Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Бунина, В. К. Захаров, Формульно-недостижимые кардиналы и характеристикация всех натуральных моделей теории множеств Цермело–Френкеля, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2007, том 71, выпуск 2, 3–28

DOI: <https://doi.org/10.4213/im732>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 05:49:52

УДК 510.223

Е. И. Бунина, В. К. Захаров

Формульно-недостижимые кардиналы и характеристика всех натуральных моделей теории множеств Цермело–Френкеля

Е. Цермело (1930) и Дж. Шепердсон (1952) доказали, что кумулятивное множество V_α является стандартной моделью теории множеств фон Неймана–Бернаиса–Гёделя тогда и только тогда, когда $\alpha = \aleph + 1$ для некоторого недостижимого кардинального числа $\aleph$. Вопрос о каноническом виде всех натуральных моделей теории ZF оказался более сложным. Поскольку понятие модели теории ZF не может быть определено конечным множеством формул, с помощью схемы формул и ее релятивизации на множество V_θ введено новое понятие (*сильно*) *формульно-недостижимого кардинального числа* θ и доказан формульный аналог теоремы Цермело–Шепердсона, дающий канонический вид всех натуральных моделей теории ZF.

Библиография: 26 наименований.

Введение

Кризис, возникший в наивной теории множеств в начале XX в., привел к построению нескольких строгих аксиоматических теорий множеств. Наиболее широко используемыми из них являются *теория множеств в аксиоматике Цермело–Френкеля* (ZF) (1908, 1922 [1]) и *теория классов и множеств в аксиоматике фон Неймана–Бернаиса–Гёделя* (NBG) (1928, 1937, 1940 [2]).

В 1917 г. Д. Миримановым [3] была построена по трансфинитной индукции *кумулятивная коллекция (иерархия) множеств* V_α для всех порядковых чисел α такая, что:

- 1) $V_0 \equiv \emptyset$;
- 2) $V_{\alpha+1} = V_\alpha \cup \mathcal{P}(V_\alpha)$, где $\mathcal{P}(V_\alpha)$ – множество всех подмножеств множества V_α ;
- 3) $V_\alpha = \bigcup [V_\beta \mid \beta \in \alpha]$ для любого предельного порядкового числа α .

Оказалось, что и сами *кумулятивные множества* V_α , и вся коллекция в целом $[V_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{On}]$, где $\mathbf{On}$ – класс всех порядковых чисел, обладают многими замечательными свойствами. В частности, Дж. фон Нейман [4] доказал, что аксиома регулярности в теории ZF равносильна свойству $\forall x \exists \alpha$ (α – ординальное число $\wedge x \in V_\alpha$) и класс $\bigcup [V_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{On}]$ является абстрактно (классово) стандартно-модельным для теории ZF. Модели теорий ZF и NBG вида $(V_\alpha, =, \in)$ стали называть *натуральными* (см. [5], [6]).

После введения Е. Цермело [7], В. Серпинским и А. Тарским [8] понятия (*сильно*) *недостижимого кардинального числа*, Е. Цермело [7] (не строго) и Дж. Шепердсон [9] (строго) доказали, что *множество U является супер-транзитивным стандартно-модельным для теории NBG тогда и только тогда, когда оно имеет вид $V_{\aleph+1}$ для некоторого недостижимого кардинального числа $\aleph$* . Тем самым были описаны все натуральные модели теории NBG.

Теорема Цермело–Шепердсона допускает следующую равносильную переформулировку: *множество U является супертранзитивным стандартно-модельным с сильным свойством замещения ($\forall X \forall f (X \in U \wedge f \in U^X \Rightarrow \text{rng } f \in U)$) для теории ZF тогда и только тогда, когда оно имеет вид V_κ для некоторого недостижимого кардинального числа κ (в этом случае V_κ естественно назвать недостижимым кумулятивным множеством); см. [10, теорема 1.3].*

Исходя из потребностей теории категорий Ц. Эресманн [11], П. Дедекер [12], Дж. Зоннер [13] и П. Гротендик (см. [14]) вместо метапонятия супертранзитивного стандартно-модельного множества с сильным свойством замещения для теории ZF ввели равносильное теоретико-множественное понятие *универсального множества U* (см. [15, I.6], [16], [17]), которое определяется следующими свойствами:

- 1) $x \in U \Rightarrow x \subset U$;
- 2) $x \in U \Rightarrow \mathcal{P}(x), \cup x \in U$;
- 3) $x, y \in U \Rightarrow x \cup y, \{x, y\}, \langle x, y \rangle, x \times y \in U$;
- 4) $x \in U \wedge f \in U^x \Rightarrow \text{rng } f \in U$ (сильное свойство замещения);
- 5) $\omega \in U$ (здесь $\omega \equiv \{0, 1, 2, \dots\}$ – множество всех конечных ординальных чисел).

Для аксиоматического построения недостижимых кардинальных чисел А. Тарским [18] (см. также [19, гл. IX, § 1, 5]) было введено понятие *множества U* , которое определяется следующими свойствами:

- 1) $x \in U \Rightarrow x \subset U$ (свойство транзитивности);
- 2) $x \in U \Rightarrow \mathcal{P}(x) \in U$ (свойство экспоненциальности);
- 3) $(x \subset U \wedge \forall f (f \in U^x \Rightarrow \text{rng } f \neq U)) \Rightarrow x \in U$ (свойство Тарского).

Такое множество U получило в дальнейшем название *множество Тарского*.

В [18] было доказано, что каждое недостижимое кумулятивное множество V_κ является множеством Тарского.

Авторами было доказано обратное, т. е. *каждое несчетное множество Тарского является недостижимым кумулятивным множеством* (см. [20]).

В результате была получена следующая теорема о характеристизации натуральных моделей теории NBG: *для множества U следующие свойства являются равносильными:*

- 1) U является недостижимым кумулятивным множеством, т. е. $U = V_\kappa$ для некоторого недостижимого кардинального числа κ ;
- 2) $\mathcal{P}(U)$ является супертранзитивным стандартно-модельным для теории NBG;
- 3) U является супертранзитивным стандартно-модельным с сильным свойством замещения для теории ZF;
- 4) U является универсальным множеством;
- 5) U является несчетным множеством Тарского.

Теорема Цермело–Шепердсона дает канонический вид супертранзитивных стандартных моделей теории NBG и (равносильно) канонический вид супертранзитивных стандартных моделей с сильным свойством замещения теории ZF. Однако Р. Монтегю и Л. Воот [6] доказали, что для любого недостижимого кардинального числа κ существует ординальное число $\theta < \kappa$, не являющееся недостижимым и такое, что кумулятивное множество V_θ является супертранзитивным стандартно-модельным для теории ZF. Поэтому вопрос о каноническом виде всех супертранзитивных стандартных моделей и всех натуральных моделей теории ZF оказался более сложным.

Поскольку понятие модели теории ZF не может быть определено конечным множеством формул, в настоящей работе с помощью схемы формул и ее релятивизации на множество V_θ вводится понятие (*сильно*) *формульно-недостижимого кардинального числа* θ и доказывается формульный аналог теоремы Цермело–Шепердсона.

Для доказательства этой теоремы вводится понятие *формульно-универсального множества*, являющееся формульным аналогом понятия универсального множества.

В результате доказывается теорема о характеристизации натуральных моделей теории ZF: для множества U следующие свойства являются равносильными:

- 1) U является формульно-недостижимым кумулятивным множеством, т.е. $U = V_\theta$ для некоторого формульно-недостижимого кардинального числа θ ;
- 2) U является супертранзитивным стандартно-модельным для теории ZF;
- 3) U является формульно-универсальным множеством.

Тем самым описываются все натуральные модели теории ZF. Эта теорема была анонсирована в [21].

Авторы приносят благодарность П. В. Андрееву, В. Г. Кановое, В. А. Любецкому, А. В. Михалеву, а также всем участникам семинара по математической логике в МГУ под руководством академика С. И. Адяна и профессора В. А. Успенского за ряд ценных замечаний и предложений.

§ 1. Кумулятивные множества и их свойства

Далее в статье обозначаящее знакосочетание σ для знакосочетания ρ будем вводить в виде знакосочетания $\sigma \equiv \rho$ или $\rho \equiv \sigma$ (σ есть обозначение для ρ).

Определения понятий, введенных в теории ZF (с аксиомой выбора), а именно класс $\mathbf{C}(\vec{u}) \equiv \{x \mid \varphi(x, \vec{u})\}$, определяемый формулой $\varphi(x, \vec{u})$, ординальное число, класс всех ординальных чисел $\mathbf{On}$, последующее ординальное число $\alpha + 1$, предельное ординальное число, кардинальное число, мощность множества (обозначение $\text{card } X$ или $|X|$), можно найти в монографиях [22] и [23]. Через $\mathbf{V}$ обозначается универсальный класс $\{x \mid x = x\}$, состоящий из всех множеств.

Свойство множества S быть ординальным числом будем обозначать через $\text{On}(S)$. Свойство ординального числа быть кардиналом будем обозначать через $\text{Cn}(\alpha)$.

Для функции $\mathbf{F}$ рассматриваются классы $\text{dom } \mathbf{F} \equiv \{u \mid \exists v(\langle u, v \rangle \in \mathbf{F})\}$ и $\text{rng } \mathbf{F} \equiv \{v \mid \exists u(\langle u, v \rangle \in \mathbf{F})\}$. Если $\text{dom } \mathbf{F} = \mathbf{A}$ и $\text{rng } \mathbf{F} \subset \mathbf{B}$, то $\mathbf{F}$ называется функцией из класса $\mathbf{A}$ в класс $\mathbf{B}$. Формулу, выражающую свойство класса $\mathbf{F}$ быть функцией из $\mathbf{A}$ в $\mathbf{B}$, будем обозначать через $\mathbf{F} \sqsubseteq \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$. Формулы $(\mathbf{F} \sqsubseteq \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \wedge \forall x, y \in \mathbf{A}(\mathbf{F}(x) = \mathbf{F}(y) \Rightarrow x = y)$ и $(\mathbf{F} \sqsubseteq \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \wedge \text{rng } \mathbf{F} = \mathbf{B}$ будем обозначать через $\mathbf{F} \sqsubseteq \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ и $\mathbf{F} \sqsubseteq \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{B}$ соответственно. Конъюнкцию этих формул будем обозначать через $\mathbf{F} \sqsubseteq \mathbf{A} \sqsubseteq \mathbf{B}$.

Пусть класс $\mathbf{P}$ упорядочен отношением $\leq$ и $\mathbf{A}$ – непустой подкласс класса $\mathbf{P}$. Элемент $p \in \mathbf{P}$ называется *супремумом подкласса* $\mathbf{A}$, если $\forall x \in \mathbf{A}(x \leq p) \wedge \forall y \in \mathbf{P}((\forall x' \in \mathbf{A}(x' \leq y)) \Rightarrow p \leq y)$. Эта формула обозначается через $p = \sup \mathbf{A}$. Элемент $a \in \mathbf{A}$ называется *наибольшим (наименьшим) элементом класса* $\mathbf{A}$, если $b \leq a$ ($b \geq a$) для любого $b \in \mathbf{A}$. Эта формула обозначается через $a = \text{gr } \mathbf{A}$ ($a = \text{sm } \mathbf{A}$).

Конфинальность ординального числа α есть ординальное число $\text{cf}(\alpha)$, равное наименьшему ординальному числу β , для которого существует функция f

из β в α такая, что $\sup \text{rng } f = \alpha$. Кардинал $\aleph$ в теории ZF называется *регулярным*, если $\text{cf}(\aleph) = \aleph$, т. е. для любого ординального числа β , для которого существует функция $f: \beta \rightarrow \aleph$ такая, что $\sup \text{rng } f = \aleph$, справедливо $\aleph \leq \beta$, где $\sup \text{rng } f = \aleph$ означает, что для любого $y \in \aleph$ существует $x \in \beta$ такое, что $y < f(x)$. Кардинал $\aleph > \omega$ называется (*сильно*) *недостижимым*, если $\aleph$ регулярен и $\text{card } \mathcal{P}(\alpha) < \aleph$ для всех ординальных чисел $\alpha < \aleph$.

Множество X в теории ZF называется *транзитивным*, если $\forall x \forall y (y \in x \wedge x \in X \Rightarrow y \in X)$. Множество X назовем *квазитранзитивным*, если $\forall x \forall y (y \subset x \wedge x \in X \Rightarrow y \in X)$. Множество X называется *супертранзитивным*, если оно одновременно является транзитивным и квазитранзитивным (см. [24, п. 9.5]).

Построением по трансфинитной индукции определим коллекцию множеств $[V_\alpha \subset \mathbf{V} \mid \alpha \in \mathbf{On}]$, удовлетворяющую следующим соотношениям:

- 1) $V_0 = \emptyset$;
- 2) $V_{\alpha+1} = V_\alpha \cup \mathcal{P}(V_\alpha)$;
- 3) $V_\alpha = \bigcup [V_\beta \mid \beta \in \alpha]$, если α – предельное ординальное число.

Эта коллекция называется *кумулятивной коллекцией Мириманова-фон Неймана*, а ее элементы V_α называются *кумулятивными множествами Мириманова-фон Неймана*.

Для удобства ссылок при проведении дальнейших доказательств сформулируем в виде лемм (без доказательств) ряд хорошо известных простейших свойств кумулятивных множеств.

ЛЕММА 1. Если α и β – ординальные числа, то:

- 1) $\alpha < \beta \Leftrightarrow V_\alpha \in V_\beta$;
- 2) $\alpha = \beta \Leftrightarrow V_\alpha = V_\beta$;
- 3) $\alpha \subset V_\alpha$ и $\alpha \in V_{\alpha+1}$.

ЛЕММА 2. $\mathbf{V} = \bigcup [V_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{On}]$.

ЛЕММА 3. Для любого ординального числа α из $z \subset x \in V_\alpha$ следует $z \in V_\alpha$.

Эта лемма показывает, что любое кумулятивное множество V_α является квазитранзитивным.

ЛЕММА 4. Для любого ординального числа α справедливо свойство $\forall x (x \in V_\alpha \Rightarrow x \subset V_\alpha)$.

Эта лемма показывает, что любое кумулятивное множество является транзитивным.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если α и β – ординальные числа и $\alpha \leq \beta$, то $V_\alpha \subset V_\beta$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любого ординального числа α справедливы вложение $V_\alpha \subset \mathcal{P}(V_\alpha)$ и равенство $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если α и β – ординальные числа и $\alpha < \beta$, то $|V_\alpha| < |V_\beta|$.

ЛЕММА 5. Для любого ординального числа α если $x \in V_{\alpha+1}$, то $x \subset V_\alpha$.

ЛЕММА 6. Для любого ординального числа α справедливо свойство $\forall x \forall y (x \in V_\alpha \wedge y \in V_\alpha \Rightarrow x \cup y \in V_\alpha)$.

ЛЕММА 7. Для любого предельного ординального числа α из $x \in V_\alpha$ следует $\mathcal{P}(x) \in V_\alpha$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любого предельного ординального числа α из $x, y \in V_\alpha$ следует $\{x\}, \{x, y\}, \langle x, y \rangle \in V_\alpha$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любого предельного ординального числа α из $X, Y \in V_\alpha$ следует $X * Y \in V_\alpha$.

ЛЕММА 8. Если $\alpha \geq \omega$, то $\omega \subset V_\alpha$. Если $\alpha > \omega$, то $\omega \in V_\alpha$.

