Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Лакаев, Ш. Ю. Холматов, Асимптотика собственных значений дискретного оператора Шрёдингера с контактным потенциалом, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2012, том 76, выпуск 5, 99–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7330>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 14:51:51

УДК 517.984.46

С. Н. Лакаев, Ш. Ю. Холматов

Асимптотика собственных значений дискретного оператора Шрёдингера с контактными потенциалом

Рассмотрено семейство дискретных операторов Шрёдингера $H_\mu(k)$, $k \in \mathfrak{G} \subset \mathbb{T}^d$. Эти операторы ассоциируются с гамильтонианом H_μ системы двух одинаковых квантовых частиц (бозонов), движущихся на d -мерной решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$, и взаимодействующих с помощью парного контактного потенциала притяжения $\mu > 0$. Доказано, что для любого $k \in \mathfrak{G}$ существует число $\mu(k) > 0$ – пороговое значение константы связи, и при $\mu > \mu(k)$ оператор $H_\mu(k)$, $k \in \mathfrak{G} \subset \mathbb{T}^d$, имеет единственное собственное значение $z(\mu, k)$, лежащее левее существенного спектра. Найдены асимптотики $z(\mu, k)$ при $\mu \rightarrow \mu(k)$ и $\mu \rightarrow +\infty$, а также при $k \rightarrow k^*$ для любого значения квазиимпульса $k^* = k^*(\mu)$, лежащего на многообразии $\{k \in \mathfrak{G} : \mu(k) = \mu\}$, где $\mu \in (\inf_{k \in \mathfrak{G}} \mu(k), \sup_{k \in \mathfrak{G}} \mu(k))$.

Библиография: 19 наименований.

Ключевые слова: дискретный оператор Шрёдингера, гамильтониан системы двух частиц, контактный потенциал, собственное значение, асимптотика.

§ 1. Введение

Исследование двухчастичных дискретных операторов Шрёдингера, в отличие от непрерывного случая, когда отделяется движение центра масс, сводится к изучению одночастичных операторов Шрёдингера благодаря трансляционной инвариантности двухчастичного гамильтониана H_μ : гильбертово пространство $\ell_2((\mathbb{Z}^d)^2)$ разлагается в прямой (непрерывный) интеграл фон Неймана, ассоциированный с представлением абелевой (дискретной) группы $\mathbb{Z}^d$, и тогда двухчастичный гамильтониан H_μ (см. (2.2)) разлагается в прямой (непрерывный) интеграл фон Неймана [1], т. е.

$$H_\mu = \int_{\mathbb{T}^d} \oplus H_\mu(k) dk,$$

где $k \in \mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / (2\pi\mathbb{Z})^d$.

В отличие от непрерывного случая, соответствующие слойные операторы $H_\mu(k)$, ассоциированные с разложением прямого интеграла, параметрически зависят от квазиимпульса $k \in \mathbb{T}^d$. В результате благодаря потере сферической симметричности проблемы спектры семейства $H_\mu(k)$ оказываются довольно чувствительными к изменению квазиимпульса k .

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Узбекистан.

В настоящей работе рассматривается семейство дискретных операторов Шрёдингера $H_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, ассоциированное с гамильтонианом H_μ системы двух одинаковых квантовых частиц, движущихся на d -мерной решетке $\mathbb{Z}^d$, где $d \geq 3$, и взаимодействующих с помощью парного контактного потенциала $\mu > 0$.

В работах [2]–[5] для семейства непрерывных и дискретных операторов Шрёдингера $H = -\Delta + \lambda V$, а также для обобщенной модели Фридрихса [6], [7] изучен случай, когда существует $\lambda_0 > 0$ и при $\lambda \rightarrow \lambda_0$, $\lambda > \lambda_0$, некоторое отрицательное собственное значение $e(\lambda)$ стремится к нулю, т. е. при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ собственное значение *поглощается* непрерывным спектром, и, наоборот, для любого $\varrho > 0$ и при $\lambda \rightarrow \lambda_0 + \varrho$, $\lambda < \lambda_0 + \varrho$, непрерывный спектр *порождает* новое собственное значение. Назовем число λ_0 *пороговым значением константы связи*.

Аналогичным исследованиям спектра двухчастичных связанных состояний трансфер-матриц довольно широкого класса гиббсовских полей при высокой температуре посвящены работы [8], [9].

Примечательно, что в [2] получено сходящееся разложение собственного значения $e(\lambda)$ по некоторым параметрам, которые малы при малых $\lambda - \lambda_0$, где λ_0 – пороговое значение константы связи.

Пороговое значение константы связи является важным инструментом не только при исследовании двухчастичных непрерывных операторов Шрёдингера [2], но и при изучении существования трехчастичных связанных состояний гамильтонианов системы трех частиц, движущихся в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ и взаимодействующих с помощью парных короткодействующих потенциалов, в частности, для эффекта Ефимова [10]–[14].

В случае дискретных операторов Шрёдингера $H_\mu^{(3)}(K)$, $K \in \mathbb{T}^3$, ассоциированных с гамильтонианом $H_\mu^{(3)}$ системы трех частиц, движущихся на $\mathbb{Z}^3$ и взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения $\mu > 0$, следующее явление также тесно связано с пороговым значением $\mu(0) > 0$ константы связи $\mu > 0$ дискретного двухчастичного оператора Шрёдингера $H_\mu(0)$: при $\mu = \mu(0)$ соответствующий трехчастичный оператор Шрёдингера $H_{\mu(0)}^{(3)}(0)$ имеет бесконечное число собственных значений, однако оператор $H_{\mu(0)}^{(3)}(K)$, $K \neq 0$, имеет только конечное число собственных значений [10], [14].

В известной теореме Като–Реллиха (см. [15, теорема XII.8], [16]) утверждается, что если в некотором аналитическом семействе операторов H_λ , $\lambda \in D \subset \mathbb{C}$, где D – открытое множество, оператор H_{λ_0} , $\lambda_0 \in D$, имеет изолированное невырожденное собственное значение E_0 , то в достаточно малой окрестности точки λ_0 оператор H_λ имеет изолированное невырожденное собственное значение $E(\lambda)$, аналитическое вблизи $\lambda = \lambda_0$.

В настоящей работе мы докажем, что для любого $k \in \mathfrak{G} \subset \mathbb{T}^d$, $d \geq 3$, где $\mathfrak{G} \subset \mathbb{T}^d$ – некоторая область, существует пороговое значение $\mu(k) > 0$ константы связи $\mu > 0$ такое, что при всех $\mu > \mu(k)$ оператор $H_\mu(k)$ имеет единственное собственное значение $z(\mu, k)$, лежащее левее существенного спектра, а при $0 < \mu < \mu(k)$ он не имеет собственного значения. Отметим, что в [2] существование порогового значения $\lambda_0 > 0$ константы связи $\lambda > 0$ предполагалось.

Как и в [2], возникают вопросы:

а) при фиксированном $k \in \mathfrak{G} \subset \mathbb{T}^d$ является ли функция $z(\mu, k)$ аналитической в $\mu = \mu(k)$, и даже если сингулярной, существует ли некоторое ее разложение с членами, подобными $(\mu - \mu(k))^\alpha$, $\alpha > 0$?

б) каким образом $z(\mu, k)$ стремится к левому краю существенного спектра $\inf \sigma_{\text{ess}}(H_\mu(k))$ при $\mu \rightarrow \mu(k) + 0$?

Более того, нас интересует поведение $\inf_k z(\mu, k)$ при $\mu \rightarrow +\infty$.

Одним из различий между решетчатыми и непрерывными операторами Шрёдингера является то, что решетчатый оператор Шрёдингера строго зависит от квазиимпульса системы $k \in \mathbb{T}^d$. Для фиксированного $\mu > 0$ изучение $\mu(k)$ как функции, определенной на $\mathfrak{G} \subset \mathbb{T}^d$, приведет к следующему разбиению $\mathfrak{G}$:

$$\mathfrak{G} = S_{<}(\mu) \cup S_{= }(\mu) \cup S_{>}(\mu),$$

где $S_{<}(\mu)$ – множество значений $k \in \mathfrak{G}$, в которых оператор $H_\mu(k)$ имеет единственное собственное значение, $S_{= }(\mu)$ – множество тех значений, в которых нижний порог существенного спектра является либо виртуальным уровнем, либо собственным значением оператора $H_\mu(k)$, а $S_{>}(\mu)$ – множество значений $k \in \mathfrak{G}$, в которых $H_\mu(k)$ не имеет собственного значения (см. теорему 3.3).

Очевидно, что множества $S_{<}(\mu^*)$, $S_{= }(\mu^*)$ и $S_{>}(\mu^*)$ непусты при любом значении $\mu^* \in (\inf \mu(k), \sup \mu(k))$.

Семейство $H_{\mu^*}(k)$, $k \in S_{>}(\mu^*)$, является аналитическим в $S_{<}(\mu^*)$, следовательно, по теореме Като–Реллиха собственное значение $z(\mu^*, k)$ является аналитической функцией в $S_{<}(\mu^*)$. Однако если $k \in S_{= }(\mu^*)$, то мы не можем утверждать даже существование собственного значения. Поэтому получена также асимптотика собственного значения $z(\mu^*, k)$ при стремлении $k \in S_{<}(\mu^*)$ к граничной точке $k^* \in S_{= }(\mu^*)$ области $S_{<}(\mu^*)$.

