n\}_{n=1}^{+\infty})$ тогда и только тогда, когда существует $\mathfrak{H}$ -оператор H с $g(H) < +\infty$ такой, что

$$\sup_n \text{Tr } \rho_n H < +\infty.$$

Энтропия непрерывна на множестве $\overline{\text{co}}(\{\rho_n\}_{n=1}^{+\infty})$, если выполнено одно из следующих равносильных условий:

- (i) $H(\rho_n) < +\infty$ для всех n , $\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\rho_n) = H(\rho_*) < +\infty$ и существует состояние σ такое, что $H(\rho_n \parallel \sigma) < +\infty$ для всех n и

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\rho_n \parallel \sigma) = H(\rho_* \parallel \sigma) < +\infty;$$

- (ii) существует $\mathfrak{H}$ -оператор H с $g(H) = 0$ такой, что

$$\sup_n \text{Tr } \rho_n H < +\infty;$$

- (iii) существует $\mathfrak{H}$ -оператор H с $g(H) < +\infty$ такой, что $\text{Tr } \rho_n H < +\infty$ для всех n и

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Tr } \rho_n H = \text{Tr } \rho_* H < +\infty.$$

3) Пусть $\{\rho_n\}_{n=1}^{+\infty}$ – последовательность состояний, H -сходящаяся к состоянию ρ_* . Энтропия ограничена на множестве $\overline{\text{co}}(\{\rho_n\}_{n=1}^{+\infty})$ тогда и только тогда, когда

$$\sup_n H(\rho_n) < +\infty.$$

Энтропия непрерывна на множестве $\overline{\text{co}}(\{\rho_n\}_{n=1}^{+\infty})$ тогда и только тогда, когда $H(\rho_n) < +\infty$ для всех n и

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\rho_n) = H(\rho_*) < +\infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Интересно сравнить условия ограниченности и непрерывности энтропии для сходящейся и для H -сходящейся последовательностей. Условия для H -сходящейся последовательности выглядят как естественное обобщение соответствующих условий для конечного множества состояний, в то время как условия для сходящейся последовательности включают в себя дополнительные требования. Эти требования являются существенными, как показывает пример сходящейся последовательности состояний $\{\rho_n\}_{n=1}^{+\infty}$ такой, что энтропия $H(\rho_n)$ конечна для всех n и

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\rho_n) = H\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_n\right) < +\infty,$$

но энтропия не ограничена на множестве $\overline{\text{co}}(\{\rho_n\}_{n=1}^{+\infty})$ (см. пример в конце настоящего пункта).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $\mathcal{A} = \{\rho_i\}_{i=1}^N$. Необходимость условия непрерывности очевидна. Для доказательства достаточности заметим, что из этого условия и общих свойств энтропии [14] следует ее ограниченность на замкнутом множестве $\text{co}(\mathcal{A})$, а значит, и конечность χ -емкости этого множества. В силу [11, теорема 1] существует единственное состояние $\Omega(\mathcal{A})$ такое, что

$$H(\rho_n \| \Omega(\mathcal{A})) = \text{Tr } \rho_n (-\log \Omega(\mathcal{A})) - H(\rho_n) \leq \overline{C}(\mathcal{A}) < +\infty$$

и, следовательно, $\text{Tr } \rho_n (-\log \Omega(\mathcal{A})) \leq \overline{C}(\mathcal{A}) + \max_n H(\rho_n) < +\infty$ для всех $n = \overline{1, N}$. Таким образом, линейная функция $\text{Tr } \rho (-\log \Omega(\mathcal{A}))$ конечна и, следовательно, непрерывна на *конечном* множестве $\mathcal{A}$, что в силу [11, предложение 4] гарантирует непрерывность энтропии на множестве $\overline{\text{co}}(\mathcal{A})$.

2) Условие ограниченности для этого случая следует из [11, предложение 1], а условия непрерывности – из [11, предложение 4].

3) Пусть $\mathcal{A} = \{\rho_i\}_{i=1}^{+\infty}$. Необходимость условий ограниченности и непрерывности для этого случая очевидна. Для доказательства достаточности условия ограниченности заметим, что χ -емкость множества $\mathcal{A}$ конечна (см. предложение 3). В силу [11, теорема 1] существует единственное состояние $\Omega(\mathcal{A})$ такое, что

$$H(\rho_n \| \Omega(\mathcal{A})) = \text{Tr } \rho_n (-\log \Omega(\mathcal{A})) - H(\rho_n) \leq \overline{C}(\mathcal{A}) < +\infty$$

для всех n . Следовательно,

$$\sup_n \text{Tr } \rho_n (-\log \Omega(\mathcal{A})) \leq \overline{C}(\mathcal{A}) + \sup_n H(\rho_n) < +\infty,$$

что в силу [11, предложение 1] гарантирует ограниченность энтропии на множестве $\overline{\text{co}}(\mathcal{A})$. Достаточность условия непрерывности следует из первого условия непрерывности для случая 2) с $\sigma = \rho_*$.

Вопросы, связанные с χ -емкостью конечных наборов состояний и сходящихся последовательностей, рассмотрены в следующем предложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. 1) Пусть $\{\rho_n\}_{n=1}^N$ – конечный набор состояний из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Тогда множество $\{\rho_n\}_{n=1}^N$ регулярно,

$$\overline{C}(\{\rho_n\}_{n=1}^N) \leq \log N$$

и существует оптимальный ансамбль $\mu_* = \{\pi_n, \rho_n\}_{n=1}^N$ для множества $\{\rho_n\}_{n=1}^N$.

2) Пусть $\{\rho_n\}_{n=1}^{+\infty}$ – последовательность состояний, сходящаяся к состоянию ρ_* . χ -емкость множества $\{\rho_n\}_{n=1}^{+\infty}$ конечна тогда и только тогда, когда существует состояние σ такое, что¹³

$$\sup_n H(\rho_n \| \sigma) < +\infty.$$

3) Пусть $\{\rho_n\}_{n=1}^{+\infty}$ – последовательность состояний, H -сходящаяся к состоянию ρ_* . Тогда χ -емкость множества $\{\rho_n\}_{n=1}^{+\infty}$ конечна, причем

$$\overline{C}(\{\rho_n\}_{n=1}^{+\infty}) \leq \inf_m \max \left(\sup_{n>m} H(\rho_n \| \rho_*), \log m \right) + \log 2.$$

¹³Приведенный ниже пример показывает, что χ -емкость сходящейся последовательности может быть бесконечной.

В случаях 1)–3) существование оптимальной меры для множества $\{\rho_n\}$ – ансамбля $\mu_* = \{\pi_n, \rho_n\}$ – равносильно существованию распределения вероятностей $\{\pi_n\}$ и положительного числа C , удовлетворяющих следующей системе:

$$\begin{aligned} H\left(\rho_n \parallel \sum_k \pi_k \rho_k\right) &= C, & \pi_n > 0, \\ H\left(\rho_n \parallel \sum_k \pi_k \rho_k\right) &\leq C, & \pi_n = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Если данная система имеет решение, то $\overline{C}(\{\rho_n\}) = C$ и $\Omega(\{\rho_n\}) = \sum_n \pi_n \rho_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Для доказательства оценки сверху для χ -емкости множества $\mathcal{A} = \{\rho_n\}_{n=1}^N$ достаточно заметить, что $\text{co}(\mathcal{A})$ есть выходное множество канала $\sigma \mapsto \sum_{n=1}^N \langle n | \sigma | n \rangle \rho_n$ из пространства состояний в N -мерном гильбертовом пространстве с ортонормированным базисом $\{|n\rangle\}_{n=1}^N$, и использовать свойство монотонности относительной энтропии [5]. Из конечности χ -емкости в силу [11, теорема 1] следует конечность относительной энтропии $H(\rho_n \parallel \Omega(\mathcal{A}))$ для всех n , а значит, и регулярность множества $\mathcal{A}$. Существование оптимальной меры – оптимального ансамбля – следует из [11, теорема 2].

2) Утверждение непосредственно следует из [11, теорема 1].

3) Для доказательства оценки сверху для χ -емкости множества $\mathcal{A} = \{\rho_n\}_{n=1}^{+\infty}$ представим это множество как объединение конечного множества $\mathcal{A}_1 = \{\rho_n\}_{n=1}^m$ и множества $\mathcal{A}_2 = \{\rho_n\}_{n=m+1}^{+\infty}$. Используя [11, теорема 1], предложение 1, и утверждение 1) данного предложения, получаем

$$\begin{aligned} \overline{C}(\mathcal{A}) &= \overline{C}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) \leq \max(\overline{C}(\mathcal{A}_1), \overline{C}(\mathcal{A}_2)) + \log 2 \\ &\leq \max\left(\sup_{n > m} H(\rho_n \parallel \rho_*), \log m\right) + \log 2. \end{aligned}$$

Если $\{\pi_n\}$ – оптимальное распределение вероятностей, то в силу [11, предложение 7] оно удовлетворяет системе (12) с $C = \overline{C}(\{\rho_n\})$. Обратно, если $(\{\pi_n\}, C)$ – решение этой системы, то, используя [11, вторая часть теоремы 1], легко видеть, что ансамбль $\{\pi_n, \rho_n\}$ является оптимальным для множества $\{\rho_n\}$ и $C = \overline{C}(\{\rho_n\})$.

Рассмотрим конечные множества состояний.

Если $N = 2$, то $\Omega(\{\rho_1, \rho_2\}) = \pi \rho_1 + (1 - \pi) \rho_2$, где число π однозначно определяется уравнением

$$H(\rho_1 \parallel \pi \rho_1 + (1 - \pi) \rho_2) = H(\rho_2 \parallel \pi \rho_1 + (1 - \pi) \rho_2),$$

обе части которого равны $\overline{C}(\{\rho_1, \rho_2\})$. В случае $N > 2$ ситуация может быть более сложной. Множество $\{\rho_1, \dots, \rho_N\}$ может содержать подмножество $\{\rho_{n_1}, \dots, \rho_{n_{N'}}\}$, $N' < N$, такое, что $\overline{C}(\{\rho_{n_1}, \dots, \rho_{n_{N'}}\}) = \overline{C}(\{\rho_1, \dots, \rho_N\})$. Это означает, что некоторые элементы в оптимальном распределении вероятностей $\{\pi_n\}$ равны нулю. Действительно, такая ситуация имеет место, если к множеству $\{\rho_1, \rho_2\}$ добавить произвольное состояние ρ_3 такое, что $H(\rho_3 \parallel \Omega(\{\rho_1, \rho_2\})) \leq \overline{C}(\{\rho_1, \rho_2\})$. Используя [11, теорема 1], легко видеть, что $\Omega(\{\rho_1, \rho_2\}) = \Omega(\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\})$ и $\overline{C}(\{\rho_1, \rho_2\}) = \overline{C}(\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\})$ в этом случае. Это простейший пример, показывающий, что из $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{B}$ не следует $\overline{C}(\mathcal{A}) < \overline{C}(\mathcal{B})$.

Существуют два случая, в которых оптимальное среднее состояние совпадает с равномерным средним состоянием

$$\Omega(\{\rho_n\}_{n=1}^N) = N^{-1} \sum_{n=1}^N \rho_n.$$

Первый случай имеет место, когда состояния $\rho_1, \dots, \rho_N$ образуют орбиту некоторой группы автоморфизмов $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ (см. п. 3.5). Второй случай имеет место, когда носители состояний $\rho_1, \dots, \rho_N$ лежат во взаимно ортогональных подпространствах. Именно в этом случае χ -емкость достигает максимального значения $\log N$ независимо от вида состояний $\rho_1, \dots, \rho_N$ и от значений их энтропии. Это следует из равенства

$$H\left(\rho_n \parallel N^{-1} \sum_{k=1}^N \rho_k\right) = H(\rho_n \parallel N^{-1} \rho_n) + 1 - N^{-1} = \log N, \quad n = \overline{1, N},$$

полученного с использованием общих свойств относительной энтропии [6], [14].

Следующий пример, в котором рассмотрена сходящаяся последовательность состояний, показывает, в частности, что система (12), определяющая оптимальное распределение вероятностей и значение χ -емкости, может быть решена в некоторых нетривиальных случаях.

ПРИМЕР 1 (сходящаяся последовательность состояний). Пусть $\{|n\rangle\}$ – ортогональный базис в $\mathcal{H}$, и пусть $\{q_n\}$ – последовательность чисел из отрезка $[0, 1]$, сходящаяся к нулю. Для данного $\varepsilon \in [0, 1]$ рассмотрим множество $\mathcal{S}_{\{q_n\}}^\varepsilon$, состоящее из счетного числа состояний

$$\rho_n^\pm = (1 - q_n)|1\rangle\langle 1| + q_n|n\rangle\langle n| \pm \eta_n(q_n, \varepsilon)\sqrt{(1 - q_n)q_n}(|1\rangle\langle n| + |n\rangle\langle 1|), \quad n \geq 2,$$

где параметр $\eta_n(q_n, \varepsilon) \in [0, 1]$ определяется условием

$$H(\rho_n^\pm) = (1 - \varepsilon)h_2(q_n) = -(1 - \varepsilon)((1 - q_n)\log(1 - q_n) + q_n\log q_n).$$

Таким образом, ε можно рассматривать как параметр “чистоты” состояний в последовательности. Если $\varepsilon = 0$, то $\eta_n(q_n, \varepsilon) = 0$ и все состояния $\rho_n^\pm = \rho_n^-$, $n \geq 2$, имеют диагональную матрицу в базисе $\{|n\rangle\}$ и максимальную энтропию; если $\varepsilon = 1$, то $\eta_n(q_n, \varepsilon) = 1$ и все состояния $\rho_n^\pm$, $n \geq 2$, чистые.