Пусть λ – ординальное число. Рассмотрим коллекцию $K(\lambda) \equiv [M_\beta \mid \beta \in \lambda + 1]$ множеств $M_\beta \equiv \{x \in \text{Map}(\mathcal{P}(|V_\beta|), |\mathcal{P}(|V_\beta|)|) \mid x \mapsto \mathcal{P}(|V_\beta|) \mapsto |\mathcal{P}(|V_\beta|)|\}$ всех соответствующих биективных отображений для всех $\beta \in \lambda + 1$ и множество $M(\lambda) \equiv \cup [M_\beta \mid \beta \in \lambda + 1]$. По аксиоме выбора существует функция выбора $\text{ch}(\lambda): \mathcal{P}(M(\lambda)) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow M(\lambda)$ такая, что $\text{ch}(\lambda)(P) \in P$ для любого $P \in \mathcal{P}(M(\lambda)) \setminus \{\emptyset\}$. Поскольку $M_\beta \subset M(\lambda)$ для $\beta \in \lambda + 1$, то $c_\beta(\lambda) \equiv \text{ch}(\lambda)(M_\beta) \in M_\beta$, т.е. $c_\beta(\lambda)$ является биекцией из $\mathcal{P}(|V_\beta|)$ на $|\mathcal{P}(|V_\beta|)|$.

Следующее утверждение может быть названо *теоремой о начальной синхронизации мощностей кумулятивных множеств*. Оно является новым и принадлежит авторам.

ТЕОРЕМА 1. Пусть λ – ординальное число. Тогда для любого ординального числа $\alpha \leq \lambda$ существует единственная коллекция $u(\alpha) \equiv u(\lambda)(\alpha) \equiv (f_\beta \mid \beta \in \alpha + 1)$ биективных функций $f_\beta: V_\beta \xrightarrow{\sim} |V_\beta|$ такая, что:

- 1) $f_0 \equiv \emptyset$;
- 2) если $\gamma < \beta \in \alpha + 1$, то $f_\gamma = f_\beta \mid V_\gamma$;
- 3) если $\beta \in \alpha + 1$ и $\beta = \gamma + 1$, то $f_\beta \mid V_\gamma = f_\gamma$ и $f_\beta(x) = c_\gamma(\lambda)(f_\gamma[x])$ для каждого $x \in V_\beta \setminus V_\gamma = \mathcal{P}(V_\gamma) \setminus V_\gamma$;
- 4) если $\beta \in \alpha + 1$ и β – предельное ординальное число, то $f_\beta = \cup [f_\gamma \mid \gamma \in \beta]$.

Из свойства единственности следует, что $u(\alpha) \mid \delta + 1 = u(\delta)$ для каждого $\delta \leq \alpha$, т.е. эти коллекции продолжают друг друга.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала проверим единственность коллекции $u \equiv u(\alpha)$. Пусть для α существует коллекция $v \equiv (g_\beta \mid \beta \in \alpha + 1)$ биективных функций $g_\beta: V_\beta \xrightarrow{\sim} |V_\beta|$, обладающая свойствами 1)–4). Рассмотрим множество $D' \equiv \{\beta \in \alpha + 1 \mid f_\beta = g_\beta\}$, класс $\mathbf{D}'' \equiv \mathbf{On} \setminus (\alpha + 1)$ и класс $\mathbf{D} \equiv D' \cup \mathbf{D}''$. Ясно, что $0 \in D' \subset \mathbf{D}$.

Пусть $\beta \in \mathbf{D}$. Если $\beta \geq \alpha$, то $\beta + 1 \in \mathbf{D}'' \subset \mathbf{D}$. Пусть $\beta < \alpha$. Тогда $\beta \in D'$ и $\beta + 1 \in \alpha + 1$. Поэтому по свойству 3) получаем $f_{\beta+1}(x) = f_\beta(x) = g_\beta(x) = g_{\beta+1}(x)$ для любого $x \in V_\beta$ и $f_{\beta+1}(x) = c_\beta(\lambda)(f_\beta[x]) = c_\beta(\lambda)(g_\beta[x]) = g_{\beta+1}(x)$ для любого $x \in V_{\beta+1} \setminus V_\beta$, т.е. $f_{\beta+1} = g_{\beta+1}$. Значит, $\beta + 1 \in D' \subset \mathbf{D}$. Таким образом, $\beta \in \mathbf{D}$ влечет $\beta + 1 \in \mathbf{D}$.

Пусть β – предельное ординальное число и $\beta \subset \mathbf{D}$. Если $\beta \cap \mathbf{D}'' \neq \emptyset$, то существует $\gamma \in \beta$ такое, что $\gamma \geq \alpha + 1$. Следовательно, $\beta > \gamma \geq \alpha + 1$ влечет $\beta \in \mathbf{D}'' \subset \mathbf{D}$. Пусть $\beta \cap \mathbf{D}'' = \emptyset$, т.е. $\beta \subset D'$. Тогда для любого $\gamma \in \beta$ справедливо $f_\gamma = g_\gamma$. Поскольку $\beta \subset \alpha + 1$, то $\beta \leq \alpha + 1$. Если $\beta = \alpha + 1$, то $\beta \in \mathbf{D}'' \subset \mathbf{D}$. Пусть $\beta \in \alpha + 1$. Если $x \in V_\beta = \cup [V_\gamma \mid \gamma \in \beta]$, то $x \in V_\gamma$ для некоторого $\gamma \in \beta$. Тогда по свойству 2) выполнено $f_\beta(x) = f_\gamma(x) = g_\gamma(x) = g_\beta(x)$ для любого $x \in V_\beta$, т.е. $f_\beta = g_\beta$. Значит, $\beta \in D' \subset \mathbf{D}$. Итак, свойства, а именно β – предельное ординальное число и $\beta \subset \mathbf{D}$, влекут $\beta \in \mathbf{D}$.

По принципу трансфинитной индукции $\mathbf{D} = \mathbf{On}$. Следовательно, $D' = \alpha + 1$. Поэтому $u = v$.

Далее будем записывать вместо $c_\gamma(\lambda)$ просто c_γ .

Рассмотрим множество $\mathbf{C}'$, состоящее из всех ординальных чисел $\alpha \leq \lambda$, для которых существует коллекция $u(\alpha)$ со свойствами 1)–4). Рассмотрим также классы $\mathbf{C}'' \equiv \mathbf{On} \setminus (\lambda + 1)$ и $\mathbf{C} \equiv \mathbf{C}' \cup \mathbf{C}''$. Так как $V_0 = \emptyset$ и $|V_0| = 0$, то коллекция $u(0) \equiv (f_\beta \mid \beta \in 1)$ с биективной функцией $f_0 = \emptyset: V_0 \xrightarrow{\sim} |V_0|$ обладает свойствами 1)–4) и, значит, $0 \in \mathbf{C}$.

Пусть $\alpha \in \mathbf{C}$. Если $\alpha \geq \lambda$, то $\alpha + 1 \in \mathbf{C}'' \subset \mathbf{C}$. Пусть теперь $\alpha < \lambda$. Тогда $\alpha + 1 \in \lambda + 1$ означает, что мы можем использовать функцию c_α . Поскольку $\alpha \in \mathbf{C}'$, то для α существует единственная коллекция $u \equiv (f_\beta \mid \beta \in \alpha + 1)$. Определим коллекцию $v \equiv (g_\beta \mid \beta \in \alpha + 2)$ биективных функций $g_\beta: V_\beta \xrightarrow{\sim} |V_\beta|$, полагая $g_\beta \equiv f_\beta$ для любого $x \in V_\alpha$ и $g_{\alpha+1}(x) \equiv c_\alpha(f_\alpha[x])$ для любого $x \in V_{\alpha+1} \setminus V_\alpha = \mathcal{P}(V_\alpha) \setminus V_\alpha$.

Проверим, что v обладает свойствами 1)–4). Пусть $\beta \in \alpha + 2$. Если $\beta \in \alpha + 1$, то это очевидно. Пусть $\beta = \alpha + 1$. Тогда $g_\beta(x) = g_{\alpha+1}(x) = f_\alpha(x) = g_\alpha(x)$ для любого $x \in V_\alpha$ и $g_\beta(x) = g_{\alpha+1}(x) = c_\alpha(f_\alpha[x]) = c_\alpha(g_\alpha[x])$ для любого $x \in V_\beta \setminus V_\alpha$. Кроме того, $g_\beta \mid V_\alpha = f_\alpha = g_\alpha$. Поэтому $\gamma < \beta$ влечет $g_\beta \mid V_\gamma = g_\alpha \mid V_\gamma = f_\alpha \mid V_\gamma = f_\gamma = g_\gamma$. Значит, $\alpha + 1 \in \mathbf{C}' \subset \mathbf{C}$.

Пусть α – предельное ординальное число и $\alpha \in \mathbf{C}$. Если $\alpha \cap \mathbf{C}'' \neq \emptyset$, то существует $\beta \in \alpha$ такое, что $\beta \geq \alpha + 1$. Следовательно, $\alpha > \beta \leq \lambda + 1$ влечет $\alpha \in \mathbf{C}'' \subset \mathbf{C}$. Пусть $\alpha \cap \mathbf{C}'' = \emptyset$, т.е. $\alpha \in \mathbf{C}'$. Тогда для любого $\beta \in \alpha$ существует единственная коллекция $u_\beta \equiv (f_\gamma^\beta \mid \gamma \in \beta + 1)$ биективных функций $f_\gamma^\beta: V_\gamma \xrightarrow{\sim} |V_\gamma|$ со свойствами 1)–4). Поскольку $\alpha \in \lambda + 1$, то $\alpha \leq \lambda + 1$. Если $\alpha = \lambda + 1$, то $\alpha \in \mathbf{C}'' \subset \mathbf{C}$. Пусть далее $\alpha \in \lambda + 1$. Для любых $\delta \leq \beta \in \alpha$ рассмотрим коллекцию $w \equiv u_\beta \mid \delta + 1 \equiv (f_\gamma^\beta \mid \gamma \in \delta + 1)$. Коллекция w обладает свойствами 1)–4). По доказанной выше единственности $w = u_\delta$. Следовательно, $u_\delta = u_\beta \mid \delta + 1$, т.е. $f_\gamma^\delta = f_\gamma^\beta$ для любого $\gamma \in \delta + 1$. В частности, $f_\delta^\delta = f_\delta^\beta$ для любого $\delta \leq \beta$.

Определим коллекцию $v \equiv (g_\beta \mid \beta \in \alpha + 1)$ функций g_β , полагая $g_\beta \equiv f_\beta^\beta$ для любого $\beta \in \alpha$ и $g_\alpha(x) \equiv f_\alpha^\beta(x)$ для любого $x \in V_\alpha = \bigcup [V_\gamma \mid \gamma \in \alpha]$ и любых $\gamma \leq \beta \in \alpha$ таких, что $x \in V_\gamma$. Ясно, что $g_\beta \xrightarrow{\sim} V_\beta \xrightarrow{\sim} |V_\beta|$ для любого $\beta \in \alpha$. Проверим, что $g_\alpha \xrightarrow{\sim} V_\alpha \rightarrow |V_\alpha|$. По следствию 1 к лемме 4 имеем $V_\gamma \subset V_\alpha$. Следовательно, $|V_\gamma| \subset |V_\alpha|$. Поэтому для любого $x \in V_\alpha$ справедливо

$$g_\alpha(x) \equiv f_\gamma^\beta(x) \in |V_\gamma| \subset \mathfrak{K} \equiv \bigcup [|V_\gamma| \subset |V_\alpha| \mid \gamma \in \alpha] \subset |V_\alpha|.$$

Пусть $x, y \in V_\alpha$ и $g_\alpha(x) = g_\alpha(y)$. Тогда $x \in V_\gamma$ и $y \in V_\delta$ для некоторых $\gamma, \delta \in \alpha$. Рассмотрим число β , наибольшее из чисел γ и δ . По определению имеем

$$f_\beta^\beta(x) = g_\alpha(x) = g_\alpha(y) = f_\beta^\beta(y).$$

Из инъективности следует $x = y$, т.е. g_α инъективна. Пусть $z \in \mathfrak{K}$. Тогда $z \in |V_\gamma|$ для некоторого $\gamma \in \alpha$. Поскольку функция $f_\gamma^\gamma: V_\gamma \xrightarrow{\sim} |V_\gamma|$ инъективна, то $z = f_\gamma^\gamma(x)$ для некоторого $x \in V_\gamma \subset V_\alpha$. Следовательно, $z = g_\alpha(x)$. Таким образом, g_α – биективная функция из V_α на $\mathfrak{K}$, т.е. $V_\alpha \sim \mathfrak{K}$.

По следствию 3 к лемме 4 выполнено $|V_\gamma| \in |V_\alpha|$. Поэтому существует множество

$$A \equiv \{x \in |V_\alpha| \mid \exists y \in \alpha (x = |V_y|)\} = \{|V_\gamma| \mid \gamma \in \alpha\}$$

ординальных чисел $|V_\gamma|$. Так как α – предельное ординальное число, то $A \neq \emptyset$. Поэтому множество $\bigcup A = \sup A$ является ординальным числом. Если $z \in \bigcup A = \{z \mid \exists x \in A (z \in x)\}$, то $z \in |V_\gamma| \subset \mathfrak{K}$ для некоторого $\gamma \in \alpha$. Обратно, если $z \in \mathfrak{K}$, то $z \in |V_\gamma| \in A$ для некоторого $\gamma \in \alpha$. Поэтому $z \in \bigcup A$. Следовательно, $\mathfrak{K} = \bigcup A$, т.е. $\mathfrak{K}$ – ординальное число.

Докажем, что $\mathfrak{K}$ – кардинальное число. Пусть β – ординальное число, $\beta \leq \mathfrak{K}$ и $\beta \sim \mathfrak{K}$. Предположим, что $\beta < \mathfrak{K}$. Тогда $\beta \in \mathfrak{K}$ влечет $\beta \in |V_\gamma|$ для некоторого $\gamma \in \alpha$. Следовательно, $\beta < |V_\gamma| = \text{card } |V_\gamma| \leq |\mathfrak{K}| = |\beta|$. Так как β – ординальное число, то $|\beta| \leq \beta$. В результате мы приходим к неравенству $\beta < \beta$, которое невозможно. Значит, $\mathfrak{K}$ – кардинальное число.

Поскольку $\varkappa$ – кардинальное число и $\varkappa \sim V_\alpha$, то $\varkappa = |V_\alpha|$. Таким образом, $g_\alpha \rightleftharpoons V_\alpha \rightleftharpoons |V_\alpha|$.

Проверим, что коллекция v обладает свойствами 1)–4). По определению этой коллекции $g_0 \equiv f_0^0 = \emptyset$. Пусть $\gamma < \beta \in \alpha + 1$. Если $\beta \in \alpha$, то из доказанного выше равенства $f_\gamma^\gamma = f_\beta^\beta$ следует $g_\beta \mid V_\gamma = f_\beta^\beta \mid V_\gamma = f_\gamma^\gamma = g_\gamma$. Если $\beta = \alpha$, то по построению $g_\beta \mid V_\gamma = g_\alpha \mid V_\gamma = f_\gamma^\gamma \equiv g_\gamma$. Значит, для v выполнено свойство 2).

Пусть $\beta \in \alpha + 1$, $\beta = \gamma + 1$ и $x \in V_\beta = \mathcal{P}(V_\gamma)$. Если $\beta \in \alpha$, то из доказанного выше равенства $f_\gamma^\gamma = f_\beta^\beta$ следует $g_\beta(x) = f_\beta^\beta(x) = f_\gamma^\gamma(x) = g_\gamma(x)$ для любого $x \in V_\gamma$ и $g_\beta(x) = f_\beta^\beta(x) = c_\gamma(f_\gamma^\beta[x]) = c_\gamma(f_\gamma^\gamma[x]) = c_\gamma(g_\gamma[x])$ для любого $x \in V_\beta \setminus V_\gamma$. Значит, для v выполнено свойство 3).

Свойство 4) следует из свойства 2). Из проверенных свойств следует, что $\alpha \in C' \subset \mathbf{C}$.

По принципу трансфинитной индукции $\mathbf{C} = \mathbf{On}$, значит, $C' = \lambda + 1$.

