Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Д. Киселев, Поля разложения конечных групп, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2012, том 76, выпуск 6, 95–106

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7331>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 08:37:40

УДК 512.547.2

Д. Д. Киселев

Поля разложения конечных групп

Дано более простое доказательство теоремы Голдшмидта–Айзекса для случая $p > 2$. Приведены новые достаточные условия применимости теоремы Голдшмидта–Айзекса для случая $p = 2$. Как следствие, доказана теорема об оценке индекса Шура произвольного неприводимого комплексного представления конечной группы над полем рациональных чисел. Из доказательства указанной теоремы об оценке выведен факт о том, что в практических приложениях нет необходимости проверять достаточные условия применимости теоремы Голдшмидта–Айзекса для случая $p = 2$, их заведомо можно считать выполненными. Также доказана теорема о связи реализуемости любого комплексного представления конечной группы нечетного порядка специального типа над полем рациональных чисел и возможности построения правильных многоугольников циркулем и линейкой.

Библиография: 6 наименований.

Ключевые слова: конечная группа, представление конечной группы, индекс Шура.

§ 1. Введение

1.1. История вопроса. Теория полей разложения конечных групп имеет свое начало, пожалуй, от фундаментальной теоремы Брауэра о реализуемости любого комплексного представления произвольной конечной группы экспоненты n в поле $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{1})$. Данный результат послужил толчком для дальнейших исследований. А именно, было доказано, что любое абсолютно неприводимое представление произвольной конечной группы G над алгебраически замкнутым полем ненулевой характеристики p реализуется в поле $\mathbb{F}_p(\chi)$, где χ – характер представления. Этот факт оказался тесно связан с теоремой Веддербарна о том, что всякое конечное тело является полем.

Поэтому возникла задача описания минимальных полей разложения произвольной конечной группы G в нулевой характеристике. Было введено фундаментальное понятие индекса Шура как некой числовой характеристики “расстояния” поля разложения абсолютно неприводимого характера χ относительно фиксированного поля, содержащего все значения характера χ . Были доказаны теоремы о свойствах индекса Шура над произвольным полем и полными полями, установлена связь индекса Шура над глобальным полем с индексами Шура над пополнениями этого поля.

Следующая теорема Шиллинга–Витта–Рокетта (см. [1, теорема 41.9]) практически полностью решает проблему индекса Шура для конечных p -групп.

ТЕОРЕМА 1.1 (О. Шиллинг, И. Витт, П. Рокетт). Пусть G – конечная p -группа, K – поле нулевой характеристики. Тогда для любого характера $\chi \in \text{Irr } G$ выполнено $m_K(\chi) = 1$, если $p > 2$. Если же $p = 2$, то $m_K(\chi) \leq 2$.

Некоторым обобщением теоремы 1.1 является теорема Фонга. Ее доказательство изложено, например, в [2, теорема 4.2.5].

ТЕОРЕМА 1.2 (П. Фонг). Пусть G – конечная группа порядка $n = p^s t$, где p – нечетное простое число, причем $(t, p) = 1$. Тогда для любого характера $\chi \in \text{Irr } G$ выполнено $m_{K(\sqrt[t]{1})}(\chi) = 1$, где K – поле нулевой характеристики.

Легко видеть, что теоремы Фонга и Шиллинга–Витта–Рокетта связаны тем, что группа Галуа $\text{Gal}(K(\sqrt[t]{1})/K)$ в них оказывается циклической. В обобщение этой идеи была доказана следующая (см. [3, теорема 1])

ТЕОРЕМА 1.3 (Д. М. Голдшмидт, И. М. Айзекс). Пусть G – конечная группа экспоненты n , K – любое поле нулевой характеристики. Пусть $\text{Gal}(K(\sqrt[n]{1})/K)$ – циклическая p -группа. Если $p = 2$, дополнительно предположим, что $\sqrt{-1} \in K$. Тогда для любого характера $\chi \in \text{Irr } G$ выполнено $m_K(\chi) = 1$.

1.2. Результаты работы. В настоящей работе дается более простое доказательство теоремы Голдшмидта–Айзека для случая $p > 2$ с применением теоремы Фонга, доказательство которой изложено независимо от теоремы Голдшмидта–Айзека в [2, теорема 4.2.5]. Заметим, что оригинальное доказательство теоремы Голдшмидта–Айзека, полученное в [3], не опирается на теорему Фонга. Вместо этого теорема Фонга получается как простое следствие.

В работе получены новые достаточные условия применимости теоремы Голдшмидта–Айзека в случае $p = 2$. А именно, условие принадлежности элемента $\sqrt{-1}$ основному полю несколько ослаблено.

ТЕОРЕМА 1.4 (алгоритмический признак). Пусть G – конечная группа экспоненты n , K – произвольное поле нулевой характеристики. Обозначим через F поле в башне $\mathbb{Q} \subset F \subset \mathbb{Q}(\sqrt[n]{1})$ с условием $\text{Gal}(K(\sqrt[n]{1})/K) \cong \text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[n]{1})/F)$. Предположим, что при каноническом вложении группы $\text{Gal}(K(\sqrt[n]{1})/K)$ в группу $\mathbb{Z}_n^*$ выполняется условие $\text{Gal}(K(\sqrt[n]{1})/K) \not\subseteq A_2$, где A_2 – подгруппа в $\mathbb{Z}_n^*$, изоморфная $\mathbb{Z}_{2^{\nu_2(n)}}$. Если $\text{Gal}(K(\sqrt[n]{1})/K)$ – циклическая группа, причем $F \not\subseteq \mathbb{R}$, то для любого характера $\chi \in \text{Irr } G$ выполнено $m_K(\chi) = 1$.

ТЕОРЕМА 1.5. Пусть G – конечная группа экспоненты n , K – произвольное поле нулевой характеристики. Построим поле F по полю K согласно формулировке алгоритмического признака. Пусть $\text{Gal}(K(\sqrt[n]{1})/K)$ – циклическая группа, $F \not\subseteq \mathbb{R}$ и

$$\nu_2\left(\min\left\{t \in \mathbb{N} \mid \frac{2^t - 1}{n_{2'}} \in \mathbb{N}\right\}\right) = \nu_2(\varphi(n_{2'})).$$

Тогда для любого характера $\chi \in \text{Irr } G$ выполнено $m_K(\chi) = 1$.