Множество $\mathcal{S}_{\{q_n\}}^\varepsilon$ можно рассматривать как последовательность, сходящуюся к состоянию $\rho_1 = |1\rangle\langle 1|$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. 1) χ -емкость множества $\mathcal{S}_{\{q_n\}}^\varepsilon$ конечна тогда и только тогда, когда существует положительное λ такое, что

$$\sum_n \exp\left(-\frac{\lambda}{q_n}\right) < +\infty. \quad (13)$$

2) Если условие (13) выполнено, то необходимое и достаточное условие существования оптимальной меры – оптимального ансамбля $\mu_* = \{\pi_n^\pm, \rho_n^\pm\}$ – для множества $\mathcal{S}_{\{q_n\}}^\varepsilon$ определяется неравенством

$$\sum_{n>1} q_n^{-\varepsilon} (1 - q_n)^{1 + \frac{(1 - q_n)(1 - \varepsilon)}{q_n}} \exp\left(-\frac{\lambda_{\{q_n\}}^*}{q_n}\right) \geq 1, \quad (14)$$

в котором

$$\lambda_{\{q_n\}}^* = \inf \left\{ \lambda: \sum_n \exp \left(-\frac{\lambda}{q_n} \right) < +\infty \right\}.$$

3) Если условия (13) и (14) с данным ε выполнены для последовательности $\{q_n\}$, то:

(i) χ -емкость множества $\mathcal{S}_{\{q_n\}}^\varepsilon$ определяется выражением

$$\overline{C}(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^\varepsilon) = \lambda_{\{q_n\}}^\varepsilon - \log \pi_{\{q_n\}}^\varepsilon;$$

(ii) оптимальное среднее $\Omega(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^\varepsilon)$ множества $\mathcal{S}_{\{q_n\}}^\varepsilon$ имеет вид

$$\pi_{\{q_n\}}^\varepsilon |1\rangle\langle 1| + \pi_{\{q_n\}}^\varepsilon \sum_{n>1} \left(q_n (1 - q_n)^{\frac{(1-q_n)}{q_n}} \right)^{(1-\varepsilon)} \exp \left(-\frac{\lambda_{\{q_n\}}^\varepsilon}{q_n} \right) |n\rangle\langle n|;$$

(iii) оптимальное распределение вероятностей $\{\pi_n^\pm\}$ имеет вид

$$\pi_1^\pm = 0, \quad \pi_n^\pm = \frac{1}{2} \pi_{\{q_n\}}^\varepsilon q_n^{-\varepsilon} (1 - q_n)^{\frac{(1-q_n)(1-\varepsilon)}{q_n}} \exp \left(-\frac{\lambda_{\{q_n\}}^\varepsilon}{q_n} \right), \quad n \geq 2,$$

где $\lambda_{\{q_n\}}^\varepsilon$ – единственное решение уравнения

$$\sum_{n>1} q_n^{-\varepsilon} (1 - q_n)^{1 + \frac{(1-q_n)(1-\varepsilon)}{q_n}} \exp \left(-\frac{\lambda}{q_n} \right) = 1,$$

$$a \pi_{\{q_n\}}^\varepsilon = \left(\sum_{n>1} q_n^{-\varepsilon} (1 - q_n)^{\frac{(1-q_n)(1-\varepsilon)}{q_n}} \exp \left(-\frac{\lambda_{\{q_n\}}^\varepsilon}{q_n} \right) \right)^{-1} \in [0, 1].$$

4) Условие (13) равносильно ограниченности энтропии на множестве $\overline{\text{co}}(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^\varepsilon)$ при любом ε .

5) Состояние с максимальной энтропией для множества $\overline{\text{co}}(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^\varepsilon)$ существует при некотором, а значит, и при любом ε тогда и только тогда, когда для последовательности $\{q_n\}$ выполнены условия (13) и (14) при $\varepsilon = 1$. В этом случае

$$\Gamma(\overline{\text{co}}(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^\varepsilon)) = \pi_{\{q_n\}}^1 |1\rangle\langle 1| + \pi_{\{q_n\}}^1 \sum_{n>1} \exp \left(-\frac{\lambda_{\{q_n\}}^1}{q_n} \right) |n\rangle\langle n|$$

при любом ε , где $\pi_{\{q_n\}}^1$ и $\lambda_{\{q_n\}}^1$ – введенные выше параметры¹⁴.

6) Если условие (13) выполнено при любом $\lambda > 0$, то энтропия непрерывна на множестве $\overline{\text{co}}(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^\varepsilon)$ при любом ε .

На рис. 1 показаны результаты вычисления χ -емкости множества $\mathcal{S}_{\{q_n\}}^\varepsilon$ как функции параметра ε для различных последовательностей $\{q_n\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу [11, теорема 1] конечность χ -емкости множества $\mathcal{S}_{\{q_n\}}^\varepsilon$ означает существование в $\overline{\text{co}}(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^\varepsilon)$ оптимального среднего состояния $\Omega(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^\varepsilon)$ такого, что

$$\sup_{n>1} H(\rho_n^\pm \| \Omega(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^\varepsilon)) < +\infty. \quad (15)$$

¹⁴Интересно сравнить это наблюдение с результатами предложения 1 из [11] в случае $\mathfrak{H}$ -оператора $H = \sum_{n=2}^{+\infty} q_n^{-1} |n\rangle\langle n|$.

Рис. 1. χ -емкость множества $\mathcal{S}_{\{q_n\}}^\varepsilon$ как функция параметра ε для последовательностей $\{q_n = n^{-\alpha}\}_{n \geq 2}$, $\alpha = 1/2, 1, 2$

В силу [1, лемма 1] оптимальное среднее состояние может быть представлено в виде

$$\Omega(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^\varepsilon) = \pi_1 \rho_1 + \sum_{n>1, \pm} \pi_n^\pm \rho_n^\pm. \quad (16)$$

Поскольку множество $\mathcal{S}_{\{q_n\}}^\varepsilon$ инвариантно относительно действия автоморфизма $U(\cdot)U^*$, где U – унитарный оператор, диагонализированный в базисе $\{|n\rangle\}$ и имеющий собственные значения ± 1 , следствие 4 показывает, что состояние $\Omega(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^\varepsilon)$ инвариантно относительно действия данного автоморфизма и, следовательно, диагонализировано в базисе $\{|n\rangle\}$. Это значит, что $\pi_n^+ = \pi_n^- = \frac{1}{2}\pi_n$ для всех $n > 1$ в (16) при некотором распределении вероятностей $\{\pi_n\}_{n=1}^\infty$. Поэтому

$$\Omega(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^\varepsilon) = \pi |1\rangle\langle 1| + \sum_{n>1} \pi_n q_n |n\rangle\langle n|, \quad (17)$$

где $\pi = \pi_1 + \sum_{n>1} (1 - q_n) \pi_n$. Таким образом,

$$H(\rho_1 \parallel \Omega(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^\varepsilon)) = -\log \pi, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} H(\rho_n^\pm \parallel \Omega(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^\varepsilon)) &= -(1 - q_n) \log \pi - q_n \log(\pi_n q_n) \\ &+ (1 - \varepsilon)((1 - q_n) \log(1 - q_n) + q_n \log q_n) = -(1 - q_n) \log \pi \\ &- q_n \log \pi_n - \varepsilon q_n \log q_n + (1 - \varepsilon)(1 - q_n) \log(1 - q_n), \quad n > 1. \end{aligned} \quad (19)$$

Поскольку $q_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$, условие (15) равносильно конечности $\sup_{n>1} q_n(-\log \pi_n)$. Нетрудно видеть, что существование распределения вероятностей $\{\pi_n\}$, удовлетворяющего этому условию, равносильно существованию положительного λ такого, что $\sum_n \exp(-\frac{\lambda}{q_n}) < +\infty$.

Заметим, что из (15) и (19) следует $\pi_n > 0$ для всех $n > 1$. Учитывая это, а также (18) и (19), систему (12) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} -\log \pi &\leq C, & \pi_1(C + \log \pi) &= 0, \\ (1 - q_n)((1 - \varepsilon)\log(1 - q_n) - \log \pi) - q_n \log \pi_n - \varepsilon q_n \log q_n &= C. \end{aligned} \quad (20)$$

Из второй части системы (20) получаем

$$\pi_n = \pi q_n^{-\varepsilon} (1 - q_n)^{\frac{(1-q_n)(1-\varepsilon)}{q_n}} \exp\left(-\frac{C + \log \pi}{q_n}\right), \quad n \geq 2. \quad (21)$$

Поскольку последовательность $\{\pi_n\}$ должна стремиться к нулю при $n \rightarrow +\infty$, заключаем, что $-\log \pi < C$ и из первой части системы (20) следует, что $\pi_1 = 0$.

Нетрудно видеть, что если существует распределение вероятностей $\{\pi_n\}$, удовлетворяющее системе (20), то $\pi = \sum_{n>1} (1 - q_n)\pi_n$ и C образуют решение системы

$$\begin{aligned} \sum_{n>1} q_n^{-\varepsilon} (1 - q_n)^{1 + \frac{(1-q_n)(1-\varepsilon)}{q_n}} \exp\left(-\frac{C + \log \pi}{q_n}\right) &= 1, \\ \sum_{n>1} q_n^{-\varepsilon} (1 - q_n)^{\frac{(1-q_n)(1-\varepsilon)}{q_n}} \exp\left(-\frac{C + \log \pi}{q_n}\right) &= \pi^{-1}. \end{aligned} \quad (22)$$

Обратно, всякое решение (π, C) системы (22) посредством выражения (21) дает распределение вероятностей $\{\pi_n\}$, удовлетворяющее системе (20).

Покажем, что система (22) имеет решение (π, C) тогда и только тогда, когда выполнено неравенство (14). Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n>1} q_n^{-\varepsilon} (1 - q_n)^{1 + \frac{(1-q_n)(1-\varepsilon)}{q_n}} \exp\left(-\frac{x}{q_n}\right), \\ G(x) &= \sum_{n>1} q_n^{-\varepsilon} (1 - q_n)^{\frac{(1-q_n)(1-\varepsilon)}{q_n}} \exp\left(-\frac{x}{q_n}\right). \end{aligned}$$

Эти функции непрерывны и строго убывают на $(\lambda_{\{q_n\}}^*, +\infty)$, причем $F(x)$ не превосходит $G(x)$. Следовательно, существуют обратные функции $F^{-1}(y)$ и $G^{-1}(y)$, которые непрерывны и строго убывают на $F((\lambda_{\{q_n\}}^*, +\infty))$ и на $G((\lambda_{\{q_n\}}^*, +\infty))$ соответственно. Используя эти функции, систему (22) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} F(C + \log \pi) &= 1 \\ G(C + \log \pi) &= \pi^{-1}. \end{aligned}$$

Неравенство (14) равносильно неравенству $\lim_{x \rightarrow \lambda_{\{q_n\}}^* + 0} F(x) \geq 1$, которое в силу сказанного выше означает существование $F^{-1}(1)$. Поэтому если выполнено неравенство (14), то $C + \log \pi = F^{-1}(1)$. Следовательно, $\pi = (G(F^{-1}(1)))^{-1} \leq (F(F^{-1}(1)))^{-1} = 1$ и $C = F^{-1}(1) + \log G(F^{-1}(1))$ образуют единственное решение системы (22). Обозначая $F^{-1}(1)$ и π через $\lambda_{\{q_n\}}^\varepsilon$ и $\pi_{\{q_n\}}^\varepsilon$ соответственно, получаем все утверждения, связанные с χ -емкостью

множества $\mathcal{S}_{\{q_n\}}^\varepsilon$. Если неравенство (14) не выполнено¹⁵, то система (22) не имеет решений и, следовательно, не существует оптимального распределения вероятностей $\{\pi_n\}$. Таким образом, множество $\mathcal{S}_{\{q_n\}}^\varepsilon$ не является регулярным в этом случае.

Из ограниченности энтропии на множестве $\overline{\text{co}}(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^\varepsilon)$ следует конечность χ -емкости множества $\mathcal{S}_{\{q_n\}}^\varepsilon$, а значит, как показано выше, выполнение условия (13). Обратное утверждение следует из условия ограниченности в утверждении 2) предложения 2 с $\mathfrak{H}$ -оператором $\sum_{n=2}^{+\infty} q_n^{-1}|n\rangle\langle n|$. Таким образом, условие (13) равносильно ограниченности энтропии на множестве $\overline{\text{co}}(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^\varepsilon)$.

Предположим, что условие (14) при $\varepsilon = 1$ выполнено для последовательности $\{q_n\}$. Поскольку замкнутое множество $\mathcal{S}_{\{q_n\}}^1$ состоит из чистых состояний, из гарантируемого этим условием существования оптимальной меры для данного множества следует, что оптимальное среднее $\Omega(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^1)$ совпадает с состоянием с максимальной энтропией $\Gamma(\overline{\text{co}}(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^1))$. Замечая, что $\Omega(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^1)$ лежит в $\overline{\text{co}}(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^0)$ и что $\overline{\text{co}}(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^0) \subseteq \overline{\text{co}}(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^\varepsilon)$ при любом ε , заключаем, что

$$\Gamma(\overline{\text{co}}(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^\varepsilon)) = \Omega(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^1)$$

при любом ε в этом случае.

Предположим, что существует состояние $\Gamma(\overline{\text{co}}(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^\varepsilon))$ при некотором ε . Используя наблюдение, приведенное в [11, конец § 3], нетрудно видеть, что это означает существование состояния $\Gamma(\overline{\text{co}}(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^\varepsilon))$ при любом ε , в частности при $\varepsilon = 1$. Поскольку замкнутое множество $\mathcal{S}_{\{q_n\}}^1$ состоит из чистых состояний, состояние $\Gamma(\overline{\text{co}}(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^1))$ совпадает с состоянием $\Omega(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^1)$. В силу [11, лемма 2] сужение энтропии на множество $\overline{\text{co}}(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^1)$ непрерывно в состоянии $\Omega(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^1) = \Gamma(\overline{\text{co}}(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^1))$, что гарантирует регулярность множества $\mathcal{S}_{\{q_n\}}^1$. По [11, теорема 2] существует оптимальная мера для множества $\mathcal{S}_{\{q_n\}}^1$ и, как показано выше, условие (14) при $\varepsilon = 1$ выполнено для последовательности $\{q_n\}$.

В силу второго условия непрерывности в утверждении 2) предложения 2 с $\mathfrak{H}$ -оператором $\sum_{n=2}^{+\infty} q_n^{-1}|n\rangle\langle n|$ конечность ряда в (13) для любого λ гарантирует непрерывность энтропии на множестве $\overline{\text{co}}(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^\varepsilon)$ при любом ε .

В завершение приведем пример последовательности $\{q_n\}$, для которой выполнено условие (13), но не выполнено условие (14) с произвольным ε . Пусть $q_n = 1/\log(n \log^3(2n+1))$ при $n \geq 2$. Тогда $\lambda_{\{q_n\}}^* = 1$ и левая часть (14) при $\varepsilon = 1$ приблизительно равна 0.89. Следовательно, условие (14) не выполнено при любом ε . Как показано выше, при любом ε энтропия ограничена на множестве $\overline{\text{co}}(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^\varepsilon)$ и χ -емкость множества $\mathcal{S}_{\{q_n\}}^\varepsilon$ конечна, однако не существует ни состояния с максимальной энтропией для множества $\overline{\text{co}}(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^\varepsilon)$, ни оптимальной меры $\mu_* = \{\pi_n^\pm, \rho_n^\pm\}$ для множества $\mathcal{S}_{\{q_n\}}^\varepsilon$.