Отметим, что порядок этой асимптотики зависит не только от k^* , но и от размерности d тора $\mathbb{T}^d$ и одночастичного дисперсионного соотношения $\varepsilon(\cdot)$ (см. замечание 3.7).

В случае решетчатого лапласиана, т. е. когда функция $\varepsilon(\cdot)$ имеет вид

$$\varepsilon(q) = \sum_{i=1}^d (1 - \cos q_i),$$

аналогичные результаты получены в [17] для семейства дискретных операторов Шрёдингера $H_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, ассоциированных с гамильтонианом H_μ системы двух отталкивающихся частиц со взаимодействием $\mu < 0$.

§ 2. Предварительные сведения

2.1. Гильбертово пространство k -четных и k -нечетных функций.

Пусть $\mathbb{T}^d$ – d -мерный тор, т. е. куб $(-\pi, \pi]^d$ с соответствующим отождествлением противоположных граней. Он рассматривается как абелева группа, в которой операции сложения и умножения на вещественное число введены как операции сложения и умножения на вещественное число в $\mathbb{R}^d$ по модулю $(2\pi\mathbb{Z})^d$, а $d\eta$ – мера Хаара, введенная на торе $\mathbb{T}^d$.

Пусть $L_2(\mathbb{T}^d, d\eta)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на $\mathbb{T}^d$.

Для фиксированного $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{T}^d$ рассмотрим подпространство $L_2^{e,k}(\mathbb{T}^d)$ всех функций f из $L_2(\mathbb{T}^d, d\eta)$, удовлетворяющих условию

$$f(p) = f(k - p) \quad (2.1)$$

для почти всех $p \in \mathbb{T}^d$. Функцию, удовлетворяющую условию (2.1), назовем *k-четной функцией*.

Отметим, что если $f(\cdot)$ удовлетворяет условию $f(p) = f(k - p)$, то для ее коэффициента Фурье $\hat{f}(x)$, $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d$, выполняется соотношение $\hat{f}(x) = e^{-i(k,x)} \hat{f}(-x)$, где $(k, x) = k_1 x_1 + \dots + k_d x_d$.

Таким же образом определяется замкнутое подпространство *k-нечетных функций* $L_2^{o,k}(\mathbb{T}^d)$ в $L_2(\mathbb{T}^d, d\eta)$, удовлетворяющих условию $f(p) = -f(k - p)$ для почти всех $p \in \mathbb{T}^d$. В этом случае коэффициент Фурье $\hat{f}(x)$, $x \in \mathbb{Z}^d$, удовлетворяет соотношению $\hat{f}(x) = -e^{-i(k,x)} \hat{f}(-x)$.

Очевидно, что ортогональным дополнением подпространства *k-четных функций* является подпространство *k-нечетных функций*.

2.2. Дискретный оператор Шрёдингера $H_\mu(k)$. Пусть $L_2((\mathbb{T}^d)^2, d\eta \times d\eta)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на $(\mathbb{T}^d)^2$, и $L_2^{(s)}((\mathbb{T}^d)^2) \subset L_2((\mathbb{T}^d)^2, d\eta \times d\eta)$ – подпространство симметричных функций.

В импульсном представлении двухчастичный гамильтониан, ассоциированный с системой двух одинаковых частиц, определяется как ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $L_2^{(s)}((\mathbb{T}^d)^2)$:

$$H_\mu = H_0 - \mu \mathbf{v}, \quad (2.2)$$

где

$$(H_0 f)(k_1, k_2) = (\varepsilon(k_1) + \varepsilon(k_2)) f(k_1, k_2),$$

$$(\mathbf{v} f)(k_1, k_2) = \int_{(\mathbb{T}^d)^2} \delta(k_1 + k_2 - q_1 - q_2) f(q_1, q_2) d\eta \times d\eta, \quad f \in L_2^{(s)}((\mathbb{T}^d)^2),$$

и $\delta(k)$ – дельта-функция Дирака.

Далее везде предположим, что одночастичное дисперсионное соотношение $\varepsilon(\cdot)$ удовлетворяет следующую условию.

УСЛОВИЕ 2.1. Функция $\varepsilon(\cdot)$ вещественно-аналитична на $\mathbb{T}^d$ и имеет единственный невырожденный минимум при $q = q_0 \in \mathbb{T}^d$.

Пусть $\{U_s, s \in \mathbb{Z}^d\}$ – унитарное представление абелевой группы $\mathbb{Z}^d$ в гильбертовом пространстве $L_2^s((\mathbb{T}^d)^2)$. Унитарный оператор U_s , $s \in \mathbb{Z}^d$, действует по формуле

$$(U_s f)(k_1, k_2) = \exp\{-i(s, k_1 + k_2)\} f(k_1, k_2), \quad f \in L_2^s((\mathbb{T}^d)^2). \quad (2.3)$$

Для каждого $k \in \mathbb{T}^d$ введем многообразие

$$F_k = \{(k_1, k - k_1) \in (\mathbb{T}^d)^2 : k_1 \in \mathbb{T}^d, k - k_1 \in \mathbb{T}^d\}.$$

Отображение

$$\pi_k : F_k \rightarrow \mathbb{T}^d, \quad \pi_k((k_1, k - k_1)) = k_1,$$

биективно отображает $F_k \subset (\mathbb{T}^d)^2$ на $\mathbb{T}^d$ с обратным отображением

$$(\pi_k)^{-1}: \mathbb{T}^d \rightarrow F_k, \quad (\pi_k)^{-1}(k_1) = (k_1, k - k_1),$$

т. е. d -мерное многообразие F_k , $k \in \mathbb{T}^d$, изоморфно $\mathbb{T}^d$.

Гильбертово пространство $L_2^s((\mathbb{T}^d)^2)$ разлагается в следующий прямой интеграл:

$$L_2^{(s)}((\mathbb{T}^d)^2) = \int_{k \in \mathbb{T}^d} \oplus L_2^{e,k}(\mathbb{T}^d) d\eta,$$

и гамильтониан H_μ коммутирует с группой $\{U_s, s \in \mathbb{Z}^d\}$. Таким образом, оператор H_μ разлагается в следующий прямой операторный интеграл [2], [14]:

$$H_\mu = \int_{k \in \mathbb{T}^d} \oplus H_\mu(k) d\eta.$$

Значит, оператор $H_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, действует по формуле $H_\mu(k) = H_0(k) - \mu v$. Здесь невозмущенный оператор $H_0(k)$ является оператором умножения на функцию

$$\mathcal{E}_k(q) = \varepsilon(q) + \varepsilon(k - q),$$

а возмущающий оператор v – интегральным оператором ранга один:

$$(vf)(q) = \int_{\mathbb{T}^d} f(s) d\eta(s), \quad f \in L_2^{e,k}(\mathbb{T}^d),$$

и $\mu > 0$ – константа связи.

Заметим, что для любого $k \in \mathbb{T}^d$ подпространство $L_2^{e,k}(\mathbb{T}^d)$ является инвариантным относительно оператора $H_\mu(k)$.

Существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(H_\mu(k))$ оператора $H_\mu(k)$ совпадает со спектром оператора $H_0(k)$:

$$\sigma_{\text{ess}}(H_\mu(k)) = \sigma(H_0(k)) = [\mathcal{E}_{\min}(k), \mathcal{E}_{\max}(k)],$$

где

$$\mathcal{E}_{\min}(k) = \min_{p \in \mathbb{T}^d} \mathcal{E}_k(p), \quad \mathcal{E}_{\max}(k) = \max_{p \in \mathbb{T}^d} \mathcal{E}_k(p).$$

Оператор $H_\mu(k)$ имеет не более одного собственного значения $z(\mu, k)$, лежащего левее $\mathcal{E}_{\min}(k) = \inf \sigma_{\text{ess}}(H_\mu(k))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. В силу условия 2.1 существуют открытое связанное множество $\mathfrak{G} \subset \mathbb{T}^d$, содержащее точку $k_0 = 2q_0 \in \mathbb{T}^d$, и аналитическая в нем функция $q_0(\cdot)$ такие, что для любого $k \in \mathfrak{G}$ функция $\mathcal{E}_k(\cdot)$ имеет единственный невырожденный минимум $q_0(k) \in \mathbb{T}^d$ [4]. Тогда в силу леммы Морса с параметром существует аналитическое отображение $q = \varphi(k, y)$ некоторого шара $W_\gamma(0) \subset \mathbb{R}^d$ с радиусом $\gamma > 0$ и центром в $y = 0$ на некоторую окрестность $U(q_0(k))$ точки $q = q_0(k)$ такое, что для любого $q \in U(q_0(k))$

$$\mathcal{E}_k(q) = \mathcal{E}_k(\varphi(k, y)) = y_1^2 + \cdots + y_d^2 + \mathcal{E}_{\min}(k) = y^2 + \mathcal{E}_{\min}(k).$$

Более того, якобиан $J(\varphi(k, y), k)$ отображения $q = \varphi(k, y)$ удовлетворяет условию $J(\varphi(k, 0), k) = J(q_0(k), k) > 0$ при всех $k \in \mathfrak{G}$. Кроме того, из аналитичности $q_0(k)$ и $\mathcal{E}_k(q)$ на $\mathfrak{G}$ следует аналитичность $\mathcal{E}_{\min}(k) = \mathcal{E}_k(q_0(k))$ в $\mathfrak{G}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Если функция $\varepsilon(\cdot)$ имеет вид

$$\varepsilon(q) = \sum_{j=1}^d (1 - \cos q_j),$$

то она имеет единственный невырожденный минимум в $q_0 = 0 \in \mathbb{T}^d$. В этом случае дисперсионное соотношение $\mathcal{E}_k(q)$ двух частиц представляется в виде

$$\mathcal{E}_k(q) = 2 \sum_{j=1}^d \left[1 - \cos \frac{k_j}{2} \cos \left(\frac{k_j}{2} - q_j \right) \right]$$