Заметим, что в формулировках теорем 1.4, 1.5 поле F можно заменить на поле F_1 , отвечающее силовой 2-подгруппе в $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[n]{1})/F)$.

Следующая теорема дает оценку индекса Шура неприводимого комплексного характера χ конечной группы G над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Указанная оценка “равномерна” по всем конечным группам экспоненты n или по всем конечным группам порядка n .

ТЕОРЕМА 1.6 (об оценке). Пусть G – конечная группа порядка (или экспоненты) n . Пусть m – порядок какой-нибудь максимальной циклической подгруппы в группе $\mathbb{Z}_n^*$. Если $n \neq 4$, то $m_{\mathbb{Q}}(\chi) \mid \frac{\varphi(n)}{m}$ для любого $\chi \in \text{Irr } G$.

Также устанавливается следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.7. Пусть G – конечная группа экспоненты n . Пусть $n = p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s}$ – каноническое разложение числа n на простые множители. Положим $m = p_1 \cdots p_s$. Если $2 \nmid m$ и правильный m -угольник допускает построение циркулем и линейкой, то для любого характера $\chi \in \text{Irr } G$ выполнено $m_{\mathbb{Q}}(\chi) = 1$.

1.3. Обозначения. Обозначения во многом стандартны и поясняются по ходу работы. Тем не менее, во избежание недопонимания, приведем некоторые из них: $m_K(\chi)$ – индекс Шура неприводимого комплексного характера χ конечной группы G относительно поля K (при этом всегда будет предполагаться, что характеристика поля K нулевая); ε_n – примитивный корень степени n из единицы в алгебраическом замыкании поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$; $\bar{K}$ – алгебраическое замыкание поля K или же переход к полю вычетов в зависимости от контекста; $K \cdot L$ – композит полей алгебраических чисел K и L в поле $\mathbb{Q}$; $(A : B)$ – индекс алгебраической подструктуры B в алгебраической структуре A (например, запись $(\mathbb{Q}(\varepsilon_n) : \mathbb{Q})$ обозначает степень поля $\mathbb{Q}(\varepsilon_n)$ над $\mathbb{Q}$); $\mathbb{Z}_n$ – кольцо классов вычетов по модулю n или произвольный представитель класса циклических групп порядка n ; $\mathbb{Z}_n^*$ – группа обратимых по умножению элементов кольца вычетов $\mathbb{Z}_n$; R^* – мультипликативная группа ассоциативного кольца R с единицей; R_K – кольцо целых алгебраических чисел поля алгебраических чисел K ; K_P – P -адическое пополнение поля алгебраических чисел K , где P – либо конечный, либо бесконечный простой идеал кольца R_K ; $B(K)$ – группа Брауэра поля K ; $B(L/K)$ – подгруппа группы $B(K)$, состоящая из расщепляемых в расширении L/K классов центрально-простых K -алгебр; $\text{inv}_{K_P}[A]$ – инвариант Хассе класса $[A] \in B(K_P)$; $\text{index}_K[A]$ – индекс класса алгебр $[A] \in B(K)$ (поле K в обозначении индекса может не указываться); $f(A/B)$ – степень инерции локального поля A над своим локальным подполем B ; $e(A/B)$ – индекс ветвления локального поля A над своим локальным подполем B ; $\langle X \rangle$ – подгруппа, порожденная множеством X ; $N_{L/K}(L)$ – множество элементов поля K , представимых в виде нормы элементов из поля L (предполагается, что расширение L/K является конечным нормальным и сепарабельным расширением); $\nu_p(n)$ – кратность простого числа p в каноническом разложении натурального числа n на простые множители; n_p – p -часть натурального числа n , где p – простое число; $n_{p'}$ – p' -часть натурального числа n , где p – простое число.

Запись $i \in \overline{m}, \overline{n}$ означает, что натуральный индекс i пробегает в порядке возрастания множество натуральных чисел от m до n включительно. Предполагается, конечно, что $m \leq n$.

§ 2. Доказательство теорем

2.1. Доказательство теоремы Голдшмидта–Айзекса. Приведем более простое доказательство теоремы 1.3 для случая $p > 2$.

Фиксируем произвольную конечную группу G порядка $n = p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s}$. Также фиксируем $\chi \in \text{Irr } G$. Докажем, что $m_K(\chi) = 1$. Обозначим, далее, через $A(K, \chi)$ простую компоненту групповой алгебры KG , соответствующую характеру χ . Сначала заметим, что поле нулевой характеристики K , фигурирующее в теореме 1.3, можно считать вложенным в $\mathbb{Q}(\varepsilon_n)$. Можно также считать, что $\varepsilon_n = e^{2\pi i/n}$. Действительно, пусть K – произвольное поле нулевой характеристики; тогда $\text{Gal}(K(\varepsilon_n)/K)$ является с точностью до изоморфизма подгруппой в $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\varepsilon_n)/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_n^*$. В силу фундаментального соответствия Галуа найдется единственное (с точностью до изоморфизма) поле F такое, что $\mathbb{Q} \subset F \subset \mathbb{Q}(\varepsilon_n)$, причем $\text{Gal}(K(\varepsilon_n)/K) \cong \text{Gal}(\mathbb{Q}(\varepsilon_n)/F)$. Более того, $F = \mathbb{Q}(\theta)$ в силу теоремы о примитивном элементе. В частности, найдется многочлен $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ такой, что $\theta = f(\varepsilon_n)$. Поскольку $\theta^\sigma = \theta$ для любого $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\varepsilon_n)/F)$, то в силу того, что σ действует на $\mathbb{Q}$ тождественно, а на ε_n – как возведение в некоторую степень, следует $\theta^\sigma = \theta$ для любого $\sigma \in \text{Gal}(K(\varepsilon_n)/K)$, так как можно считать $\mathbb{Q} \subset K$. Итак, $F \subset K$.

Если теперь теорема 1.3 доказана для поля F , то, очевидно, она доказана и для K . Поэтому далее до конца доказательства будем считать, что K – поле алгебраических чисел, лежащее в $\mathbb{Q}(\varepsilon_n)$.