3.2. Множества $\mathcal{L}(\sigma)$ и $\mathcal{K}_{H,h}$. Пусть $\sigma = \sum_k \lambda_k |k\rangle\langle k|$ – произвольное состояние. В работе [11] определено множество $\mathcal{L}(\sigma)$, состоящее из всех состояний, имеющих такие же диагональные элементы в базисе $\{|k\rangle\}$, что и состояние σ . В силу [11, предложение 6] энтропия непрерывна на множестве $\mathcal{L}(\sigma)$ тогда и только тогда, когда $\sup_{\rho \in \mathcal{L}(\sigma)} H(\rho) = H(\sigma) < +\infty$. Вопросы, связанные с χ -емкостью множества $\mathcal{L}(\sigma)$, рассмотрены в следующем предложении.

¹⁵Нетрудно построить последовательность $\{q_n\}$, для которой выполнено (13), но не выполнено (14) (см. конец пункта).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть σ – произвольное состояние из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Тогда:

- 1) χ -емкость множества $\mathcal{L}(\sigma)$ равна $H(\sigma)$;
- 2) если $\overline{C}(\mathcal{L}(\sigma)) = H(\sigma) < +\infty$, то множество $\mathcal{L}(\sigma)$ регулярно и существует оптимальная мера для множества $\mathcal{L}(\sigma)$ с баричесентром $\Omega(\mathcal{L}(\sigma)) = \sigma$ и носителем на множестве чистых состояний из $\mathcal{L}(\sigma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что χ -емкость $\overline{C}(\mathcal{L}(\sigma))$ конечна. Пусть G – группа всех унитарных операторов в $\mathcal{H}$, диагонализированных в базисе $\{|k\rangle\}$. Поскольку множество $\mathcal{L}(\sigma)$ инвариантно относительно действия автоморфизма $U(\cdot)U^*$ при каждом $U \in G$, из следствия 5 получаем, что $\Omega(\mathcal{L}(\sigma)) = \sigma$. Пусть ρ – произвольное чистое состояние из $\mathcal{L}(\sigma)$, например состояние, соответствующее вектору $\sum_k \sqrt{\lambda_k} |k\rangle$. Из [11, теорема 1], [11, предложение 6] следует, что

$$\overline{C}(\mathcal{L}(\sigma)) \geq H(\rho \| \Omega(\mathcal{L}(\sigma))) = H(\rho \| \sigma) = H(\sigma).$$

Поскольку $\sup_{\rho \in \mathcal{L}(\sigma)} H(\rho) = H(\sigma)$, в последнем неравенстве имеет место равенство. Для завершения доказательства утверждения 1) заметим, что из $\overline{C}(\mathcal{L}(\sigma)) = +\infty$ и [11, предложение 6] следует $H(\sigma) = +\infty$.

Утверждение о регулярности следует из [11, предложение 6].

Поскольку $\overline{C}(\mathcal{L}(\sigma)) = H(\Omega(\mathcal{L}(\sigma)))$, утверждение о существовании оптимальной меры следует из [11, теорема 2], [11, предложения 6 и 7].

В [11] введено множество $\mathcal{K}_{H,h}$, определяемое неравенством $\text{Tr } \rho H \leq h$, где H – $\mathfrak{H}$ -оператор и h – положительное число. В силу [11, предложение 1] необходимые и достаточные условия ограниченности и непрерывности энтропии на множестве $\mathcal{K}_{H,h}$ можно выразить в терминах коэффициента роста $g(H)$ $\mathfrak{H}$ -оператора H , и состояние с максимальной энтропией для множества $\mathcal{K}_{H,h}$ существует тогда и только тогда, когда $h \leq h_*(H)$; параметры $g(H)$ и $h_*(H)$ определены в [11] перед предложением 1. Вопросы, связанные с χ -емкостью множества $\mathcal{K}_{H,h}$, рассмотрены в следующем предложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть H – $\mathfrak{H}$ -оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и h – положительное число такое, что $h > h_m(H)$. Тогда:

- 1) χ -емкость множества $\mathcal{K}_{H,h}$ совпадает с $\sup_{\rho \in \mathcal{K}_{H,h}} H(\rho)$ и, следовательно, является конечной тогда и только тогда, когда $g(H) < +\infty$; если это условие выполнено, то

$$\Omega(\mathcal{K}_{H,h}) = \begin{cases} \Gamma(\mathcal{K}_{H,h}) = (\text{Tr } \exp(-\lambda^* H))^{-1} \exp(-\lambda^* H), & h \leq h_*(H), \\ (\text{Tr } \exp(-g(H)H))^{-1} \exp(-g(H)H), & h > h_*(H), \end{cases}$$

где $\lambda^* = \lambda^*(H, h)$ – единственное решение уравнения

$$\text{Tr } H \exp(-\lambda H) = h \text{Tr } \exp(-\lambda H);$$

- 2) следующие утверждения равносильны:

- (i) имеет место неравенство $h \leq h_*(H)$;
- (ii) множество $\mathcal{K}_{H,h}$ регулярно;
- (iii) $\overline{C}(\mathcal{K}_{H,h}) \leq H(\Omega(\mathcal{K}_{H,h}))$, что равносильно $\overline{C}(\mathcal{K}_{H,h}) = H(\Omega(\mathcal{K}_{H,h}))$;
- (iv) $\overline{C}(\mathcal{K}_{H,h}) = \overline{C}(\mathcal{K}_{H,h} \cap \mathcal{L}(\Omega(\mathcal{K}_{H,h})))$;
- (v) существует оптимальная мера для множества $\mathcal{K}_{H,h}$.

На рис. 2 показаны результаты вычисления χ -емкости множества $\mathcal{K}_{H,h}$ как функции параметра $h = s$ для $\mathfrak{H}$ -оператора $H = -\log \sigma$, у которого $h_*(H) < +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H = \sum_k h_k |k\rangle\langle k|$ и $\mathcal{K}_{H,h}^c$ – подмножество множества $\mathcal{K}_{H,h}$, состоящее из состояний, диагонализированных в базисе $\{|k\rangle\}$. Тогда $\mathcal{K}_{H,h} = \bigcup_{\rho \in \mathcal{K}_{H,h}^c} \mathcal{L}(\rho)$ и, следовательно,

$$\overline{C}(\mathcal{K}_{H,h}) \geq \sup_{\rho \in \mathcal{K}_{H,h}^c} \overline{C}(\mathcal{L}(\rho)) = \sup_{\rho \in \mathcal{K}_{H,h}^c} H(\rho) = \sup_{\rho \in \mathcal{K}_{H,h}} H(\rho),$$

где последнее равенство следует из [11, неравенство (22)]. Поскольку обратное неравенство очевидно, первая часть утверждения 1) предложения доказана.

В [11, доказательство предложения 1] построена последовательность $\{\rho_n\}$ состояний из $\mathcal{K}_{H,h}^c$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} H(\rho_n) = \sup_{\rho \in \mathcal{K}_{H,h}} H(\rho)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = \rho_*(\mathcal{K}_{H,h})$. В силу предложения 5 для каждого n существует оптимальная мера μ_n для множества $\mathcal{L}(\rho_n)$ такая, что $\bar{\rho}(\mu_n) = \rho_n$ и $\chi(\mu_n) = H(\rho_n)$. Из первой части утверждения 1) следует, что последовательность мер $\{\mu_n\}$ является аппроксимирующей последовательностью для множества $\mathcal{K}_{H,h}$. В силу [11, теорема 1] предельное состояние $\rho_*(\mathcal{K}_{H,h})$ соответствующей последовательности барицентров $\{\rho_n\}$ является оптимальным средним состоянием множества $\mathcal{K}_{H,h}$. Утверждение 1) доказано.

Равносильность утверждений (i)–(v) будет доказана в следующем порядке:

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii). С учетом доказанного выше из (i) следует, что $\Omega(\mathcal{K}_{H,h}) = \Gamma(\mathcal{K}_{H,h})$. В силу [11, лемма 2] сужение энтропии на множество $\mathcal{K}_{H,h}$ непрерывно в состоянии $\Omega(\mathcal{K}_{H,h})$, что гарантирует регулярность множества $\mathcal{K}_{H,h}$.

(ii) $\Rightarrow$ (v). Непосредственно следует из [11, теорема 2].

(v) $\Rightarrow$ (iii). Непосредственно вытекает из [11, следствие 8].

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Легко выводится из предложения 5 и утверждения 1).

(iv) $\Rightarrow$ (i). Если $h > h_*(H)$, то в силу [11, предложение 1] и предложения 5 имеем

$$\overline{C}(\mathcal{L}(\Omega(\mathcal{K}_{H,h}))) = H(\Omega(\mathcal{K}_{H,h})) < \sup_{\rho \in \mathcal{K}_{H,h}} H(\rho) = \overline{C}(\mathcal{K}_{H,h}).$$

Конструкции в доказательствах предложения 1 из [11] и предложения 6 позволяют построить следующий пример, показывающий, что условие регулярности в утверждении 9) теоремы 1 существенно.

ПРИМЕР 2 (замкнутое множество состояний с конечной χ -емкостью, не содержащее минимального замкнутого подмножества с той же самой χ -емкостью). Пусть H – $\mathfrak{H}$ -оператор такой, что

$$h_*(H) = \frac{\text{Tr } H \exp(-g(H)H)}{\text{Tr } \exp(-g(H)H)} < +\infty.$$

Например,

$$H = \sum_{k=1}^{+\infty} \log((k+1) \log^3(k+1)) |k\rangle\langle k|.$$

Как показано в [11, доказательство предложения 1], для данного $h > h_*(H)$ существует натуральное n_0 такое, что состояние ρ_n корректно определено формулой (8) из [11] для всех $n \geq n_0$ и последовательность $\{\rho_n\}_{n \geq n_0}$ сходится к состоянию $\rho_*(\mathcal{K}_{H,h})$, определенному формулой (13) из [11]. Пусть $\mathcal{A}_0 = \bigcup_{n \geq n_0} \mathcal{L}(\rho_n)$

и $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}_0 = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{L}(\rho_*(\mathcal{K}_{H,h}))$. Из [11, доказательство предложения 1] и [11, предложение 6] следует, что

$$\overline{C}(\mathcal{A}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} H(\rho_n) > H(\rho_*(\mathcal{K}_{H,h})) = \sup_{\rho \in \mathcal{L}(\rho_*(\mathcal{K}_{H,h}))} H(\rho).$$

Покажем, что замкнутое множество $\mathcal{A}$ не содержит минимального замкнутого подмножества с той же самой χ -емкостью. Предположим, что $\mathcal{B}$ – минимальное подмножество $\mathcal{A}$. Поскольку $\overline{C}(\mathcal{L}(\rho_*(\mathcal{K}_{H,h})))$ меньше, чем $\overline{C}(\mathcal{A}) = \overline{C}(\mathcal{B})$, множество $\mathcal{B}$ имеет непустое пересечение с множеством $\mathcal{L}(\rho_{n_*})$ при некотором $n_* \geq n_0$. Покажем, что замкнутое множество $\mathcal{B} \setminus \mathcal{L}(\rho_{n_*}) \subsetneq \mathcal{B}$ имеет ту же самую χ -емкость, что и множество $\mathcal{B}$, вопреки предполагаемой минимальности множества $\mathcal{B}$.

Поскольку $\sup_{\rho \in \mathcal{L}(\rho_*(\mathcal{K}_{H,h}))} H(\rho) < \overline{C}(\mathcal{B})$, существует аппроксимирующая последовательность ансамблей $\{\{\pi_i^k, \rho_i^k\}\}_k$ для множества $\mathcal{B}$ такая, что соответствующая последовательность средних состояний $\{\bar{\rho}_k\}_k$ не пересекается с $\mathcal{L}(\rho_*(\mathcal{K}_{H,h}))$ и, следовательно, $\Pi_{\{|k|\}}(\bar{\rho}_k) = \rho_{n_k}$ для некоторой последовательности натуральных чисел $\{n_k\}$. Поскольку $\sup_{\rho \in \mathcal{L}(\rho_{n_*})} H(\rho) < \overline{C}(\mathcal{B})$ для каждого $n \geq n_0$, последовательность $\{n_k\}$ стремится к $+\infty$. Заметим, что для любого состояния ρ из $\mathcal{B}$ состояние $\Pi_{\{|k|\}}(\rho)$ совпадает либо с $\rho_*(\mathcal{K}_{H,h})$, либо с ρ_n при некотором n и что из разложения $\bar{\rho}_k = \sum_i \pi_i^k \rho_i^k$ следует разложение $\Pi_{\{|k|\}}(\bar{\rho}_k) = \sum_i \pi_i^k \Pi_{|k|}(\rho_i^k)$ при каждом k . Используя это наблюдение, определения (8) и (13) из [11], нетрудно показать, что $\Pi_{\{|k|\}}(\rho_i^k) = \rho_{n_k}$ для всех i и k . Таким образом, состояния ансамбля $\{\pi_i^k, \rho_i^k\}$ не лежат в $\mathcal{L}(\rho_{n_*})$ для всех достаточно больших k и, следовательно, “хвост” последовательности $\{\{\pi_i^k, \rho_i^k\}\}_k$ является аппроксимирующей последовательностью для множества $\mathcal{B} \setminus \mathcal{L}(\rho_{n_*})$. Поэтому $\overline{C}(\mathcal{B}) = \overline{C}(\mathcal{B} \setminus \mathcal{L}(\rho_{n_*}))$.

3.3. Множество $\mathcal{V}_{\sigma,c}$. В работе [11] введено множество $\mathcal{V}_{\sigma,c}$, определяемое неравенством $H(\rho \parallel \sigma) \leq c$, где σ – состояние и c – неотрицательное число. Если σ – состояние бесконечного ранга, то семейство непустых множеств $\{\mathcal{K}_{\sigma,c}\}_{c \in \mathbb{R}_+}$ является строго возрастающим, причем $\mathcal{K}_{\sigma,0} = \{\sigma\}$.

В силу [11, теорема 1] каждое множество $\mathcal{A}$ с конечной χ -емкостью содержится внутри компактного выпуклого множества $\mathcal{V}_{\Omega(\mathcal{A}), \overline{C}(\mathcal{A})}$ такого, что $\Omega(\mathcal{V}_{\Omega(\mathcal{A}), \overline{C}(\mathcal{A})}) = \Omega(\mathcal{A})$, $\overline{C}(\mathcal{V}_{\Omega(\mathcal{A}), \overline{C}(\mathcal{A})}) = \overline{C}(\mathcal{A})$. Ниже будут определены χ -емкость и оптимальное среднее множества $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ для произвольных σ и c .

