Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Бен Слиман, Термодинамический формализм для функции де Рама: метод приращений, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2012, том 76, выпуск 3, 3–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7332>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 12:25:38

УДК 517.589

М. Бен Слиман

Термодинамический формализм для функции де Рама: метод приращений

Изучается функция де Рама – единственная непрерывная (нигде не дифференцируемая) функция $F \in L^1(\mathbb{R})$, $\int F(x) dx = 1$, удовлетворяющая функциональному уравнению $F(x) = F(3x) + \frac{1}{3}(F(3x-1) + F(3x+1)) + \frac{2}{3}(F(3x-2) + F(3x+2))$. Показано, что ее поточечная гёльдерова гладкость $\alpha(x) = \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{\log(|F(x+h) - F(x)|)}{\log|h|}$ сильно меняется от точки к точке, а значения $\alpha(x)$ заполняют интервал, параметризующий набор фрактальных множеств $E^{(\alpha)}$, где $E^{(\alpha)}$ – множество точек x с гёльдеровым показателем $\alpha(x) = \alpha$. Кроме того, установлена справедливость термодинамического формализма (метода приращений) для функций де Рама, т. е. доказана эвристическая формула $d(\alpha) = \inf_{q>0} (\alpha q - \zeta(q) + 1)$, связывающая порядок убывания величины $\int_{\mathbb{R}} |F(x+h) - F(x)|^q dx \sim |h|^{\zeta(q)}$ при $h \rightarrow 0$ с хаусдорфовой размерностью $d(\alpha)$ множества $E^{(\alpha)}$.

Библиография: 22 наименования.

Ключевые слова: гёльдерова гладкость, хаусдорфова размерность, приращения, термодинамический формализм.

§ 1. Введение

Напомним, что функция $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит классу $C^\alpha(x_0)$ для данного $\alpha > 0$, если найдется полином P степени меньше α такой, что в некоторой окрестности точки x_0 выполнено неравенство

$$|F(x) - P(x - x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha. \quad (1)$$

В частности, если $F \in C^\alpha(x_0)$ при $0 < \alpha < 1$, то $P(x - x_0) = F(x_0)$.

Гёльдеровым показателем $\alpha(x_0)$ функции F в точке x_0 называется супремум всех тех значений α , для которых $F \in C^\alpha(x_0)$. Если число $\alpha(x)$ меняется от точки к точке, то будем называть F мультифрактальной функцией. При каждом α множество $E^{(\alpha)}$ всех точек x с гёльдеровым показателем $\alpha(x) = \alpha$ имеет некоторую хаусдорфову размерность $d(\alpha)$. Функция $\alpha \rightarrow d(\alpha)$ называется гёльдеровым спектром функции F и является основной количественной характеристикой мультифрактальности. Мультифрактальные функции появились как модели для изучения явления перемежаемости при полностью установившейся турбулентности [1], [2] и хаотического поведения динамических систем [3], [4].

Работа выполнена при поддержке исследовательского центра колледжа наук и деканата научных исследований Университета короля Сауда.

В общем случае практически невозможно явно найти гёльдеров спектр, исходя лишь из математического определения хаусдорфовой размерности. Однако физики предложили эвристические формулы, связывающие $d(\alpha)$ с некоторыми усредненными характеристиками (типа соболевских норм) функции F . А именно, для каждого $q > 0$ положим $S_q(h) := \int_{\mathbb{R}} |F(x+h) - F(x)|^q dx$ и определим масштабирующую функцию

$$\zeta(q) = \sup\{s \mid S_q(h) \leq C|h|^s \text{ при достаточно малых } |h|\}.$$

В работе [5] была предложена следующая формула для вычисления гёльдера спектра $d(\alpha)$, называемая *термодинамическим формализмом* (методом приращений):

$$d(\alpha) = \inf_{q>0} (\alpha q - \zeta(q) + 1). \quad (2)$$

Другой подход, использующий вейвлеты, был развит А. Арнеодо и его соавторами [6].

В полной общности формула термодинамического формализма неверна, но имеются многочисленные результаты о ее справедливости для функций частного вида [7], [8], а также функций общего положения по определению Бэра и другим определениям [9], [10].

И. Добеши и Дж. Лагарис [11] обосновали термодинамический формализм (метод приращений) для функции $\varphi_\beta \in L^1$, $\int \varphi_\beta = 1$, удовлетворяющей уточняющему уравнению

$$\varphi_\beta(x) = \sum_{n=0}^3 c_n \varphi_\beta(2x - n),$$

где $c_0 = \beta$, $c_1 = \frac{1}{2} + \beta$, $c_2 = 1 - \beta$, $c_3 = \frac{1}{2} - \beta$. Эта функция использовалась при построении ортонормированных базисов вейвлетов с компактным носителем.