Напомним, что по условию $\text{Gal}(K(\varepsilon_n)/K)$ является циклической p -группой при $p > 2$. Поскольку решетка подгрупп конечной циклической p -группы является линейно упорядоченным по включению множеством, из фундаментального соответствия Галуа следует, что все поля в цепочке $K \subset K(\varepsilon_n)$ также представляют линейно упорядоченное множество по включению. Можно поэтому считать, что

$$K \subseteq K(\varepsilon_{p_1^{k_1}}) \subseteq K(\varepsilon_{p_2^{k_2}}) \subseteq \cdots \subseteq K(\varepsilon_{p_1^{k_1}}) \subseteq K(\varepsilon_n) = \mathbb{Q}(\varepsilon_n).$$

Докажем, что на самом деле $K(\varepsilon_{p_1^{k_1}}) = K(\varepsilon_n)$. Рассмотрим произведение $\varepsilon_{p_1^{k_1}} \cdots \varepsilon_{p_s^{k_s}}$ и заметим, что

$$\varepsilon_{p_j^{k_j}} = \varepsilon_n^{n_{p_j'}} = \exp\left\{\frac{2\pi i}{p_j^{k_j}}\right\},$$

поэтому

$$\varepsilon_{p_1^{k_1}} \cdots \varepsilon_{p_s^{k_s}} = \exp\left\{2\pi i \frac{\sum_{j=1}^s p_1^{k_1} \cdots p_{j-1}^{k_{j-1}} p_{j+1}^{k_{j+1}} \cdots p_s^{k_s}}{n}\right\}.$$

Однако число $\sum_{j=1}^s p_1^{k_1} \cdots p_{j-1}^{k_{j-1}} p_{j+1}^{k_{j+1}} \cdots p_s^{k_s}$ взаимно просто с n . Это означает, что поле $K(\varepsilon_{p_1^{k_1}})$ содержит некоторый примитивный корень степени n из единицы. В силу нормальности расширения $K(\varepsilon_{p_1^{k_1}})/K$ заключаем, что $K(\varepsilon_{p_1^{k_1}}) = K(\varepsilon_n) = \mathbb{Q}(\varepsilon_n)$.

Теперь в силу теоремы Хассе–Брауэра–Нётер–Альберта [1, теорема 32.11] достаточно доказать, что

$$\text{index}_{K_P}[K_P \otimes_K A(K, \chi)] = 1$$

для любого простого идеала P кольца R_K целых алгебраических чисел поля K , включая бесконечные (так как $m_K(\chi) = m_{K(\chi)}(\chi)$, без ограничения общности можно считать, что $K = K(\chi)$). Если P – бесконечный комплексный идеал, то $\text{index}_{K_P}[K_P \otimes_K A(K, \chi)] = 1$. Если P – вещественный идеал, то

$$\text{index}_{K_P}[K_P \otimes_K A(K, \chi)] \mid 2.$$

Однако легко видеть, что $\text{Gal}(K_P(\varepsilon_n)/K_P)$ является p -группой, но $p > 2$, а

$$\text{index}_{K_P(\varepsilon_n)}[K_P(\varepsilon_n) \otimes_{K_P} (K_P \otimes_K A(K, \chi))] = 1.$$

Поэтому $\text{index}_{K_P}[K_P \otimes_K A(K, \chi)] = 1$.

Значит, достаточно ограничиться рассмотрением лишь неархимедовых пополнений поля K . Возьмем какое-нибудь простое число $q \in \{p_i \mid i = \overline{1, s-1}\}$ и выберем любой простой идеал $\mathfrak{p} \triangleleft R_K$, содержащий $q\mathbb{Z}$.

Докажем, что расширение $K(\varepsilon_{p_1^{k_1}})/K$ неразветвлено по $\mathfrak{p}$. Действительно, как мы знаем, в расширении $K_{\mathfrak{p}}(\varepsilon_{p_1^{k_1}})/K_{\mathfrak{p}}$ существует единственное поле инерции W :

$$K_{\mathfrak{p}} \subseteq W \subseteq K_{\mathfrak{p}}(\varepsilon_{p_1^{k_1}}).$$

Поскольку $f(K_{\mathfrak{p}}(\varepsilon_{p_1^{k_1}})/W) = 1$, в силу сепарабельности многочлена $x^{p_s^{k_s}} - 1 \in \mathbb{F}_q[x]$ и леммы Гензеля получаем, что $W = K_{\mathfrak{p}}(\varepsilon_{p_1^{k_1}})$. Это и означает неразветвленность расширения $K_{\mathfrak{p}}(\varepsilon_{p_1^{k_1}})/K_{\mathfrak{p}}$.

Известно, что $A(K, \chi)$ – центрально-простая компонента групповой алгебры KG . Более того,

$$[A(K, \chi)] = [(K(\varepsilon_{p_1^{k_1}})/K, f)]$$

в группе $B(K(\varepsilon_{p_1^{k_1}})/K)$, где

$$f: \text{Gal}(K(\varepsilon_{p_1^{k_1}})/K) \times \text{Gal}(K(\varepsilon_{p_1^{k_1}})/K) \rightarrow K(\varepsilon_{p_1^{k_1}})^*.$$

В силу доказательства теоремы Бенарда–Шахера (см. [4, теорема 74.20]) можно считать, что $\text{Im } f \subseteq \langle \varepsilon_n \rangle$. Однако любая скрещенная алгебра $(L/K, f)$ в случае циклического расширения Галуа L/K является циклической. В рассматриваемом случае это означает, что

$$[A(K, \chi)] = [(K(\varepsilon_{p_1^{k_1}})/K, f)] = [(K(\varepsilon_{p_1^{k_1}})/K, \sigma, a)],$$

где σ порождает группу $\text{Gal}(K(\varepsilon_{p_1^{k_1}})/K)$, а элемент $a = \prod_{j=0}^{p^r-1} f_{\sigma^j, \sigma}$ принадлежит K^* . Здесь p^r обозначает порядок элемента σ в соответствующей группе Галуа.