Из [11, предложение 3] следуют необходимые и достаточные условия ограниченности и непрерывности энтропии на множестве $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ в терминах коэффициента убывания $d(\sigma)$ состояния σ . Это предложение также показывает, что состояние с максимальной энтропией для множества $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ существует тогда и только тогда, когда $c \leq c_*(\sigma)$; параметры $d(\sigma)$ и $c_*(\sigma)$ определены в [11] перед предложением 3. Вопросы, связанные с χ -емкостью множества $\mathcal{V}_{\sigma,c}$, рассмотрены в следующем предложении. Пусть

$$c^*(\sigma) = \frac{\text{Tr } \sigma^{d(\sigma)} (-\log \sigma)}{\text{Tr } \sigma^{d(\sigma)}},$$

если $\text{Tr } \sigma^{d(\sigma)} < +\infty$, и $c^*(\sigma) = +\infty$ в противном случае. Заметим, что

$$c^*(\sigma) = \frac{c_*(\sigma) + \log \text{Tr } \sigma^{d(\sigma)}}{1 - d(\sigma)} \geq c_*(\sigma),$$

если $d(\sigma) < 1$, и $c^*(\sigma) = H(\sigma)$, если $d(\sigma) = 1$.

Рис. 2. Верхняя граница энтропии и χ -емкость множеств $K_{-\log \sigma, c}$ и $V_{\sigma, c}$ как функции параметра c для состояния $\sigma \sim \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|k\rangle\langle k|}{(k+100) \log^3(k+100)}$ при $d(\sigma) = 1/2$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть σ – состояние бесконечного ранга из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Тогда:

- 1) если $c \leq H(\sigma) \leq +\infty$, то $\overline{C}(V_{\sigma, c}) = c$ и $\Omega(V_{\sigma, c}) = \sigma$;
- 2) если $H(\sigma) < c \leq c^*(\sigma)$, то

$$\overline{C}(V_{\sigma, c}) = \lambda^* c + \log \text{Tr } \sigma^{\lambda^*}, \quad \Omega(V_{\sigma, c}) = (\text{Tr } \sigma^{\lambda^*})^{-1} \sigma^{\lambda^*},$$

где $\lambda^* = \lambda^*(\sigma, c)$ – единственное решение уравнения $\text{Tr } \sigma^\lambda (-\log \sigma) = c \text{Tr } \sigma^\lambda$;

- 3) если $c^*(\sigma) < +\infty$ и $c \geq c^*(\sigma)$, то

$$\overline{C}(V_{\sigma, c}) = d(\sigma)c + \log \text{Tr } \sigma^{d(\sigma)}, \quad \Omega(V_{\sigma, c}) = (\text{Tr } \sigma^{d(\sigma)})^{-1} \sigma^{d(\sigma)}.$$

В случаях 1)–3) имеем

$$\overline{C}(V_{\sigma, c}) = \inf_{\lambda \in [d(\sigma), 1]} (\lambda c + \log \text{Tr } \sigma^\lambda).$$

4) Следующие утверждения равносильны:

- (i) имеет место неравенство $c \leq c^*(\sigma)$;
- (ii) $\overline{C}(V_{\sigma, c}) \leq H(\Omega(V_{\sigma, c}))$;

(iii) $\overline{C}(\mathcal{V}_{\sigma,c}) = \overline{C}(\mathcal{V}_{\sigma,c} \cap \mathcal{L}(\Omega(\mathcal{V}_{\sigma,c})))$;

(iv) *существует оптимальная мера для множества $\mathcal{V}_{\sigma,c}$.*

5) Множество $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ регулярно тогда и только тогда, когда $d(\sigma) < 1$ и $c < c^*(\sigma)$.

На рис. 2 показаны результаты вычисления χ -емкости множества $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ как функции параметра c для состояния σ , у которого $c^*(\sigma) < +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\sigma = \sum_k \lambda_k |k\rangle\langle k|$ – состояние полного ранга; тогда $-\log \sigma$ – $\mathfrak{H}$ -оператор. Из [11, теорема 1, 2)] следует неравенство

$$\overline{C}(\mathcal{V}_{\sigma,c}) \leq c. \quad (23)$$

Пусть $c \leq H(\sigma) \leq +\infty$. Рассмотрим подмножество $\mathcal{T} = \mathcal{V}_{\sigma,c} \cap \mathcal{L}(\sigma)$ множества $\mathcal{V}_{\sigma,c}$. Учитывая монотонность χ -емкости и (23), имеем $\overline{C}(\mathcal{T}) \leq \overline{C}(\mathcal{V}_{\sigma,c}) \leq c < +\infty$. Поэтому для доказательства того, что $\overline{C}(\mathcal{V}_{\sigma,c}) = c$, достаточно показать, что $\overline{C}(\mathcal{T}) \geq c$.

Пусть G – группа всех унитарных операторов в $\mathcal{H}$, диагонализированных в базисе $\{|k\rangle\}$. Поскольку множество $\mathcal{T}$ инвариантно относительно действия автоморфизма $U(\cdot)U^*$ при каждом $U \in G$, из следствия 5 вытекает $\Omega(\mathcal{T}) = \sigma$. Для доказательства того, что $\overline{C}(\mathcal{T}) \geq c$, достаточно в силу [11, теорема 1, 2)] найти состояние σ_c из множества $\mathcal{T}$ такое, что $H(\sigma_c \| \Omega(\mathcal{T})) = H(\sigma_c \| \sigma) = c$.

В случае $H(\sigma) < +\infty$ относительная энтропия $H(\rho \| \sigma)$ является в силу [11, предложение 6] непрерывной функцией на $\mathcal{L}(\sigma)$ с множеством значений $[0, H(\sigma)]$. Это гарантирует существование состояния σ_c с указанными свойствами.

В случае $H(\sigma) = +\infty$ существование состояния σ_c следует из приведенной ниже леммы 2 (при $n = 1$).

Таким образом, $\overline{C}(\mathcal{V}_{\sigma,c}) = \overline{C}(\mathcal{T}) = c$, и из утверждения 3) теоремы 1 следует, что $\Omega(\mathcal{V}_{\sigma,c}) = \Omega(\mathcal{T}) = \sigma$.

Пусть $c > H(\sigma)$. Поскольку $\mathcal{K}_{-\log \sigma, c} \subset \mathcal{V}_{\sigma,c}$, из монотонности χ -емкости следует, что

$$\overline{C}(\mathcal{K}_{-\log \sigma, c}) \leq \overline{C}(\mathcal{V}_{\sigma,c}). \quad (24)$$

Заметим, что $c^*(\sigma) = h_*(-\log \sigma)$. Для доказательства всех утверждений, касающихся случаев $H(\sigma) < c \leq c^*(\sigma)$ и $c \geq c^*(\sigma)$, достаточно в силу предложения 6 показать, что

$$\overline{C}(\mathcal{V}_{\sigma,c}) = \overline{C}(\mathcal{K}_{-\log \sigma, c}), \quad (25)$$

поскольку из этого равенства и утверждения 3) теоремы 1 следует равенство $\Omega(\mathcal{V}_{\sigma,c}) = \Omega(\mathcal{K}_{-\log \sigma, c})$.

Предположим, что $d(\sigma) = g(-\log \sigma) = 1$. Тогда $c^*(\sigma) = h_*(-\log \sigma) = H(\sigma)$. В силу предложения 6 имеем $\overline{C}(\mathcal{K}_{-\log \sigma, c}) = c$ для всех $c \geq H(\sigma)$. Таким образом, из неравенств (23) и (24) следует равенство (25).

Предположим, что $d(\sigma) = g(-\log \sigma) < 1$. Тогда из [11, лемма 3] следует, что

$$H(\rho \| (\text{Tr } \sigma^\lambda)^{-1} \sigma^\lambda) \leq \lambda H(\rho \| \sigma) + \log \text{Tr } \sigma^\lambda \leq \lambda c + \log \text{Tr } \sigma^\lambda$$

для всех ρ из $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ и для всех $\lambda \in (d(\sigma), 1]$. Используя [11, теорема 1, 2)], получаем

$$\overline{C}(\mathcal{V}_{\sigma,c}) \leq \inf_{\lambda \in (d(\sigma), 1]} \sup_{\rho \in \mathcal{V}_{\sigma,c}} H(\rho \| (\text{Tr } \sigma^\lambda)^{-1} \sigma^\lambda) \leq \inf_{\lambda \in (d(\sigma), 1]} (\lambda c + \log \text{Tr } \sigma^\lambda).$$

В силу предложения 6 с учетом [11, предложение 1] имеем

$$\overline{C}(\mathcal{K}_{-\log \sigma, c}) = \inf_{\lambda \in (d(\sigma), +\infty)} (\lambda c + \log \operatorname{Tr} \sigma^\lambda)$$

и нетрудно видеть, что при $c > H(\sigma)$ последняя точная нижняя грань достигается в точке $\lambda^* \leq 1$. Таким образом, эта точная нижняя грань совпадает с предыдущей и, следовательно, равенство (25) имеет место в этом случае.

Равносильность утверждений (i)–(iv) будет доказана посредством проверки следующих импликаций: (i) $\implies$ (iv) $\implies$ (ii) $\implies$ (i) и (i) $\implies$ (iii) $\implies$ (i).

(i) $\implies$ (iv). В случае $H(\sigma) < +\infty$ существование оптимальной меры для множества $\mathcal{V}_{\sigma, c}$ при условии $c \leq c^*(\sigma)$ доказывается отдельно для $c \leq H(\sigma)$ и для $H(\sigma) < c \leq c^*(\sigma)$.

Если $c \leq H(\sigma)$, то, как показано выше, $\overline{C}(\mathcal{V}_{\sigma, c}) = \overline{C}(\mathcal{T})$, где $\mathcal{T} = \mathcal{V}_{\sigma, c} \cap \mathcal{L}(\sigma)$. В силу [11, предложение 6] энтропия непрерывна на множестве $\mathcal{T}$, что гарантирует его регулярность. Поэтому из [11, теорема 2] следует существование оптимальной меры для множества $\mathcal{T}$. Поскольку $\overline{C}(\mathcal{V}_{\sigma, c}) = \overline{C}(\mathcal{T})$ и $\mathcal{T} \subset \mathcal{V}_{\sigma, c}$, эта мера является оптимальной мерой для множества $\mathcal{V}_{\sigma, c}$.

Если $d(\sigma) < 1$ и $H(\sigma) < c \leq c^*(\sigma)$, то, как показано выше, $\overline{C}(\mathcal{V}_{\sigma, c}) = \overline{C}(\mathcal{K}_{-\log \sigma, c})$ и $c^*(\sigma) = h_*(-\log \sigma)$. В силу предложения 6 существует оптимальная мера для множества $\mathcal{K}_{-\log \sigma, c}$. Поскольку $\overline{C}(\mathcal{V}_{\sigma, c}) = \overline{C}(\mathcal{K}_{-\log \sigma, c})$ и $\mathcal{K}_{-\log \sigma, c} \subset \mathcal{V}_{\sigma, c}$, эта мера является оптимальной для множества $\mathcal{V}_{\sigma, c}$.

В случае $H(\sigma) = +\infty$ существование оптимальной меры доказывается следующим непосредственным построением.

Для данного c пусть m и $\rho_{c,1,m}$ – натуральное число и состояние, существующие в силу леммы 2. Пусть $P_m = \sum_{k=1}^m |k\rangle\langle k|$ и G_m – компактная группа всех унитарных операторов в $\mathfrak{B}(P_m(\mathcal{H}))$, диагонализированных в базисе $\{|k\rangle\}_{k=1}^m$ подпространства $P_m(\mathcal{H})$. Каждому U из G_m соответствует унитарный оператор $\hat{U} = U \oplus I_{\mathcal{H} \ominus P_m(\mathcal{H})}$ в $\mathcal{H}$. Учитывая свойства состояния $\rho_{c,1,m}$, нетрудно видеть, что

$$\int_{G_m} \hat{U} \rho_{c,1,m} \hat{U}^* \mu_H(dU) = \sigma,$$

где μ_H – мера Хаара на G_m . Поскольку

$$H(\hat{U} \rho_{c,1,m} \hat{U}^* \parallel \sigma) = H(\rho_{c,1,m} \parallel \hat{U}^* \sigma \hat{U}) = H(\rho_{c,1,m} \parallel \sigma) = c,$$

образ этой меры μ_H при отображении $U \mapsto \hat{U} \rho_{c,1,m} \hat{U}^*$ является оптимальной мерой для множества $\mathcal{V}_{\sigma, c}$, носитель которой лежит в $\mathcal{L}(\sigma)$ по построению.

(iv) $\implies$ (ii). Непосредственно вытекает из [11, следствие 8].

(ii) $\implies$ (i). Если $c^*(\sigma) < +\infty$ и $c > c^*(\sigma)$, то из доказательства утверждения 3) предложения, [11, предложение 1] и предложения 6 следует, что

$$\overline{C}(\mathcal{V}_{\sigma, c}) = \overline{C}(\mathcal{K}_{-\log \sigma, c}) > H(\Omega(\mathcal{K}_{-\log \sigma, c})), \quad \Omega(\mathcal{V}_{\sigma, c}) = \Omega(\mathcal{K}_{-\log \sigma, c}). \quad (26)$$

(i) $\implies$ (iii). Если $c \leq H(\sigma)$, то, как показано выше, $\overline{C}(\mathcal{V}_{\sigma, c}) = \overline{C}(\mathcal{T})$ и $\Omega(\mathcal{V}_{\sigma, c}) = \sigma$, где $\mathcal{T} = \mathcal{V}_{\sigma, c} \cap \mathcal{L}(\sigma)$. Если $H(\sigma) < c \leq c^*(\sigma)$, то из доказательства утверждения 2) предложения и предложений 5, 6 следует, что

$$\overline{C}(\mathcal{V}_{\sigma, c}) = \overline{C}(\mathcal{K}_{-\log \sigma, c}) = H(\Omega(\mathcal{K}_{-\log \sigma, c})) = \overline{C}(\mathcal{L}(\Omega(\mathcal{K}_{-\log \sigma, c}))). \quad (27)$$

Поскольку $\mathcal{L}(\Omega(\mathcal{K}_{-\log \sigma, c})) \subset \mathcal{K}_{-\log \sigma, c} \subset \mathcal{V}_{\sigma, c}$ и $\Omega(\mathcal{V}_{\sigma, c}) = \Omega(\mathcal{K}_{-\log \sigma, c})$, получаем (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (i). Если $c^*(\sigma) < +\infty$ и $c > c^*(\sigma)$, то выполнено неравенство (26), которое в силу предложения 5 противоречит (iii).