Отметим, что, поскольку функции $c_\gamma(\lambda)$ зависят от числа λ , мы не можем продолжающие друг друга коллекции $u(\lambda)(\alpha)$ скомпоновать в глобальную коллекцию, индексированную всеми порядковыми числами.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любого предельного ординального числа α справедливы равенства $|V_\alpha| = \cup \{|V_\beta| \mid \beta \in \alpha\} = \cup \{|V_\beta| \mid \beta \in \alpha\} = \sup\{|V_\beta| \mid \beta \in \alpha\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим число $\lambda \equiv \alpha$. По теореме 1 существует соответствующая коллекция $u(\alpha) \equiv (f_\beta \mid \beta \in \alpha + 1)$. Так как α – предельное ординальное число и $\alpha \in \alpha + 1$, то по свойству 4) выполнено равенство $f_\alpha = \cup [f_\beta \mid \beta \in \alpha]$. Поэтому

$$\begin{aligned} |V_\alpha| &= \text{rng } f_\alpha = \cup [\text{rng } f_\beta \mid \beta \in \alpha] = \cup [|V_\beta| \mid \beta \in \alpha] \\ &= \cup \{|V_\beta| \mid \beta \in \alpha\} = \sup\{|V_\beta| \mid \beta \in \alpha\}. \end{aligned}$$

§ 2. Формульно-недостижимые кардинальные числа и формульно-недостижимые кумулятивные множества

Если все свободные переменные формулы φ находятся среди переменных $x_0, \dots, x_{m-1}, p_0, \dots, p_{n-1}$, то будем обозначать это в виде $\varphi(\vec{x}; \vec{p})$. При использовании обозначения $\varphi(\vec{x}; \vec{p})$ переменные $p_0, \dots, p_{n-1}$ будем называть *параметрами*. Вместо $x_0 \in A \wedge \dots \wedge x_{m-1} \in A$, $\forall x_0 \in A \dots \forall x_{m-1} \in A$ и $\exists x_0 \in A \dots \exists x_{m-1} \in A$ будем записывать $\vec{x} \in A$, $\forall \vec{x} \in A$ и $\exists \vec{x} \in A$ соответственно.

Любая формула $\varphi(x, y; \vec{p})$ теории ZF для каждого транзитивного множества A задает соответствие

$$[\varphi(x, y; \vec{p}) \mid A] \equiv \{z \in A * A \mid \exists x, y \in A (z = \langle x, y \rangle \wedge \varphi^A(x, y; \vec{p}))\} \subset A * A,$$

зависящее от параметра $\vec{p}$.

Ординальное число $\varkappa$ назовем *формульно-регулярным*, если

$$\forall \vec{p} \in V_\varkappa \forall \alpha (\alpha \in \varkappa \wedge ([\varphi(x, y; \vec{p}) \mid V_\varkappa] \rightleftharpoons \alpha \rightarrow \varkappa \Rightarrow \cup \text{rng}[\varphi(x, y; \vec{p}) \mid V_\varkappa] \in \varkappa),$$

где φ – метаварiable для обозначения любой формулы теории ZF.

Ординальное число $\varkappa > \omega$ назовем (*сильно*) *формульно-недостижимым*, если:

- 1) $\forall \alpha (\alpha \in \kappa \Rightarrow |\mathcal{P}(\alpha)| \in \kappa)$;
- 2) κ формульно-регулярно.

ЛЕММА 9. Если ординальное число κ удовлетворяет условию $\forall \alpha (\alpha \in \kappa \Rightarrow |\mathcal{P}(\alpha)| \in \kappa)$, то κ является кардинальным числом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α – ординальное число такое, что $\alpha \leq \kappa$ и $\alpha \sim \kappa$. Тогда $|\alpha| = |\kappa|$. Предположим, что $\alpha < \kappa$. По условию имеем $|\mathcal{P}(\alpha)| \in \kappa$. По теореме Кантора выполнено $|\alpha| < |\mathcal{P}(\alpha)| \leq |\kappa|$, что противоречит предыдущему равенству, т. е. $\alpha = \kappa$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Формульно-недостижимое ординальное число κ является кардинальным числом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\alpha \in \kappa$, то по свойству 1) выполнено $|\mathcal{P}(\alpha)| \in \kappa$. В силу транзитивности получаем $|\mathcal{P}(\alpha)| \subset \kappa$. Следовательно, κ удовлетворяет условию леммы 9. Поэтому κ является кардинальным числом.

Множества V_κ для формульно-недостижимых кардинальных чисел κ будем называть *формульно-недостижимыми кумулятивными множествами*.

ЛЕММА 10. Для любого формульно-недостижимого кардинального числа κ и любого ординального числа $\alpha \in \kappa$ выполнено $|V_\alpha| < \kappa$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество $C' \equiv \{x \in \kappa \mid |V_x| < \kappa\}$ и классы $C'' \equiv \mathbf{On} \setminus \kappa$ и $C \equiv C' \cup C''$. Поскольку $V_0 = \emptyset$, то $|V_0| = 0 < \kappa$. Значит, $0 \in C$.

Пусть $\alpha \in C$. Если $\alpha \geq \kappa$, то $\alpha + 1 \in C' \subset C$. Пусть $\alpha < \kappa$. Тогда $\alpha \in C'$. Если $\alpha + 1 = \kappa$, то $\alpha + 1 \in C'' \subset C$. Пусть $\alpha + 1 < \kappa$. Так как $V_\alpha \sim |V_\alpha|$, то $\mathcal{P}(V_\alpha) \sim \mathcal{P}(|V_\alpha|)$. Следовательно, $|\mathcal{P}(V_\alpha)| = |\mathcal{P}(|V_\alpha|)|$. По следствию 2 к лемме 4

$$|V_{\alpha+1}| = |\mathcal{P}(V_\alpha)| = |\mathcal{P}(|V_\alpha|)|.$$

Поскольку $|V_\alpha| < \kappa$ и ординальное число κ схемно-недостижимо, то справедливо равенство $|\mathcal{P}(|V_\alpha|)| < \kappa$. Следовательно, $|V_{\alpha+1}| < \kappa$. Значит, $\alpha + 1 \in C' \subset C$.

Пусть α – предельное ординальное число и $\alpha \subset C$. Если $\alpha \cap C'' \neq \emptyset$, то существует $\beta \in \alpha$ такое, что $\beta \geq \kappa$. Следовательно, $\alpha > \beta \geq \kappa$ влечет $\alpha \in C'' \subset C$. Пусть $\alpha \cap C'' = \emptyset$, т. е. $\alpha \subset C' \subset \kappa$. Если $\alpha = \kappa$, то $\alpha \in C'' \subset C$. Пусть $\alpha < \kappa$. В силу $\alpha \subset C'$ для любого $\beta \in \alpha$ справедливо $|V_\beta| < \kappa$. Следовательно, $\sup\{|V_\beta| \mid \beta \in \alpha\} \leq \kappa$.

Рассмотрим формулу $\varphi(x, y) \equiv (x \in \alpha \Rightarrow y = |V_x|) \wedge (x \notin \alpha \Rightarrow y = \emptyset)$.

Покажем, что при наших условиях (т. е. при $x \in \alpha \in V_\kappa$ и $y \in V_\kappa$) справедлива равносильность $(y = |V_x|)^{V_\kappa} \Leftrightarrow y = |V_x|$.

Формула $(y = |V_x|)^{V_\kappa}$ переписывается в следующем виде:

$$(\text{Cn}(y))^{V_\kappa} \wedge \exists f \in V_\kappa (f \Leftrightarrow y \Leftrightarrow V_x)^{V_\kappa}.$$

Формулу $\text{Cn}(y)^{V_\kappa}$ можно переписать в виде

$$\text{On}(y)^{V_\kappa} \wedge \forall \alpha \in V_\kappa (\text{On}(\alpha)^{V_\kappa} \wedge (\alpha \subset y)^{V_\kappa} \wedge \exists h \in V_\kappa (h \Leftrightarrow \alpha \rightarrow y)^{V_\kappa} \Rightarrow \alpha = y).$$

Рассмотрим формулу $\text{On}(y)^{V_\kappa}$ при условии $y \in V_\kappa$. Эта формула имеет вид

$$\begin{aligned} \text{On}(y)^{V_\kappa} &\equiv \forall x \in V_\kappa (x \in y \Rightarrow (x \subset y)^{V_\kappa}) \\ &\quad \wedge \forall x, x', x'' \in V_\kappa (x \in y \wedge x' \in y \wedge x'' \in y \wedge x \in x' \wedge x' \in x'' \Rightarrow x \in x'') \\ &\quad \wedge \forall x, x' \in V_\kappa (x \in y \wedge x' \in y \Rightarrow x \in x' \vee x = x' \vee x' \in x) \\ &\quad \wedge \forall T \in V_\kappa ((\emptyset \neq T \subset y)^{V_\kappa} \\ &\quad \Rightarrow \exists x \in V_\kappa (x \in T \wedge \forall x' \in V_\kappa (x' \in T \Rightarrow x \in x'))). \end{aligned}$$

Заметим, что при условии $y \in V_\kappa$ формула $(x \subseteq y)^{V_\kappa} \equiv \forall z \in V_\kappa (z \in x \Rightarrow z \in y)$ равносильна формуле $x \subseteq y$ в силу супертранзитивности множества V_κ . Аналогично, $(\emptyset \neq T \subseteq y)^{V_\kappa} \Leftrightarrow \emptyset \neq T \subseteq y$. Формула $\forall x \in V_\kappa (x \in y \Rightarrow x \subseteq y)$ равносильна формуле $\forall x (x \in y \Rightarrow x \subseteq y)$, так как из $x \in y$ следует $x \in V_\kappa$. Формула

$$\forall x, x', x'' \in V_\kappa (x \in y \wedge x' \in y \wedge x'' \in y \wedge x \in x' \wedge x' \in x'' \Rightarrow x \in x'')$$

равносильна формуле

$$\forall x, x', x'' (x \in y \wedge x' \in y \wedge x'' \in y \wedge x \in x' \wedge x' \in x'' \Rightarrow x \in x''),$$

так как из $x, x', x'' \in y$ следует $x, x', x'' \in V_\kappa$. Формула

$$\forall x, x' \in V_\kappa (x \in y \wedge x' \in y \Rightarrow x \in x' \vee x = x' \vee x' \in x)$$

равносильна формуле

$$\forall x, x' (x \in y \wedge x' \in y \Rightarrow x \in x' \vee x = x' \vee x' \in x),$$

так как из $x, x' \in y$ следует $x, x' \in V_\kappa$. Наконец, формула

$$\forall T \in V_\kappa (\emptyset \neq T \subseteq y \Rightarrow \exists x \in V_\kappa (x \in T \wedge \forall x' \in V_\kappa (x' \in T \Rightarrow x \in x')))$$

равносильна формуле

$$\forall T (\emptyset \neq T \subset y \Rightarrow \exists x (x \in T \wedge \forall x' (x' \in T \Rightarrow x \in x'))),$$

так как из $T \subset y$ следует $T \in V_\kappa$, а из $x, x' \in T$ следует $x, x' \in V_\kappa$. Таким образом,

$$\text{On}(y)^{V_\kappa} \Leftrightarrow \text{On}(y).$$

Аналогичным способом получаем $\text{Cn}(y)^{V_\kappa} \Leftrightarrow \text{Cn}(y)$.

Мы знаем, что для $x < \kappa$ имеет место $V_x \in V_\kappa$. Поэтому точно так же, как это было сделано выше, показывается, что формула $\exists f \in V_\kappa (f \Leftrightarrow y \mapsto V_x)^{V_\kappa}$ равносильна формуле $\exists f (f \Leftrightarrow y \mapsto V_x)$.

Из всего этого заключаем, что $(y = |V_x|)^{V_\kappa} \Leftrightarrow (y = |V_x|)$. Тогда

$$\begin{aligned} [\varphi \mid V_\kappa] &= \{z \mid \exists x \in V_\kappa \exists y \in V_\kappa (z = \langle x, y \rangle \wedge (x \in \alpha \Rightarrow y = |V_x|) \\ &\quad \wedge (x \notin \alpha \Rightarrow y = \emptyset) \wedge \alpha \in V_\kappa)\}. \end{aligned}$$

Если $y \in \text{rng}[\varphi \mid V_\kappa]$, то $\exists x (\langle x, y \rangle \in [\varphi \mid V_\kappa])$, т. е.

$$y \in V_\kappa \wedge \exists x (x \in V_\kappa \wedge ((x \in \alpha \wedge y = |V_x|) \vee (x \notin \alpha \wedge y = \emptyset))).$$

Таким образом, или $y = \emptyset$, или $y = V_x$ для некоторого $x \in \alpha$. Обратно, если $y = V_x$ для некоторого $x \in \alpha$, то $y \in \text{rng}[\varphi \mid V_\kappa]$. Поэтому $\text{rng}[\varphi \mid V_\kappa] = \{|V_\beta| \mid \beta \in \alpha\}$. По следствию 1 к теореме 1

$$\cup \text{rng } f = \cup \{|V_\beta| \mid \beta \in \alpha\} = \sup\{|V_\beta| \mid \beta \in \alpha\} = |V_\alpha|.$$

В силу доказанного выше неравенства мы получаем $|V_\alpha| \leq \kappa$. Предположим, что $|V_\alpha| = \kappa$. Тогда $\kappa = \cup \text{rng}[\varphi \mid V_\kappa]$ в силу формульной регулярности числа κ влечет $\kappa \leq \alpha$, что противоречит исходному неравенству $\alpha < \kappa$. Значит, $|V_\alpha| < \kappa$. Поэтому $\alpha \in C' \subset C$.

По принципу трансфинитной индукции справедливо равенство $C = \mathbf{On}$, откуда $C' = \kappa$.

ЛЕММА 11. *Если κ – формульно-недостижимое кардинальное число, то $\kappa = |V_\kappa|$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1 выполнено $\kappa \subset V_\kappa$. Следовательно, $\kappa = |\kappa| \leq |V_\kappa|$. По следствию 1 к теореме 1 справедливо $|V_\kappa| = \sup\{|V_\beta| \mid \beta \in \kappa\}$. Поскольку по лемме 10 имеем $|V_\beta| < \kappa$, то $|V_\kappa| \leq \kappa$. В результате получаем $\kappa = |V_\kappa|$.

ЛЕММА 12. *Если κ – формульно-недостижимое кардинальное число, α – ординальное число такое, что $\alpha < \kappa$, и $\varphi(x, y; \vec{p})$ – формула, то*

$$\forall \vec{p} \in V_\kappa ([\varphi(x, y; \vec{p}) \mid V_\kappa] \Leftrightarrow V_\alpha \rightarrow V_\kappa \Rightarrow \text{rng}[\varphi(x, y; \vec{p}) \mid V_\kappa] \in V_\kappa).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку κ – предельное ординальное число, то $V_\kappa = \cup [V_\delta \mid \delta \in \kappa]$. Для $x \in V_\alpha$ существует $\delta \in \kappa$ такое, что $[\varphi \mid V_\kappa](x) \in V_\delta$. Поэтому непустое множество $\{y \leq \delta \mid [\varphi \mid V_\kappa](x) \in V_y\}$ имеет наименьший элемент z .