В силу свойств циклических алгебр получаем, что $\text{index}_{K_{\mathfrak{p}}}[K_{\mathfrak{p}} \otimes_K A(K, \chi)] = 1$ тогда и только тогда, когда $a \in N_{K_{\mathfrak{p}}(\varepsilon_{p_1^{k_1}})/K_{\mathfrak{p}}}(K_{\mathfrak{p}}(\varepsilon_{p_1^{k_1}}))$. Заметим, что элемент a равен произведению некоторых корней степени n из единицы. Это означает, что $\nu_1(a) = 0$, где ν_1 – экспоненциальное нормирование поля $K_{\mathfrak{p}}(\varepsilon_{p_1^{k_1}})$. Через ν обозначим экспоненциальное нормирование поля $K_{\mathfrak{p}}$. Тогда $\nu_1 = e \cdot \nu$ на поле $K_{\mathfrak{p}}$, где e – индекс ветвления расширения $K_{\mathfrak{p}}(\varepsilon_{p_1^{k_1}})/K_{\mathfrak{p}}$. Поскольку $e \in \mathbb{N}$, то $\nu(a) = 0$. Поэтому можно воспользоваться леммой о норменной разрешимости (см. [1, теорема 14.1]) для неразветвленного расширения $K_{\mathfrak{p}}(\varepsilon_{p_1^{k_1}})/K_{\mathfrak{p}}$ и

элемента a , согласно которой $a \in N_{K_p(\varepsilon_{p_1^{k_1}})/K_p}(K_p(\varepsilon_{p_1^{k_1}}))$. В силу свойств циклических алгебр это означает, что

$$\text{index}_{K_p}[K_p \otimes_K A(K, \chi)] = 1.$$

Возьмем произвольный простой идеал $P \triangleleft R_K$, содержащий $p_s \mathbb{Z}$. Чтобы доказать теорему Голдшмидта–Айзекса для случая $p > 2$, надо теперь лишь показать, что $\text{index}_{K_P}[K_P \otimes_K A(K, \chi)] = 1$.

Заметим, что расширение $K_P(\varepsilon_{p_1^{k_1}})/K_P$ вполне разветвлено. В частности, в силу равенства $K(\varepsilon_{p_1^{k_1}}) = K(\varepsilon_n)$ это означает, что $f(K_P(\varepsilon_{n_{p'_s}})/K_P) = 1$, но многочлен $x^{n_{p'_s}} - 1 \in \mathbb{F}_{p_s}[x]$ является сепарабельным. В силу леммы Гензеля имеем, что $\varepsilon_{n_{p'_s}} \in K_P$. Нам понадобится теорема Фонга, формулировка которой приведена во введении.

Если $p_s > 2$, то, воспользовавшись теоремой Фонга для нашего случая, получаем $\text{index}_{K_P}[K_P \otimes_K A(K, \chi)] = 1$. Если $p_s = 2$, то воспользуемся тем (см. [2, теорема 4.2.8]), что $m_{\mathbb{Q}_2}(\chi) \mid 2$, но в этом случае $\text{Gal}(K(\varepsilon_n)/K) - p$ -группа, причем $p > 2$. Будем считать, что $m_{\mathbb{Q}_2}(\chi) = 2$. Мы знаем, что группа разложения $\text{Gal}(K_P(\varepsilon_n)/K_P)$ изоморфно вкладывается в группу $\text{Gal}(K(\varepsilon_n)/K)$ (см. [5, предложение 10.3]). Далее, пусть $F_1 := \mathbb{Q}_2(\chi)$, $F_2 := K_P(\chi)$. Заметим, что $m_{K_P}(\chi) = 1$ тогда и только тогда, когда $2 \mid (F_2 : F_1)$ (см. [1, теорема 32.15]). Пусть

$$2 \nmid (F_2 : F_1);$$

тогда, так как $m_{K_P(\varepsilon_n)}(\chi) = 1$, должно быть выполнено условие $2 \mid (K_P(\varepsilon_n) : F_1)$. Однако число $(K_P(\varepsilon_n) : F_1) = (K_P(\varepsilon_n) : F_2)(F_2 : F_1)$ является нечетным. Это означает, что $m_{K_P}(\chi) = 1$, или, что то же самое,

$$\text{index}_{K_P}[K_P \otimes_K A(K, \chi)] = 1.$$

Из теоремы Хассе–Брауэра–Нётер–Альберта теперь следует, что $m_K(\chi) = 1$. Тем самым, теорема 1.3 доказана.

Приведем комментарии к случаю $p = 2$.

Из рассмотрения случая $p > 2$ следует, что (с учетом тех же обозначений) при $p = 2$ достаточно исследовать вопрос об индексе Шура характера $\chi \in \text{Irr } G$ в следующих предположениях, которые в силу доказательства теоремы 1.3 не ограничивают общность:

$$\varepsilon_{n'_2} \in K, \quad K \subset \mathbb{Q}(\varepsilon_n), \quad p_s = 2.$$

Действительно, в формулировке теоремы 1.3 для случая $p = 2$ присутствует дополнительное условие $\sqrt{-1} \in K$. Если подполе F поля $\mathbb{Q}(\varepsilon_n)$ выбрано так, чтобы $\text{Gal}(K(\varepsilon_n)/K) \cong \text{Gal}(\mathbb{Q}(\varepsilon_n)/F)$, то легко видеть, что также $\sqrt{-1} \in F$. Это означает, что $m_{F_P}(\chi) = 1$ по всем архимедовым пополнениям поля F . Мы не будем доказывать теорему 1.3 для случая $p = 2$. Вместо этого здесь мы рассмотрим простой пример того, что условие $\sqrt{-1} \in K$ существенно для справедливости теоремы 1.3. Для краткости будем в дальнейшем называть это условие *условием сильной неведущести*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть поле F , однозначно определяемое по полю K , обладает свойством неведущести: $F \not\subset \mathbb{R}$. Будем говорить в этом случае, что *поле K удовлетворяет условию слабой неведущести*.

Ясно, что условие слабой неведущести нельзя игнорировать, так как существуют конечные группы (доказательство этого факта см. ниже), имеющие неприводимые комплексные представления, не реализуемые в поле вещественных чисел $\mathbb{R}$. Однако выполнения условия слабой неведущести недостаточно для справедливости теоремы 1.3.