Функция де Рама также удовлетворяет уточняющему уравнению

$$F(x) = F(3x) + \frac{1}{3}(F(3x-1) + F(3x+1)) + \frac{2}{3}(F(3x-2) + F(3x+2)) \quad (3)$$

и условиям $F \in L^1$ и $\int F(x) dx = 1$. Де Рам [12], [13] показал, что она непрерывна, но нигде не дифференцируема. Наша цель состоит в изучении термодинамического формализма (метода приращений) для этой функции.

И. Добеши и Дж. Лагарис [14] установили, что F имеет носитель на $[-1, 1]$, принадлежит $C^{\alpha_{\min}}(\mathbb{R})$ (в том смысле, что условие (1) выполнено для всех x и x_0 из $\mathbb{R}$), где $\alpha_{\min} = 1 - \frac{\log 2}{\log 3}$, и что

$$\forall x \in [0, 1] \quad F(x) + F(x-1) = 1.$$

Они также получили оценку снизу для гёльдерова показателя $\alpha(x) = \alpha(x-1)$ функции F в точках $x \in [0, 1]$, удовлетворяющих следующему условию: при $i = 0, 1, 2$ существует предел

$$r_x(i) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_{n,x}(i)}{n},$$

где $N_{n,x}(i)$ – число появлений i среди первых n цифр $i_1(x), \dots, i_n(x)$ троичного разложения

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} i_k(x).$$

И. Мейер [15] показал, что эта оценка снизу является точным значением гёльдерова показателя в указанных точках. Он использовал разложение $F = g \circ h$, где $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ – однофрактальная функция, а $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ – временной субординатор, т.е. интеграл от положительной борелевской меры с носителем на $[0, 1]$ (подробнее о временной субординации см. [16]).

В работе [17] автор использовал метод вейвлетов для вычисления гёльдерова спектра.

Заметим еще, что часть графика F на $[0, 1]$ является примером кривых де Рама, изучавшихся В. Ю. Протасовым [18], который, в частности, получил точные значения показателей регулярности таких кривых в параметризации длинной дуги. Свойства и приложения кривых де Рама изучались и во многих других работах (см., например, статью [18] и цитированную литературу в ней).

В § 2 мы напомним доказательство существования, единственности и равномерной гёльдеровости функции де Рама, а также вычисление ее носителя. Кроме того, будет получено ее явное представление в виде ряда.

В § 3 сначала получим оценку снизу гёльдерова показателя $\alpha(x)$ функции F для всех точек x , затем установим, что эта оценка дает точное значение показателя на множестве

$$\mathcal{R} = \left\{ x \mid \lim_j \frac{l_j^{0,2}(x - [x])}{j} = 0 = \lim_j \frac{l_j^1(x - [x])}{j} \right\},$$

где через $[x]$ обозначается целая часть числа x , а выражение $l_j^1(x)$ (соответственно, $l_j^{0,2}(x)$) для $j \geq 1$ и числа $x \in [0, 1]$ с троичным разложением $x = \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} i_k(x)$ равно длине непрерывного массива троичных цифр 1 (соответственно, 0 или 2), предшествующих и включающих в себя $i_j(x)$. Заметим, что множество $\mathcal{R}$ шире, чем соответствующие множества из работ Добеши, Лагариса и Мейера.

В § 4 вычислим функцию ζ .

В § 5 найдем гёльдеров спектр $d(\alpha)$. В частности, мы увидим, что согласно полученной оценке снизу для гёльдерова показателя достаточно вычислить значения $d(\alpha)$ на множестве $\mathcal{R}$. Наконец, докажем, что термодинамический формализм справедлив для всей восходящей ветви спектра (это утверждение сильнее, чем результаты, полученные методом вейвлетов в [17]). Отметим в связи с этим, что термодинамический формализм, будучи частным случаем преобразования Лежандра, может иметь место только для выпуклых гёльдеровых спектров. Поскольку же масштабирующая функция $\zeta(q)$ определена лишь для положительных q , указанный формализм может дать только восходящую ветвь $\cap$ -образного спектра.

§ 2. Глобальная гёльдеровость и явное представление функции де Рама в виде ряда

Каждое число $x \in [0, 1]$ имеет троичное разложение $x = \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} i_k(x)$. Для $n \geq 1$ обозначим через $N_{n,x}(i)$ число цифр i среди первых n цифр троичного разложения числа x . Иными словами, $N_{n,x}(i)$ равно мощности множества $\{k \in \{1, \dots, n\}; i_k(x) = i\}$.