и множество $\mathfrak{G}$ совпадает со связанным открытым множеством $\Pi_{0,\pi} = \{k \in \mathbb{T}^d : \text{ни одна координата вектора } k \text{ не равна } \pi\}$. Для любого $k \in \Pi_{0,\pi}$ функция $\mathcal{E}_k(q)$ имеет единственный невырожденный минимум в $q_0(k) = \frac{k}{2} \in \Pi_{0,\pi}$, отображение

$$\begin{aligned} \varphi(k, \cdot) : W_\gamma(0) &\rightarrow U(q_0(k)), \\ \varphi(k, \cdot) : y_j &\rightarrow \frac{k_j}{2} - \arccos \left(1 - \frac{y_j^2}{\cos \frac{k_j}{2}} \right), \quad j = 1, \dots, d, \end{aligned}$$

удовлетворяет условию леммы Морса и

$$J(\varphi(0, k), k) = \left[\cos \frac{k_1}{2} \cdots \cos \frac{k_d}{2} \right]^{-1/2} > 0, \quad k \in \Pi_{0,\pi}.$$

§ 3. Формулировка основных результатов

Для любых $\mu > 0$ и $k \in \mathbb{T}^d$ определитель Фредгольма, ассоциированный с оператором $H_\mu(k)$, определяется в области $\mathbb{C} \setminus [\mathcal{E}_{\min}(k), \mathcal{E}_{\max}(k)]$ по формуле

$$\Delta_\mu(k, z) = 1 - \mu \nu(k, z) = 1 - \mu \int_{\mathbb{T}^d} \frac{d\eta(q)}{\mathcal{E}_k(q) - z}$$

и, следовательно, является аналитической функцией в этой области.

В следующей лемме устанавливается связь между нулями функции $\Delta_\mu(k, \cdot)$ и собственными значениями оператора $H_\mu(k)$ [1], [17].

ЛЕММА 3.1. *Для любого $k \in \mathbb{T}^d$ множество собственных значений оператора $H_\mu(k)$ вне существенного спектра совпадает с нулями функции $\Delta_\mu(k, \cdot)$.*

Заметим, что при $k \in \mathfrak{G}$ интеграл

$$\nu(k) = \nu(k, \mathcal{E}_{\min}(k)) = \int_{\mathbb{T}^d} \frac{d\eta(q)}{\mathcal{E}_k(q) - \mathcal{E}_{\min}(k)}$$

существует и как функция, определенная на $\mathfrak{G}$, является аналитической (см. далее лемму 4.1).

Пусть $d \geq 3$, $k \in \mathfrak{G}$ и

$$\mu(k) = (\nu(k))^{-1} = \left(\int_{\mathbb{T}^d} \frac{d\eta(q)}{\mathcal{E}_k(q) - \mathcal{E}_{\min}(k)} \right)^{-1} > 0.$$

Следующая теорема является основным результатом настоящей работы. В теореме утверждается существование единственного собственного значения $z(\mu, k)$ оператора $H_\mu(k)$, $k \in \mathfrak{G}$, и описывается его зависимость от константы связи $\mu > 0$ при фиксированном значении квазиимпульса $k \in \mathfrak{G}$. Доказывается, что при $0 < \mu < \mu(k)$ оператор $H_\mu(k)$ не имеет собственного значения вне существенного спектра, а при $\mu > \mu(k)$ имеет единственное собственное значение $z(\mu, k)$, лежащее левее существенного спектра.

Более того, находится разложение разности $\mathcal{E}_{\min}(k) - z(\mu, k)$ при $\mu = \mu(k)$. Это разложение зависит от размерности $d \geq 3$ тора $\mathbb{T}^d$, а также от квазиимпульса $k \in \mathfrak{G}$:

- 1) если $d = 3$, то $\mathcal{E}_{\min}(k) - z(\mu, k)$ – аналитическая функция от $\mu - \mu(k)$ и ее разложение по $\mu - \mu(k)$ начинается с $(\mu - \mu(k))^2$;
- 2) если $d = 4$, то разность не разлагается в ряд Пуансо, но имеет некоторое сходящееся разложение с главным членом $\sigma = (\mu - \mu(k))(-\ln(\mu - \mu(k)))^{-1}$;
- 3) если $d \geq 5$ нечетное, то $\mathcal{E}_{\min}(k) - z(\mu, k)$ – аналитическая функция от $\alpha = (\mu - \mu(k))^{1/2}$ и главным членом ее разложения является $\mu - \mu(k)$;
- 4) если $d \geq 6$ четное, то $\mathcal{E}_{\min}(k) - z(\mu, k)$ разлагается в сходящийся ряд с переменными

$$\varsigma = (\mu - \mu(k))^{1/2}, \quad v = (\mu - \mu(k))^{1/2} \ln(\mu - \mu(k))^{1/2}$$

и порядок главного члена этого ряда есть $\mu - \mu(k)$.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $k \in \mathfrak{G}$. Для любого $0 < \mu < \mu(k)$ оператор $H_\mu(k)$ не имеет собственного значения вне существенного спектра, и при любом $\mu > \mu(k)$ оператор $H_\mu(k)$ имеет единственное собственное значение $z(\mu, k)$. При этом $z(\mu, k)$ лежит левее существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(H_\mu(k))$ оператора $H_\mu(k)$ и соотношение $\mu \rightarrow \mu(k)$ имеет место тогда и только тогда, когда $z(\mu, k) \rightarrow \mathcal{E}_{\min}(k) = z(\mu(k), k)$. Более того, при достаточно малых и положительных $\mu - \mu(k)$ имеют место следующие разложения:

а) если $d = 3$, то

$$\mathcal{E}_{\min}(k) - z(\mu, k) = \left(\sum_{n \geq 1} c_n^{(3)}(k) [\mu - \mu(k)]^n \right)^2,$$

где $c_n^{(3)}(k)$, $k = 1, 2, \dots$, – действительные числа и

$$c_1^{(3)}(k) = \left(\frac{\pi(\mu(k))^2 J(q_0(k), k)}{2} \right)^{-1} > 0;$$

б) если $d = 4$, то

$$\mathcal{E}_{\min}(k) - z(\mu, k) = \sum_{n \geq 1, m, r, s \geq 0} c_{(n, m, r, s)}^{(4)}(k) \sigma^n \tau^m \omega^r \lambda^s,$$

где

$$\sigma = \frac{\mu - \mu(k)}{-\ln(\mu - \mu(k))}, \quad \tau = \frac{1}{-\ln(\mu - \mu(k))}, \quad \omega = \frac{\ln \ln(\mu - \mu(k))^{-1}}{-\ln(\mu - \mu(k))},$$

$$\lambda = \mu - \mu(k)$$

u $c_{(n,m,r,s)}^{(4)}(k)$, $n, m, r, s = 0, 1, \dots$, – действительные числа,

$$c_{(1,0,0,0)}^{(4)}(k) = \frac{2}{(\mu(k))^2 J(q_0(k), k)} > 0,$$

а также $\ln \ln(\mu - \mu(k))^{-1} > 0$ и $\ln(\mu - \mu(k)) < 0$ при $\mu > \mu(k)$;

в) если $d \geq 5$ нечетное, то

$$\mathcal{E}_{\min}(k) - z(\mu, k) = \left(\sum_{n \geq 1} c_n^{(d \geq 5)}(k) (\mu - \mu(k))^{n/2} \right)^2,$$

где $c_n^{(d \geq 5)}(k)$, $n = 0, 1, \dots$, – действительные числа,

$$c_1^{(d \geq 5)}(k) = \left((\mu(k))^2 \int_{\mathbb{T}^d} \frac{d\eta(q)}{(\mathcal{E}_k(q) - \mathcal{E}_{\min}(k))^2} \right)^{-1/2} > 0,$$

и $(\mu - \mu(k))^{1/2} > 0$ при $\mu > \mu(k)$;

г) если $d \geq 6$ четное, то

$$\mathcal{E}_{\min}(k) - z(\mu, k) = \left(\sum_{n \geq 1, m \geq 0} c_{(n,m)}^{(d \geq 6)}(k) \varsigma^n v^m \right)^2, \quad (3.1)$$

где

$$\varsigma = (\mu - \mu(k))^{1/2}, \quad v = (\mu - \mu(k))^{1/2} \ln(\mu - \mu(k))^{1/2}$$

и $c_{(n,m)}^{(d \geq 6)}(k)$, $n, m = 0, 1, \dots$, – действительные числа,

$$c_{(1,0)}^{(d \geq 6)}(k) = \left((\mu(k))^2 \int_{\mathbb{T}^d} \frac{d\eta(q)}{(\mathcal{E}_k(q) - \mathcal{E}_{\min}(k))^2} \right)^{-1/2} > 0,$$

а также $(\mu - \mu(k))^{1/2} > 0$ и $\ln(\mu - \mu(k)) < 0$ при $\mu > \mu(k)$.