ПРИМЕР 2.1. Положим $G := \mathbb{Z}_{31} \times Q_8$, где Q_8 – группа кватернионов порядка 8. Легко видеть, что $\exp G = 124 = 31 \cdot 4$. Возьмем поле $K := \mathbb{Q}(\varepsilon_{31})$. Тогда для поля K выполнено условие слабой неведущести, но не выполнено условие сильной неведущести. Далее, $\text{Gal}(K(\varepsilon_{124})/K) = \text{Gal}(K(i)/K)$ – циклическая группа порядка 2. Покажем, доказав следующую лемму, что найдется характер $\chi \in \text{Irr } G$ такой, что $m_K(\chi) = 2$.

ЛЕММА 2.1. *Существует характер $\psi \in \text{Irr } Q_8$ такой, что $m_{\mathbb{Q}}(\psi) = 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим точное двумерное неприводимое комплексное представление группы Q_8 в матричной реализации:

$$Q_8 = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Докажем, что указанное представление не реализуется над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Пусть это не так. Тогда обозначим через $\{U(g) \mid g \in Q_8\}$ матричное представление над $\mathbb{Q}$. Ясно, что

$$U(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U(-1) = -U(1), \quad U(i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из условия $ij = -ji$ получим, что

$$U(j) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

Поскольку $j^2 = -1$, то $a^2 + b^2 = -1$, но это равенство невозможно над полем $\mathbb{Q}$. Лемма доказана.

Положим $\chi = 1_{\mathbb{Z}_{31}} \cdot \psi$, где $\psi \in \text{Irr } Q_8$ такой, что $m_{\mathbb{Q}}(\psi) = 2$. Докажем, что $m_K(\chi) = 2$. Легко видеть, что

$$\min\{t \in \mathbb{N} \mid 31 \mid (2^t - 1)\} = 5.$$

В силу теоремы Куммера (см. [6, теорема 4.40]) можно заключить, что $(\mathbb{Q}_2(\varepsilon_{31}) : \mathbb{Q}_2) = 5$. Заметим, что $K_P \cong \mathbb{Q}_2(\varepsilon_{31})$ по определению поля K (здесь P – произвольный простой идеал кольца R_K , лежащий над $2\mathbb{Z}$). Теперь достаточно показать, что $m_K(\psi) = 2$. Заметим, что $\mathbb{Q}(\psi) = \mathbb{Q}$. Из леммы 2.1 и тождества Хассе (см. [1, формула 32.13a]) следует, что $m_{\mathbb{Q}_2}(\psi) = 2$. Однако если $m_{\mathbb{Q}_2(\varepsilon_{31})}(\psi) = 1$, то $2 \mid 5$, что неверно. Так как $(\mathbb{Q}_2(\varepsilon_{142}) : \mathbb{Q}_2(\varepsilon_{31})) = 2$ в силу теоремы Куммера, то $m_{\mathbb{Q}_2(\varepsilon_{31})}(\psi) = 2$, но тогда $m_K(\psi) = 2$, что и требовалось показать. Таким образом, пример полностью рассмотрен.

Пример 2.1 показывает, что аналог теоремы Фонга, вообще говоря, неверен (если $\text{Gal}(K(\varepsilon_n)/K)$ является циклической 2-группой и $K(\varepsilon_n) = K(\varepsilon_{n_2})$). Можно рассмотреть более тонкий вопрос. Так как $\mathbb{Z}_{2^s}^* \cong \langle -1 \rangle_2 \times \langle 5 \rangle_{2^{s-2}}$ при $s \geq 2$, условие $\sqrt{-1} \in K$ дает возможность сформулировать следующий аналог теоремы Фонга (так как $i^5 = i$, то $\text{Gal}(K(\varepsilon_n)/K) \leq \langle 5 \rangle_{2^{s-2}}$ с точностью до

изоморфизма, а $\langle 5 \rangle_{2^{s-2}}$ – одна из двух максимальных по порядку циклических подгрупп в $\mathbb{Z}_{2^s}^*$ в случае $s > 3$).

ГИПОТЕЗА. Пусть G – конечная группа порядка $n = 2^s m$, $2 \nmid m$. Возьмем поле нулевой характеристики K такое, чтобы $\varepsilon_m \in K$ и $\text{Gal}(K(\varepsilon_n)/K)$ – циклическая группа порядка больше 2. Тогда $m_K(\chi) = 1$ для любого характера $\chi \in \text{Irr } G$.

2.2. Новые достаточные условия. Здесь мы сформулируем и докажем новые достаточные условия, которые делают справедливой теорему Голдшмидта–Айзекса для случая $p = 2$. Как было отмечено, условие сильной невестественности обеспечивает справедливость утверждения. Также на примере 2.1 было установлено, что условия слабой невестественности недостаточно. Тем не менее, ясно, что условие слабой невестественности в некотором смысле необходимо для справедливости утверждения “равномерно” по всем конечным группам экспоненты n . Поэтому новые достаточные условия направлены на смягчение сильного условия невестественности, которое налагает достаточно строгие ограничения на поле K .

2.2.1. Алгоритмический признак. Как было видно из доказательства теоремы 1.3, наиболее сложный случай возникал при $p = 2$ и $p_s = 2$. Формулируемый ниже алгоритмический признак гарантирует выполнение условия $p_s > 2$.

Заметим, что в силу китайской теоремы об остатках справедливо разложение

$$\mathbb{Z}_n^* = A_1 \times \cdots \times A_s,$$

где $n = p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s}$, $A_i \cong \mathbb{Z}_{p_i^{k_i}}^*$.