Рассмотрим некоторое биективное отображение $h: |V_\alpha| \rightarrow V_\alpha$. Имеет место формула

$$\forall x \in V_\alpha \exists v [\varphi \mid V_\kappa](x) = v \wedge \varphi^{V_\kappa}(x, v, \vec{p}) \wedge \vec{p} \in V_\kappa,$$

так как по условию $v \in V_\kappa$. Рассмотрим функциональную формулу

$$\psi(u, z) \equiv (u \in |V_\alpha| \Rightarrow z = \text{sm}\{y \leq \delta \mid [\varphi \mid V_\kappa](h(u)) \in V_y\}) \wedge (u \notin |V_\alpha| \Rightarrow z = \emptyset).$$

В этом случае $[\psi \mid V_\kappa] = \{v \mid \exists u \in V_\kappa \exists z \in V_\kappa (v = \langle u, z \rangle \wedge \psi^{V_\kappa}(u, z))\}$. Рассмотрим подробно формулу $\psi^{V_\kappa}(u, z)$. Она эквивалентна формуле

$$\begin{aligned} ((u \in |V_\alpha|)^{V_\kappa} \Rightarrow (z = \text{sm}\{y \leq \delta \mid [\varphi \mid V_\kappa](h(u)) \in V_y\})^{V_\kappa}) \\ \wedge ((u \notin |V_\alpha|)^{V_\kappa} \Rightarrow (z = \emptyset)^{V_\kappa}), \end{aligned}$$

которая эквивалентна формуле

$$\begin{aligned} (u \in |V_\alpha| \Rightarrow ([\varphi \mid V_\kappa](h(u)) \in V_z)^{V_\kappa} \wedge \forall y \in V_\kappa (y \leq \delta \wedge ([\varphi \mid V_\kappa](h(u)) \in V_y)^{V_\kappa} \\ \Rightarrow z \subset y)) \wedge (u \notin |V_\alpha| \Rightarrow z = \emptyset). \end{aligned}$$

Формула

$$([\varphi \mid V_\kappa](h(u)) \in V_z)^{V_\kappa} \wedge \forall y \in V_\kappa (y \leq \delta \wedge ([\varphi \mid V_\kappa](h(u)) \in V_y)^{V_\kappa} \Rightarrow z \subset y)$$

эквивалентна формуле

$$([\varphi \mid V_\kappa](h(u)) \in V_z)^{V_\kappa} \wedge \forall y \leq \delta (([\varphi \mid V_\kappa](h(u)) \in V_y)^{V_\kappa} \Rightarrow z \subset y),$$

так как из $y \leq \delta$ следует $y \in V_\kappa$.

Рассмотрим подробнее формулу $([\varphi \mid V_\kappa](h(u)) \in V_z)^{V_\kappa}$. Она эквивалентна формуле $\exists w(w \in V_z \wedge \varphi^{V_\kappa}(h(u), w, \vec{p}) \wedge \vec{p} \in V_\kappa)$.

Таким образом, формула $[\psi \mid V_\kappa]$ равносильна формуле

$$\{v \mid \exists u \in V_\kappa \exists z \in V_\kappa (v = \langle u, z \rangle \wedge (u \in |V_\alpha| \Rightarrow z = \text{sm}\{y \mid \exists w(w \in V_y \wedge \varphi^{V_\kappa}(h(u), w, \vec{p}) \wedge \vec{p} \in V_\kappa)\}) \wedge (u \notin |V_\alpha| \Rightarrow z = \emptyset))\}.$$

Отсюда мы легко выводим, что $[\psi \mid V_\kappa] \models |V_\alpha| \rightarrow \kappa$.

Рассмотрим ординальное число $\gamma \equiv \cup \text{rng}[\psi \mid V_\kappa] = \sup \text{rng}[\psi \mid V_\kappa] \leq \kappa$. Предположим, что $\gamma = \kappa$. Так как кардинал κ является квазирегулярным, то это невозможно. Значит, $\gamma < \kappa$.

Пусть $\text{rng}[\varphi \mid V_\kappa] \notin V_\kappa$. Тогда существует $t \in \text{rng}[\varphi \mid V_\kappa]$ такое, что $t \notin V_\gamma$. Множеству t соответствует некоторое $s \in \text{dom}[\varphi \mid V_\kappa]$ такое, что $\langle s, t \rangle \in [\varphi \mid V_\kappa]$ и $s \in V_\alpha$. Кроме того, $h^{-1}(s) \in |V_\alpha|$.

Рассмотрим $\beta \equiv [\psi \mid V_\kappa](h^{-1}(s))$. Поскольку $h^{-1}(s) \in |V_\alpha|$, то

$$\beta = \text{sm}\{y \mid \exists w(w \in V_y \wedge \varphi^{V_\kappa}(s, w, \vec{p}) \wedge \vec{p} \in V_\kappa)\},$$

а так как формула φ функциональна, то $w = t$, т.е. $\beta = \text{sm}\{y \mid t \in V_y\}$. Так как по условию $t \notin V_\gamma$, то $\beta > \gamma$, что противоречит условию $\text{rng}[\psi \mid V_\kappa] \subset \gamma$. Следовательно, $\text{rng}[\varphi \mid V_\kappa] \subset V_\kappa$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если κ – формульно-недостижимое кардинальное число, $A \in V_\kappa$, $\varphi(x, y; \vec{p})$ – формула и $[\varphi(x, y; \vec{p}) \mid V_\kappa] \models A \rightarrow V_\kappa$, то

$$\text{rng}[\varphi(x, y; \vec{p}) \mid V_\kappa] \in V_\kappa.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку κ – предельное число, то $V_\kappa = \cup [V_\alpha \mid \alpha \in \kappa]$. Поэтому $A \in V_\alpha$ для некоторого $\alpha \in \kappa$. По лемме 4 имеем $A \subset V_\alpha$. Рассмотрим формулу

$$\psi(x, y; \vec{p}, A, \alpha) \equiv (x \in A \wedge \varphi(x, y; \vec{p})) \vee (x \in V_\alpha \setminus A \wedge y = \emptyset).$$

Из $x \in V_\alpha \setminus A \subset V_\alpha \in V_\kappa$ и супертранзитивности V_α следует $x, V_\alpha \setminus A \in V_\kappa$. Поэтому $(x \in V_\alpha \setminus A)^{V_\kappa} \Leftrightarrow x \in V_\alpha \setminus A$. Следовательно, $\psi^{V_\kappa} \Leftrightarrow (x \in A \wedge \varphi^{V_\kappa}) \vee ((x \in V_\alpha \setminus A) \wedge y = \emptyset)$. Так как $g \equiv [\psi \mid V_\kappa] \models V_\alpha \rightarrow V_\kappa$, то по лемме 12 $\text{rng } g \in V_\kappa$. Из $B \equiv \text{rng}[\varphi \mid V_\kappa] \subset \text{rng } g \in V_\kappa$ следует $B \in V_\kappa$.

ЛЕММА 13. Если κ – формульно-недостижимое кардинальное число и $A \in V_\kappa$, то $\cup A \in V_\kappa$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку κ – предельное ординальное число, то $V_\kappa = \cup [V_\delta \mid \delta \in \kappa]$. Для $A \in V_\kappa$ существует $\delta \in \kappa$ такое, что $A \in V_\delta$. Тогда для каждого $a \in A$ выполнено $a \in V_\delta$. Отсюда следует, что для каждого $a \in A$ непустое множество $\{y \leq \delta \mid a \in V_y\}$ имеет наименьший элемент z_a .

Рассмотрим некоторое биективное отображение $h: |V_\delta| \rightarrow V_\delta$ и формулу

$$\begin{aligned} \psi(u, z) &\equiv (u \in |V_\delta| \wedge h(u) \in A \\ &\Rightarrow z = \text{sm}\{y \leq \delta \mid h(u) \in V_y\}) \wedge (u \notin |V_\delta| \vee h(u) \notin A \Rightarrow z = \emptyset). \end{aligned}$$

В этом случае $[\psi \mid V_\kappa] = \{v \mid \exists u \in V_\kappa \exists z \in V_\kappa (v = \langle u, z \rangle \wedge \psi^{V_\kappa}(u, z))\}$. Рассмотрим подробно формулу $\psi^{V_\kappa}(u, z)$. Она эквивалентна формуле

$$\begin{aligned} (u \in |V_\delta| \wedge h(u) \in A \Rightarrow ((\forall y \leq \delta (h(u) \in V_y) \Rightarrow z \subset y) \wedge (h(u) \in V_z)))^{V_\kappa} \\ \wedge (u \notin |V_\delta| \vee h(u) \notin A \Rightarrow z = \emptyset). \end{aligned}$$

Формула $((\forall y \leq \delta(h(u) \in V_y) \Rightarrow z \subset y) \wedge (h(u) \in V_z))^{V_\kappa}$ эквивалентна формуле $\forall y \in V_\kappa (y \leq \delta \wedge h(u) \in V_y \Rightarrow z \subset y) \wedge (h(u) \in V_z)$ в силу того, что $h, h(u), \delta, V_y, V_z \in V_\kappa$. Так как при этом из $y \leq \delta$ следует $y \in V_\kappa$, то эта формула эквивалентна формуле $(\forall y \leq \delta(h(u) \in V_y) \Rightarrow x \subset y) \wedge (h(u) \in V_z)$, т. е. формуле $z = \text{sm}\{y \leq \delta \mid h(u) \in V_y\}$.

Таким образом,

$$[\psi \mid V_\kappa] = \{v \mid \exists u \in V_\kappa \exists z \in V_\kappa (v = \langle u, z \rangle \wedge ((u \in |V_\delta| \wedge h(u) \in A \Rightarrow z = \text{sm}\{v \leq \delta \mid h(u) \in V_y\}) \wedge (u \notin |V_\delta| \vee h(u) \notin A \Rightarrow z = \emptyset)))\}.$$

Отсюда легко получаем, что $[\psi \mid V_\kappa] \simeq |V_\delta| \rightarrow \kappa$.

Рассмотрим ординальное число $\gamma \equiv \cup \text{rng}[\psi \mid V_\kappa] \in \kappa$. Пусть $\cup A \notin V_\kappa$. Тогда существует $t \in \cup A$ такое, что $t \notin V_\gamma$. Так как $t \in \cup A$, то существует $a \in A$ такое, что $t \in a$, откуда следует, что $a \notin V_\gamma$. Но если рассмотреть $s \equiv [\psi \mid V_\kappa](h^{-1}(a))$, то мы получим $s \leq \gamma \wedge a \in V_s$, откуда следует, что $a \in V_\gamma$. Значит, $\cup A \in V_\kappa$.

Любая формула $\sigma(x; \vec{u})$ теории ZF и любое транзитивное множество A задают множество $\langle \sigma(x; \vec{u}) \mid A \rangle \equiv \{x \in A \mid \sigma^A(x; \vec{u})\}$, зависящее от параметра $\vec{u}$.

ЛЕММА 14. *Если κ – формульно-недостижимое кардинальное число и $\varphi(x, y; \vec{p})$, $\sigma(x; \vec{u})$ – формулы, то*

$$\begin{aligned} \forall \vec{p}, \vec{u} \in V_\kappa \forall \varepsilon \in |V_\kappa| ([\varphi(x, y; \vec{p}) \mid V_\kappa] \\ \simeq \langle \sigma(x; \vec{u}) \mid V_\kappa \rangle \mapsto \varepsilon \Rightarrow \langle \sigma(x; \vec{u}) \mid V_\kappa \rangle \in V_\kappa). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $[\varphi \mid V_\kappa]$, $\text{rng}[\varphi \mid V_\kappa]$ и $\langle \sigma \mid V_\kappa \rangle$ при данных $\vec{p}, \vec{u} \in V_\kappa$ из условия леммы через f , R и S соответственно. Рассмотрим формулу $\rho(y; \vec{p}, \vec{u}) \equiv \exists x(\sigma(x; \vec{u}) \wedge \varphi(x, y; \vec{p}))$. Тогда формула $\rho^{V_\kappa} = \exists x \in V_\kappa (\sigma^{V_\kappa}(x; \vec{u}) \wedge \varphi^{V_\kappa}(x, y; \vec{p}))$ влечет

$$\langle \rho(y; \vec{p}, \vec{u}) \mid V_\kappa \rangle \equiv \{y \in V_\kappa \mid \exists x(x \in V_\kappa \wedge \sigma^{V_\kappa}(x; \vec{u}) \wedge \varphi^{V_\kappa}(x, y; \vec{p}))\} = R$$

при данных $\vec{p}, \vec{u} \in V_\kappa$. Так как по лемме 11 справедливо вложение $R \subset \varepsilon \in |V_\kappa| = \kappa \subset V_\kappa$, то $R \in V_\kappa$.

Рассмотрим формулу $\psi(y, x; \vec{p}, \vec{u}) \equiv \sigma(x; \vec{u}) \wedge \varphi(x, y; \vec{p})$. Тогда

$$\psi^{V_\kappa} = \sigma^{V_\kappa}(x; \vec{u}) \wedge \varphi^{V_\kappa}(x, y; \vec{p})$$

влечет

$$[\psi \mid V_\kappa] \equiv \{t \in V_\kappa * V_\kappa \mid \exists y, x \in V_\kappa (t = \langle y, x \rangle \wedge \sigma^{V_\kappa}(x; \vec{u}) \wedge \varphi^{V_\kappa}(x, y; \vec{p}))\} = f^{-1}.$$

Следовательно, $g \equiv [\psi \mid V_\kappa]$ является биективным отображением из R на S . Поскольку $R \in V_\kappa$, то по следствию 1 к лемме 12 выполнено $S = \text{rng } g \in V_\kappa$.

§ 3. Формульно-универсальные множества и их связь с формульно-недостижимыми кумулятивными множествами

Множество U назовем *формульно-универсальным*, если оно обладает следующими свойствами:

- 1) $x \in U \Rightarrow x \subset U$ (свойство транзитивности);
- 2) $x \in U \Rightarrow \mathcal{P}(x), \cup x \in U$;

- 3) $x, y \in U \Rightarrow x \cup y, \{x, y\}, \langle x, y \rangle, x * y \in U$;
- 4) $\forall \vec{p} \in U \forall x (x \in U \wedge [\varphi(x, y; \vec{p}) \mid U] \Leftrightarrow x \rightarrow U \Rightarrow \text{rng}[\varphi(x, y; \vec{p}) \mid U] \in U)$;
- 5) $\omega \in U$.

ЛЕММА 15. Если множество U формульно-универсально, то $x \in U \wedge y \in U \Rightarrow x \Rightarrow y \in U$.

Эта лемма показывает, что формульно-универсальное множество является квазитранзитивным. Отсюда и из свойства транзитивности следует, что формульно-универсальное множество является супертранзитивным.

ЛЕММА 16. Если множество U формульно-универсально, то справедливы формулы $\emptyset \in U$ и $1 \in U$.

ТЕОРЕМА 2. Если U – формульно-универсальное множество, то $X \in U \Rightarrow |X| \in U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $X = \emptyset$, то $|X| = 0 \in U$. Далее будем считать, что $X \neq \emptyset$. По принципу Цермело можно считать, что множество X вполне упорядочено. Возьмем наименьший элемент m множества X . Рассмотрим непустое множество $A \equiv \mathbf{On} \cap U$.

Для всех $x \in X$ через X_x будем обозначать интервал $\{t \in X \mid t < x\}$. Из $X_x \subset X \in U$ в силу леммы 15 следует $X_x \in U$.

Если для X_x существует отображение f такое, что $\text{dom } f = X_x$ и $\text{rng } f \in A$, то из $f \subset X_x * \text{rng } f \in U$ в силу леммы 15 следует $f \in U$.

Предположим, что для $x \in X$ существуют изотонные биективные отображения f и g такие, что $\text{dom } f = \text{dom } g = X_x$ и $\text{rng } f, \text{rng } g \in \mathbf{On}$. Если $x = m$, то $f = g = \emptyset$. Если $x > m$, то рассмотрим множество $X' \equiv \{y \in X_x \mid f(y) \neq g(y)\}$. Предположим, что $X' \neq \emptyset$. Тогда X' содержит наименьший элемент n . Рассмотрим множество $X_n \subset X_x$. Предположим, что $f(n) > 0$, и рассмотрим $z \in X_x$ такое, что $f(z) = 0$. Поскольку f является изотонным, то $f(m) > f(z)$ влечет $m > z$, что невозможно. Значит, $f(m) = 0 = g(m)$ влечет $m < n$, т. е. $m \in X_n$. Ясно, что $f \mid X_n = g \mid X_n$. Так как биективное изотонное отображение сохраняет все порядковые границы, то

$$f(n) = f(\sup X_n) = \sup f[X_n] = \sup g[X_n] = g(\sup X_n) = g(n),$$

что противоречит свойствам $n \in X'$, $X' = \emptyset$ и $f = g$.