Для изучения асимптотики собственного значения $z(\mu, k)$ относительно квазиимпульса $k \in \mathbb{T}^d$ рассмотрим разбиение $\mathfrak{G} = S_{<}(\mu) \cup S_{=}(\mu) \cup S_{>}(\mu)$, где

$$\begin{aligned} S_{<}(\mu) &= \{k \in \mathfrak{G} : \mu(k) < \mu\}, & S_{=}(\mu) &= \{k \in \mathfrak{G} : \mu(k) = \mu\}, \\ S_{>}(\mu) &= \{k \in \mathfrak{G} : \mu(k) > \mu\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

В силу аналитичности и положительности функции $\mu(k)$ в $\mathfrak{G}$ заключаем, что $S_{<}(\mu)$ и $S_{>}(\mu)$ – открытые связные множества, а $S_{=}(\mu)$ – замкнутое многообразие. Поскольку функция $\mu(k)$ не является постоянной, для любого $\mu^* \in \mathbb{R}$ такого, что $\inf_{\mathfrak{G}} \mu(k) < \mu^* < \sup_{\mathfrak{G}} \mu(k)$, при $\mu = \mu^*$ множества (3.2) являются непустыми.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $\mu^* \in (\inf_{\mathfrak{G}} \mu(k), \sup_{\mathfrak{G}} \mu(k))$. При $k \in S_{=}(\mu^*) \cup S_{>}(\mu^*)$ оператор $H_{\mu^*}(k)$ не имеет собственного значения, лежащего вне существенного спектра. Для любого $k \in S_{<}(\mu^*)$ оператор $H_{\mu^*}(k)$ имеет единственное собственное значение $z^*(k) = z(\mu^*, k)$. При этом $z(\mu^*, k)$ лежит левее существенного спектра и является аналитической функцией в $S_{<}(\mu^*)$. Более того, для любого $k^* \in S_{=}(\mu^*)$ имеют место следующие асимптотики при $k \rightarrow k^*$, $k \in S_{<}(\mu^*)$:

а) *при* $d = 3$

$$z^*(k) = \mathcal{E}_{\min}(k^*) + \sum_{j=1}^d \frac{\partial \mathcal{E}_{\min}(k)}{\partial k_j} \Big|_{k=k^*} (k_j - k_j^*) + O(|k - k^*|^2),$$

$$где \ |k - k^*| = (\sum_{j=1}^d |k_j - k_j^*|^2)^{1/2};$$

б) *при* $d = 4$

$$z^*(k) = \mathcal{E}_{\min}(k^*) + \sum_{j=1}^d \frac{\partial \mathcal{E}_{\min}(k)}{\partial k_j} \Big|_{k=k^*} (k_j - k_j^*) + o(|k - k^*|);$$

в) *при* $d \geq 5$

$$z^*(k) = \mathcal{E}_{\min}(k^*) + \sum_{j=1}^d \left[\frac{\partial \mathcal{E}_{\min}(k)}{\partial k_j} \Big|_{k=k^*} - \left(\frac{\partial \nu}{\partial z}(k^*, z) \Big|_{z=\mathcal{E}_{\min}(k^*)} \right)^{-1} \frac{\partial \nu(k)}{\partial k_j} \Big|_{k=k^*} \right] (k_j - k_j^*) + O(|k - k^*|^2).$$

ТЕОРЕМА 3.4. *При $\mu \rightarrow +\infty$ для любого $k \in \mathfrak{G}$ функция $z(\mu, k)$ имеет следующую асимптотику:*

$$z(\mu, k) = -(2\pi)^d \mu + z^{(1)}(\mu, k), \quad (3.3)$$

где $z^{(1)}(\mu, k) = o(1)$ равномерно по $k \in \mathfrak{G}$.

СЛЕДСТВИЕ 3.5. *При $\mu \rightarrow +\infty$ для $\inf_k z(\mu, k)$ имеет место следующая асимптотика:*

$$\inf_k z(\mu, k) = -(2\pi)^d \mu + z^{(2)}(\mu), \quad (3.4)$$

где $z^{(2)}(\mu) = o(1)$.

СЛЕДСТВИЕ 3.6. *При $d = 3$ (соответственно, $d = 4$) асимптотика $z^*(k)$ при $k \rightarrow k^*$ имеет порядок $\mathcal{E}_{\min}(k^*) + O(|k - k^*|^2)$ (соответственно, $\mathcal{E}_{\min}(k^*) + o(|k - k^*|)$) тогда и только тогда, когда градиенты функций $\mathcal{E}_{\min}(k)$ и $\nu(k)$ равны нулю при $k = k^*$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 3.7. Из теоремы 3.3 следует, что в случае $d \geq 5$ при $k \rightarrow k^*$ асимптотика $z^*(k)$ имеет порядок $\mathcal{E}_{\min}(k) + O(|k - k^*|^2)$, если градиенты функций $\mathcal{E}_{\min}(k)$ и $\nu(k)$:

а) равны нулю в точке $k = k^*$;

б) не равны нулю одновременно в точке $k = k^*$, но выполняется соотношение

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{\min}(k)}{\partial k_j} \Big|_{k=k^*} - \left(\frac{\partial \nu}{\partial z}(k^*, z) \Big|_{z=\mathcal{E}_{\min}(k^*)} \right)^{-1} \frac{\partial \nu(k)}{\partial k_j} \Big|_{k=k^*} = 0, \quad j = 1, \dots, d.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.8. При $\mu < 0$ оператор $H_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, ассоциируется с гамильтонианом системы двух отталкивающихся частиц, и в этом случае верны аналогичные результаты для единственного собственного значения $z(\mu, k)$, лежащего правее существенного спектра.

§ 4. Доказательство основных результатов

Сначала докажем следующую лемму.

ЛЕММА 4.1. 1) Пусть $k \in \mathfrak{G}$. Тогда интеграл

$$\nu(k) = \nu(k, \mathcal{E}_{\min}(k)) = \int_{\mathbb{T}^d} \frac{d\eta(q)}{\mathcal{E}_k(q) - \mathcal{E}_{\min}(k)}$$

существует и является аналитической функцией в $\mathfrak{G}$.

2) Пусть $k \in \mathfrak{G}$. Для достаточно малых и положительных $\mathcal{E}_{\min}(k) - z$ функция $\nu(k, z)$ имеет следующие разложения:

а) если $d = 3$, то

$$\nu(k, z) = \nu(k) - \frac{\pi J(q_0(k), k)}{2} (\mathcal{E}_{\min}(k) - z)^{1/2} + (z - \mathcal{E}_{\min}(k)) \Phi_1^{(3)}(k, z),$$

где

$$\Phi_1^{(3)}(k, z) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l^{(3)}(k) (\mathcal{E}_{\min}(k) - z)^{l/2},$$

$b_l^{(3)}(k)$, $l = 0, 1, \dots$, – некоторые действительные числа и $(\mathcal{E}_{\min}(k) - z)^{1/2} > 0$ при $z < \mathcal{E}_{\min}(k)$;

б) если $d = 4$, то

$$\begin{aligned} \nu(k, z) = \nu(k) + \frac{J(q_0(k), k)}{2} (\mathcal{E}_{\min}(k) - z) \ln(\mathcal{E}_{\min}(k) - z) \\ + (z - \mathcal{E}_{\min}(k)) \Phi_0^{(4)}(k, z) + (z - \mathcal{E}_{\min}(k))^2 \ln(\mathcal{E}_{\min}(k) - z) \Phi_1^{(4)}(k, z), \end{aligned}$$

где $\Phi_0^{(4)}(k, z)$ и $\Phi_1^{(4)}(k, z)$ – аналитические функции в окрестности точки $z = \mathcal{E}_{\min}(k)$ и $\ln(\mathcal{E}_{\min}(k) - z) < 0$ при $z < \mathcal{E}_{\min}(k)$;

в) если $d \geq 5$ нечетно, то

$$\nu(k, z) = \nu(k) + A(k)(z - \mathcal{E}_{\min}(k)) + (\mathcal{E}_{\min}(k) - z)^{3/2} \Phi_1^{(d \geq 5)}(k, z),$$

где

$$\Phi_1^{(d \geq 5)}(k, z) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l^{(d \geq 5)}(k) (\mathcal{E}_{\min}(k) - z)^{l/2},$$

$b_l^{(d \geq 5)}(k)$, $l = 0, 1, \dots$, – действительные числа,

$$A(k) = \int_{\mathbb{T}^d} \frac{d\eta(q)}{(\mathcal{E}_{\min}(k) - \mathcal{E}_k(q))^2} > 0$$

и $(\mathcal{E}_{\min}(k) - z)^{1/2} > 0$ при $z < \mathcal{E}_{\min}(k)$;

г) если $d \geq 6$ четно, т.е. $d = 2m + 2$, $m \geq 2$, то

$$\begin{aligned} \nu(k, z) = \nu(k) + A(k)(z - \mathcal{E}_{\min}(k)) + (z - \mathcal{E}_{\min}(k))^2 \Phi_0^{(d \geq 6)}(k, z) \\ - (z - \mathcal{E}_{\min}(k))^m \ln(\mathcal{E}_{\min}(k) - z) \Phi_1^{(d \geq 6)}(k, z), \end{aligned}$$

где $\Phi_0^{(d \geq 6)}(k, z)$ и $\Phi_1^{(d \geq 6)}(k, z)$ – аналитические функции в окрестности точки $z = \mathcal{E}_{\min}(k)$,

$$\Phi_1^{(d \geq 6)}(k, \mathcal{E}_{\min}(k)) = -\frac{J(q_0(k), k)}{2}$$

и $\ln(\mathcal{E}_{\min}(k) - z) < 0$ при $z < \mathcal{E}_{\min}(k)$.