ТЕОРЕМА 2.1 (алгоритмический признак). Пусть G – конечная группа экспоненты n . Пусть также K – произвольное поле нулевой характеристики, удовлетворяющее условию слабой невестественности, причем $\text{Gal}(K(\varepsilon_n)/K)$ является циклической 2-группой с условием $\text{Gal}(K(\varepsilon_n)/K) \not\subseteq \mathbb{Z}_{2^{\nu_2(n)}}^*$, где $\mathbb{Z}_{2^{\nu_2(n)}}^* \cong A_{2^{\nu_2(n)}}$. Тогда для любого $\chi \in \text{Irr } G$ выполнено $m_K(\chi) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если доказать, что $K(\varepsilon_n) \neq K(\varepsilon_{2^{\nu_2(n)}})$, то в силу доказательства теоремы 1.3 получим искомое утверждение. Для удобства обозначим $k := \nu_2(n)$. Условие $K(\varepsilon_n) \neq K(\varepsilon_{2^k})$ эквивалентно тому, что найдется некоторый неединичный автоморфизм $\sigma \in \text{Gal}(K(\varepsilon_n)/K)$ такой, что $\varepsilon_{2^k}^\sigma = \varepsilon_{2^k}$. Поскольку $\varepsilon_{2^k} = \varepsilon_n^{n_{2'}}$, для выполнения условия $K(\varepsilon_n) \neq K(\varepsilon_{2^k})$ необходимо и достаточно, чтобы нашлось некоторое число $t \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ (лежащее с точностью до изоморфизма в группе $\text{Gal}(K(\varepsilon_n)/K)$), взаимно простое с n , причем $\varepsilon_n^{tn_{2'}} = \varepsilon_n^{n_{2'}}$. Ясно, что это выполнено тогда и только тогда, когда

$$n \mid ((t-1)n_{2'}) \iff 2^k \mid (t-1).$$

Если $\text{Gal}(K(\varepsilon_n)/K) \not\subseteq \mathbb{Z}_{2^k}^*$, то можно отождествить $\mathbb{Z}_{2^k}^*$ с подгруппой в $\mathbb{Z}_n^*$, но это означает, что найдется число $t \in \text{Gal}(K(\varepsilon_n)/K)$ (после проведения всех отождествлений) такое, что $t \equiv 1 \pmod{2^k}$, откуда следует требуемое утверждение.

Особенностью алгоритмического признака является его эффективность, т.е. возможность проверить с помощью простого алгоритма. Более того, при

выполнении без ограничения общности условия слабой неведущести можно считать, что $\text{Gal}(K(\varepsilon_n)/K) \cong \mathbb{Z}_{2^{\nu_2(n)}}^*$ (это следует из доказательства теоремы Голдшмидта–Айзекса, в силу которого при выполнении условия слабой неведущести можно считать, что $\varepsilon_{n_{p_s'}} \in K, K(\varepsilon_n) = K(\varepsilon_{p_1^{k_1}})$).

2.2.2. Другой достаточный признак. Сформулируем более абстрактную теорему о достаточных условиях применимости теоремы 1.3.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть G – конечная группа экспоненты n . Пусть, далее, поле нулевой характеристики K удовлетворяет условию слабой неведущести, причем $\text{Gal}(K(\varepsilon_n)/K)$ – циклическая 2-группа. Если

$$\nu_2(\min\{t \in \mathbb{N} : n_{2^t} \mid (2^t - 1)\}) = \nu_2(\varphi(n_{2^t})),$$

то для любого $\chi \in \text{Irr } G$ выполнено $m_K(\chi) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если считать, что выполнен алгоритмический признак, то утверждение теоремы тривиально. Поэтому будем считать, что алгоритмический признак не выполнен, но тогда можно считать без ограничения общности, что

$$\varepsilon_{n_{2^t}} \in K, \quad K(\varepsilon_n) = K(\varepsilon_{n_2}).$$

По теореме Куммера (см. [6, теорема 4.40]) расширение $\mathbb{Q}_2(\varepsilon_{n_{2^t}})/\mathbb{Q}_2$ неразветвлено. Условие теоремы означает, что число $\frac{(\mathbb{Q}(\varepsilon_{n_{2^t}}):\mathbb{Q})}{(\mathbb{Q}_2(\varepsilon_{n_{2^t}}):\mathbb{Q}_2)}$ нечетно. Выберем поле F так, чтобы

$$\mathbb{Q} \subset F \subset \mathbb{Q}(\varepsilon_n),$$

причем

$$\text{Gal}(K(\varepsilon_n)/K) \cong \text{Gal}(\mathbb{Q}(\varepsilon_n)/F).$$

Тогда число простых идеалов кольца $R_{F(\chi)}$ целых алгебраических чисел поля $F(\chi)$, лежащих над $2\mathbb{Z}$, нечетно (так как $\mathbb{Q}(\varepsilon_{n_{2^t}}) \subset F(\chi) \subset \mathbb{Q}(\varepsilon_n)$, по теореме Куммера любое 2-адическое пополнение расширения $F(\chi)/\mathbb{Q}(\varepsilon_{n_{2^t}})$ является вполне разветвленным, поэтому число простых идеалов кольца $R_{F(\chi)}$, лежащих над $2\mathbb{Z}$, равно числу простых идеалов кольца $R_{\mathbb{Q}(\varepsilon_{n_{2^t}})}$, лежащих над $2\mathbb{Z}$). Результат теоремы теперь следует из доказательства теоремы Голдшмидта–Айзекса, неведущести поля F и тождества Хассе (если $m_K(\chi) \neq 1$, то $m_K(\chi) = 2$ в силу доказательства теоремы Голдшмидта–Айзекса, но число нетривиальных инвариантов Хассе нечетно и все они равны $\frac{1}{2}$ в силу теоремы Бенарда–Шахера; тем самым, $m_K(\chi) = 1$).

Заметим, что если G – конечная 2-группа, то условия слабой неведущести, наложенного на поле K , достаточно для справедливости теоремы 2.2. Это следует из доказательства теоремы Шиллинга–Витта–Рокетта, проведенного в [1, теорема 41.9].

2.2.3. Оценка индекса Шура над полем $\mathbb{Q}$. Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы дать практический алгоритм построения поля алгебраических чисел $K \subset \mathbb{Q}(\varepsilon_n)$, для которого $\text{Gal}(K(\varepsilon_n)/K)$ – циклическая подгруппа в $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\varepsilon_n)/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_n^*$ максимального порядка, причем для поля F , отвечающего силовой 2-подгруппе в $\text{Gal}(K(\varepsilon_n)/K)$, выполнены некоторые достаточные

условия применимости теоремы 1.3. Данное построение дает оценку индекса Шура произвольного комплексного неприводимого характера произвольной конечной группы экспоненты n .