Обозначим через $\text{bij}(f)$ и $\text{isot}(f)$ формулы, выражающие для отображения f свойства быть биективным и изотонным соответственно. Рассмотрим формулу

$$\begin{aligned} \varphi(x, a; X) \equiv & (X \neq \emptyset \wedge x \in X \wedge \exists f (\text{func}(f) \wedge \text{dom}(f) = X_x \\ & \wedge \text{rng}(f) = a \wedge \text{bij}(f) \wedge \text{isot}(f)) \wedge \text{On}(a)). \end{aligned}$$

Мы установили, что для $x \in X$ может существовать единственное f , а значит, и единственное a , т. е. формула $\varphi(x, a; X)$ функциональна. Рассмотрим функцию

$$H \equiv [\varphi \mid U] \equiv \{z \in U * U \mid \exists x, a \in U (z = \langle x, a \rangle \wedge \varphi^U(x, a; X) \wedge X \in U)\} \subset U * U,$$

зависящую от параметра $X \in U$.

Рассмотрим формулу

$$\begin{aligned} \varphi^U(x, a; X) = & (X \neq \emptyset \wedge x \in X \wedge \exists f \in U (\text{func}^U(f) \wedge (\text{dom}(f) = X_x)^U \\ & \wedge (\text{rng}(f) = a)^U \wedge \text{bij}^U(f) \wedge \text{isot}^U(f)) \wedge \text{On}^U(a)) \end{aligned}$$

для $x, a, X \in U$. Из абсолютности этих формул и операций следует, что

$$\begin{aligned} \text{func}^U(f) &\Leftrightarrow \text{func}(f), \quad (\text{dom}(f) = X_x)^U \Leftrightarrow (\text{dom}(f) = X_x), \\ (\text{rng}(f) = a)^U &\Leftrightarrow (\text{rng}(f) = a), \quad \text{On}^U \Leftrightarrow \text{On}(a), \\ \text{bij}^U(f) &\Leftrightarrow \text{bij}(f), \quad \text{isot}^U(f) \Leftrightarrow \text{isot}(f) \end{aligned}$$

(см. [22, § 10]). Следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi^U(x, a; X) &\Leftrightarrow (X \neq 0 \wedge x \in X \wedge \exists f \in U (\text{func}(f) \\ &\quad \wedge \text{dom } f = X_x \wedge \text{rng}(f) = a \wedge \text{bij}(f) \wedge \text{isot}(f)) \wedge \text{On}(a)) \end{aligned}$$

для $a, x, X \in U$. Рассмотрим множество $Z \equiv \text{dom } H$. Так как $Z \subset X \in U$ и U квазитранзитивно, то $Z \in U$. Следовательно, по свойству 4) из определения формульно-универсального множества $c \equiv \text{rng } H \in U$. Таким образом, H является функцией из Z на c . Поскольку множество $e \equiv \emptyset \in U$ является изотонным биективным отображением таким, что $\text{dom } e = X_m = \emptyset \in U$ и $\text{rng } e = \emptyset = 0 \in A$, то $H \neq \emptyset$.

Пусть $\alpha \in \beta \in c$. Тогда $\beta = H(y)$ для некоторых $\beta \in \mathbf{On}$ и $y \in Z$ таких, что справедливо свойство $\varphi^U(y, \beta; X)$. Это значит, что $y \in X$ и существует изотонная биекция $g \in U$ такая, что $\text{dom}(g) = X_y$ и $\text{rng}(g) = \beta$. Так как β ординально, то α ординально и $\alpha \subset \beta$. Рассмотрим $x \equiv g^{-1}(\alpha) \in X_y$. Если $t \in X_x \subset X_y$, то $g(t) < g(x) = \alpha$, т.е. $g(t) \in \alpha$. Если $\gamma \in \alpha$, то $\gamma \in \beta$ и можно взять элемент $z \equiv g^{-1}(\gamma) \in X_y$. Из $g(z) = \gamma < \alpha = g(x)$ следует $z < x$, т.е. $z \in X_x$. Кроме того, $g(z) = \gamma$. Значит, функция $f \equiv g \upharpoonright X_x$ отображает X_x на α и является биективной и изотонной. Поскольку $f \subset g \in U$, то из квазитранзитивности U следует $f \in U$. Следовательно, $\alpha = H(x) \in c$. Это означает, что множество c транзитивно.

Пусть $\alpha, \beta \in c$. Тогда $\alpha = H(x)$ и $\beta = H(y)$ для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbf{On}$ и $x, y \in Z$ таких, что справедливы свойства $\varphi^U(x, \alpha; X)$ и $\varphi^U(y, \beta; X)$. Это означает, что $x, y \in X$ и существуют изотонные биекции $f, g \in U$ такие, что $\text{dom}(f) = X_x$, $\text{dom}(g) = X_y$, $\text{rng}(f) = \alpha$ и $\text{rng}(g) = \beta$. Так как α и β – ординальные числа, то либо $\alpha \in \beta$, либо $\beta \in \alpha$, либо $\alpha = \beta$. Значит, множество c линейно упорядочено относительно бинарного отношения $\in \cup =$.

Пусть $\emptyset \neq \alpha \subset c$. По аксиоме регулярности существует $r \in \alpha$ такое, что $r \cap \alpha = \emptyset$. Возьмем любое $s \in \alpha$ такое, что $s \in r$ или $s = r$. Из $r \cap \alpha = \emptyset$ следует, что $s \notin r$. Значит, $s = r$. Это означает, что r является наименьшим элементом в α , т.е. c вполне упорядочено. Таким образом, c – ординальное число.

Проверим, что функция H биективна и изотонна. Пусть $x, y \in Z$ и $x < y$. Тогда для ординальных чисел $a \equiv H(x)$ и $b \equiv H(y)$ существуют изотонные биекции $f, g \in U$ такие, что $\text{dom}(f) = X_x$, $\text{dom}(g) = X_y$, $\text{rng}(f) = a$ и $\text{rng}(g) = b$. Рассмотрим ординальное число $a' \equiv g(x) \in b$. Если $t \in X_x$, то $t < x < y$ влечет $g(t) < g(x) \equiv a'$, т.е. $g(t) \in a'$. Если $\alpha \in a' \subset b$, то для элемента $s \equiv g^{-1}(\alpha)$ из $\alpha < a'$ следует $s < x$, т.е. $s \in X_x$ и $g(s) = \alpha$. Значит, функция $f' \equiv g \upharpoonright X_x$ является изотонной биекцией из X_x на a' . Из доказанной ранее единственности следует $f' = f$. Таким образом, $f \subset g$ влечет $a \subset b$. Предположим, что $a = b$. Тогда

$$X_x = f^{-1}[a] = (f')^{-1}[a] = g^{-1}[a] = g^{-1}[b] = X_y,$$

что противоречит неравенству $x < y$. Значит, $a \in b$, т.е. $a < b$. Обратно, пусть $x, y \in Z$ и $a < b$. Поскольку $a \in b$, то можно взять элемент $x'' \equiv g^{-1}(a) \in X_y$.

Если $t \in X_{x''}$, то $t < x'' < y$ влечет $g(t) < g(x'') = a$, т.е. $g(t) \in a$. Если $\alpha \in a \subset b$, то для элемента $s \equiv g^{-1}(\alpha)$ из $\alpha < a$ следует $s = g^{-1}(\alpha) < g^{-1}(a) = x''$, т.е. $s \in X_{x''}$ и $g(s) = \alpha$. Значит, функция $f'' \equiv g \mid X_{x''}$ является изотонной биекцией из $X_{x''}$ на a . Рассмотрим изотонные биекции $p \equiv f^{-1}: a \rightarrow X_x$ и $p'' \equiv (f'')^{-1}: a \rightarrow X_{x''}$. Так же, как и выше, доказывается, что $p = p''$. Следовательно, $X_x = X_{x''}$ влечет $x = x'' < y$.

Таким образом, сюръективная функция H изотонна и, значит, биективна.

Итак, H является изотонной биекцией из $Z \subset X$ на $c \in A$. Предположим, что $Z \neq X$. Тогда множество $X \setminus Z$ содержит наименьший элемент y . Рассмотрим начальный интервал X_y . Если $x \in X_y$, то $x \in Z$, т.е. $X_y \subset Z$. Обратно, пусть $x \in Z$. Предположим, что $y \leq x$. Рассмотрим ординальное число $a \equiv H(x)$. Для него существует изотонная биекция $f \in U$ такая, что $\text{dom}(f) = X_x$ и $\text{rng}(f) = a$. Если $y = x$, то $y \in Z$, что невозможно. Пусть $y < x$. Рассмотрим ординальное число $b \equiv f(y) \in a$ и изотонную биекцию $g \equiv f \mid X_y$ из X_y на b . Поскольку $g \subset f \in U$, то в силу квазитранзитивности U получаем $g \in U$. Значит, $b = H(y)$ и $y \in Z$, что невозможно, поэтому $x < y$, т.е. $x \in X_y$. Получаем $X_y = Z$.

Рассмотрим новое множество $Y \equiv Z \cup \{y\}$ и определим функцию f из Y на $a \equiv c + 1$, полагая $f \mid Z \equiv H$ и $f(y) \equiv c$. Пусть $x, x' \in Y$ и $x < x'$. Если $x, x' \in Z$, то $f(x) = H(x) < H(x') = f(x')$. Если $x \in Z$ и $x' = y$, то из $f(x) = H(x) \in c$ следует $f(x) < c = f(x')$. Значит, f строго монотонно. Обратно, пусть $f(x) < f(x')$ для $x, x' \in Y$. Если $x, x' \in Z$, то из $H(x) < H(x')$ следует $x < x'$. Если $x \in Z$ и $x' = y$, то $x < y = x'$. Если $x' \in Z$ и $x = y$, то $f(x') = H(x') \in c$. Следовательно, $f(x') < c = f(x)$, что противоречит условию. В итоге $x < x'$. Значит, f является изотонным. Так как f сюръективно, то f биективно.

Предположим, что $X \setminus Z \neq \{y\}$. Тогда непустое множество $X \setminus Y$ содержит наименьший элемент x . Если $x = y$, то $x \in Y$, что невозможно. Если $x < y$, то $x \notin X \setminus Z$, т.е. $x \in Z \subset Y$, что также невозможно. Значит, $y < x$. Пусть $t \in Y$. Если $t \in Z = X_y$, то $t < y < x$, т.е. $t \in X_x$. Если $t = y < x$, то снова $t \in X_x$. Поэтому $Y \subset X_x$. Обратно, если $t \in X_x$, то $t < x$ влечет $t \notin X \setminus Y$, т.е. $t \in Y$. В результате имеем $Y = X_x$. Следовательно, f является биективной изотонной функцией из X_x на a . Из $y \in X \in U$ следует $y \in U$. Поэтому $\langle y, c \rangle \in U$ и $\{\langle y, c \rangle\} \in U$. Далее, $H \subset Z * c \in U$ в силу квазитранзитивности U влечет $H \in U$. Отсюда $f = H \cup \{\langle y, c \rangle\} \in U$. Это означает, что $a = H(x) \in c \in a$, что невозможно. Поэтому $X = Y$. Итак, f – изотонная биекция из X на a . Так как $a = c \cup \{c\} \in U$, то $a \in A$.

Если $Z = X$, то положим $a \equiv c$ и $f \equiv H$.

Таким образом, в обоих случаях мы построили изотонное биективное отображение $f \in U$ из X на $a \in A$. Поскольку $|X| \subset a \in U$, то из квазитранзитивности U следует $|X| \in U$.

Докажем, что в формульно-универсальном множестве, как и в универсальном, существует принцип $\in$ -индукции.

ЛЕММА 17. Пусть U – формульно-универсальное множество, $C \subset U$ и $\forall x \in U (x \subset C \Rightarrow x \in C)$. Тогда $C = U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $C \neq U$, т.е. $D \equiv U \setminus C \neq \emptyset$. Тогда существует $P \in D$. Ясно, что $P \in U$. Если $P \cap D = \emptyset$, то положим $X \equiv P$.

Пусть $P \cap D \neq \emptyset$. Рассмотрим множество N , состоящее из всех $n \in \omega$, для которых существует единственная последовательность $u \equiv u(n) \equiv (R_k \in U \mid k \in n+1)$ множеств $R_k \in U$ таких, что $R_0 = P$ и $R_{k+1} = \cup R_k$ для любого $k \in n$. Поскольку последовательность $(R_k \mid k \in 1)$, такая что $R_0 \equiv P$, обладает этим свойством, то $0 \in N$. Пусть $n \in N$, т. е. для n существует единственная последовательность $u \equiv (R_k \in U \mid k \in n+1)$. Определим последовательность $v \equiv (S_k \in U \mid k \in n+2)$, положив $S_k \equiv R_k \in U$ для любого $k \in n+1$ и $S_{n+1} \equiv \cup R_n = \cup S_n$, т. е. $v = u \cup \{ \langle n+1, \cup R_n \rangle \}$. Так как U — универсальное множество, то $R_n \in U$ влечет $S_{n+1} \in U$. Ясно, что последовательность v обладает необходимыми свойствами. Проверим ее единственность. Предположим, что существует последовательность $w \equiv (T_k \in U \mid k \in n+2)$ такая, что $T_0 = P$ и $\forall k \in n+1 (T_{k+1} = \cup T_k)$. Рассмотрим множество M' , состоящее из всех $m \in n+2$, для которых $S_m = T_m$. Пусть $M'' \equiv \omega \setminus (n+2)$ и $M \equiv M' \cup M''$. Так как $S_0 = P = T_0$, то $0 \in M' \subset M$.

Пусть $m \in M'$. Если $m = n+1$, то $m+1 = n+2 \in M'' \subset M$. Если $m < n+1$, то $m+1 \in n+2$ и $S_{m+1} = \cup S_m = \cup T_m = T_{m+1}$ влечет $m+1 \in M' \subset M$. Если $m \in M''$, то $m+1 \in M'' \subset M$. Значит, $m \in M$ влечет $m+1 \in M$. По принципу натуральной индукции $M = \omega$. Следовательно, $M' = n+2$, и поэтому $v = w$, т. е. последовательность v единственна. Поэтому $n+1 \in N$. По принципу натуральной индукции $N = \omega$. Значит, для любого $n \in \omega$ существует единственная последовательность $u(n)$. В силу единственности мы будем обозначать ее через $(R_k^n \mid k \in n+1)$.

Обозначим R_x^x через R_x . Рассмотрим следующую формулу теории ZF: $\varphi(x, y) \equiv (x \in \omega \wedge y = R_x)$. Рассмотрим формулу $\varphi^U(x, y) \equiv ((x \in \omega)^U \wedge (y = R_x)^U)$ при $x, y \in U$. Поскольку $x, \omega, y, R_x \in U$, то, используя свойство транзитивности множества U , можно доказать, что $(x \in \omega)^U \Leftrightarrow x \in \omega$ и $(y = R_x)^U \Leftrightarrow y = R_x$. Поэтому $\varphi^U(x, y) \Leftrightarrow \varphi(x, y)$ при $x, y \in U$. Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} [\varphi \mid U] &\equiv \{z \in U * U \mid \exists x, y \in U (z = \langle x, y \rangle \wedge \varphi^U(x, y))\} \\ &= \{z \in U * U \mid \exists x, y \in U (z = \langle x, y \rangle \wedge \varphi(x, y))\} \\ &= \{z \in U * U \mid \exists x, y \in U (z = \langle x, y \rangle \wedge x \in \omega \wedge y = R_x)\} \subset U * U. \end{aligned}$$

Ясно, что $\text{dom}[\varphi \mid U] = \omega$ и $A \equiv \text{rng}[\varphi \mid U] = \{q \in U \mid \exists p \in \omega (q = R_p)\}$. Так как $[\varphi \mid U] \rightleftharpoons \omega \rightarrow U$, то $A \in U$ и $Q \equiv \cup A \in U$ в силу свойств 5), 4) и 2) из определения формульно-универсального множества. Ясно, что $Q = \{y \mid \exists n \in \omega (y \in R_n)\}$. Поэтому $R_n \subset Q$ для любого $n \in \omega$ и, следовательно, $P = R_0 \subset Q$. Из свойства единственности $u(m) = u(n) \mid (m+1)$ для всех $m \leq n$, т. е. $R_k^m = R_k^n$ для любого $k \in m+1$. Поэтому $\cup R_k = \cup R_m^m = \cup R_m^{m+1} = R_{m+1}^{m+1} \equiv R_{m+1}$.