Если $d(\sigma) < 1$ и $c < c^*(\sigma)$, то, как показано выше, $d(\Omega(\mathcal{V}_{\sigma,c})) < 1$, и регулярность множества $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ следует из утверждения 5) теоремы 1.

Для доказательства обратного утверждения заметим, что из приведенной ниже леммы 3 и доказанных утверждений предложения следует, что второе условие регулярности не выполнено для множества $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ при любом состоянии σ бесконечного ранга и $c > 0$. Таким образом, достаточно показать, что первое условие регулярности не выполнено для множества $\mathcal{V}_{\sigma,c}$, когда либо $d(\sigma) = 1$, либо $c \geq c^*(\sigma)$.

Если $d(\sigma) = 1$, то, как показано выше, $\Omega(\mathcal{V}_{\sigma,c}) = \sigma$ для любого c . В случае $H(\sigma) < +\infty$ из [11, предложение 2] следует существование последовательности состояний $\{\rho_n\}$ такой, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\rho_n \| \sigma) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} H(\rho_n) > H(\sigma).$$

Таким образом, состояние ρ_n лежит в $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ при всех достаточно больших n , и, следовательно, первое условие регулярности не имеет места. В случае $H(\sigma) = +\infty$ первое условие регулярности также, очевидно, не выполнено.

Если $d(\sigma) < 1$ и $c \geq c^*(\sigma)$, то, как показано выше, $\Omega(\mathcal{V}_{\sigma,c}) = (\text{Tr } \sigma^{d(\sigma)})^{-1} \sigma^{d(\sigma)}$. В доказательстве предложения 3 из [11] показано, что для каждого m существует последовательность $\{\rho_n^m\}_n$ состояний, для которой имеют место соотношения (19) из [11], и что состояния этой последовательности лежат в $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ для всех достаточно больших n . Таким образом, первое условие регулярности не выполнено и в этом случае.

Множество $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ с $H(\sigma) = +\infty$ – нетривиальный пример нерегулярного множества с конечной χ -емкостью, содержащего состояния с бесконечной энтропией, у которого существует оптимальная мера.

ЛЕММА 2. Пусть $\sigma = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |k\rangle\langle k|$ – состояние с бесконечной энтропией. Для произвольного натурального n пусть $\mathcal{L}_n(\sigma)$ – выпуклое замкнутое подмножество $\mathcal{L}(\sigma)$, содержащее такие состояния ρ , что $\langle i|\rho|j\rangle = 0$, если $i \neq j$ и либо $i < n$, либо $j < n$. Тогда для любых $c \geq 0$ и $n \in \mathbb{N}$ существуют натуральное число m и состояние $\rho_{c,n,m}$ из $\mathcal{L}_n(\sigma)$ такие, что

$$H(\rho_{c,n,m} \| \sigma) = c$$

и $\langle i|\rho_{c,n,m}|j\rangle = 0$, если $i \neq j$ и либо $i > m$, либо $j > m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $c \geq 0$ и $n \in \mathbb{N}$ – произвольные числа. Рассмотрим состояние

$$\sigma_n = \mu_n^{-1} \sum_{k=n}^{+\infty} \lambda_k |k\rangle\langle k|,$$

где $\mu_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \lambda_k$, и последовательность состояний

$$\left\{ \rho_n^m = \mu_n^{-1} \sum_{n \leq i, j \leq m} \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j} |i\rangle\langle j| + \mu_n^{-1} \sum_{k>m} \lambda_k |k\rangle\langle k| \right\}_m,$$

сходящуюся к чистому состоянию $\rho_n^* = \mu_n^{-1} \sum_{i,j \geq n} \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j} |i\rangle\langle j|$ при $m \rightarrow +\infty$. Поскольку $H(\sigma_n) = +\infty$, из [11, предложение 6] следует, что $H(\rho_n^* \| \sigma_n) = +\infty$.

Используя это и общие свойства относительной энтропии, получаем

$$H(\rho_n^m \| \sigma_n) < +\infty \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} H(\rho_n^m \| \sigma_n) = +\infty.$$

Таким образом, существует натуральное $m(c)$ такое, что

$$c\mu_n^{-1} \leq H(\rho_n^{m(c)} \| \sigma_n) < +\infty.$$

Выпуклая полунепрерывная снизу функция $f(\lambda) = H(\lambda\rho_n^{m(c)} + (1-\lambda)\sigma_n \| \sigma_n)$ не превосходит $\lambda H(\rho_n^{m(c)} \| \sigma_n)$ на $[0, 1]$ и, следовательно, непрерывна на $[0, 1]$ (см. [2]). Поскольку $f(0) = 0$ и $f(1) = H(\rho_n^{m(c)} \| \sigma_n) \geq c\mu_n^{-1}$, существует $\lambda^* \in [0, 1]$ такое, что $f(\lambda^*) = c\mu_n^{-1}$.

Пусть $m = m(c)$ и $\rho_{c,n,m} = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k |k\rangle\langle k| + \mu_n (\lambda^* \rho_n^m + (1-\lambda^*)\sigma_n)$. Нетрудно видеть, что $H(\rho_{c,n,m} \| \sigma) = \mu_n H(\lambda^* \rho_n^{m(c)} + (1-\lambda^*)\sigma_n \| \sigma_n) = c$ и что $\rho_{c,n,m} \in \mathcal{L}_n(\sigma)$. По построению $\langle i | \rho_{c,n,m} | j \rangle = 0$, если $i \neq j$ и либо $i > m$, либо $j > m$.

ЛЕММА 3. Пусть σ – состояние бесконечного ранга. Относительная энтропия $H(\rho \| (\text{Tr } \sigma^\lambda)^{-1} \sigma^\lambda)$ не является непрерывной функцией состояния ρ на множестве $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ при любом $c > 0$ и при любом λ таком, что $\text{Tr } \sigma^\lambda < +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что σ – состояние полного ранга. Пусть ϱ – чистое состояние такое, что $H(\varrho \| \sigma) = +\infty$, и P_n – спектральный проектор состояния σ , соответствующий его n максимальным собственным значениям. Тогда последовательность чистых состояний $\varrho_n = (\text{Tr } P_n \varrho)^{-1} P_n \varrho P_n$ сходится к чистому состоянию ϱ и, используя общие свойства относительной энтропии, получаем $H(\varrho_n \| \sigma) < +\infty$ для всех n и $\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\varrho_n \| \sigma) = +\infty$.

Рассмотрим последовательность $\{\eta_n = c(H(\varrho_n \| \sigma))^{-1}\}_{n \geq n_0}$, где n_0 выбрано так, что $H(\varrho_n \| \sigma) > c$ для всех $n \geq n_0$. Пусть $\rho_n = \eta_n \varrho_n + (1 - \eta_n)\sigma$ для всех $n \geq n_0$. Тогда, используя общие свойства относительной энтропии, получаем

$$c - h_2(\eta_n) = \eta_n H(\varrho_n \| \sigma) - h_2(\eta_n) \leq H(\rho_n \| \sigma) \leq \eta_n H(\varrho_n \| \sigma) = c,$$

где $h_2(x) = -x \log x - (1-x) \log(1-x)$.

Поскольку $\eta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, из этого неравенства следует, что

$$\rho_n \in \mathcal{V}_{\sigma,c} \text{ для всех } n \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} H(\rho_n \| \sigma) = c. \quad (28)$$

Пусть λ – произвольное положительное число такое, что $\text{Tr } \sigma^\lambda < +\infty$. В силу [11, лемма 3] имеем

$$H(\rho_n \| (\text{Tr } \sigma^\lambda)^{-1} \sigma^\lambda) = \lambda H(\rho_n \| \sigma) + \log \text{Tr } \sigma^\lambda - (1-\lambda)H(\rho_n). \quad (29)$$

Используя общие свойства энтропии, получаем

$$(1 - \eta_n)H(\sigma) \leq H(\rho_n) \leq (1 - \eta_n)H(\sigma) + h_2(\eta_n)$$

для всех $n \geq n_0$ и, следовательно, $\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\rho_n) = H(\sigma)$.

Таким образом, из (28) и (29) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\rho_n \| (\text{Tr } \sigma^\lambda)^{-1} \sigma^\lambda) = c\lambda + \log \text{Tr } \sigma^\lambda - (1-\lambda)H(\sigma).$$

По построению последовательность $\{\rho_n\}$ состояний из $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ сходится к состоянию σ . Поскольку $H(\sigma \| (\text{Tr } \sigma^\lambda)^{-1} \sigma^\lambda) = \log \text{Tr } \sigma^\lambda - (1-\lambda)H(\sigma)$, предыдущее

выражение означает

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\rho_n \| (\mathrm{Tr} \sigma^\lambda)^{-1} \sigma^\lambda) = H(\sigma \| (\mathrm{Tr} \sigma^\lambda)^{-1} \sigma^\lambda) + c\lambda,$$

т.е. разрывность функции $H(\rho \| (\mathrm{Tr} \sigma^\lambda)^{-1} \sigma^\lambda)$ на множестве $\mathcal{V}_{\sigma,c}$.

Следствием нерегулярности множества $\mathcal{V}_{\sigma,c}$ для любого состояния σ с бесконечной энтропией является отсутствие свойства непрерывности χ -емкости для монотонно убывающих последовательностей подмножеств этого множества (утверждение 7) теоремы 1), что подтверждается следующим примером.

ПРИМЕР 3 (убывающая последовательность замкнутых множеств с одинаковой положительной χ -емкостью, пересечение которых имеет нулевую χ -емкость). Пусть σ – состояние с бесконечной энтропией. Для произвольного натурального n пусть $\mathcal{L}_n(\sigma)$ – выпуклое замкнутое подмножество $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, введенное в лемме 2. Для данного $c > 0$ рассмотрим убывающую последовательность замкнутых выпуклых множеств $\mathcal{A}_n = \mathcal{L}_n(\sigma) \cap \mathcal{V}_{\sigma,c}$. Поскольку σ – единственное состояние из $\mathcal{A}_n$, инвариантное относительно действия всех автоморфизмов из $\mathfrak{F}(\mathcal{A}_n)$, из следствия 5 вытекает, что $\Omega(\mathcal{A}_n) = \sigma$ при каждом n . Лемма 2 гарантирует при каждом n существование состояния $\rho_{c,n,m}$ из $\mathcal{A}_n$ такого, что $H(\rho_{c,n,m} \| \Omega(\mathcal{A}_n)) = H(\rho_{c,n,m} \| \sigma) = c$, и из [11, теорема 1] следует, что $\overline{C}(\mathcal{A}_n) \geq c$. В силу утверждения 3) теоремы 1 имеем $\overline{C}(\mathcal{A}_n) \leq \overline{C}(\mathcal{V}_{\sigma,c}) = c$ и, следовательно, $\overline{C}(\mathcal{A}_n) = c$ для всех n , а $\overline{C}(\bigcap_n \mathcal{A}_n) = 0$, поскольку $\bigcap_n \mathcal{A}_n = \{\sigma\}$.

3.4. Множество $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Пусть $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$ – сепарабельные гильбертовы пространства, а $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – произвольные подмножества множеств $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{S}(\mathcal{K})$ соответственно. Пусть

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \{\omega \in \mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}) \mid \omega^{\mathcal{H}} \in \mathcal{A}, \omega^{\mathcal{K}} \in \mathcal{B}\},$$

где $\omega^{\mathcal{H}} = \mathrm{Tr}_{\mathcal{K}} \omega$ и $\omega^{\mathcal{K}} = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}} \omega$.

В работе [12] доказана следующая лемма.

ЛЕММА 4. *Множество $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ является выпуклым подмножеством множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ тогда и только тогда, когда множества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ являются выпуклыми подмножествами множеств $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{S}(\mathcal{K})$ соответственно.*

Множество $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ является компактным подмножеством множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ тогда и только тогда, когда множества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ являются компактными подмножествами множеств $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{S}(\mathcal{K})$ соответственно.

Свойства сужения энтропии на множество $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ также определяются свойствами сужения энтропии на множества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – произвольные подмножества множеств $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{S}(\mathcal{K})$ соответственно. Тогда:*

- 1) *энтропия ограничена на множестве $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда энтропия ограничена на множествах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$;*
- 2) *энтропия непрерывна на множестве $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда энтропия непрерывна на множествах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если энтропия ограничена (непрерывна) на множестве $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, то энтропия ограничена (непрерывна) на множествах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, поскольку для каждого состояния ρ из $\mathcal{A}$ и для каждого состояния σ из $\mathcal{B}$ состояние $\rho \otimes \sigma$ лежит в $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ и $H(\rho \otimes \sigma) = H(\rho) + H(\sigma)$.

Если энтропия ограничена на множествах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, то в силу свойства субаддитивности энтропия ограничена на множестве $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Предположим, что энтропия непрерывна на множествах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Пусть ω_0 – состояние из $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ и $\{\omega_n\}$ – последовательность состояний из $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, сходящаяся к состоянию ω_0 . Поскольку

$$H(\omega_n) = H(\omega_n^{\mathcal{H}}) + H(\omega_n^{\mathcal{K}}) - H(\omega_n \parallel \omega_n^{\mathcal{H}} \otimes \omega_n^{\mathcal{K}}), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

используя предположение о непрерывности и полунепрерывность снизу относительной энтропии, получаем

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} H(\omega_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} H(\omega_n^{\mathcal{H}}) + \lim_{n \rightarrow +\infty} H(\omega_n^{\mathcal{K}}) - \liminf_{n \rightarrow +\infty} H(\omega_n \parallel \omega_n^{\mathcal{H}} \otimes \omega_n^{\mathcal{K}}) \\ &\leq H(\omega_0^{\mathcal{H}}) + H(\omega_0^{\mathcal{K}}) - H(\omega_0 \parallel \omega_0^{\mathcal{H}} \otimes \omega_0^{\mathcal{K}}) = H(\omega_0). \end{aligned}$$

Из этого неравенства и полунепрерывности снизу энтропии следует, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\omega_n) = H(\omega_0)$.

Важный частный случай множества $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ – это множество всех состояний ω из $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$, имеющих заданные частичные состояния $\omega^{\mathcal{H}} = \rho$ и $\omega^{\mathcal{K}} = \sigma$. Следуя [8], обозначим это множество $\mathcal{C}(\rho, \sigma)$. В силу леммы 4 множество $\mathcal{C}(\rho, \sigma)$ выпукло и компактно при любых ρ и σ . Из субаддитивности энтропии следует, что $\sup_{\omega \in \mathcal{C}(\rho, \sigma)} H(\omega) = H(\rho) + H(\sigma)$. Подобно случаю множества $\mathcal{L}(\sigma)$ конечность энтропии на множестве $\mathcal{C}(\rho, \sigma)$ гарантирует ее непрерывность на этом множестве.