ТЕОРЕМА 2.3 (об оценке). *Пусть G – конечная группа порядка (или экспоненты) n . Пусть m – порядок какой-нибудь максимальной циклической подгруппы в группе $\mathbb{Z}_n^*$. Если $n \neq 4$, то $m_{\mathbb{Q}}(\chi) \mid \frac{\varphi(n)}{m}$ для любого $\chi \in \text{Irr } G$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем доказательство на несколько шагов.

Шаг 1. Заметим, что если G – p -группа нечетного порядка, то результат тривиально следует из теоремы Шиллинга–Витта–Рокетта. Поэтому считаем, что группа G не лежит в классе p -групп нечетного порядка. Сначала выберем специальным образом некоторую максимальную циклическую подгруппу в группе $\mathbb{Z}_n^*$. Пусть $n = p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s}$ – разложение числа n на простые множители. Тогда имеет место прямое разложение $\mathbb{Z}_n^* = A_1 \times \cdots \times A_s$, где $A_i \cong \mathbb{Z}_{p_i^{k_i}}^*$. Если $2 \nmid n$, то можно выбрать максимальную циклическую подгруппу в $\mathbb{Z}_n^*$ произвольно. Обозначим ее M .

Пусть $2 \mid n$. Для определенности будем считать, что $A_1 \cong \mathbb{Z}_{2^{\nu_2(n)}}^*$. Тогда максимальную циклическую подгруппу будем выбирать следующим образом. Для некоторого простого $p > 2$ возьмем в каждой группе A_i при $i > 1$ по силовой p -подгруппе. Среди всех таких подгрупп возьмем максимальную по порядку (если таких несколько, то берем произвольную). Далее сделаем ту же процедуру для другого простого числа $q > 2$. Пусть M_p, M_q – выбранные таким образом подгруппы. Тогда положим $M_{pq} := M_p \times M_q$. Ясно, что группа M_{pq} является циклической. Выбираем затем еще одну максимальную силовскую h -подгруппу для нечетного простого $h \notin \{p, q\}$ среди силовских h -подгрупп в группах A_i для $i = \overline{2, s}$ (если их несколько, то берем произвольную) и добавляем с помощью конструкции прямого произведения к группе M_{pq} . Повторим эту процедуру для всех нечетных простых. В итоге мы получим некоторую максимальную циклическую $2'$ -подгруппу в группе $\mathbb{Z}_n^*$.

Теперь выберем в каждой из групп A_i , $i = \overline{2, s}$, по силовой 2-подгруппе. Из выбранных силовских 2-подгрупп возьмем максимальную по порядку. Обозначим искомую подгруппу $\overline{M}_2$.

Наконец, рассмотрим группу $A_1 \cong \mathbb{Z}_{2^{\nu_2(n)}}^*$. Обозначим $t := \nu_2(n)$. Пусть сначала $t \geq 3$, тогда $A_1 \cong \langle -1 \rangle_2 \times \langle 5 \rangle_{2^{t-2}}$. Обозначим через $\overline{M}$ образ подгруппы $\langle 5 \rangle_{2^{t-2}}$ группы $\mathbb{Z}_{2^t}^*$ в группе A_1 при изоморфизме. Если $t = \overline{1, 2}$, то полагаем $\overline{M} = \{1\}$. Сравним порядки групп $\overline{M}_2$ и M . Положим $M_2 := \arg\max\{|\overline{M}_2|, |\overline{M}|\}$. Положим $M := M_{2'} \times M_2$, где $M_{2'} := \prod_{i=2}^s M_{p_i}$. Напомним, что мы положили $p_1 := 2$, если $2 \mid n$.

Итак, мы выбрали специальным образом максимальную циклическую подгруппу M в $\mathbb{Z}_n^*$. Единственный случай, когда мы не смогли сделать выбор именно максимальной циклической подгруппы в $\mathbb{Z}_n^*$, состоит в предположении, что либо $n = 1$, либо $n = 2$, либо $n = 4$. Если $n \mid 2$, то утверждение теоремы тривиально. По условию теоремы случай $n = 4$ не может возникнуть.

Шаг 2. Выберем K так, чтобы $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{Q}(\varepsilon_n)$, причем $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\varepsilon_n)/K) \cong M$. Докажем, что для любого характера $\chi \in \text{Irr } G$ выполнено $m_K(\chi) = 1$.

Если $m_K(\chi)$ является нечетным числом, то, выбрав произвольный простой делитель p числа $m_K(\chi)$, силовскую p -подгруппу в $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\varepsilon_n)/K)$ и поле F ,

ей соответствующее по фундаментальному соответствию Галуа, получим противоречие с теоремой Голдшмидта–Айзекса в случае $p > 2$. Аналогично рассуждая в случае четности числа $m_K(\chi)$, получаем, что число $m_K(\chi)$ является степенью двойки (можно даже показать, что $m_K(\chi) = 2$, но это нам не понадобится). Приведем это утверждение к противоречию. Для этого возьмем силовскую 2-подгруппу в группе $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\varepsilon_n)/K)$ и поле F , соответствующее ей по фундаментальному соответствию Галуа. По построению $M_2 = \text{Gal}(\mathbb{Q}(\varepsilon_n)/F)$. Достаточно теперь доказать, что $m_F(\chi) = 1$. Чтобы применить теорему Голдшмидта–Айзекса, необходимо проверить достаточные условия.

Пусть группа M_2 была выбрана в качестве подгруппы в группе A_i для некоторого $i = \overline{2, s}$. Заметим тогда, что $M_2 \not\subseteq A_1$, так как группы A_i , A_1 тривиально пересекаются, а порядок группы M_2 больше единицы. Без ограничения общности слабое условие невестственности для поля F можно считать выполненным. Действительно, если $s > 2$, то поле F по своему построению содержит примитивный $n_{p'_i}$ -корень из единицы. Поскольку $n_{p'_i} > 2$, то $F \not\subseteq \mathbb{R}$. Если $s = 2$, то слабое условие невестственности необходимо проверить лишь для случая $n = 2p^\alpha$, где p – некоторое нечетное простое число. Разберем этот случай подробно в шаге 4. Здесь же будем считать, что он не имеет места. Применим алгоритмический признак, по которому $m_F(\chi) = 1$.