Отметим, что аналогичное разложение при фиксированном $k \in \mathbb{T}^d$ получено в [4], [5], [18] для определителей Фредгольма $\Delta_\mu(k, z)$, ассоциированных с более общими операторами типа $H_\mu(k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.1. 1) Пусть $k \in \mathfrak{G}$ и $q_0(k)$ – невырожденный минимум функции $\mathcal{E}_k(\cdot)$. Представим функцию $\nu(k, z)$ в виде

$$\nu(k, z) = \int_{U(q_0(k))} \frac{d\eta(q)}{\mathcal{E}_k(q) - z} + \int_{\mathbb{T}^d \setminus U(q_0(k))} \frac{d\eta(q)}{\mathcal{E}_k(q) - z} = G_1(k, z) + G_2(k, z), \quad (4.1)$$

где $U(q_0(k))$ – некоторая окрестность точки $q = q_0(k)$ (см. замечание 2.2). Отметим, что функция $G_2(k, z)$ аналитична в окрестности точки $z = \mathcal{E}_{\min}(k)$.

В интеграле $G_1(k, z)$ делаем замену переменных $q := \varphi(k, y)$. Тогда

$$G_1(k, z) = \int_{W_\gamma(0)} \frac{J(\varphi(k, y), k) dy}{y^2 + \mathcal{E}_{\min}(k) - z},$$

где $J(\varphi(k, y), k)$ – якобиан отображения $\varphi(k, y)$.

Переходя к сферическим координатам $y = r\omega$, имеем

$$G_1(k, z) = \int_0^\gamma \frac{r^{d-1} dr}{r^2 + \mathcal{E}_{\min}(k) - z} \int_{\Omega_d} J(\varphi(k, r\omega), k) d\omega, \quad (4.2)$$

где Ω_d – единичная сфера в d -мерном пространстве $\mathbb{R}^d$ и $d\omega$ – ее элемент. Отсюда вытекает, что при $d \geq 3$ существует конечный предел

$$\nu(k) = \lim_{z \rightarrow \mathcal{E}_{\min}(k) - 0} \nu(k, z) = \int_0^\gamma r^{d-3} dr \int_{\Omega_d} J(\varphi(k, r\omega), k) d\omega + G_2(k, \mathcal{E}_{\min}(k)).$$

Заметим, что обе функции, стоящие в правой части последнего равенства, являются аналитическими в $\mathfrak{G}$. Поэтому $\nu(k)$ аналитична в $\mathfrak{G}$.

2) Поскольку

$$\int_{\Omega_d} J(\varphi(k, r\omega), k) d\omega = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(k) r^{2n},$$

где $c_n(k)$, $n = 0, 1, \dots$, – коэффициенты Пицетти (см. [19]), имеем

$$G_1(k, z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(k) \int_0^\gamma \frac{r^{d-1+2n} dr}{r^2 + \mathcal{E}_{\min}(k) - z};$$

здесь $c_0(k) = J(q_0(k), k)$.

Известно, что функция

$$I_s(\alpha) = \int_0^\gamma \frac{r^s dr}{r^2 - \alpha}, \quad \alpha < 0,$$

представляется в виде

$$I_s(\alpha) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\alpha^m \ln(-\alpha) + \hat{I}_s(\alpha), & s = 2m + 1, \\ \frac{\pi\alpha^m}{2\sqrt{-\alpha}} + \tilde{I}_s(\alpha), & s = 2m, \end{cases} \quad (4.3)$$

где $\hat{I}_s(\alpha)$ и $\tilde{I}_s(\alpha)$ – некоторые аналитические функции в окрестности точки $\alpha = 0$ (см. [4]). Согласно (4.3) при $d = 2m + 2$, $m = 1, 2, \dots$, имеем

$$\nu(k, z) = -\frac{1}{2}c_0(k)(z - \mathcal{E}_{\min}(k))^m \ln(\mathcal{E}_{\min}(k) - z) + (z - \mathcal{E}_{\min}(k))^{m+1} \ln(\mathcal{E}_{\min}(k) - z)\Phi_1(k, z) + \tilde{\Phi}_0(k, z) \quad (4.4)$$

и при $d = 2m + 1$, $m = 1, 2, \dots$, имеем

$$\nu(k, z) = \frac{\pi c_0(k)}{2} \frac{(z - \mathcal{E}_{\min}(k))^m}{\sqrt{\mathcal{E}_{\min}(k) - z}} + (z - \mathcal{E}_{\min}(k))^{m+1/2} \Phi_2(k, z) + \tilde{\Phi}_0(k, z), \quad (4.5)$$

где $\tilde{\Phi}_0(k, z)$, $\Phi_1(k, z)$ – аналитические функции в окрестности точки $z = \mathcal{E}_{\min}(k)$,

$$\Phi_2(k, z) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l(k)(\mathcal{E}_{\min}(k) - z)^{l/2}. \quad (4.6)$$

Ясно, что $\nu(k) = \tilde{\Phi}_0(k, \mathcal{E}_{\min}(k))$, $\ln(\mathcal{E}_{\min}(k) - z) < 0$ и $(\mathcal{E}_{\min}(k) - z)^{1/2} > 0$ при $z < \mathcal{E}_{\min}(k)$.

а) Пусть $d = 3$. Поскольку функция $\tilde{\Phi}_0(k, z)$ аналитична в окрестности точки $z = \mathcal{E}_{\min}(k)$, имеем

$$\tilde{\Phi}_0(k, z) = \nu(k) + \sum_{n \geq 1} a_n(k)(z - \mathcal{E}_{\min}(k))^n.$$

Отсюда согласно равенствам (4.5), (4.6) получаем

$$\nu(k, z) = \nu(k) - \frac{\pi J(q_0(k), k)}{2} (\mathcal{E}_{\min}(k) - z)^{1/2} + \sum_{l \geq 2} b_l^{(3)}(k)(\mathcal{E}_{\min}(k) - z)^{l/2}.$$

б) Пусть $d = 4$. Из аналитичности функции $\tilde{\Phi}_0(k, z)$ в окрестности точки $z = \mathcal{E}_{\min}(k)$ следует, что

$$\tilde{\Phi}_0(k, z) = \nu(k) + \sum_{n \geq 1} a_n(k)(z - \mathcal{E}_{\min}(k))^n.$$

Отсюда согласно равенству (4.4) получаем

$$\begin{aligned} \nu(k, z) = & \nu(k) + \frac{J(q_0(k), k)}{2} (\mathcal{E}_{\min}(k) - z) \ln(\mathcal{E}_{\min}(k) - z) \\ & + \sum_{n \geq 1} a_n(k)(\mathcal{E}_{\min}(k) - z)^n + (\mathcal{E}_{\min}(k) - z)^2 \ln(\mathcal{E}_{\min}(k) - z) \Phi_1(k, z), \end{aligned}$$

где функция $\Phi_1(k, \cdot)$ аналитична в $z = \mathcal{E}_{\min}(k)$.

в) Пусть $d = 2m + 1$, $m \geq 2$. Согласно (4.5) функция $\nu(k, z)$ дифференцируема в интервале $(-\infty, \mathcal{E}_{\min}(k)]$ (при $z = \mathcal{E}_{\min}(k)$ понимается левая производная) и

$$A(k) = \left. \frac{\partial \nu}{\partial z}(k, z) \right|_{z=\mathcal{E}_{\min}(k)} = \left. \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial z}(k, z) \right|_{z=\mathcal{E}_{\min}(k)} > 0 \quad (4.7)$$

(существование производной $\left. \frac{\partial \nu}{\partial z}(k, z) \right|_{z=\mathcal{E}_{\min}(k)}$, $k \in \mathfrak{G}$, доказывается так же, как было доказано существование $\nu(k)$ в п. 1)). Отсюда следует, что

$$\nu(k, z) = \nu(k) + A(k)(z - \mathcal{E}_{\min}(k)) + (\mathcal{E}_{\min}(k) - z)^{l_0} \sum_{l \geq 0} b_l^{(d \geq 5)}(k)(\mathcal{E}_{\min}(k) - z)^{l/2},$$

где $l_0 = \min\{m - 1/2, 2\} \geq 3/2$.

г) Пусть $d = 2m + 2$, $m \geq 2$. Согласно (4.4) функция $\nu(k, z)$ дифференцируема в интервале $(-\infty, \mathcal{E}_{\min}(k)]$ и выполнено (4.7). Отсюда имеем

$$\tilde{\Phi}_0(k, z) = \nu(k) + A(k)(z - \mathcal{E}_{\min}(k)) + \sum_{l \geq 2} b_l^{(d \geq 6)}(k)(\mathcal{E}_{\min}(k) - z)^l.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \nu(k, z) &= \nu(k) + A(k)(z - \mathcal{E}_{\min}(k)) + \sum_{l \geq 2} b_l^{(d \geq 6)}(k)(\mathcal{E}_{\min}(k) - z)^l \\ &\quad + (z - \mathcal{E}_{\min}(k))^m \ln(\mathcal{E}_{\min}(k) - z) \left(-\frac{J(q_0(k), k)}{2} + (z - \mathcal{E}_{\min}(k))\Phi_1(k, z) \right), \end{aligned}$$

где $\Phi_1(k, z)$ – аналитическая функция в окрестности точки $z = \mathcal{E}_{\min}(k)$. Лемма доказана.