СЛЕДСТВИЕ 6. Энтропия непрерывна на множестве $\mathcal{C}(\rho, \sigma)$ тогда и только тогда, когда $H(\rho) < +\infty$ и $H(\sigma) < +\infty$.

Пусть $\{\pi_i, \rho_i\}$ и $\{\lambda_j, \sigma_j\}$ – произвольные ансамбли состояний из $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно. Тензорным произведением этих ансамблей назовем ансамбль $\{\pi_i \lambda_j, \rho_i \otimes \sigma_j\}$ состояний из $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Рассматривая тензорные произведения всевозможных ансамблей состояний из $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, нетрудно показать, что

$$\overline{\mathcal{C}}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \geq \overline{\mathcal{C}}(\mathcal{A}) + \overline{\mathcal{C}}(\mathcal{B}). \quad (30)$$

Существуют примеры множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, для которых имеет место равенство в (30). Например, если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – множества, рассмотренные в п. 3.2, то равенство в (30) вытекает из субаддитивности энтропии. Однако существуют и примеры, для которых имеет место строгое неравенство в (30). Более того, если $\mathcal{A} = \{\rho\}$ и $\mathcal{B} = \{\sigma\}$, где ρ и σ – изоморфные состояния с бесконечной энтропией из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{S}(\mathcal{K})$ соответственно, то в силу приведенного ниже предложения 9 левая часть (30) равна $+\infty$, а правая, очевидно, равна нулю¹⁶.

Заметим, что из равенства в (30) следует

$$\Omega(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) = \Omega(\mathcal{A}) \otimes \Omega(\mathcal{B}). \quad (31)$$

Действительно, если $\{\{\pi_i^n, \rho_i^n\}\}_n$ и $\{\{\lambda_j^n, \sigma_j^n\}\}_n$ – аппроксимирующие последовательности ансамблей для множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно, то в силу предполагаемого равенства в (30) последовательность ансамблей $\{\{\pi_i^n \lambda_j^n, \rho_i^n \otimes \sigma_j^n\}\}_n$

¹⁶Строгое неравенство в (30) не противоречит гипотезе аддитивности χ -пропускной способности квантовых каналов. Действительно, если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – выходные множества некоторых каналов Φ и Ψ соответственно, то выходное множество канала $\Phi \otimes \Psi$ есть собственное подмножество множества $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

является аппроксимирующей последовательностью для множества $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. По [11, теорема 1] последовательности $\{\bar{\rho}_n\}$ и $\{\bar{\sigma}_n\}$ сходятся к оптимальным средним состояниям $\Omega(\mathcal{A})$ и $\Omega(\mathcal{B})$ соответственно. Поэтому последовательность $\{\bar{\rho}_n \otimes \bar{\sigma}_n\}$ сходится к состоянию $\Omega(\mathcal{A}) \otimes \Omega(\mathcal{B})$ и, следовательно, в силу [11, теорема 1] это состояние является оптимальным средним состоянием $\Omega(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ множества $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Из приведенного ниже предложения 9 следует, в частности, что (31) не гарантирует равенства в (30).

Рассмотрим подробно множество $\mathcal{C}(\rho, \sigma)$. Пусть $\rho = \sum_i \pi_i |e_i\rangle\langle e_i|$ и $\sigma = \sum_j \lambda_j |f_j\rangle\langle f_j|$, где $\{|e_i\rangle\}$ и $\{|f_j\rangle\}$ – ортонормированные системы векторов из $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$ соответственно. Пусть $E_{ij} = |e_i\rangle\langle e_j|$ и $F_{kl} = |f_k\rangle\langle f_l|$ – операторы ранга 1 из $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{B}(\mathcal{K})$ соответственно. Для произвольных распределений вероятностей $\{\pi_i\}$ и $\{\lambda_j\}$ пусть $\mathcal{C}(\{\pi_i\}, \{\lambda_j\})$ – множество всех распределений вероятностей $\{\omega_{ij}\}$ таких, что $\sum_j \omega_{ij} = \pi_i$ и $\sum_i \omega_{ij} = \lambda_j$, т.е. $\mathcal{C}(\{\pi_i\}, \{\lambda_j\})$ – классический аналог множества $\mathcal{C}(\rho, \sigma)$. Пусть $\mathcal{C}_s(\rho, \sigma)$ – замкнутое выпуклое подмножество $\mathcal{C}(\rho, \sigma)$, состоящее из всех состояний вида $\sum_{i,j} \omega_{ij} E_{ii} \otimes F_{jj}$, где $\{\omega_{ij}\} \in \mathcal{C}(\{\pi_i\}, \{\lambda_j\})$. Множество $\mathcal{C}_s(\rho, \sigma)$ можно отождествить с классическим аналогом $\mathcal{C}(\{\pi_i\}, \{\lambda_j\})$ множества $\mathcal{C}(\rho, \sigma)$.

Пусть G – группа всех унитарных операторов в $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$, диагонализированных в базисе $\{|e_i \otimes f_j\rangle\}$. Нам потребуется следующее простое наблюдение.

ЛЕММА 5. Пусть $\rho = \sum_i \pi_i |e_i\rangle\langle e_i|$ и $\sigma = \sum_j \lambda_j |f_j\rangle\langle f_j|$ – состояния из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{S}(\mathcal{K})$ соответственно.

1) Произвольное состояние ω из $\mathcal{C}(\rho, \sigma)$ можно представить в виде

$$\omega = \sum_{i,j} \omega_{ij} E_{ii} \otimes F_{jj} + \sum_{i \neq j, k \neq l} \eta_{ijkl} E_{ij} \otimes F_{kl},$$

где $\{\omega_{ij}\} \in \mathcal{C}(\{\pi_i\}, \{\lambda_j\})$.

2) Множество $\mathcal{C}(\rho, \sigma)$ является инвариантным для группы автоморфизмов $\{U(\cdot)U^*\}_{U \in G}$, а множество $\mathcal{C}_s(\rho, \sigma)$ состоит из всех инвариантных состояний для этой группы, лежащих в $\mathcal{C}(\rho, \sigma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Произвольное состояние ω из $\mathcal{C}(\rho, \sigma)$ можно представить в виде

$$\omega = \sum_{i,j,k,l} \eta_{ijkl} E_{ij} \otimes F_{kl}.$$

Учитывая требования $\text{Tr}_{\mathcal{K}} \omega = \rho$ и $\text{Tr}_{\mathcal{H}} \omega = \sigma$, нетрудно получить утверждение 1) леммы.

Поскольку произвольный оператор U из группы определяется множеством $\{\varphi_{ij}(U)\}_{i,j}$ чисел из $[0, 2\pi)$ посредством выражения

$$U = \sum_{i,j} \exp(i\varphi_{ij}(U)) E_{ii} \otimes F_{jj},$$

имеем $U E_{ii} \otimes F_{jj} U^* = E_{ii} \otimes F_{jj}$ и $U E_{ij} \otimes F_{kl} U^* = \exp(i(\varphi_{ik} - \varphi_{jl})) E_{ij} \otimes F_{kl}$. Поэтому для данных $\omega \in \mathcal{C}(\rho, \sigma)$ и U получаем

$$U \omega U^* = \sum_{i,j} \omega_{ij} E_{ii} \otimes F_{jj} + \sum_{i \neq j, k \neq l} \eta_{ijkl} \exp(i(\varphi_{ik} - \varphi_{jl})) E_{ij} \otimes F_{kl}.$$

Используя это наблюдение, нетрудно получить утверждение 2) леммы.

Следующее предложение показывает, что проблема определения χ -емкости и нахождения оптимального среднего состояния множества $\mathcal{C}(\rho, \sigma)$ является нетривиальной даже в симметричном случае $\rho \cong \sigma$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть $\rho = \sum_i \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i|$ и $\sigma = \sum_j \lambda_j |f_j\rangle\langle f_j|$ – два изоморфных состояния и $H(\rho) = H(\sigma) = -\sum_i \lambda_i \log \lambda_i = h \leq +\infty$. Тогда:

1) $h \leq \overline{C}(\mathcal{C}(\rho, \sigma)) \leq 2h$, причем равенство в левой части имеет место тогда и только тогда, когда ρ и σ – чистые состояния;

2) в случае $h < +\infty$ существует оптимальная мера $\mu_*(\rho, \sigma)$ с барицентром $\Omega(\mathcal{C}(\rho, \sigma))$ в $\mathcal{C}_s(\rho, \sigma)$, причем $\text{supp } \Omega(\mathcal{C}(\rho, \sigma)) = \text{supp } \rho \otimes \text{supp } \sigma$, и следующие утверждения равносильны:

- (i) $\overline{C}(\mathcal{C}(\rho, \sigma)) = 2h$;
- (ii) $\Omega(\mathcal{C}(\rho, \sigma)) = \rho \otimes \sigma$;
- (iii) состояния ρ и σ пропорциональны проекторам конечного ранга;
- (iv) носитель меры $\mu_*(\rho, \sigma)$ состоит из чистых состояний.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу субаддитивности энтропии имеем $H(\omega) \leq H(\rho) + H(\sigma) = 2h$ для всех ω из $\mathcal{C}(\rho, \sigma)$. Это дает оценку сверху для $\overline{C}(\mathcal{C}(\rho, \sigma))$.

Предположим, что $\overline{C}(\mathcal{C}(\rho, \sigma)) < +\infty$. В силу [11, теорема 1] существует единственное состояние $\Omega(\mathcal{C}(\rho, \sigma))$ из $\mathcal{C}(\rho, \sigma)$ такое, что

$$H(\omega \| \Omega(\mathcal{C}(\rho, \sigma))) \leq \overline{C}(\mathcal{C}(\rho, \sigma)) \quad \forall \omega \in \mathcal{C}(\rho, \sigma). \quad (32)$$

В силу следствия 4 это состояние $\Omega(\mathcal{C}(\rho, \sigma))$ инвариантно относительно автоморфизма $U(\cdot)U^*$ для любого U из G и, используя лемму 5, получаем, что

$$\Omega(\mathcal{C}(\rho, \sigma)) = \sum_{i,j} \omega_{ij} E_{ii} \otimes F_{jj} \quad (33)$$

для некоторого распределения вероятностей $\{\omega_{ij}\}$ из $\mathcal{C}(\{\lambda_i\}, \{\lambda_j\})$. Все вероятности ω_{ij} в этом распределении должны быть положительными, поскольку в противном случае легко найти состояние ω из множества $\mathcal{C}(\rho, \sigma)$, для которого $H(\omega \| \Omega(\mathcal{C}(\rho, \sigma))) = +\infty$ вопреки неравенству (32).

Пусть $\omega = \sum_{i,j} \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j} E_{ij} \otimes F_{ij}$ – чистое состояние из $\mathcal{C}(\rho, \sigma)$. Используя (32) и (33), получаем

$$\begin{aligned} \overline{C}(\mathcal{C}(\rho, \sigma)) &\geq H(\omega \| \Omega(\mathcal{C}(\rho, \sigma))) = -\text{Tr } \omega \log(\Omega(\mathcal{C}(\rho, \sigma))) \\ &= -\text{Tr} \sum_{i,j} \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j} (\log \omega_{jj}) E_{ij} \otimes F_{ij} = -\sum_i \lambda_i \log \omega_{ii}. \end{aligned} \quad (34)$$

Если состояния ρ и σ не являются чистыми, то правая часть (34) больше, чем $-\sum_i \lambda_i \log \lambda_i = h$, поскольку $\omega_{ii} + \sum_{j \neq i} \omega_{ij} = \lambda_i$ и $\omega_{ij} > 0$ для всех i и j .

Существование оптимальной меры в случае $h < +\infty$ следует из [11, теорема 2] и следствия 6.

Эквивалентность утверждений (i)–(iv) будет доказана в следующем порядке: (ii) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Предположим, что

$$\Omega(\mathcal{C}(\rho, \sigma)) = \rho \otimes \sigma = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j E_{ii} \otimes F_{jj}.$$

Пусть ω – чистое состояние, введенное выше. Используя выражение (34) при $\omega_{ij} = \lambda_i \lambda_j$, получаем

$$\overline{C}(\mathcal{C}(\rho, \sigma)) \geq H(\omega \parallel \Omega(\mathcal{C}(\rho, \sigma))) = - \sum_i \lambda_i \log \lambda_i^2 = 2h.$$

Поскольку обратное неравенство уже доказано, $\overline{C}(\mathcal{C}(\rho, \sigma)) = 2h$.

(i) $\implies$ (iv). Предположим, что $\overline{C}(\mathcal{C}(\rho, \sigma)) = 2h = H(\rho \otimes \sigma)$. Пусть μ_* – произвольная оптимальная мера для множества $\mathcal{C}(\rho, \sigma)$. Поскольку $\chi(\mu_*) = 2h$ – максимальное значение энтропии на множестве $\mathcal{C}(\rho, \sigma)$, из [11, выражение (2)] получаем

$$\widehat{H}(\mu_*) = \int H(\omega) \mu_*(d\omega) = 0$$

и, следовательно, носитель меры μ_* состоит из чистых состояний.

(iv) $\implies$ (iii). Пусть μ_* – оптимальная мера для множества $\mathcal{C}(\rho, \sigma)$ с носителем на множестве чистых состояний. Это означает, что барицентр $\Omega(\mathcal{C}(\rho, \sigma))$ этой меры принадлежит выпуклому замыканию множества чистых состояний из $\mathcal{C}(\rho, \sigma)$. Поскольку, как показано выше, $\Omega(\mathcal{C}(\rho, \sigma))$ – состояние из $\mathcal{C}_s(\rho, \sigma)$ с носителем $\text{supp } \rho \otimes \text{supp } \sigma$, из приведенной ниже леммы 6 следует, что состояния ρ и σ пропорциональны проекторам некоторого конечного ранга.

(iii) $\implies$ (ii). Предположим, что состояния ρ и σ пропорциональны проекторам конечного ранга. В силу приведенной ниже леммы 6 существует ансамбль чистых состояний из $\mathcal{C}(\rho, \sigma)$ со средним состоянием $\rho \otimes \sigma$. Этот ансамбль, очевидно, является оптимальным для множества $\mathcal{C}(\rho, \sigma)$, а значит, его среднее состояние совпадает с $\Omega(\mathcal{C}(\rho, \sigma))$.

ЛЕММА 6. Пусть ρ и σ – состояния из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{S}(\mathcal{K})$ соответственно.

Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) множество $\mathcal{C}_s(\rho, \sigma)$ содержит состояние с носителем $\text{supp } \rho \otimes \text{supp } \sigma$, которое принадлежит выпуклому замыканию множества чистых состояний из $\mathcal{C}(\rho, \sigma)$;
- (ii) состояния ρ и σ пропорциональны проекторам некоторого конечного ранга;
- (iii) состояние $\rho \otimes \sigma$ является конечной выпуклой комбинацией чистых состояний из $\mathcal{C}(\rho, \sigma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из каждого утверждения леммы следует, что состояния ρ и σ изоморфны, поскольку в противном случае множество $\mathcal{C}(\rho, \sigma)$ не содержит чистых состояний.

Достаточно доказать, что (i) $\implies$ (ii) и (ii) $\implies$ (iii).

(i) $\implies$ (ii). Пусть $\widehat{\omega} = \sum_{i,j} \omega_{ij} E_{ii} \otimes F_{jj}$ – состояние из $\mathcal{C}_s(\rho, \sigma)$, принадлежащее выпуклому замыканию множества чистых состояний из $\mathcal{C}(\rho, \sigma)$. В силу [1, лемма 1] существует мера μ с носителем на множестве чистых состояний из $\mathcal{C}(\rho, \sigma)$ такая, что

$$\widehat{\omega} = \int_{\mathcal{C}(\rho, \sigma)} \omega \mu(d\omega).$$

Достаточно показать, что состояние ρ не имеет различных положительных собственных значений. Предположим, что λ_i и λ_j такие собственные значения. Используя разложение Шмидта для любого чистого состояния ω из $\mathcal{C}(\rho, \sigma)$,

нетрудно видеть, что $E_{ii} \otimes F_{jj} \omega = 0$. Поэтому

$$\omega_{ij} E_{ii} \otimes F_{jj} = E_{ii} \otimes F_{jj} \hat{\omega} = \int_{\mathcal{C}(\rho, \sigma)} E_{ii} \otimes F_{jj} \omega \mu(d\omega) = 0,$$

а значит, носитель состояния $\hat{\omega}$ не совпадает с $\text{supp } \rho \otimes \text{supp } \sigma$.

(ii) $\implies$ (iii). Пусть $\rho = d^{-1}P$ и $\sigma = d^{-1}Q$, где P и Q – проекторы ранга d из $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{B}(\mathcal{K})$ соответственно. Пусть $\{|\varphi_i\rangle\}$ – некоторый базис из максимально сцепленных векторов в $P(\mathcal{H}) \otimes Q(\mathcal{K})$. Тогда $\rho \otimes \sigma = d^{-2} \sum_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Интересно сравнить χ -емкость множества $\mathcal{C}(\rho, \sigma)$ с χ -емкостью множества $\mathcal{C}_s(\rho, \sigma)$, которое можно отождествить с классическим аналогом $\mathcal{C}(\{\pi_i\}, \{\lambda_j\})$ множества $\mathcal{C}(\rho, \sigma)$. Пусть состояния ρ и σ пропорциональны проекторам ранга d . В этом случае множество $\mathcal{C}(\{\pi_i\}, \{\lambda_j\})$ состоит из таких распределений вероятностей $\{\omega_{ij}\}_{i,j=1}^d$, что

$$\sum_{i=1}^d \omega_{ij} = d^{-1} = \sum_{j=1}^d \omega_{ij}.$$

Оптимальный ансамбль для множества $\mathcal{C}_s(\rho, \sigma) \cong \mathcal{C}(\{\pi_i\}, \{\lambda_j\})$ состоит из d состояний, имеющих один ненулевой элемент d^{-1} в каждом столбце и в каждой строке, с равными вероятностями d^{-1} , так что его среднее состояние есть равномерное распределение $\{\omega_{ij} = d^{-2}\}$. Таким образом,

$$\overline{\mathcal{C}}(\mathcal{C}_s(\rho, \sigma)) = \log d^2 - \log d = \log d = h = \frac{1}{2} \overline{\mathcal{C}}(\mathcal{C}(\rho, \sigma)),$$

где последнее равенство следует из предложения 9. Таким образом, наличие сцепленных состояний в $\mathcal{C}(\rho, \sigma)$ приводит к двукратному увеличению χ -емкости.

3.5. Орбита компактной группы автоморфизмов. Пусть G – компактная группа и $\{U_g\}_{g \in G}$ – унитарное (проективное) представление этой группы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Пусть σ – произвольное состояние из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Рассмотрим множество $\mathcal{O}_{G, U_g, \sigma} = \{U_g \sigma U_g^*\}_{g \in G}$. Это множество компактно как образ компактного множества G при непрерывном отображении $g \mapsto U_g \sigma U_g^*$. Выпуклое замыкание $\overline{\text{co}}(\mathcal{O}_{G, U_g, \sigma})$ этого множества также компактно. Пусть $\omega(G, U_g, \sigma) = \int_G U_g \sigma U_g^* \mu_H(dg)$ – состояние из $\overline{\text{co}}(\mathcal{O}_{G, U_g, \sigma})$, где μ_H – мера Хаара на G .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Энтропия ограничена на множестве $\overline{\text{co}}(\mathcal{O}_{G, U_g, \sigma})$ тогда и только тогда, когда $H(\omega(G, U_g, \sigma)) < +\infty$. В этом случае энтропия непрерывна на множестве $\overline{\text{co}}(\mathcal{O}_{G, U_g, \sigma})$ и достигает своего максимума в состоянии

$$\Gamma(\overline{\text{co}}(\mathcal{O}_{G, U_g, \sigma})) = \omega(G, U_g, \sigma).$$

χ -емкость $\overline{\mathcal{C}}(\mathcal{O}_{G, U_g, \sigma})$ множества $\mathcal{O}_{G, U_g, \sigma}$ равна $H(\sigma \| \omega(G, U_g, \sigma))$. Если $\overline{\mathcal{C}}(\mathcal{O}_{G, U_g, \sigma}) < +\infty$, то множество $\mathcal{O}_{G, U_g, \sigma}$ регулярно и образ меры Хаара μ_H при отображении $g \mapsto U_g \sigma U_g^*$ является оптимальной мерой для множества $\mathcal{O}_{G, U_g, \sigma}$, имеющей барицентр

$$\Omega(\mathcal{O}_{G, U_g, \sigma}) = \omega(G, U_g, \sigma).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\int_G U_g \rho U_g^* \mu_H(dg) = \omega(G, U_g, \sigma)$ для любого состояния ρ из $\overline{\text{co}}(\mathcal{O}_{G, U_g, \sigma})$, утверждение об ограниченности следует из вогнутости энтропии и неравенства Йенсена¹⁷. Утверждение о непрерывности доказывается при помощи следствия 3 из [11], поскольку

$$\text{Tr } \sigma(-\log \omega(G, U_g, \sigma)) = H(\omega(G, U_g, \sigma)).$$

Множество $\mathcal{O}_{G, U_g, \sigma}$ инвариантно относительно действия группы автоморфизмов $\{U_g(\cdot) U_g^*\}_{g \in G}$ и $\omega(G, U_g, \sigma)$ – единственное инвариантное состояние в $\overline{\text{co}}(\mathcal{O}_{G, U_g, \sigma})$ для этой группы. В силу следствия 5 имеем $\overline{C}(\mathcal{O}_{G, U_g, \sigma}) = H(\sigma \| \omega(G, U_g, \sigma))$ и $\Omega(\mathcal{O}_{G, U_g, \sigma}) = \omega(G, U_g, \sigma)$.

Утверждение о существовании оптимальной меры для множества $\mathcal{O}_{G, U_g, \sigma}$ очевидно.

Утверждение о регулярности следует из приведенных выше наблюдений, поскольку $H(\rho \| \omega(G, U_g, \sigma)) = H(\sigma \| \omega(G, U_g, \sigma))$ для всех ρ из $\mathcal{O}_{G, U_g, \sigma}$.

ПРИМЕР 4 (замкнутое множество, имеющее оптимальную меру, но не имеющее атомической оптимальной меры). Пусть $G = \mathbb{T}$ – одномерная группа вращений (тор), представленная в виде интервала $[-\pi, \pi)$. В этом случае мера Хаара – это нормированная мера Лебега $\frac{dx}{2\pi}$. Пусть $\mathcal{H} = \mathcal{L}_2([-\pi, \pi))$. Элементы $\mathcal{L}_2([-\pi, \pi))$ можно рассматривать как 2π -периодические функции на $\mathbb{R}$. Пусть $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{T}}$ – унитарное представление группы $\mathbb{T}$, определенное правилом

$$U_\lambda(\psi(x)) = \psi(x - \lambda), \quad \psi(x) \in \mathcal{L}_2([-\pi, \pi)).$$

Для заданного $|\varphi_0\rangle$ из $\mathcal{L}_2([-\pi, \pi))$ рассмотрим множество $\mathcal{O}_{\mathbb{T}, U_\lambda, |\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|}$. В этом случае

$$\omega(\mathbb{T}, U_\lambda, |\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |\varphi_\lambda| |\varphi_\lambda| d\lambda,$$

где $|\varphi_\lambda\rangle = U_\lambda |\varphi_0\rangle$. Заметим, что $\overline{\text{co}}(\mathcal{O}_{\mathbb{T}, U_\lambda, |\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|})$ – замыкание выходного множества канала Φ , рассмотренного в [1]. В работе [1] показано, что

$$\overline{C}(\mathcal{O}_{\mathbb{T}, U_\lambda, |\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|}) = H(\omega(\mathbb{T}, U_\lambda, |\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|)) = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^2(\varphi_0) \log c_n^2(\varphi_0), \quad (35)$$

где $\{c_n(\varphi_0)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ – последовательность коэффициентов Фурье функции $\varphi_0(x)$ относительно ортонормированной тригонометрической системы $\{\exp(inx)\}_{n \in \mathbb{Z}}$. В силу предложения 10 конечность этого ряда означает непрерывность энтропии на множестве $\overline{\text{co}}(\mathcal{O}_{\mathbb{T}, U_\lambda, |\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|})$. Из предложения 10 также следует, что образ нормированной меры Лебега $\frac{dx}{2\pi}$ при отображении $\lambda \mapsto U_\lambda |\varphi_0\rangle\langle\varphi_0| U_\lambda^*$ является оптимальной мерой для множества $\mathcal{O}_{\mathbb{T}, U_\lambda, |\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|}$. Эта мера неатомическая, однако ее наличие не исключает возможности существования атомической оптимальной меры в этом случае. Ниже будет показано, что для некоторой функции $\varphi_0(x)$ множество $\mathcal{O}_{\mathbb{T}, U_\lambda, |\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|}$ не имеет атомической оптимальной меры.

Пусть

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, 0) \\ \sqrt{2}, & x \in [0, +\pi). \end{cases}$$

¹⁷Неравенство Йенсена применимо в этом случае, поскольку энтропия является поточечным пределом монотонной последовательности непрерывных вогнутых функций [4].

В этом случае $c_n(\varphi_0) \sim n^{-1}$, а значит, сумма в (35) конечна.

Для доказательства отсутствия чисто атомической оптимальной меры достаточно показать, что состояние $\Omega(\mathcal{O}_{\mathbb{T}, U_\lambda, |\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|}) = \omega(\mathbb{T}, U_\lambda, |\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|)$ не является счетной выпуклой комбинацией состояний из $\mathcal{O}_{\mathbb{T}, U_\lambda, |\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|}$.

Предположим, что

$$\omega(\mathbb{T}, U_\lambda, |\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|) = \sum_{i=1}^{+\infty} \pi_i |\varphi_{\lambda_i}\rangle\langle\varphi_{\lambda_i}|.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\pi_1 \geq \pi_i$ для всех $i > 1$ и что $\lambda_1 = 0$. Для произвольного η имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{+\infty} \pi_i \langle\varphi_\eta|\varphi_{\lambda_i}\rangle^2 &= \langle\varphi_\eta|\omega(\mathbb{T}, U_\lambda, |\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|)|\varphi_\eta\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \langle\varphi_\eta|\varphi_\lambda\rangle^2 d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \langle\varphi_0|\varphi_\lambda\rangle^2 d\lambda. \end{aligned} \quad (36)$$

Пусть $\theta(x)$ – 2π -периодическая функция, равна $(1 - \pi^{-1}|x|)^2$ на $[-\pi, +\pi]$. Тогда $\langle\varphi_\eta|\varphi_\lambda\rangle^2 = \theta(\eta - \lambda)$ для всех λ и η . Поскольку при каждом λ функция $\theta_\lambda(x) = \theta_0(x - \lambda)$ локально интегрируема, ей соответствует обобщенная функция $\tilde{\theta}_\lambda$ из пространства $\mathfrak{D}'$. (Пространство $\mathfrak{D}'$ – линейное пространство непрерывных линейных функционалов на пространстве $\mathfrak{D}$ бесконечно дифференцируемых функций с конечным носителем [3].) Пусть $\tilde{\theta}'_\lambda \in \mathfrak{D}'$ – производная обобщенной функции $\tilde{\theta}_\lambda \in \mathfrak{D}'$. Тогда (36) означает, что

$$\mathfrak{D}' - \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \pi_i \tilde{\theta}'_{\lambda_i} = 0. \quad (37)$$

Пусть

$$\omega_\delta(x) = \begin{cases} \exp(-(1 - (x/\delta)^2)^{-1}), & x \in [-\delta, +\delta], \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [-\delta, +\delta] \end{cases}$$

– функция из пространства $\mathfrak{D}$ при каждом $\delta > 0$. Прямое интегрирование дает

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}'_\lambda(\omega'_\delta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \theta'_\lambda(x) \omega'_\delta(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\delta}^{\lambda} \left(1 + \frac{x - \lambda}{\pi}\right) \omega'_\delta(x) dx \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \int_{\lambda}^{+\delta} \left(\frac{x - \lambda}{\pi} - 1\right) \omega'_\delta(x) dx = \frac{4\omega_\delta(\lambda)}{\pi} - \frac{2\delta I}{\pi^2}, \end{aligned}$$

если $\lambda \in [-\delta, +\delta]$, и

$$\tilde{\theta}'_\lambda(\omega'_\delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta'_\lambda(x) \omega'_\delta(x) dx = \frac{2}{\pi^2} \int_{-\delta}^{+\delta} x \omega'_\delta(x) dx = -\frac{2\delta I}{\pi^2},$$

если $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [-\delta, +\delta]$, где

$$I = \delta^{-1} \int_{-\delta}^{+\delta} \omega_\delta(x) dx = \int_{-1}^{+1} \exp(-(1 - x^2)^{-1}) dx$$

– положительное число.