В этом параграфе докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Существует единственная функция $F \in L^1$, $\int F(x) dx = 1$, удовлетворяющая уточняющему уравнению (3). Решение F имеет носитель на отрезке $[-1, 1]$ и принадлежит классу $C^{\alpha_{\min}}(\mathbb{R})$, где $\alpha_{\min} = 1 - \frac{\log 2}{\log 3}$. Для всех $x \in [0, 1]$ имеем*

$$F(x) + F(x-1) = 1,$$

$$F(x-1) = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} 2^{N_{n,x}(0)+N_{n,x}(2)} (-1)^{N_{n,x}(1)} \bar{i}_{n+1}(x)$$

(условимся, что $N_{0,x}(i) = 0$), где $\bar{0} = 0$, $\bar{1} = -2$ и $\bar{2} = -1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала немного модифицируем функцию F , чтобы получить классическую уточняющую схему (эта модификация не влияет на мультифрактальный анализ). А именно, положим $f(x) = F(x-1)$. Тогда f удовлетворяет уравнению

$$f(x) = \sum_{n=0}^4 c_n f(3x-n), \quad (4)$$

где $c_0 = c_4 = \frac{2}{3}$, $c_1 = c_3 = \frac{1}{3}$, $c_2 = 1$.

Имеем только одно правило сумм: $c_0 + c_3 = c_1 + c_4 = c_2 = 1$.

Рассмотрим матрицы

$$T_0 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad T_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

а также векторы $e_1 = (1, 1)$ и $e_2 = (1, 0)$. Пусть P – матрица перехода от канонического базиса пространства $\mathbb{R}^2$ к базису (e_1, e_2) . Тогда

$$P^{-1}T_0^tP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad P^{-1}T_1^tP = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad P^{-1}T_2^tP = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

По индукции проверяем для всех $(i_1, \dots, i_n) \in \{0, 1, 2\}^n$, что

$$P^{-1}(T_{i_1} \dots T_{i_n})^t P e_1^t = e_1^t, \quad (5)$$

$$P^{-1}(T_{i_1} \cdots T_{i_n})^t P e_2^t = -\frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{l=1}^k \lambda_{i_l} \right) \bar{i}_{k+1} e_1^t + \left(\prod_{k=1}^n \lambda_{i_k} \right) e_2^t, \quad (6)$$

где $\lambda_0 = \lambda_2 = \frac{2}{3}$, $\lambda_1 = -\frac{1}{3}$ и $\bar{0} = 0$, $\bar{1} = -2$, $\bar{2} = -1$. Мы также пользуемся здесь соглашением о том, что $\prod_{l=1}^k \lambda_{i_l} = 1$ при $k = 0$.

Согласно [19] из уравнений типа (5) и (6) вытекает, что всякое L^1 -решение f уравнения (4) с нормировкой $\int f(x) dx = 1$ является непрерывной вещественнозначной функцией с носителем $[0, 2]$, причем

$$\forall x \in [0, 1] \quad f(x) + f(x+1) = 1. \quad (7)$$

Определим оператор τ , сдвигающий точки $x \in [0, 1]$ по формуле

$$\tau x = \sum_{k=2}^{\infty} 3^{-k+1} i_k(x). \quad (8)$$

Троично-рациональные числа x вида $x = 3^{-N}K$, $K \in 3\mathbb{N} + 1$, имеют два троичных разложения: в одном из них $i_N(x) = 1$ и $i_n(x) = 0$ при $n > N$, а в другом $i_N(x) = 0$ и $i_n(x) = 2$ при $n > N$. Этим двум способам выбора $i(x)$ отвечают одинаковые правые части равенств (8). Троично-рациональные числа x вида $x = 3^{-N}K$, $K \in 3\mathbb{N} + 2$, также допускают два троичных разложения: в одном из них $i_N(x) = 2$ и $i_n(x) = 0$ при $n > N$, а в другом $i_N(x) = 1$ и $i_n(x) = 2$ при $n > N$. Этим двум способам выбора $i(x)$ также отвечают одинаковые правые части равенств (8).