В дальнейшем нам понадобятся следующие теоремы. В этих теоремах предположим, что δ – фиксированное положительное число. Похожие результаты впервые доказаны в [2].

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть функция $f(\alpha)$ аналитична в окрестности точки $\alpha = 0$ и принимает действительные значения при действительных α . Предположим, что

$$f(0) = 0, \quad f'(0) < 0.$$

Тогда для достаточно малых $\lambda > 0$ существует единственное положительное $\alpha(\lambda)$, удовлетворяющее уравнению

$$\lambda = -(\delta\lambda + \delta^2)f(\alpha). \quad (4.8)$$

Более того, $\alpha(\lambda)$ имеет сходящееся разложение

$$\alpha = \sum_{n \geq 1} c_n \lambda^n, \quad (4.9)$$

где $c_1 = -[\delta^2 f'(0)]^{-1} > 0$.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть $f(\alpha)$, $g(\alpha)$ – аналитические функции в окрестности точки $\alpha = 0$, принимающие действительные значения при действительных α . Предположим, что

$$f(0) = g(0) = 0, \quad g'(0) > 0.$$

Тогда для достаточно малых $\lambda > 0$ существует единственное положительное $\alpha(\lambda)$, удовлетворяющее уравнению

$$\lambda = -(\delta\lambda + \delta^2)(f(\alpha) + g(\alpha) \ln \alpha). \quad (4.10)$$

Более того, $\alpha(\lambda)$ имеет сходящееся разложение

$$\alpha(\lambda) = \sum_{n \geq 1, m, r, s \geq 0} c_{(n, m, r, s)} \sigma^n \tau^m \omega^r \lambda^s, \quad (4.11)$$

где

$$\sigma = \frac{\lambda}{-\ln \lambda}, \quad \tau = \frac{1}{-\ln \lambda}, \quad \omega = \frac{\ln \ln \lambda^{-1}}{-\ln \lambda} \quad (4.12)$$

и $c_{(1, 0, 0, 0)} = [\delta^2 g'(0)]^{-1} > 0$.

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть функция $f(\alpha)$ аналитична в окрестности точки $\alpha = 0$ и принимает действительные значения при действительных α . Предположим, что

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f''(0) < 0.$$

Тогда для достаточно малых $\lambda > 0$ существует единственное положительное $\alpha(\lambda)$, удовлетворяющее уравнению

$$\lambda = -(\delta\lambda + \delta^2)f(\alpha). \quad (4.13)$$

Более того, $\alpha(\lambda)$ имеет сходящееся разложение

$$\alpha = \sum_{n \geq 1} c_n \lambda^{n/2}, \quad (4.14)$$

где $c_1 = [-(1/2)\delta^2 f''(0)]^{-1/2} > 0$.

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть $f(\alpha), g(\alpha)$ – аналитические функции в окрестности точки $\alpha = 0$, принимающие действительные значения при действительных α . Предположим, что

$$f(0) = f'(0) = g(0) = g'(0) = g''(0) = 0, \quad f''(0) < 0.$$

Тогда для достаточно малых $\lambda > 0$ существует единственное положительное $\alpha(\lambda)$, удовлетворяющее уравнению

$$\lambda = -(\delta\lambda + \delta^2)(f(\alpha) + g(\alpha) \ln \alpha). \quad (4.15)$$

Более того, $\alpha(\lambda)$ имеет сходящееся разложение

$$\alpha(\lambda) = \sum_{n \geq 1, k \geq 0} c_{(n,k)} \zeta^n v^k, \quad (4.16)$$

где

$$\zeta = \lambda^{1/2}, \quad v = \zeta \ln \zeta \quad (4.17)$$

и $c_{(1,0)} = [-(1/2)\delta^2 f''(0)]^{-1/2} > 0$.

С помощью соответствующих замен переменных доказательства теорем 4.2–4.5 приводятся к доказательству теоремы о неявной функции с несколькими переменными. Поэтому мы докажем только теорему 4.3. Остальные теоремы доказываются аналогично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.3. По условию имеем

$$f(\alpha) = \sum_{n \geq 1} a_n \alpha^n, \quad g(\alpha) = \sum_{n \geq 1} b_n \alpha^n, \quad b_1 = g'(0) > 0.$$

Применим замену

$$\alpha = \sigma(c + \xi), \quad c = (b_1 \delta^2)^{-1}, \quad (4.18)$$

где σ и ξ – новые переменные. Тогда в области, где $\alpha > 0$ малое, уравнение (4.10) эквивалентно уравнению

$$\begin{aligned} f(\xi, \sigma, \tau, \omega, \lambda) = b_1 \delta^2 \xi - (c + \xi) \left\{ -\delta \lambda b_1 + (\delta \lambda + \delta^2) \left[\tau \sum_{n \geq 0} a_{n+1} \sigma^n (c + \xi)^n \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{n \geq 1} b_{n+1} \sigma^n (c + \xi)^n - \omega \sum_{n \geq 0} b_{n+1} \sigma^n (c + \xi)^n \right. \right. \\ \left. \left. - \tau \ln(c + \xi) \sum_{n \geq 0} b_{n+1} \sigma^n (c + \xi)^n \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Уравнение (4.19) перепишем в виде $f(\xi, \sigma, \tau, \omega, \lambda) = 0$, где переменные $\sigma, \tau, \omega, \lambda$ достаточно малы и положительны, а ξ принадлежит некоторой окрестности точки $\xi = 0$. Обозначим через $F(\xi, \sigma, \tau, \omega, \lambda)$ аналитическое продолжение функции $f(\xi, \sigma, \tau, \omega, \lambda)$ в окрестности точки $(0, 0, 0, 0, 0)$. Тогда функция $F(\xi, \sigma, \tau, \omega, \lambda)$ удовлетворяет следующим условиям:

- а) $(0, 0, 0, 0, 0)$ – решение уравнения $F(\xi, \sigma, \tau, \omega, \lambda) = 0$;
- б) F аналитична при малых $|\xi|, |\sigma|, |\tau|, |\omega|, |\lambda|$, так как $\ln(c + \xi)$ аналитична в окрестности точки $\xi = 0$;
- в) $\partial F / \partial \xi(0, 0, 0, 0, 0) = b_1 \mu_0^2 \neq 0$.

Следовательно, по теореме о неявной функции уравнение (4.19) имеет единственное вещественно-аналитическое (т. е. вещественное при вещественных значениях переменных) решение ξ при достаточно малых $\sigma, \tau, \omega, \lambda$, которое представляется в виде сходящегося ряда

$$\xi = \sum_{n, m, k, l \geq 0} d_{(n, m, k, l)} \sigma^n \tau^m \omega^k \lambda^l.$$

Подставляя это разложение в (4.19), при $\sigma = \tau = \omega = \lambda = 0$ находим, что $d_{(0, 0, 0, 0)} = 0$. Согласно (4.18) получим

$$\alpha = c\sigma + \sum_{n, m, k, l \geq 0} d_{(n, m, k, l)} \sigma^{n+1} \tau^m \omega^k \lambda^l = \sum_{n, m, k, l \geq 0} \hat{d}_{(n, m, k, l)} \sigma^{n+1} \tau^m \omega^k \lambda^l,$$

где $\hat{d}_{(0, 0, 0, 0)} = c = [g'(0)\delta^2]^{-1} > 0$. Отсюда и из (4.12) вытекает что α положительно при малых значениях $\lambda > 0$. Теорема доказана.

Теперь мы докажем основные результаты настоящей работы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2. Сначала докажем существование собственного значения оператора $H_\mu(k)$, $k \in \mathfrak{G}$. Пусть

$$\mu(k, z) = (\nu(k, z))^{-1}.$$

Ясно, что функция $\mu(k, \cdot): (-\infty, \mathcal{E}_{\min}(k)] \rightarrow [\mu(k), +\infty)$ является строго монотонной и непрерывной в $(-\infty, \mathcal{E}_{\min}(k)]$. Поэтому существует непрерывная обратная функция $z(\cdot, k): [\mu(k), +\infty) \rightarrow (-\infty, \mathcal{E}_{\min}(k)]$, являющаяся единственным решением уравнения $\Delta_\mu(k, z) = 0$. Отсюда имеем, что $z \rightarrow \mathcal{E}_{\min}(k)$ тогда и только тогда, когда $\mu \rightarrow \mu(k)$. Согласно лемме 3.1 при $\mu \in (\mu(k), +\infty)$ число $z(\mu, k) \in (-\infty, \mathcal{E}_{\min}(k))$ является единственным собственным значением оператора $H_\mu(k)$.

Теперь докажем остальные утверждения теоремы. Представляем разложение функции $\nu(k, z) - \nu(k)$, $k \in \mathfrak{G}$, в точке $z = \mathcal{E}_{\min}(k)$ в виде (см. лемму 4.1)

$$F_2(\alpha, k) = \nu(k, \mathcal{E}_{\min}(k) - \alpha) - \nu(k) = f(\alpha, k) \ln \alpha + g(\alpha, k) \quad (4.20)$$

при $d = 2m + 2$, $m = 1, 2, \dots$, где $\alpha = \mathcal{E}_{\min}(k) - z$, $f(\alpha, k)$ и $g(\alpha, k)$ – аналитические функции в окрестности точки $\alpha = 0 \in \mathbb{C}$, и в виде

$$F_1(\alpha, k) = \nu(k, \mathcal{E}_{\min}(k) - \alpha^2) - \nu(k) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l^*(k) \alpha^l \quad (4.21)$$

при $d = 2m + 1$, $m = 1, 2, \dots$, где $\alpha = (\mathcal{E}_{\min}(k) - z)^{1/2}$ и $b_l^*(k)$, $l = 0, 1, \dots$, – действительные числа.