Пусть группа M_2 была выбрана в качестве подгруппы в группе A_1 . Если $n > 4$, то группа M_2 с точностью до изоморфизма является подгруппой в $\langle 5 \rangle_{2^{t-2}}$. Заметим, что $i^5 = i$, но это означает, что $i \in F$. Тем самым, выполнено сильное условие невестственности, поэтому $m_F(\chi) = 1$ по теореме Голдшмидта–Айзекса. Случай $n \mid 4$ были рассмотрены в шаге 1. Заметим только, что в этих исключительных случаях $F = \mathbb{Q}(\varepsilon_n)$ в силу выбора группы M_2 . Поэтому также будет $m_F(\chi) = 1$.

Шаг 3. Положим $k := |M|$, $m := \frac{\varphi(n)}{k}$. Нам осталось доказать оценку $m_{\mathbb{Q}}(\chi) \mid m$. Из шага 2 следует, что операторное представление группы G с характером χ реализуется с помощью некоторого матричного представления в поле $K(\chi)$. Более того, из классической теории индекса Шура следует, что $m_{\mathbb{Q}(\chi)}(\chi) \mid (K(\chi) : \mathbb{Q}(\chi))$. Поскольку по определению $m_{\mathbb{Q}}(\chi) = m_{\mathbb{Q}(\chi)}(\chi)$, для справедливости оценки достаточно установить, что $(K(\chi) : \mathbb{Q}(\chi)) \mid m$. Для этого обозначим $T := K \cap \mathbb{Q}(\chi)$, $E := K(\chi) = K \cdot \mathbb{Q}(\chi)$. Из доказательства теоремы об ограничении для скрещенных алгебр (см. [1, теорема 29.13]) имеем изоморфизм групп Галуа $\text{Gal}(E/\mathbb{Q}(\chi)) \cong \text{Gal}(K/T)$, но число $(K(\chi) : \mathbb{Q}(\chi))$ равно порядку группы $\text{Gal}(E/\mathbb{Q}(\chi))$. Заметим теперь, что число m равно порядку группы $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$, которая содержит в качестве подгруппы группу $\text{Gal}(K/T)$. Результат теперь следует из теоремы о размерности короткой башни полей.

Шаг 4. Осталось разобрать случай, когда $n = 2p^\alpha$ для некоторого нечетного простого числа p . Возьмем любой характер $\chi \in \text{Irr } G$ и докажем для него, что $m_{\mathbb{Q}}(\chi) = 1$. Заметим, что группа $\mathbb{Z}_n^*$ является циклической. Более того, $\mathbb{Q}(\varepsilon_n) = \mathbb{Q}(\varepsilon_{p^\alpha})$. Это означает, что применима теорема Фонга, по которой индекс Шура $m_{\mathbb{Q}}(\chi)$ равен единице. Теорема доказана.

Заметим, что полученная оценка “равномерна” по всем конечным группам экспоненты n (или по всем группам порядка n) и не зависит, в частности, от поля комплексных характеров и размерности комплексных неприводи-

мых представлений. Более того, эта оценка чрезвычайно просто вычисляется на основании лишь числа $\varphi(n)$. Также видно, что на практике нет необходимости проверять какие-либо достаточные условия применимости теоремы Голдшмидта–Айзекса.

§ 3. Заключение

В 2011 г. исполняется 200 лет со дня рождения Э. Галуа. В связи с этим хочется закончить работу следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 3.1. *Рассмотрим конечную группу G нечетного порядка n . Пусть, далее, $n = p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s}$ – каноническое разложение числа n на простые множители. Обозначим $m = p_1 \cdots p_s$. Если правильный m -угольник допускает построение с помощью циркуля и линейки, то для любого характера $\chi \in \text{Irr } G$ имеем $m_{\mathbb{Q}}(\chi) = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теории Галуа следует, что правильный m -угольник допускает построение циркулем и линейкой тогда и только тогда, когда размерность $(\mathbb{Q}(\varepsilon_m) : \mathbb{Q})$ является степенью двойки. По условию теоремы число m нечетно, откуда простые числа $p_1, \dots, p_s$ являются простыми числами Ферма, т. е. элементами множества

$$\{2^{2^k} + 1 \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, 2^{2^k} + 1 \text{ простое}\}.$$

Фиксируем произвольный характер $\chi \in \text{Irr } G$. Предположим, что $m_{\mathbb{Q}}(\chi) > 1$. Заметим, что $m_{\mathbb{Q}}(\chi) = \text{НОК}\{m_{\mathbb{Q}_{p_i}}(\chi) \mid i = \overline{1, s}\}$. Далее, из [2, теорема 4.2.8] следует, что

$$m_{\mathbb{Q}_{p_i}}(\chi) \mid (p_i - 1) \quad \forall i = \overline{1, s}.$$

Тогда заведомо $2 \mid m_{\mathbb{Q}}(\chi)$. Получаем противоречие с нечетностью числа n .

Список литературы

1. I. Reiner, *Maximal orders*, London Math. Soc. Monogr. (N.S.), **28**, Oxford Univ. Press, Oxford, 2003.
2. С. Д. Берман, “Представления конечных групп над произвольным полем и над кольцами целых чисел”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **30**:1 (1966), 69–132.
3. D. M. Goldschmidt, I. M. Isaacs, “Schur indices in finite groups”, *J. Algebra*, **33** (1975), 191–199.
4. Ch. W. Curtis, I. Reiner, *Methods of representation theory*, v. 2, Pure Appl. Math. (N. Y.), Wiley, New York, 1987.
5. Д. Касселс, А. Фрëлих, *Алгебраическая теория чисел*, Мир, М., 1969; пер. с англ.: J. W. S. Cassels, A. Fröhlich, *Algebraic number theory*, Academic Press, London, 1967.
6. Ch. W. Curtis, I. Reiner, *Methods of representation theory*, v. 1, Wiley, New York, 1981.

Д. Д. КИСЕЛЕВ (D. D. KISELEV)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет
E-mail: denmexmath@yandex.ru

Поступило в редакцию
01.03.2011
18.05.2012