Поскольку $P \cap D \neq \emptyset$, то $R \equiv Q \cap D \neq \emptyset$. По аксиоме регулярности существует $X \in R$ такой, что $X \cap R = \emptyset$. Ясно, что $X \in U$ и $X \subset U$. Проверим, что $X \cap D = \emptyset$. Действительно, предположим, что существует $x \in X \cap D$. Так как $X \in Q$, то $X \in R_n$ для некоторого $n \in \omega$. Следовательно, $x \in X \in R_n$ влечет $x \in \cup R_n = R_{n+1} \subset Q$. Значит, $x \in R$. В результате мы получаем $x \in X \cap R = \emptyset$, что невозможно. Поэтому $X \in D$ и $X \cap D = \emptyset$.

Итак, в обоих случаях $X \in U$ и $X \subset C$. По условию тогда $X \in C$, что невозможно, так как $X \in D$. Значит, $C = U$.

Для формульно-универсального множества справедлив следующий аналог равенства фон Неймана из леммы 2.

ЛЕММА 18. Пусть U – формульно-универсальное множество. Тогда:

- 1) $V_\alpha \in U$ для любого $\alpha \in \mathbf{On} \cap U$;
- 2) $U = \cup[V_\alpha \subset U \mid \alpha \in \mathbf{On} \cap U]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Рассмотрим множества $A \equiv \mathbf{On} \cap U$, $C' \equiv \{\alpha \in A \mid V_\alpha \in U\}$ и классы $\mathbf{C}'' \equiv \mathbf{On} \setminus U$, $\mathbf{C} \equiv C' \cup \mathbf{C}''$. По лемме 16 имеем $0 = V_0 = \emptyset \in U$. Следовательно, $0 \in \mathbf{C}$. Пусть $\alpha \in \mathbf{C}$. Предположим, что $\alpha + 1 \in A$. Так как $\alpha \in \alpha + 1 \in U$, то $\alpha \in U$ по свойству 1) и, следовательно, $\alpha \in A \cap \mathbf{C} = C'$. Тогда условие $V_\alpha \in U$ по свойствам 2) и 3) влечет $V_{\alpha+1} = V_\alpha \cup \mathcal{P}(V_\alpha) \in U$. Значит, $\alpha + 1 \in C' \subset \mathbf{C}$. В случае $\alpha + 1 \notin A$ мы сразу получаем $\alpha + 1 \in \mathbf{C}'' \subset \mathbf{C}$.

Пусть α – предельное ординальное число и $\alpha \in \mathbf{C}$. Предположим, что $\alpha \in A$. Если $\beta \in \alpha$, то $\beta \in \alpha \in U$ влечет $\beta \in A \cap \mathbf{C} = C'$.

Рассмотрим функциональную формулу $\varphi(x, y) \equiv (x \in \alpha \Rightarrow y = V_x) \wedge (x \notin \alpha \Rightarrow y = \emptyset)$. Тогда

$$[\varphi \mid U] = \{z \mid \exists x \in U \exists y \in U (z = \langle x, y \rangle \wedge (x \in \alpha \Rightarrow y = V_x)^U \wedge (x \notin \alpha \Rightarrow y = \emptyset)^U) \wedge \alpha \in U\}.$$

Поскольку по условию $\alpha \in U$ и $x \in \alpha \Rightarrow v_x \in U$, то эта формула эквивалентна формуле

$$\{z \mid \exists x \in U \exists y \in U (z = \langle x, y \rangle \wedge (x \in \alpha \Rightarrow y = V_x) \wedge (x \notin \alpha \Rightarrow y = \emptyset))\}.$$

Очевидно, что в этом случае $[\varphi \mid U] \Leftrightarrow \alpha \rightarrow U$ и $\text{rng}[\varphi \mid U] = [V_y \mid y \in \alpha]$. По свойству 4) имеем $[V_y \mid y \in \alpha] \in U$, а значит, $V_\alpha = \cup[V_y \mid y \in \alpha] \in U$. Следовательно, $\alpha \in C' \subset \mathbf{C}$. В случае $\alpha \notin A$ мы сразу получаем $\alpha \in \mathbf{C}'' \subset \mathbf{C}$. По принципу трансфинитной индукции $\mathbf{C} = \mathbf{On}$ и, следовательно, $C' = A$.

2) Из доказанного выше следует $V_\alpha \subset U$ для любого $\alpha \in A$. Значит, $P \equiv \cup[V_\alpha \mid \alpha \in A] \subset U$. Покажем, что P удовлетворяет принципу $\in$ -индукции из леммы 17. Рассмотрим формулу

$$\varphi(u, z) \equiv (u \in P \Rightarrow z = \text{sm}\{\alpha \in A \mid p \in V_\alpha\}) \wedge (u \notin P \Rightarrow z = \emptyset).$$

Пусть $x \in U$ и $x \subset P$. Если $x = \emptyset$, то $x \in P$. Далее будем считать, что $x \neq \emptyset$. Если $y \in x \subset P$, то $y \in V_\alpha$ для некоторого $\alpha \in A$. Следовательно, $\varphi(y) \leq \alpha \in U$ по лемме 15 влечет $\varphi(y) \in A$. Поэтому мы можем рассмотреть функциональную формулу $\psi \equiv \varphi \mid x$. Легко показать, что $[\psi \mid U] \Leftrightarrow x \rightarrow A$. По свойству 4) имеем $R \equiv \text{rng}[\psi \mid A] \in U$ и по свойству 2) получаем $\rho \equiv \cup R \in U$. Так как $\emptyset \neq R \subset \mathbf{On}$, то ρ является ординальным числом. Следовательно, $\rho \in A$.

Если $y \in x$, то $[\psi \mid U](y) \subset \rho$ по лемме 1 влечет $y \in V_{[\psi \mid U](y)} \subset V_\rho$. Поэтому $x \subset V_\rho \in V_{\rho+1}$ по лемме 3 влечет $x \in V_{\rho+1}$. По свойству 3) имеем, что $\rho + 1 = \rho \cup \{\rho\} \in U$ влечет $\rho + 1 \in A$. Следовательно, $x \in P$.

Из леммы 17 теперь следует $P = U$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть U – произвольное формульно-универсальное множество. Тогда:

- 1) $U = V_\kappa$ для $\kappa \equiv \sup(\mathbf{On} \cap U) = \cup(\mathbf{On} \cap U) \subset U$;
- 2) κ является формульно-недостижимым кардинальным числом;
- 3) соответствие $q: U \mapsto \kappa$, такое что $U = V_\kappa$, является инъективным изотонным отображением из класса $\mathbf{U}'$ всех формульно-универсальных множеств в класс $\mathbf{In}'$ всех формульно-недостижимых кардинальных чисел.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Поскольку $A \equiv \mathbf{On} \cap U$ непусто (оно содержит ω), то $\varkappa$ – ординальное число.

Пусть $\varkappa \in U$. Тогда $\varkappa + 1 = \varkappa \cup \{\varkappa\} \in U$. Так как $\varkappa + 1 \in \mathbf{On}$, то $\varkappa + 1 \in \mathbf{On} \cap U$, т. е. $\varkappa + 1 \leq \varkappa$, что неверно. Значит, $\varkappa \notin U$.

Предположим, что $\varkappa = \alpha + 1$ для некоторого ординального числа α . В этом случае $\alpha \in U$, так как $\varkappa \subset U$ и $\alpha \in \varkappa$. Поскольку $\varkappa = \alpha \cup \{\alpha\}$, то по свойствам формульно-универсального множества $\varkappa \in U$, что невозможно. Значит, $\varkappa$ – предельное ординальное число.

Следовательно, $V_\varkappa = \cup [V_\beta \mid \beta \in \varkappa]$. По лемме 18 имеем $U = \cup [V_\alpha \mid \alpha \in A]$. Если $\alpha \in A$, то $\alpha \leq \varkappa$ влечет $V_\alpha \subset V_\varkappa$. Значит, $U \subset V_\varkappa$. Если $\beta \in \varkappa = \cup A$, то $\beta \in \alpha \in A$ для некоторого α . По свойству 1) получаем $\beta \in A$. Значит, $V_\varkappa \subset U$.

Таким образом, $U = V_\varkappa$.

2) Очевидно, что $\varkappa \neq 0$. Предположим, что $\varkappa$ не формульно-регулярно. Тогда

$$\exists \alpha (\alpha \in \varkappa \wedge [\varphi \mid U] \Leftrightarrow \alpha \rightarrow \varkappa \wedge \cup \text{rng}[\varphi \mid U] = \varkappa)$$

для некоторой формулы $\varphi(x, y; \vec{p})$. Но из $\alpha \in U$ и $\varkappa \subset U$ по свойству 4) формульно-универсального множества следует $\text{rng}[\varphi \mid U] \in U$ и, значит, справедливо $\cup \text{rng}[\varphi \mid U] \in U$. Поэтому $\cup \text{rng}[\varphi \mid U] \neq \varkappa$, т. е. $\varkappa$ схемно-регулярно.

Пусть λ – ординальное число такое, что $\lambda < \varkappa$. Так как $\lambda \in \varkappa \subset U$, то по свойству 2) имеем $\mathcal{P}(\lambda) \in U$. По теореме 2 выполнено $|\mathcal{P}(\lambda)| \in U$. Следовательно, $|\mathcal{P}(\lambda)| \leq \varkappa$. Предполагая, что $\varkappa = |\mathcal{P}(\lambda)| \in U$, мы, как и выше, приходим к противоречию. Значит, $|\mathcal{P}(\lambda)| < \varkappa$. Утверждение 2) доказано.

3) Из леммы 1 следует, что $\varkappa$ единственно. Поэтому мы можем определить отображение $q: \mathbf{U}' \rightarrow \mathbf{In}'$ такое, что $q(U) = \varkappa$, где $U = V_\varkappa$. Из леммы 1 также следует, что q является изотонным.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если U – формульно-универсальное множество, то $|U|$ является формульно-недостижимым кардинальным числом, $|U| = \sup(\mathbf{On} \cap U)$ и $U = V_{|U|}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 3 имеем $U = V_\varkappa$ для формульно-недостижимого кардинального числа $\varkappa \equiv \sup(\mathbf{On} \cap U)$. По лемме 11 получаем $\varkappa = |V_\varkappa| = |U|$.

ТЕОРЕМА 4. Для любого множества U следующие утверждения равносильны:

- 1) U – формульно-недостижимое кумулятивное множество;
- 2) U формульно-универсально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\vdash$ 2). Пусть $U = V_\varkappa$ для некоторого формульно-недостижимого кардинального числа $\varkappa > \omega$. Покажем, что множество U формульно-универсально. Свойство $x \in U \Rightarrow x \subset U$ следует из леммы 4. Свойство $x \in U \Rightarrow \mathcal{P}(x) \in U$ следует из леммы 7. Свойство $x \in U \wedge y \in U \Rightarrow x \cup y \in U$ следует из леммы 6. Свойства $x \in U \wedge y \in U \Rightarrow \{x, y\}, \langle x, y \rangle, x \times y \in U$ следуют из следствий 1 и 2 к лемме 7. Свойство $\omega \in U$ следует из леммы 8. Свойство $x \in U \Rightarrow \cup x \in U$ следует из леммы 13. Свойство $x \in U \wedge [\varphi \mid U] \Leftrightarrow x \rightarrow U \Rightarrow \text{rng}[\varphi \mid U] \in U$ следует из следствия 1 к лемме 12. Таким образом, множество U формульно-универсально.

2) $\vdash$ 1). Эта выводимость, очевидно, следует из теоремы 3.

§ 4. Супертранзитивные стандартные модели теории ZF в теории ZF

В этом параграфе нам понадобится список собственных аксиом и аксиомных схем теории ZF – теории множеств Цермело–Френкеля с аксиомой выбора (см. [19], [22] и [23]). Данная теория является теорией первого порядка с двумя бинарными предикатными символами: *принадлежности* $\in$ (пишем $A \in B$) и *равенства* $=$ (пишем $A = B$).

Предикат равенства = подчиняется следующим аксиоме и аксиомной схеме:

1) $\forall x(x = x)$ (*рефлексивность равенства*);

2) $(x = y) \Rightarrow (\varphi(x, x) \Rightarrow \varphi(x, y))$ (*замена равных*), где x и y – переменные, $\varphi(x, x)$ – произвольная формула, а $\varphi(x, y)$ получается из $\varphi(x, x)$ заменой каких-нибудь (не обязательно всех) свободных вхождений x вхождениями y с соблюдением условия, чтобы y было свободно для тех вхождений x , которые заменяются.

A1 (*аксиома объемности*). $\forall X \forall Y (\forall u (u \in X \Leftrightarrow u \in Y) \Rightarrow X = Y)$.

A2 (*аксиома пары*). $\forall u \forall v \exists x \forall z (z \in x \Leftrightarrow z = u \vee z = v)$.

AS3 (*аксиомная схема выделения*). $\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \Leftrightarrow u \in X \wedge \varphi(u, \vec{p}))$, где формула $\varphi(u, \vec{p})$ не содержит свободно переменную Y .

A4 (*аксиома объединения*). $\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \Leftrightarrow \exists z (u \in z \wedge z \in X))$.

A5 (*аксиома множества подмножеств*). $\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \Leftrightarrow u \subset X)$.

AS6 (*аксиомная схема подстановки*). $\forall x \forall y \forall y' (\varphi(x, y, \vec{p}) \wedge \varphi(x, y', \vec{p}) \Rightarrow y = y') \Rightarrow \forall X \exists Y \forall x \in X \forall y (\varphi(x, y, \vec{p}) \Rightarrow y \in Y)$, где формула $\varphi(x, y, \vec{p})$ не содержит свободно переменную Y .

A7 (*аксиома пустого множества*). $\exists x \forall z (\neg(z \in x))$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, единственно и обозначается через $\emptyset$.

A8 (*аксиома бесконечности*). $\exists Y (\emptyset \in Y \wedge \forall u (u \in Y \Rightarrow u \cup \{u\} \in Y))$.

A9 (*аксиома регулярности*). $\forall X (X \neq \emptyset \Rightarrow \exists x (x \in X \wedge x \cap X = \emptyset))$.

A10 (*аксиома выбора (AC)*). $\forall X (X \neq \emptyset \Rightarrow \exists z ((z \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow X) \wedge \forall Y (Y \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \Rightarrow z(Y) \in Y)))$, где $\mathcal{P}(X) \equiv \{u \mid u \subset X\}$ – множество подмножеств множества X .

Пусть U – некоторое множество в теории ZF. Рассмотрим на U бинарные отношения равенства

$$E \equiv \{z \in U \times U \mid \exists x, y \in U (z = \langle x, y \rangle \wedge x = y)\}$$

и принадлежности

$$B \equiv \{z \in U \times U \mid \exists x, y \in U (z = \langle x, y \rangle \wedge x \in y)\}.$$

Интерпретация $M \equiv (U, I)$ теории ZF, в которой соответствие I сопоставляет предикатным символам $=$ и $\in$ бинарные отношения E и B на множестве U , называется *стандартной*.

Согласно [25, гл. II, § 7] множество U называется *стандартно-модельным* для теории ZF, если стандартная интерпретация $M \equiv (U, I)$ является моделью теории ZF.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. В теории ZF для множества U следующие утверждения равносильны:

- 1) U является супертранзитивным стандартно-модельным для теории ZF в ZF;
- 2) U является формульно-универсальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\vdash$ 2). Рассмотрим произвольную последовательность $s \equiv x_0, \dots, x_q, \dots$ элементов множества U и переводы некоторых аксиом и аксиомных схем теории ZF при стандартной интерпретации $M \equiv (U, I)$ на последовательности s .

Вместо $\theta_M[s]$ и $M \models \varphi[s]$ будем записывать θ^t и φ^t для термов θ и формул φ соответственно.