Положим

$$V(x) = (f(x), f(x+1)).$$

Поскольку f имеет носитель $[0, 2]$, из (4) вытекает, что

$$V^t(x) = T_{i_1(x)} V^t(\tau x).$$

По индукции получаем для всех $n \in \mathbb{N}$ равенство

$$V^t(x) = T_{i_1(x)} \cdots T_{i_n(x)} V^t(\tau^n x).$$

Поскольку $f(x) = \langle e_2, V(x) \rangle$ (скалярное произведение) и V непрерывно, имеем

$$\begin{aligned} f(x) &= \langle e_2^t, \lim_n T_{i_1(x)} \cdots T_{i_n(x)} V^t(0) \rangle = \lim_n \langle (T_{i_1(x)} \cdots T_{i_n(x)})^t e_2^t, V^t(0) \rangle \\ &= -\frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{l=1}^k \lambda_{i_l(x)} \right) \bar{i}_{k+1}(x) = -\frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} 2^{N_{k,x}(0) + N_{k,x}(2)} (-1)^{N_{k,x}(1)} \bar{i}_{k+1}(x). \end{aligned} \quad (9)$$

Положим $|\lambda_{\max}| = \max\{|\lambda_0|, |\lambda_1|, |\lambda_2|\}$. Как показано в [14], [19], из уравнений типа (5) и (6) и того, что f имеет носитель на $[0, 2]$ и удовлетворяет соотношению (7), вытекает существование константы $C > 0$ такой, что

$$\|V(x) - V(y)\| \leq C|x - y|^{\frac{\log |\lambda_{\max}|}{\log(1/3)}}$$

для всех x и y из $[0, 1]$. Получаем, что $f \in C^{\alpha_{\min}}(\mathbb{R})$, где

$$\alpha_{\min} = \frac{\log(3/2)}{\log 3} = 1 - \frac{\log 2}{\log 3} \simeq 0,36907\dots$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Поскольку $F(x) + F(x-1) = 1$ для всех $x \in [0, 1]$, то $\alpha(x-1) = \alpha(x)$ и для целей мультифрактального анализа и проверки термодинамического формализма методом приращений можно вместо функции F рассматривать ее сужение на $[0, 1]$.

§ 3. Поточечная гёльдерова гладкость

3.1. Оценка снизу. Для $x \in [0, 1]$ положим

$$i(n, x) = (i_1(x), \dots, i_n(x)), \quad (10)$$

$$\lambda_{i(n, x)} = \prod_{l=1}^n \lambda_{i_l(x)}. \quad (11)$$

Определим

$$a_n(x) = \frac{\log |\lambda_{i(n, x)}|}{\log 3^{-n}}, \quad a(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n(x).$$

Установим оценку снизу гёльдерова показателя.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. При каждом $x \in [0, 1]$ имеем $\alpha(x-1) = \alpha(x) \geq a(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in \left[0, \frac{1}{3}\right), \\ \frac{2}{3} & \text{при } x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \\ \frac{1}{3} & \text{при } x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right), \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

видим из (9), что для $x \in [0, 1]$ справедливо равенство

$$F(x-1) = f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{l=1}^k \lambda_{i_l(x)} \right) g(\tau^k x). \quad (12)$$

Поэтому если у чисел x и $x+t$ первые n троичных цифр совпадают, то

$$F(x+t) - F(x) = -(f(x+t) - f(x)) = -\lambda_{i(n, x)} (f(\tau^n(x+t)) - f(\tau^n x)) \quad (13)$$

и из ограниченности f вытекает, что

$$|F(x+t) - F(x)| \leq C |\lambda_{i(n, x)}|. \quad (14)$$

Существует n_0 такое, что $a_n(x) > a(x) - \varepsilon$ для всех $n \geq n_0$. Выберем теперь t так, что $0 \leq |t| < 3^{-n_0}$. Тогда $3^{-n-1} \leq |t| < 3^{-n}$ для некоторого $n \geq n_0$.

1) Если $0 < t < 3^{-n}(1 - \tau^n x)$, то первые n троичных цифр у чисел x и $x + t$ совпадают, поскольку

$$3^{-n} \tau^n x = \frac{i_{n+1}}{3^{n+1}} + \frac{i_{n+2}}{3^{n+2}} + \dots$$

Значит, выполнено неравенство (14). Отсюда получаем

$$|F(x+t) - F(x)| \leq C t^{a_n(x)} \leq C t^{a(x)-\varepsilon}.$$

2) Если $t \geq 3^{-n}(1 - \tau^n x)$, то:

(i) при $i_n(x) = 0$ или $i_n(x) = 1$ у чисел x и $x + t$ совпадают первые $n - 1$ троичных цифр, так что $|F(x+t) - F(x)| \leq C t^{a_n(x)} \leq C t^{a(x)-\varepsilon}$;