Для любых фиксированного $k \in \mathfrak{G}$ и $z \in (-\infty, \mathcal{E}_{\min}(k))$ имеет место тождество

$$\Delta_\mu(k, z) = 1 - \mu(k, z)\nu(k, z) \equiv 0.$$

С целью нахождения разложения для собственного значения $z(\mu, k)$ при $\mu = \mu(k)$, $k \in \mathfrak{G}$, перепишем это тождество в виде

$$-\frac{\mu - \mu(k)}{(\mu - \mu(k))\mu(k) + \mu_0^2(k)} = \nu(k, z) - \nu(k). \quad (4.22)$$

Обозначим $\mu_0 = \mu(k)$, $\lambda = \mu - \mu(k)$, $\alpha = (\mathcal{E}_{\min}(k) - z)^{1/2}$.

Пусть $d = 3$. В силу леммы 4.1 и равенства (4.21) получим

$$-\frac{\lambda}{\mu_0\lambda + \mu_0^2} = f(\alpha, k),$$

где функция $f(\alpha, k)$ аналитична в окрестности точки $\alpha = 0$ и

$$f(0, k) = 0, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, k) \right|_{\alpha=0} = -\frac{\pi J(q_0(k), k)}{2} < 0.$$

Доказательство п. а) теоремы вытекает из теоремы 4.2.

Пусть $d \geq 5$ нечетное. В силу леммы 4.1 и равенства (4.21) получим

$$-\frac{\lambda}{\mu_0\lambda + \mu_0^2} = f(\alpha, k),$$

где функция $f(\alpha, k)$ аналитична в окрестности точки $\alpha = 0$ и

$$\begin{aligned} f(0, k) &= 0, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, k) \right|_{\alpha=0} = 0, \\ \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}(\alpha, k) \right|_{\alpha=0} &= -2 \int_{\mathbb{T}^d} \frac{d\eta(q)}{(\mathcal{E}_k(q) - \mathcal{E}_{\min}(k))^2} < 0. \end{aligned}$$

Доказательство п. в) теоремы вытекает из теоремы 4.4.

Пусть $d \geq 5$ четное. В силу леммы 4.1 и согласно равенству (4.20) получим

$$-\frac{\lambda}{\mu_0\lambda + \mu_0^2} = f(\alpha, k) + g(\alpha, k) \ln \alpha,$$

где функции $f(\alpha, k)$ и $g(\alpha, k)$ аналитичны в точке $\alpha = 0$ и

$$\begin{aligned} f(0, k) = g(0, k) = 0, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, k) \right|_{\alpha=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial g}{\partial \alpha}(\alpha, k) \right|_{\alpha=0} = 0, \\ \left. \frac{\partial^2 g}{\partial \alpha^2}(\alpha, k) \right|_{\alpha=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}(\alpha, k) \right|_{\alpha=0} = -2 \int_{\mathbb{T}^d} \frac{d\eta(q)}{(\mathcal{E}_k(q) - \mathcal{E}_{\min}(k))^2} < 0. \end{aligned}$$

Доказательство п. г) теоремы вытекает из теоремы 4.5.

Пусть $d = 4$. В силу леммы 4.1 и равенства (4.20) получим

$$-\frac{\lambda}{\mu_0 \lambda + \mu_0^2} = f(\alpha, k) + g(\alpha, k) \ln \alpha,$$

в этом случае $\alpha = \mathcal{E}_{\min}(k) - z$. Функции $f(\alpha, k)$ и $g(\alpha, k)$ аналитичны в окрестности точки $\alpha = 0$ и

$$f(0, k) = g(0, k) = 0, \quad \left. \frac{\partial g}{\partial \alpha}(\alpha, k) \right|_{\alpha=0} = \frac{J(q_0(k), k)}{2} > 0.$$

Доказательство п. б) теоремы вытекает из теоремы 4.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.3. Утверждения теоремы о существовании и аналитичности собственного значения вытекают из монотонности и непрерывности функции $\Delta_\mu(k, \cdot)$ в $(-\infty, \mathcal{E}_{\min}(k)]$ и из определения множеств $S_=(\mu^*)$, $S_<(\mu^*)$, $S_>(\mu^*)$. Поэтому докажем только часть, относящуюся к асимптотике собственного значения.

Пусть $k^* \in S_=(\mu^*)$ и $k \in U_\xi(k^*) \cap S_<(\mu^*)$ для достаточно малого $\xi > 0$, где

$$U_\xi(k^*) = \{k \in \mathfrak{G} : |k - k^*| < \xi\}.$$

Допустим, что $z^*(k) = z(\mu^*, k)$ – собственное значение оператора $H_\mu(k)$. Согласно лемме 3.1 и по определению $S_=(\mu^*)$ имеем $\Delta_\mu(k, z^*(k)) = 0$, т. е.

$$\nu(k, z^*(k)) = \frac{1}{\mu^*} = \nu(k^*). \quad (4.23)$$

а) Пусть $d = 3$. В силу леммы 4.1 получим разложение $\nu(k, z^*(k))$ в $U_\xi(k^*)$:

$$\nu(k, z^*(k)) = \nu(k) + \sum_{n \geq 1} a_n(k) (\mathcal{E}_{\min}(k) - z^*(k))^{n/2},$$

где

$$\begin{aligned} a_1(k) = \frac{\pi(\mu(k))^2 J(q_0(k), k)}{2} = \frac{\pi(\mu_0(k^*))^2 J(q_0(k^*), k^*)}{2} + o(1), \quad k \rightarrow k^*, \\ \pi(\mu_0(k^*))^2 J(q_0(k^*), k^*) > 0. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$(\mathcal{E}_{\min}(k) - z^*(k))(a_1(k) + o(1))^2 = (\nu(k) - \nu(k^*))^2, \quad k \rightarrow k^*.$$

Из аналитичности функций $\nu(k)$ и $\mathcal{E}_{\min}(k)$ в $\mathfrak{G}$ имеем

$$\mathcal{E}_{\min}(k) - z^*(k) = O(|k - k^*|^2),$$

$$z^*(k) = \mathcal{E}_{\min}(k^*) + \sum_{j=1}^d \left. \frac{\partial \mathcal{E}_{\min}(k)}{\partial k_j} \right|_{k=k^*} (k_j - k_j^*) + O(|k - k^*|^2), \quad k \rightarrow k^*,$$

где $k \in S_<(\mu^*)$.

б) Пусть $d = 4$. В силу леммы 4.1 при $k \in U_\xi(k^*)$ получим

$$\begin{aligned} \nu(k, z^*(k)) &= \nu(k) + \ln(\mathcal{E}_{\min}(k) - z^*(k)) \sum_{n \geq 1} a_n(k) (\mathcal{E}_{\min}(k) - z^*(k))^n \\ &\quad + \sum_{n \geq 1} b_n(k) (\mathcal{E}_{\min}(k) - z^*(k))^n, \end{aligned}$$

где

$$a_1(k) = \frac{(\mu(k))^2 J(q_0(k), k)}{2} = \frac{(\mu_0(k^*))^2 J(q_0(k^*), k^*)}{2} + o(1), \quad k \rightarrow k^*, \quad (4.24)$$

$$(\mu_0(k^*))^2 J(q_0(k^*), k^*) > 0.$$

Поскольку $\mathcal{E}_{\min}(k) - z^*(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow k^*$, из (4.23) и равенства (4.24) следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow k^*} \frac{\mathcal{E}_{\min}(k) - z^*(k)}{-(\nu(k) - \nu(k^*))} \\ = \lim_{k \rightarrow k^*} \frac{\mathcal{E}_{\min}(k) - z^*(k)}{(\mathcal{E}_{\min}(k) - z^*(k)) [a_1(k) \ln(\mathcal{E}_{\min}(k) - z^*(k)) + o(1)]} = 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Из аналитичности функции $\nu(k)$ в $\mathfrak{G}$ получим

$$-(\nu(k) - \nu(k^*)) = O(|k - k^*|), \quad k \rightarrow k^*.$$

Отсюда и из (4.25) заключаем, что $\mathcal{E}_{\min}(k) - z^*(k) = o(|k - k^*|)$, $k \rightarrow k^*$, т. е.

$$z^*(k) = \mathcal{E}_{\min}(k^*) + \sum_{j=1}^d \left. \frac{\partial \mathcal{E}_{\min}(k)}{\partial k_j} \right|_{k=k^*} (k_j - k_j^*) + o(|k - k^*|), \quad k \rightarrow k^*,$$

где $k \in S_{<}(\mu^*)$.