Для упрощения дальнейшего изложения рассмотрим сначала переводы некоторых простых формул. Пусть u и v – некоторые множества.

Формула $u \in v$ переводится в формулу $(u \in v)^t = (\langle u^t, v^t \rangle \in B)$. Обозначим последнюю формулу через γ . По определению эта формула равносильна формуле $(\exists x \exists y (x \in U \wedge y \in U \wedge \langle u^t, v^t \rangle = \langle x, y \rangle \wedge x \in y))$. Используя свойство упорядоченной пары, мы заключаем, что $u^t = x$ и $v^t = y$. Следовательно, из γ выводится формула $\delta \equiv (u^t \in v^t)$. По теореме дедукции $\gamma \Rightarrow \delta$. Обратно, рассмотрим формулу δ . В теории ZF доказывается, что для множеств u^t и v^t существует множество z такое, что $z = \langle u^t, v^t \rangle$. В силу логической аксиомной схемы **LAS3**, приведенной в книге [26, гл. III, § 1], из формулы δ выводится формула $(z = \langle u^t, v^t \rangle \Rightarrow u^t \in U \wedge v^t \in U \wedge z = \langle u^t, v^t \rangle \wedge u^t \in v^t)$. Поскольку формула $z = \langle u^t, v^t \rangle$ выводится из аксиом, то выводится формула $(u^t \in U \wedge v^t \in U \wedge z = \langle u^t, v^t \rangle \wedge u^t \in v^t)$. По логической аксиоме **LAS13** выводится формула $\exists x \exists y (x \in U \wedge y \in U \wedge z = \langle x, y \rangle \wedge x \in y)$, которая равносильна формуле $z \in B$ и, значит, формуле γ . По теореме дедукции $\delta \Rightarrow \gamma$. Таким образом, справедлива первая равносильность $(u \in v)^t \Leftrightarrow u^t \in v^t$.

Аналогично выводятся вторая равносильность $(v \subset w)^t \Leftrightarrow v^t \subset w^t$ и третья равносильность $(u = v)^t \Leftrightarrow u^t = v^t$.

Далее будем выписывать не буквенные переводы аксиом и аксиомных схем, а их равносильные варианты, которые получаются при использовании указанных равносильностей.

Аксиома **A1** переводится в формулу $\mathbf{A1}^t \Leftrightarrow \mathbf{A1}^U = \forall X \in U \forall Y \in U (\forall u \in U (u \in X \Leftrightarrow u \in Y) \Rightarrow X = Y)$.

Аксиома **A2** переводится в $\mathbf{A2}^t \Leftrightarrow \mathbf{A2}^U = \forall u \in U \forall v \in U \exists x \in U \forall z \in U (z \in x \Leftrightarrow z = u \vee z = v)$.

Аксиома **A4** переводится в $\mathbf{A4}^t \Leftrightarrow \mathbf{A4}^U = \forall X \in U \exists Y \in U \forall u \in U (u \in X \Leftrightarrow \exists z \in U (u \in z \wedge z \in X))$.

Аксиома **A5** переводится в $\mathbf{A5}^t \Leftrightarrow \mathbf{A5}^U = \forall X \in U \exists Y \in U \forall u \in U (u \subset X \Leftrightarrow u \in Y)$.

Аксиомная схема **AS6** переводится в формульную схему

$$\begin{aligned} \mathbf{AS6}^t &\Leftrightarrow \forall x \in U \forall y \in U \forall y' \in U (\varphi^\tau(x, y) \wedge \varphi^\tau(x, y') \Rightarrow y = y') \\ &\Rightarrow \forall X \in U \exists Y \in U \forall x \in U (x \in X \Rightarrow \forall y \in U (\varphi^\sigma(x, y) \Rightarrow y \in Y)), \end{aligned}$$

где через φ^τ и φ^σ обозначены формулы $M \models \varphi[s^\tau]$ и $M \models \varphi[s^\sigma]$, в которых через s^τ и s^σ обозначены соответствующие изменения последовательности s при переводе указанных выше кванторных надформул.

Аксиома **A7** переводится в формулу $\mathbf{A7}^t \Leftrightarrow \mathbf{A7}^U = \exists x \in U \forall z \in U (z \notin x)$.

Аксиома **A8** переводится в формулу $\mathbf{A8}^t \Leftrightarrow \mathbf{A8}^\tau \equiv \exists Y \in U (\emptyset^t \in Y \wedge \forall y \in U (y \in Y \Rightarrow (y \cup \{y\})^\tau \in Y))$, где:

- множество $\emptyset^t$ определяется из формулы $\mathbf{A7}^U$;
- множество $Z_1 \equiv Z_1(y) \equiv (y \cup \{y\})^\tau$ определяется из формулы $\exists Z_1 \in U \forall u \in U (u \in Z_1 \Leftrightarrow \exists z \in U (u \in z \wedge z \in \{y, \{y\}\}^\sigma))$;
- множество $Z_2 \equiv Z_2(y) \equiv \{y, \{y\}\}^\sigma$ определяется из формулы $\exists Z_2 \in U \forall u \in U (u \in Z_2 \Leftrightarrow u = y \vee u = \{y\}^\rho)$;
- множество $Z_3 \equiv Z_3(y) \equiv \{y\}^\rho$ определяется из формулы $\exists Z_3 \in U \forall u \in U (u \in Z_3 \Leftrightarrow u = y)$.

Поскольку M является моделью теории ZF, то все выписанные выше переводы являются выводимыми формулами в теории ZF.

Поэтому из формулы $\mathbf{A7}^U$ следует существование некоторого $x \in U$, который мы обозначим через $\emptyset^t$. Если $z \in U$, то из $\mathbf{A7}^U$ следует $z \notin x$. Пусть теперь $z \notin U$, и предположим, что $z \in x$. Тогда в силу транзитивности множества U мы получим $z \in U$, что противоречит условию. Значит, $z \notin x$. Таким образом, выводится $z \notin x$. По правилу обобщения выводится формула $\forall z (z \notin x)$, означающая, что $x = \emptyset$. Таким образом, $\emptyset^t = \emptyset$ и $\emptyset \in U$.

Проверим теперь, что если $y \in U$, то $Z_3 = \{y\}$. Пусть $u \in Z_3$. Так как $Z_3 \in U$ и U транзитивно, то $u \in U$. Если $u \in U$, то из приведенной выше формулы для Z_3 следует $u = y$. Поэтому $u \in \{y\}$. Значит, $Z_3 \subset \{y\}$. Обратно, пусть $u \in \{y\}$. Тогда $u = y$. Так как $y \in U$, то $u \in U$. Поэтому по той же формуле $u \in Z_3$. Значит, $\{y\} \subset Z_3$, откуда следует требуемое равенство. Это равенство приводит к исчезновению индекса ρ в формуле для Z_2 .

С помощью этого равенства докажем, что $Z_2 = \{y, \{y\}\}$. Пусть $u \in Z_2$. Тогда, как и выше, $u \in U$. Поэтому из приведенной выше формулы для Z_2 следует $u = y$ или $u \in \{y\}$. Поэтому $u \in \{y, \{y\}\}$. Значит, $Z_2 \subset \{y, \{y\}\}$. Обратно, пусть $u \in \{y, \{y\}\}$. Тогда $u = y \in U$ или $u = \{y\} = Z_3 \in U$. Поэтому в обоих случаях $u \in U$. Следовательно, по той же формуле $u \in Z_2$. Значит, $\{y, \{y\}\} \subset Z_2$, откуда следует требуемое равенство. Это равенство приводит к исчезновению индекса σ в формуле для Z_1 .

Проверим, наконец, что если $y \in U$, то $Z_1 = y \cup \{y\}$. Пусть $u \in Z_1$. Так как $Z_1 \in U$ и U транзитивно, то $u \in U$. Поэтому из формулы для Z_1 следует, что существует $z \in U$ такой, что $u \in z$ и $z \in \{y, \{y\}\}$. Значит, $u \in \cup \{y, \{y\}\} \equiv Z$, т.е. $Z_1 \subset Z$. Обратно, пусть $u \in Z$. Тогда существует $z \in \{y, \{y\}\}$ такой, что $u \in z$. Из $z = y \in U$ или $z = \{y\} = Z_3 \in U$ мы заключаем, что $z \in U$. Поэтому из упомянутой формулы следует $u \in Z_1$. Значит, $Z \subset Z_1$, откуда следует требуемое равенство. Это равенство приводит к исчезновению индекса τ в формуле $\mathbf{A8}^\tau$.

Из всего сказанного выше следует, что $\mathbf{A8}^\tau \equiv \exists Y \in U (\emptyset \in Y \wedge \forall y \in U (y \in Y \Rightarrow y \cup \{y\} \in Y))$. Если $y \in Y$, то из $Y \in U$ и транзитивности U следует $y \in U$. Тогда из этой формулы выводится $y \cup \{y\} \in Y$. По теореме дедукции и правилу обобщения выводится формула $\forall y \in Y (y \cup \{y\} \in Y)$. Таким образом, из $\mathbf{A8}^t$ выводится формула $\exists Y \in U (\emptyset \in Y \wedge \forall y \in Y (y \cup \{y\} \in Y))$, почти совпадающая с аксиомой бесконечности и утверждающая, что существует индуктивное множество $Y \in U$.

Используя полученные переводы, докажем, что множество U является формульно-универсальным.

Рассмотрим формулу $\mathbf{A2}^U$. Согласно этой формуле для любых $u, v \in U$ существует соответствующее множество $x \in U$. Если $z \in x$, то из транзитивности U следует $z \in U$. Поэтому из этой формулы выводится формула $z = u \vee z = v$. Если $z = u \vee z = v$, то $z \in U$, и поэтому из $\mathbf{A2}^U$ выводится формула $z \in x$. Так как $\mathbf{A2}^U$ выводится в ZF, то по теореме дедукции и правилу

обобщения выводится формула $\forall z(z \in x \Leftrightarrow z = u \vee z = v)$, означающая, что $x = \{u, v\}$. Поэтому $\{u, v\} \in U$, откуда $\{u\} \in U$ и $\langle u, v \rangle \in U$.

Рассмотрим формулу **A4**^U, согласно которой для любого $X \in U$ существует соответствующее множество $Y \in U$. Так же, как и выше, из транзитивности U следует, что $Y = \cup X$. Поэтому $\cup X \in U$, откуда $X, Y \in U$, и поэтому $X \cup Y \equiv \cup \{X, Y\} \in U$.

Рассмотрим формулу **A5**^U. Согласно этой формуле для любого $X \in U$ существует соответствующее множество $Y \in U$. Ясно, что $Y \subset \mathcal{P}(X)$. Пусть $y \in \mathcal{P}(X)$. Тогда $y \subset X \in U$ в силу кумулятивности U влечет $y \in U$. Следовательно, $Y = \mathcal{P}(X)$. Поэтому $\mathcal{P}(X) \in U$ и по теореме дедукции выводится формула $X \in U \Rightarrow \mathcal{P}(X) \in U$.

Если $X, Y \in U$, то из $X \times Y \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(X \cup Y)) \in U$ по свойству кумулятивности следует $X * Y \in U$.

Рассмотрим индуктивное множество $Y \in U$, существование которого было доказано выше. Так как ω является наименьшим из всех индуктивных множеств, то $\omega \subset Y$. Отсюда по свойству кумулятивности следует, что $\omega \subset U$.

Свойство 4) из определения формульно-универсального множества выполнено автоматически.

Таким образом, мы доказали, что 1) $\vdash$ 2).

2) $\vdash$ 1). Пусть U – формульно-универсальное множество. Согласно § 3 оно супертранзитивно. Рассмотрим стандартную интерпретацию $M \equiv (U, I)$ теории ZF. Выше мы провели перевод некоторых аксиом и аксиомных схем теории ZF при интерпретации M на последовательности s . Докажем, что они выводятся в ZF.

Рассмотрим формулу **A1**^U. Пусть $X, Y \in U$ и $\chi \equiv \forall u \in U(u \in X \Leftrightarrow u \in Y)$. Возьмем произвольное множество u . Если $u \in X$, то из транзитивности U следует $u \in U$, а тогда выводится $u \in Y$. Аналогично, из $u \in X$ выводится $u \in Y$. Поэтому по теореме дедукции и по правилу обобщения выводится $\forall u(u \in X \Leftrightarrow u \in Y)$. Согласно аксиоме объемности отсюда выводится равенство $X = Y$. По теореме дедукции в ZF выводится формула $\chi \Rightarrow X = Y$. Далее логическими средствами выводится **A1**^t.

Рассмотрим формулу **A2**^U. Пусть $u, v \in U$. По свойству квазиуниверсального множества имеет место $\{u, v\} \in U$. Из аксиомы пары следует, что $\forall z \in U(z \in \{u, v\} \Leftrightarrow z = u \vee z = v)$. Поэтому по **LAS13** выводится формула $\exists x \in U \forall z \in U(z \in x \Leftrightarrow z = u \vee z = v)$. Далее логическими средствами выводится формула **A2**^t.

Аксиомная схема выделения **AS3** переводится в формульную схему

$$\mathbf{AS3}^t \Leftrightarrow \forall X \in U \exists Y \in U \forall u \in U (u \in Y \Leftrightarrow u \in X \wedge \varphi^T(u)),$$

где Y не является свободной переменной формулы $\varphi(u)$, а через φ^T обозначена формула $M \models \varphi[s^T]$, в которой через s^T обозначено соответствующее изменение последовательности s при переводе указанных выше кванторных надформул $\forall x(\dots)$, $\exists Y(\dots)$ и $\forall u(\dots)$. Согласно аксиомной схеме выделения для $X \in U$ существует Y такой, что $\forall u \in U(u \in Y \Leftrightarrow u \in X \wedge \varphi^T(u))$. Так как $Y \subset X \in U$, то $Y \in U$. Значит, в теории ZF выводится **AS3**^t.

Аналогично выводимости **A2**^t проверяется выводимость **A4**^t и **A5**^t.

Проверим выводимость **AS6**^t. Обозначим формулу $\varphi^U(x, y, \vec{p}_M[s])$ через $\psi(x, y)$. Пусть имеет место формула α . Рассмотрим любое множество $X \in U$. Согласно аксиомной схеме выделения существует множество

$$F \equiv \{z \in U \mid \exists x, y \in U (z = \langle x, y \rangle \wedge \varphi^\sigma(x, y))\}.$$

Ясно, что $F \subset U * U$. Из транзитивности U следует, что $X \subset U$. Поэтому существует множество $Z \equiv F[X] \subset U$. Рассмотрим множество

$$G \equiv \{z \in U \mid \exists x, y \in U (z = \langle x, y \rangle \wedge \varphi^\sigma(x, y) \wedge x \in X)\} = F \mid X \subset X \times Z.$$

Пусть $x \in X \subset U$. Если $x \notin \text{dom } G$, то $G\langle x \rangle = \emptyset \in U$. Пусть $x \in \text{dom } G$, т. е. $G\langle x \rangle \neq \emptyset$. Если $y, y' \in G\langle x \rangle \subset U$, то имеет место $\varphi^\sigma(x, y) \wedge \varphi^\sigma(x, y')$, или, более точно, $\varphi^\sigma(x, y, X, Y) \wedge \varphi^\sigma(x, y', X, Y)$, поскольку X и Y могут быть свободными переменными формулы φ^σ . Так как $\varphi^\tau(x, y) = \varphi^\sigma(x, y, X \parallel X_M[s], Y \parallel Y_M[s])$ и аналогично для y' , то в силу **LAS11** имеет место $\varphi^\tau(x, y) \wedge \varphi^\tau(x, y')$. Поэтому из формулы α следует $y = y'$. Значит, $G\langle x \rangle = \{y\} \in U$. Таким образом, $G\langle x \rangle \in U$ для любого $x \in X$. Отсюда следует, что $Y_0 \equiv \text{rng } G = \bigcup \{G\langle x \rangle \mid x \in X\} \in U$.