Пусть $\mathcal{N}(\delta) = \{i \in \mathbb{N} \mid \lambda_i \in [-\delta, +\delta]\}$ и $\mathcal{K}_n = \{2, 3, \dots, n\}$. Используя предыдущее выражение, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \pi_i \tilde{\theta}'_{\lambda_i}(\omega'_\delta) &= \pi_1 \tilde{\theta}'_0(\omega'_\delta) + \sum_{i \in \mathcal{N}(\delta) \cap \mathcal{K}_n} \pi_i \tilde{\theta}'_{\lambda_i}(\omega'_\delta) + \sum_{i \in (\mathbb{N} \setminus \mathcal{N}(\delta)) \cap \mathcal{K}_n} \pi_i \tilde{\theta}'_{\lambda_i}(\omega'_\delta) \\ &\geq \pi_1 \left(\frac{4}{e\pi} - \frac{2\delta I}{\pi^2} \right) - \left(\frac{4}{e\pi} - \frac{2\delta I}{\pi^2} \right) \sum_{i \in \mathcal{N}(\delta), i > 1} \pi_i - \frac{2\delta I}{\pi^2} \quad \forall n. \end{aligned}$$

Поскольку $\sum_{i \in \mathcal{N}(\delta), i > 1} \pi_i$ стремится к нулю, когда δ стремится к нулю, из данного неравенства следует $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \pi_i \tilde{\theta}'_{\lambda_i}(\omega'_\delta) > 0$ для всех достаточно малых δ , что противоречит (37).

§ 4. Другой подход к определению $\bar{C}(\mathcal{A})$ и $\Omega(\mathcal{A})$

Известно, что энтропию и относительную энтропию можно сначала определить для состояний конечного ранга, а затем посредством предельного перехода расширить это определение на произвольные состояния. Действительно, рассмотрим отображение

$$\Theta_P(\rho) = (\text{Tr } P\rho)^{-1} P\rho P,$$

определяемое произвольным проектором P , с областью определения $\mathfrak{D}(\Theta_P) = \{\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \mid P\rho \neq 0\}$. В силу [4, лемма 4] энтропия $H(\rho)$ произвольного состояния ρ корректно определяется выражением

$$H(\rho) = \lim_{n \rightarrow +\infty} H(\Theta_{P_n}(\rho)),$$

а относительная энтропия $H(\rho \parallel \sigma)$ для любых состояний ρ и σ – выражением

$$H(\rho \parallel \sigma) = \lim_{n \rightarrow +\infty} H(\Theta_{P_n}(\rho) \parallel \Theta_{P_n}(\sigma)),$$

где $\{P_n\}$ – произвольная возрастающая последовательность проекторов конечного ранга, сильно сходящаяся к тождественному оператору $I_{\mathcal{H}}$ (предполагается, что n настолько большое, что состояния ρ и σ лежат в $\mathfrak{D}(\Theta_{P_n})$). Это значит, что данные пределы (конечные или бесконечные) существуют и не зависят от выбора последовательности $\{P_n\}$. Поскольку носители состояний $\Theta_{P_n}(\rho)$ и $\Theta_{P_n}(\sigma)$ лежат в конечномерном подпространстве $P_n(\mathcal{H})$ при каждом n , данное наблюдение сводит определение энтропии и относительной энтропии к конечномерному случаю.

В настоящем параграфе получен аналогичный результат для χ -емкости и оптимального среднего произвольного множества состояний. Поскольку для любого замкнутого подмножества состояний в d -мерном гильбертовом пространстве точную верхнюю грань в определении χ -емкости можно брать по множеству всех ансамблей из d^2 состояний, χ -емкость и оптимальное среднее состояние этого множества определяются методами линейного программирования [13]. Поэтому результаты данного параграфа дают конструктивные определения χ -емкости и оптимального среднего для произвольного множества состояний, которые (в принципе) могут быть использованы для численной аппроксимации этих величин.

Ясно, что для любого проектора P соответствующее отображение $\Theta_P(\sigma)$ непрерывно в каждой точке своей области определения. Несмотря на нелинейность этого отображения имеет место следующий результат.

ЛЕММА 7. 1) Для произвольного выпуклого множества $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{D}(\Theta_P)$ его образ $\Theta_P(\mathcal{A})$ при отображении Θ_P является выпуклым подмножеством $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

2) Для произвольного ансамбля $\{\pi_i, \rho_i\}_{i=1}^m$ состояний из $\Theta_P(\mathcal{A})$ существует ансамбль $\{\lambda_i, \sigma_i\}_{i=1}^m$ состояний из $\mathcal{A}$ такой, что

$$\Theta_P(\sigma_i) = \rho_i, \quad \lambda_i \operatorname{Tr} P \sigma_i = \pi_i \sum_{j=1}^m \lambda_j \operatorname{Tr} P \sigma_j, \quad i = \overline{1, m}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать утверждение 2) леммы, поскольку из него следует, что

$$\Theta_P\left(\sum_i \lambda_i \sigma_i\right) = \sum_i \pi_i \rho_i.$$

Для каждого i состояние ρ_i из $\Theta_P(\mathcal{A})$ является образом некоторого состояния σ_i из $\mathcal{A}$. Пусть $\eta_i = \pi_i (\operatorname{Tr} P \sigma_i)^{-1}$ – положительное число при каждом $i = \overline{1, m}$ и $\{\lambda_i = \eta_i (\sum_{j=1}^m \eta_j)^{-1}\}_{i=1}^m$ – распределение вероятностей. Суммируя равенства $\lambda_i \operatorname{Tr} P \sigma_i = \pi_i (\sum_{j=1}^m \eta_j)^{-1}$, получаем $\sum_{i=1}^m \lambda_i \operatorname{Tr} P \sigma_i = (\sum_{j=1}^m \eta_j)^{-1}$.

ЛЕММА 8. Пусть $\mathcal{A}$ – множество с конечной χ -емкостью и P – проектор такой, что $\eta(\mathcal{A}, P) = \inf_{\rho \in \mathcal{A}} \operatorname{Tr} P \rho > 0$. Тогда

$$\eta(\mathcal{A}, P) \overline{C}(\Theta_P(\mathcal{A})) \leq \overline{C}(\mathcal{A}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого ансамбля $\{\pi_i, \rho_i\}$ состояний из $\Theta_P(\mathcal{A})$ пусть $\{\lambda_i, \sigma_i\}$ – соответствующий ансамбль состояний из $\mathcal{A}$, существующий в силу леммы 7. Следовательно, $\eta = \sum_i \lambda_i \eta_i$, где $\eta_i = \operatorname{Tr} P \sigma_i$ и $\eta = \operatorname{Tr} P \bar{\sigma}$.

Рассмотрим канал

$$\Phi(\rho) = P \rho P + (\operatorname{Tr}(I - P) \rho) \tau,$$

где τ – чистое состояние, соответствующее произвольному единичному вектору из $\mathcal{H} \ominus P(\mathcal{H})$. Используя общие свойства относительной энтропии, получаем

$$\begin{aligned} \chi(\{\lambda_i, \Phi(\sigma_i)\}) &= \sum_i \lambda_i H(P \sigma_i P \| P \bar{\sigma} P) \\ &+ \sum_i \lambda_i H((\operatorname{Tr}(I - P) \sigma_i) \tau \| (\operatorname{Tr}(I - P) \bar{\sigma}) \tau) \geq \sum_i \lambda_i H(P \sigma_i P \| P \bar{\sigma} P) \\ &= \sum_i \lambda_i H(\eta_i \rho_i \| \eta \bar{\rho}) \geq \sum_i \lambda_i \eta_i H(\rho_i \| \bar{\rho}) = \eta \sum_i \pi_i H(\rho_i \| \bar{\rho}) \geq \eta(\mathcal{A}, P) \chi(\{\pi_i, \rho_i\}). \end{aligned}$$

В силу монотонности относительной энтропии имеем

$$\chi(\{\lambda_i, \Phi(\sigma_i)\}) \leq \chi(\{\lambda_i, \sigma_i\}).$$

Из двух последних неравенств следует утверждение леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Коэффициент $\eta(\mathcal{A}, P)$ в лемме 8 нельзя заменить на 1 (см. пример в приведенном ниже замечании 7).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathcal{A}$ – произвольное подмножество множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Тогда:

1) если χ -емкость множества $\mathcal{A}$ конечна, то

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \overline{C}(\Theta_{P_n}(\mathcal{A})) = \overline{C}(\mathcal{A}), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \Omega(\Theta_{P_n}(\mathcal{A})) = \Omega(\mathcal{A})$$

для любой последовательности проекторов $\{P_n\}$, сильно сходящейся к $I_{\mathcal{H}}$;

2) если существует последовательность проекторов $\{P_n\}$, сильно сходящаяся к $I_{\mathcal{H}}$, такая, что все отображения соответствующей последовательности $\{\Theta_{P_n}\}$ корректно определены на множестве $\mathcal{A}$ и последовательность $\{\overline{C}(\Theta_{P_n}(\mathcal{A}))\}$ ограничена, то χ -емкость множества $\overline{C}(\mathcal{A})$ конечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\overline{C}(\mathcal{A}) < +\infty$ и $\{P_n\}$ – произвольная последовательность проекторов, сильно сходящаяся к $I_{\mathcal{H}}$. По утверждению 4) теоремы 1 множество $\mathcal{A}$ предкомпактно. Из критерия компактности следует, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} \eta(\mathcal{A}, P_n) = 1$, где $\eta(\mathcal{A}, P_n) = \inf_{\rho \in \mathcal{A}} \text{Tr } P_n \rho$. Таким образом, $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{D}(\Theta_{P_n})$ для всех достаточно больших n , и, используя лемму 8, получаем

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \overline{C}(\Theta_{P_n}(\mathcal{A})) \leq \overline{C}(\mathcal{A}).$$

Поскольку $\Theta_{P_n}(\rho) \rightarrow \rho$ при $n \rightarrow +\infty$, из утверждения 1) леммы 1 следует, что

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \overline{C}(\Theta_{P_n}(\mathcal{A})) \geq \overline{C}(\mathcal{A}).$$

Из двух последних неравенств получаем первое предельное выражение в теореме, второе следует из утверждения 2) леммы 1.

Если $\overline{C}(\mathcal{A}) = +\infty$ и $\{P_n\}$ – последовательность проекторов конечного ранга, сильно сходящаяся к $I_{\mathcal{H}}$, такая, что $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{D}(\Theta_{P_n})$ для всех достаточно больших n , то в силу утверждения 1) леммы 1

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \overline{C}(\Theta_{P_n}(\mathcal{A})) = +\infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Последовательность $\{\overline{C}(\Theta_{P_n}(\mathcal{A}))\}$ может сходиться к $\overline{C}(\mathcal{A})$ различным образом в зависимости от выбора последовательности $\{P_n\}$. Интересно отметить, что для некоторых множеств $\mathcal{A}$ и последовательностей $\{P_n\}$ последовательность $\{\overline{C}(\Theta_{P_n}(\mathcal{A}))\}$ сходится к $\overline{C}(\mathcal{A})$, строго убывая. Действительно, пусть $\mathcal{A}$ – множество, состоящее из двух состояний $\{\frac{1}{2}\rho + \frac{1}{2}\sigma_i\}_{i=1,2}$, где ρ – состояние с бесконечномерным носителем $\mathcal{H}_\rho$ таким, что $\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_\rho$ – двумерное подпространство, и σ_1, σ_2 – состояния, соответствующие ортогональным единичным векторам из $\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_\rho$. Пусть $\{P_n\}$ – такая последовательность проекторов конечного ранга, что $P_n(\mathcal{H}) \supseteq \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_\rho$ и последовательность $\{\eta_n = \text{Tr } P_n \rho\}$ строго возрастает к 1. Нетрудно видеть, что

$$\overline{C}(\Theta_{P_n}(\mathcal{A})) = \frac{1}{1 + \eta_n} \log 2 \searrow \frac{1}{2} \log 2 = \overline{C}(\mathcal{A}), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Автор благодарен А. С. Холево за помощь в процессе работы над данной статьей.

Список литературы

1. Р. Ф. Вернер, А. С. Холево, М. Е. Широков, “О понятии сцепленности в гильбертовом пространстве”, *УМН*, **60**:2 (2005), 153–154; англ. пер.: A. S. Holevo, M. E. Shirokov, R. F. Werner, “On the notion of entanglement in Hilbert spaces”, *Russ. Math. Surv.*, **60**:2 (2005), 359–360.
2. А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач*, Наука, М., 1974; англ. пер.: A. D. Ioffe, V. M. Tihomirov, *Theory of extremal problems*, Stud. Math. Appl., **6**, North-Holland, Amsterdam, 1979.
3. Л. Д. Кудрявцев, *Курс математического анализа*, Высшая школа, М., 1988.
4. G. Lindblad, “Expectation and entropy inequalities for finite quantum systems”, *Comm. Math. Phys.*, **39**:2 (1974), 111–119.
5. G. Lindblad, “Completely positive maps and entropy inequalities”, *Comm. Math. Phys.*, **40**:2 (1975), 147–151.
6. M. Ohya, D. Petz, *Quantum entropy and its use*, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
7. K. R. Parthasarathy, *Probability measures on metric spaces*, Probability and Mathematical Statistics, **3**, Academic Press, New York–London, 1967.
8. K. R. Parthasarathy, *Extremal quantum states in coupled systems*, [arXiv.org: quant-ph/0307182](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0307182).
9. А. С. Холево, “Квантовые теоремы кодирования”, *УМН*, **53**:6 (1998), 193–230; англ. пер.: A. S. Holevo, “Quantum coding theorems”, *Russ. Math. Surv.*, **53**:6 (1998), 1295–1331.
10. А. С. Холево, *Статистическая структура квантовой теории*, ИКИ, М., Ижевск, 2003; пер. с англ.: A. S. Holevo, *Statistical structure of quantum theory*, Lecture Notes in Physics. New Series m: Monographs, Springer, Berlin, 2001.
11. М. Е. Широков, “Энтропийные характеристики подмножеств состояний. I”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:6 (2006), 193–222.
12. M. E. Shirokov, “The Holevo capacity of infinite dimensional channels and the additivity problem”, *Comm. Math. Phys.*, **262**:1 (2006), 137–159.
13. P. W. Shor, “Capacities of quantum channels and how to find them”, *Math. Program.*, **97**:1–2 (2003), 311–335; [arXiv.org: quant-ph/0304102](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0304102).
14. A. Wehrl, “General properties of entropy”, *Rev. Mod. Phys.*, **50** (1978), 221–250.

М. Е. Широков (M. E. SHIROKOV)
 Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова
E-mail: msh@mi.ras.ru

Поступило в редакцию
 23.12.2005