в) Пусть $d \geq 5$. Дифференцируя $\nu(k, z)$ в $z = \mathcal{E}_{\min}(k)$, получим

$$\left. \frac{\partial \nu}{\partial z}(k, z) \right|_{z=\mathcal{E}_{\min}(k)} = \left. \frac{\partial \nu}{\partial z}(k^*, z) \right|_{z=\mathcal{E}_{\min}(k^*)} + o(1), \quad k \rightarrow k^*. \quad (4.26)$$

В силу леммы 4.1 при $z^*(k) \rightarrow \mathcal{E}_{\min}(k) - 0$ имеем

$$\nu(k, z^*(k)) = \nu(k) + \left. \frac{\partial \nu}{\partial z}(k, z) \right|_{z=\mathcal{E}_{\min}(k)} (z^*(k) - \mathcal{E}_{\min}(k)) + (z^*(k) - \mathcal{E}_{\min}(k)) o(1)$$

и согласно (4.23) и (4.26) приходим к равенству

$$z^*(k) - \mathcal{E}_{\min}(k) = \frac{-(\nu(k) - \nu(k^*))}{\left. \frac{\partial \nu}{\partial z}(k^*, z) \right|_{z=\mathcal{E}_{\min}(k^*)} + o(1)}, \quad k \rightarrow k^*.$$

Из аналитичности функции $\nu(k)$ в $\mathfrak{G}$ вытекает, что

$$\nu(k) - \nu(k^*) = \sum_{j=1}^d \left. \frac{\partial \nu(k)}{\partial k_j} \right|_{k=k^*} (k_j - k_j^*) + O(|k - k^*|^2), \quad k \rightarrow k^*.$$

Отсюда заключаем, что

$$z^*(k) = \mathcal{E}_{\min}(k^*) + \sum_{j=1}^d \left[\frac{\partial \mathcal{E}_{\min}(k)}{\partial k_j} \Big|_{k=k^*} - \left(\frac{\partial \nu}{\partial z}(k^*, z) \Big|_{z=\mathcal{E}_{\min}(k^*)} \right)^{-1} \frac{\partial \nu(k)}{\partial k_j} \Big|_{k=k^*} \right] \times (k_j - k_j^*) + O(|k - k^*|^2), \quad k \rightarrow k^*,$$

где $k \in S_<(\mu^*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.4. Поскольку по теореме 3.3 для любого $\mu > \inf_{k \in \mathfrak{G}} \mu(k)$ при $k \in S_<(\mu)$ оператор $H_\mu(k)$ имеет единственное собственное значение $z(\mu, k) < \mathcal{E}_{\min}(k)$, из монотонности интеграла и леммы 3.1 получим

$$1 - \mu \int_{\mathbb{T}^d} \frac{d\eta(q)}{\mathcal{E}_{\min}(k) - z(\mu, k)} < \Delta_\mu(k, z(\mu, k)) = 0 < 1 - \mu \int_{\mathbb{T}^d} \frac{d\eta(q)}{\mathcal{E}_{\max}(k) - z(\mu, k)}.$$

Отсюда вытекают неравенства

$$\mathcal{E}_{\min}(k) - (2\pi)^d \mu < z(\mu, k) < \mathcal{E}_{\max}(k) - (2\pi)^d \mu. \quad (4.27)$$

Отметим, что функции $\mathcal{E}_{\min}(\cdot)$ и $\mathcal{E}_{\max}(\cdot)$ непрерывны в $\overline{\mathfrak{G}}$, где $\overline{\mathfrak{G}}$ – замыкание множества $\mathfrak{G}$. Поэтому $\inf_{k \in \mathfrak{G}} \mathcal{E}_{\min}(\cdot)$ и $\inf_{k \in \mathfrak{G}} \mathcal{E}_{\max}(\cdot)$ конечны. Отсюда и из неравенств (4.27) получаем соотношение (3.3).

Авторы выражают глубокую благодарность Р. А. Минлосу за внимание и полезные советы, а также рецензенту за ценные критические замечания.

Список литературы

1. S. Albeverio, S. N. Lakaev, K. A. Makarov, Z. I. Muminov, “The threshold effects for the two-particle Hamiltonians on lattices”, *Comm. Math. Phys.*, **262**:1 (2006), 91–115.
2. M. Klaus, B. Simon, “Coupling constant thresholds in nonrelativistic quantum mechanics. I. Short-range two-body case”, *Ann. Physics*, **130**:2 (1980), 251–281.
3. С. Н. Лакаев, “Дискретный спектр и резонансы одномерного оператора Шрёдингера при малых константах связи”, *ТМФ*, **44**:3 (1980), 381–386; англ. пер.: S. N. Lakaev, “Discrete spectrum and resonances of a one-dimensional Schrödinger operator for small values of the coupling constants”, *Theoret. and Math. Phys.*, **44**:3 (1980), 810–814.
4. С. Н. Лакаев, “Связанные состояния и резонансы N -частичного дискретного оператора Шрёдингера”, *ТМФ*, **91**:1 (1992), 51–65; англ. пер.: S. N. Lakaev, “Bound states and resonances of N -particle discrete Schrödinger operator”, *Theoret. and Math. Phys.*, **91**:1 (1992), 362–372.
5. С. Н. Лакаев, Ш. М. Тилавова, “Слияние собственных значений и резонансов двухчастичного оператора Шрёдингера”, *ТМФ*, **101**:2 (1994), 235–252; англ. пер.: S. N. Lakaev, Sh. M. Tilavova, “Merging of eigenvalues and resonances of a two-particle Schrödinger operator”, *Theoret. and Math. Phys.*, **101**:2 (1994), 1320–1331.
6. С. Н. Лакаев, “Дискретный спектр обобщенной модели Фридрихса”, *Докл. АН УзССР*, **4** (1979), 9–10.
7. С. Н. Лакаев, “Некоторые спектральные свойства обобщенной модели Фридрихса”, Тр. сем. им. И. Г. Петровского, **11**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1986, 210–238; англ. пер.: S. N. Lakaev, “Some spectral properties of the generalized Friedrichs model”, *J. Soviet Math.*, **45**:6 (1989), 1540–1565.

8. Е. Л. Лакштанов, Р. А. Минлос, “Спектр двухчастичных связанных состояний трансфер-матриц гиббсовских полей (уединенное связанное состояние)”, *Функц. анализ и его прил.*, **38**:3 (2004), 52–69; англ. пер.: E. L. Lakshtanov, R. A. Minlos, “The spectrum of two-particle bound states for the transfer matrices of Gibbs fields (an isolated bound state)”, *Funct. Anal. Appl.*, **38**:3 (2004), 202–216.
9. Е. Л. Лакштанов, Р. А. Минлос, “Спектр двухчастичных связанных состояний трансфер-матриц гиббсовских полей (поля на двумерной решетке: прилегающие уровни)”, *Функц. анализ и его прил.*, **39**:1 (2005), 39–55; англ. пер.: E. L. Lakshtanov, R. A. Minlos, “Two-particle bound state spectrum of transfer matrices for Gibbs fields (fields on the two-dimensional lattice. Adjacent levels)”, *Funct. Anal. Appl.*, **39**:1 (2005), 31–45.
10. С. Н. Лакаев, “Об эффекте Ефимова в системе трех одинаковых квантовых частиц”, *Функц. анализ и его прил.*, **27**:3 (1993), 15–28; англ. пер.: S. N. Lakaev, “On Efimov’s effect in a system of three identical quantum particles”, *Funct. Anal. Appl.*, **27**:3 (1993), 166–175.
11. A. V. Sobolev, “The Efimov effect. Discrete spectrum asymptotics”, *Comm. Math. Phys.*, **156**:1 (1993), 101–126.
12. Д. Р. Яфаев, “К теории дискретного спектра трехчастичного оператора Шрёдингера”, *Матем. сб.*, **94(136)**:4(8) (1974), 567–593; англ. пер.: D. R. Jafaev, “On the theory of the discrete spectrum of the three-particle Schrödinger operator”, *Math. USSR-Sb.*, **23**:4 (1974), 535–559.
13. Н. Tamura, “The Efimov effect of three-body Schrödinger operators”, *J. Funct. Anal.*, **95**:2 (1991), 433–459.
14. S. Albeverio, S. N. Lakaev, Z. I. Muminov, “Schrödinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics”, *Ann. Henri Poincaré*, **5**:4 (2004), 743–772.
15. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. IV: *Анализ операторов*, Мир, М., 1982; пер. с англ.: M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics*, v. IV: *Analysis of operators*, Academic Press, New York–London, 1978.
16. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972; пер. с англ.: T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1966.
17. S. N. Lakaev, Sh. Yu. Holmatov, “Asymptotics of eigenvalues of two-particle Schrödinger operators on lattices with zero range interaction”, *J. Phys. A*, **44**:13 (2011).
18. C. Boldrighini, R. A. Minlos, A. Pellegrinotti, “Random walks in quenched i.i.d. space-time random environment are always a.s. diffusive”, *Probab. Theory Related Fields*, **129**:1 (2004), 133–156.
19. Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики*, т. 2: *Уравнения с частными производными*, Мир, М., 1964; пер. с англ.: R. Courant, D. Hilbert, *Methods of mathematical physics*, v. 2: *Partial differential equations*, Wiley, New York, 1989.

С. Н. ЛАКАЕВ (S. N. LAKAEV)
 Самаркандский государственный университет
 им. А. Навои, Узбекистан
E-mail: slakaev@mail.ru

Поступило в редакцию
 01.03.2011
 24.10.2011

Ш. Ю. ХОЛМАТОВ (SH. YU. HOLMATOV)
 Самаркандский государственный университет
 им. А. Навои, Узбекистан
E-mail: shohruhho1@mail.ru