Если $x \in X \subset U$, $y \in U$ и $\varphi^\sigma(x, y)$, то $\langle x, y \rangle \in G$ влечет $y \in Y_0$. Это означает, что из формулы α выводится формула β . По теореме дедукции выводится формула $\alpha \Rightarrow \beta$ и, значит, схема **AS6^t**.

Мы имеем $\emptyset \in U$. Отсюда и из аксиомы пустого множества выводится **A7^t**.

Рассмотрим формулу **A8^t** и множество $\omega \in U$. Из сказанного выше следует, что $\emptyset^t = \emptyset \in \omega$. Пусть $y \in U$ и $y \in \omega$. Тогда так же, как и выше, проверяется, что $Z_3 = \{y\}$, $Z_2 = \{y, \{y\}\}$ и $Z_1 = y \cup \{y\} \in \omega$. Далее логическими средствами выводится формула $(\emptyset^t \in \omega \wedge \forall y \in U (y \in \omega \Rightarrow (y \cup \{y\})^\tau \in \omega))$ и, следовательно, формула **A8^t**.

Аксиома регулярности **A9** переводится в формулу

$$\mathbf{A9}^t \Leftrightarrow \mathbf{A9}^\tau \equiv \forall X \in U (X \neq \emptyset^t \Rightarrow \exists x \in U (x \in X \wedge (x \cap X)^\tau = \emptyset^t)),$$

где:

- множество $\emptyset^t$ определяется из формулы **A7^U** и, как было установлено выше, совпадает с пустым множеством $\emptyset$;
- множество $Z \equiv (x \cap X)^\tau$ определяется из формулы $\exists Z \in U \forall u \in U (u \in Z \Leftrightarrow u \in x \wedge u \in X)$.

Проверим, что если $X \in U$ и $x \in U$, то $Z = x \cap X$. Пусть $u \in Z$. Так как $Z \in U$ и U транзитивно, то $u \in U$. Поэтому из формулы для Z следует, что $u \in x \wedge u \in X$, т. е. $u \in x \cap X$. Значит, $Z \subset x \cap X$. Обратно, пусть $u \in x \cap X$, т. е. $u \in x \wedge u \in X$. В силу транзитивности имеем $u \in U$. Поэтому из упомянутой формулы следует $u \in Z$. Значит, $x \cap X \subset Z$, что и доказывает требуемое равенство. Это равенство приводит к исчезновению индекса τ в формуле **A9^t**.

Пусть $X \in U$ и $X \neq \emptyset^t = \emptyset$. По аксиоме регулярности существует $x \in X$ такой, что $x \cap X = \emptyset$. В силу транзитивности имеем $x \in U$. Отсюда логическими средствами выводится **A9^t**.

Наконец, аксиома выбора **A10** переводится в формулу

$$\mathbf{A10}^t \Leftrightarrow \mathbf{A10}^\tau \equiv \forall X \in U (X \neq \emptyset^t \Rightarrow \exists z \in U ((z \Leftarrow \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow X)^\tau \wedge \forall Y \in U (Y \in (\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\})^\sigma \Rightarrow z(Y)^\sigma \in Y))),$$

где:

- множество $Z_1 \equiv Z_1(X) \equiv (\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\})^\sigma$ определяется из формулы $\exists Z_1 \in U \forall u \in U (u \in Z_1 \Leftrightarrow u \in \mathcal{P}(X)^\rho \wedge u \notin \{\emptyset\}^\rho)$;
- множество $Z_2 \equiv z(Y)^\sigma$ определяется из формулы $\langle Y, Z_2 \rangle^\rho \in z$;
- через $\varphi^\tau \equiv (z \Leftarrow \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow X)^\tau$ обозначается формула $M \models \varphi[s^\tau]$, в которой через s^τ обозначено соответствующее изменение последовательности s при переводе указанных выше кванторных надформул $\forall X(\dots)$ и $\exists z(\dots)$.

Зафиксируем условия $X \in U$ и $X \neq \emptyset^t = \emptyset \in U$. Выше было установлено, что отсюда следует $\mathcal{P}(X)^\rho = \mathcal{P}(X)$ и $\{\emptyset\}^\rho = \{\emptyset\}$. Это приводит к исчезновению индекса ρ в формуле для Z_1 .

Проверим, что $Z_1 = \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \equiv Z$. Пусть $u \in Z_1$. Поскольку $Z_1 \in U$ и U транзитивно, то $u \in U$. Поэтому из формулы для Z_1 следует, что $y \in Z$. Значит, $Z_1 \subset Z$. Обратно, пусть $u \in Z$. Так как $\mathcal{P}(X) \in U$, то в силу транзитивности $\mathcal{P}(X) \subset U$. Отсюда следует, что $u \in U$. Поэтому из упомянутой формулы следует $u \in Z_1$. Значит, $Z \subset Z_1$, что и доказывает требуемое равенство. Это приводит к замене Z_1 на Z в формуле **A10**^r.

Рассмотрим формулу $\varphi \equiv (z \Leftarrow Z \rightarrow X)$. Она является конъюнкцией трех формул: $\varphi_1 \equiv (z \subset Z \times X)$, $\varphi_2 \equiv (\text{dom } z = Z)$ и $\varphi_3 \equiv (\forall x(x \in Z \Rightarrow \forall y(y \in X \Rightarrow \forall y'(y' \in X \Rightarrow (\langle x, y \rangle \in z \wedge \langle x, y' \rangle \in z \Rightarrow y = y')))))$.

Поэтому $\varphi^\tau = \varphi_1^\tau \wedge \varphi_2^\tau \wedge \varphi_3^\tau$. Так как $\varphi_1 = (\forall u(u \in z \Rightarrow \exists x \exists y(x \in Z \wedge y \in X \wedge u = \langle x, y \rangle)))$, то $\varphi_1^\tau \Leftrightarrow (\forall u \in U(u \in z \Rightarrow \exists x \in U \exists y \in U(x \in Z_1 \wedge y \in X \wedge u = \langle x, y \rangle^\sigma)))$. Аналогично, из $\varphi_2 = (\forall x(x \in Z \Rightarrow \exists y(y \in X \wedge \langle x, y \rangle \in z))$ следует $\varphi_2^\tau \Leftrightarrow (\forall x \in U(x \in Z_1 \Rightarrow \exists y \in U(y \in X \wedge \langle x, y \rangle^\sigma \in z)))$.

Наконец, $\varphi_3^\tau \Leftrightarrow (\forall x \in U(x \in Z_1 \Rightarrow \forall y \in U(y \in X \Rightarrow \forall y' \in U(y' \in X \Rightarrow (\langle x, y \rangle^\sigma \in z \wedge \langle x, y' \rangle^\sigma \in z \Rightarrow y = y')))))$.

В силу свойства транзитивности для x, y и y' в формулах φ_1^τ , φ_2^τ и φ_3^τ справедливо $x, y, y' \in U$. Поэтому по доказанному выше в этих формулах имеют место равенства $Z_1 = Z$, $\langle x, y \rangle^\sigma = \langle x, y \rangle$ и $\langle x, y' \rangle^\sigma = \langle x, y' \rangle$. Отсюда следует, что формулы φ_1^τ , φ_2^τ и φ_3^τ отличаются от формул φ_1 , φ_2 и φ_3 соответственно только ограниченными кванторными приставками $\forall \dots \in U$ и $\exists \dots \in U$.

Для X по аксиоме выбора существует z такое, что $\chi \equiv (z \Leftarrow Z \rightarrow X) \wedge \forall Y(Y \in Z \Rightarrow z(Y) \in Y)$.

Значит, выводится формула $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$ и, следовательно, выводятся формулы φ_1 , φ_2 и φ_3 .

Пусть $u \in U$ и $u \in z$. Тогда из формулы φ_1 выводится, что существуют $x \in Z$ и $y \in X$ такие, что $u = \langle x, y \rangle$. Так как $x \in Z \in U$ и $y \in X \in U$, то по свойству транзитивности $x, y \in U$. Это значит, что при данных условиях $u \in U$ и $u \in z$ выводится формула $\exists x \in U \exists y \in U(x \in Z_1 \wedge y \in X \wedge u = \langle x, y \rangle^\sigma)$. Применяя два раза теорему дедукции и правила вывода, выводим формулу φ_1^τ .

Пусть $x \in U$ и $x \in Z_1 = Z$. Тогда из формулы φ_2 выводится, что для x существуют $y \in X$ такой, что $\langle x, y \rangle \in z$. Из $y \in X \in U$ следует $y \in U$. Это значит, что при данных условиях $x \in U$ и $x \in Z_1$ выводится формула $\exists y \in U(y \in X \wedge \langle x, y \rangle^\sigma \in z)$. Отсюда, как и в предыдущем абзаце, мы выводим формулу φ_2^τ .

Пусть $x \in U$, $x \in Z_1 = Z$, $y \in U$, $y \in X$, $y' \in U$, $y' \in X$, $\langle x, y \rangle \in z$ и $\langle x, y' \rangle \in z$. Тогда из формулы φ_3 выводится $y = y'$. Применяя несколько раз поочередно теорему дедукции и правила вывода, мы выводим формулу φ_3^τ .

Таким образом, выводится формула φ^τ .

Поскольку $z \Leftarrow Z \rightarrow X$, то $z\langle Y \rangle = \{z(Y)\}$. Если $Y \in U$ и $Y \in Z_1 = Z$, то $Z_2 \in U$ влечет $\langle Y, Z_2 \rangle^\rho = \langle Y, Z_2 \rangle$. Тогда из $\langle Y, Z_2 \rangle \in z$ следует $Z_2 \in z\langle Y \rangle$, откуда $Z_2 = z(Y)$. Поэтому для функции z условия $Y \in U$ и $Y \in Z_1$ влекут $Z_2 = z(Y) \in Y$.

Так как $Z = Z_1 \in U$ и $X \in U$, то $Z \times X \in U$. Из $z \subset Z \times X$ по лемме 15 следует $z \in U$.

Все это означает, что из аксиомы выбора выводится существование объекта z , удовлетворяющего формуле χ , из которой выводится формула $\xi \equiv (\varphi^\tau \wedge \forall Y \in U(Y \in Z_1 \Rightarrow Z_2 \in Y))$. Тем самым из зафиксированных условий выводится формула $\exists z \in U\xi$. Применяя несколько раз поочередно теорему дедукции и правило обобщения, мы в результате выводим формулу **A10**^t.

Таким образом, M является супертранзитивным стандартно-модельным множеством для теории ZF.

СЛЕДСТВИЕ 1. Любое формульно-недостижимое кумулятивное множество V_κ является супертранзитивным стандартно-модельным для теории ZF.

ТЕОРЕМА 5. В теории ZF для множества U следующие утверждения равносильны:

- 1) $U = V_\kappa$ для формульно-недостижимого кардинального числа $\kappa = |U| = \sup(\mathbf{On} \cap U)$;
- 2) U является супертранзитивным стандартно-модельным множеством для теории ZF.

Эта теорема дает каноническую форму супертранзитивных стандартно-модельных множеств теории множеств ZF. Тем самым, описываются все натуральные модели этой теории.

Список литературы

1. A. Fraenkel, “Zu den Grundlagen der Cantor–Zermeloschen Mengenlehre”, *Math. Ann.*, **86**:3–4 (1922), 230–237.
2. К. Гёдель, “Совместимые аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств”, *УМН*, **3**:1 (1948), 96–149; пер. с англ.: K. Gödel, *The consistency of the continuum hypothesis*, Ann. of Math. Stud., **3**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1940.
3. D. Mirimanoff, “Les antinomies de Russel et de Burali-Forti et le problème fondamental de la théorie des ensembles”, *Enseign. Math.*, **19** (1917), 37–52.
4. J. von Neumann, “Über eine Widerspruchsfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre”, *J. Reine Angew. Math.*, **160** (1929), 227–241.
5. A. Tarski, “Notions of proper models for set theories”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **62** (1956), 601.
6. R. Montague, L. R. Vaught, “Natural models of set theories”, *Fund. Math.*, **47** (1959), 219–242.
7. E. Zermelo, “Über Grenzzahlen und Mengenbereiche. Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre”, *Fund. Math.*, **16** (1930), 29–47.
8. W. Sierpinski, A. Tarski, “Sur une propriété caractéristique des nombres inaccessibles”, *Fund. Math.*, **15** (1930), 292–300.
9. J. C. Shepherdson, “Inner models for set theory”, part I, *J. Symbolic Logic*, **16**:3 (1951), 161–190; part II, **17**:4 (1952), 225–237; part III, **18**:2 (1953), 145–167.
10. A. Kanamori, *The higher infinite: Large cardinals in set theory from their beginnings*, Perspectives in Mathematical Logic, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
11. C. Ehresmann, “Guttungen von lokalen Strukturen”, *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.*, **60** (1957), 49–77.
12. P. Dedecker, “Introduction aux structures locales”, *Centre Belge Rech. Math., Colloque Géom. Différ. Globale* (Bruxelles, 1958), 1959, 103–135.
13. J. Sonner, “On the formal definition of categories”, *Math. Z.*, **80**:1 (1962), 163–176.

14. P. Gabriel, “Des catégories abéliennes”, *Bull. Soc. Math. France*, **90** (1962), 323–448.
15. С. Маклейн, *Категории для работающего математика*, Физматлит, М., 2004; пер. с англ.: S. MacLane, *Categories for the working mathematician*, Grad. Texts in Math., **5**, Springer-Verlag, New York, 1971.
16. T. E. Forster, *Set theory with a universal set. Exploring an untyped universe*, Oxford Logic Guides, **31**, The Clarendon Press, Oxford Univ. Press, New York, 1995.
17. M. R. Holmes, *Elementary set theory with a universal set*, Cahiers du Centre de Logique, **10**, Université Catholique de Louvain, Département de Philosophie, Louvain-la-Neuve, 1998.
18. A. Tarski, “Über unerreichbare Kardinalzahlen”, *Fund. Math.*, **30** (1938), 68–89.
19. К. Куратовский, А. Мостовский, *Теория множеств*, Мир, М., 1970; пер. с англ.: K. Kuratowski, A. Mostowski, *Set theory*, PWN – Polish Sci. Publ., Warszawa, 1968.
20. E. I. Bunina, V. K. Zakharov, “Universal sets, Tarski sets, and inaccessible von Neumann sets”, *Abstracts of the International Meeting “Second St. Petersburg Days of Logic and Computability”*, St. Petersburg, 2003, 19–21.
21. Е. И. Бунина, В. К. Захаров, “Канонический вид супертранзитивных стандартных моделей в теории множеств Цермело–Френкеля”, *УМН*, **58:4** (2003), 143–144; англ. пер.: E. I. Bunina, V. K. Zakharov, “A canonical form for supertransitive standard models in Zermelo–Fraenkel set theory”, *Russian Math. Surveys*, **58:4** (2003), 782–783.
22. Т. Йех, *Теория множеств и метод форсинга*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: T. J. Jech, *Lectures in set theory with particular emphasis on the method of forcing*, Lecture Notes in Math., **217**, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
23. T. Jech, *Set theory*, The third millennium edition, revised and expanded, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, Berlin, 2003.
24. Дж. Шенфилд, *Математическая логика*, Математическая логика и основания математики, Наука, М., 1975; пер. с англ.: J. R. Shönfield, *Mathematical logic*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1967.
25. П. Дж. Коэн, *Теория множеств и континуум-гипотеза*, Мир, М., 1969; пер. с англ.: P. J. Cohen, *Set theory and the continuum hypothesis*, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1966.
26. А. Н. Колмогоров, А. Г. Драгагин, *Математическая логика*, УРСС, М., 2004.

Е. И. Бунина (E. I. Bunina)
 Механико-математический факультет
 Центр новых информационных технологий
 Московского государственного университета
 им. М. В. Ломоносова
E-mail: helenbunina@yandex.ru

Поступило в редакцию
 07.12.2004

В. К. Захаров (V. K. Zakharov)
 Механико-математический факультет
 Центр новых информационных технологий
 Московского государственного университета
 им. М. В. Ломоносова
E-mail: zakharov_valeriy@list.ru