(ii) при $i_n(x) = 2$ у чисел x и $x + t$ совпадают первые $n - l_n^2(x) - 1$ троичных цифр, так что

$$|F(x+t) - F(x)| = |\lambda_{i(n-l_n^2(x)-1, x)}| |f(\tau^{n-l_n^2(x)-1}(x+t)) - f(\tau^{n-l_n^2(x)-1}x)|.$$

Поскольку $f \in C^{\alpha_{\min}}$, имеем

$$|f(\tau^{n-l_n^2(x)-1}(x+t)) - f(\tau^{n-l_n^2(x)-1}x)| \leq C (3^{n-l_n^2(x)-1}t)^{\alpha_{\min}},$$

однако

$$(3^{n-l_n^2(x)-1}t)^{\alpha_{\min}} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{l_n^2(x)+1}.$$

Отсюда вытекает, что

$$|F(x+t) - F(x)| \leq C |\lambda_{i(n-l_n^2(x)-1, x)}| |\lambda_2|^{l_n^2(x)+1}.$$

Тем самым, $|F(x+t) - F(x)| \leq C t^{a_n(x)} \leq C t^{a(x)-\varepsilon}$.

3) Если $-3^{-n} \tau^n x < t < 0$, то у чисел x и $x + t$ совпадают первые n троичных цифр, так что выполнено (14). Отсюда

$$|F(x+t) - F(x)| \leq C t^{a_n(x)} \leq C |t|^{a(x)-\varepsilon}.$$

4) Если $t < -3^{-n} \tau^n x$, то:

(i) при $i_n(x) = 2$ или $i_n(x) = 1$ у чисел x и $x + t$ совпадают первые $n - 1$ троичных цифр, так что $|F(x+t) - F(x)| \leq C t^{a_n(x)} \leq C t^{a(x)-\varepsilon}$;

(ii) при $i_n(x) = 0$ у чисел x и $x + t$ совпадают первые $n - l_n^0(x) - 1$ троичных цифр, так что

$$|F(x+t) - F(x)| = |\lambda_{i(n-l_n^0(x)-1, x)}| |f(\tau^{n-l_n^0(x)-1}(x+t)) - f(\tau^{n-l_n^0(x)-1}x)|.$$

Поскольку $f \in C^{\alpha_{\min}}$, имеем

$$|f(\tau^{n-l_n^0(x)-1}(x+t)) - f(\tau^{n-l_n^0(x)-1}x)| \leq C (3^{n-l_n^0(x)-1}t)^{\alpha_{\min}},$$

однако

$$(3^{n-l_n^0(x)-1}t)^{\alpha_{\min}} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{l_n^0(x)+1}.$$

Отсюда вытекает, что

$$|F(x+t) - F(x)| \leq C |\lambda_{i(n-l_n^0(x)-1, x)}| |\lambda_0|^{l_n^0(x)+1}.$$

Тем самым, $|F(x+t) - F(x)| \leq Ct^{a_n(x)} \leq Ct^{a(x)-\varepsilon}$.

Итак, заключаем, что $\alpha(x) \geq a(x)$. Предложение доказано.

3.2. Оценка сверху. Получим теперь оценку сверху для $\alpha(x)$. При каждом $j \geq 1$ обозначим через $l_j^1(x)$ (соответственно, $l_j^{0,2}(x)$) длину непрерывающегося массива цифр 1 (соответственно, 0 или 2), предшествующих и включающих $i_j(x)$. Это означает, что $l_j^1(x) = 0$ при $i_j(x) \neq 1$ и $l_j^1(x) = J$ в случае, когда $i_j(x) = 1 = i_{j-1}(x) = \dots = i_{j-J+1}(x)$ и $i_{j-J}(x) \neq 1$. Аналогично имеем $l_j^{0,2}(x) = 0$ при $i_j(x) = 1$ и $l_j^{0,2}(x) = J$ в случае, когда $i_j(x) \in \{0, 2\}$, $i_{j-1}(x) \in \{0, 2\}$, $\dots$, $i_{j-J+1}(x) \in \{0, 2\}$ и $i_{j-J}(x) = 1$.

Будем обозначать целую часть числа x через $[x]$. Ограничимся рассмотрением множества

$$\mathcal{R} = \left\{ x \mid \lim_j \frac{l_j^{0,2}(x - [x])}{j} = 0 = \lim_j \frac{l_j^1(x - [x])}{j} \right\}. \quad (15)$$

(На вычисление гёльдерова спектра это ограничение не влияет.)

Определим $b_n(x)$ по формуле

$$3^{-nb_n(x)} = |\lambda_{i(n-l_n(x), x)}| |\lambda_0|^{l_n(x)} = |\lambda_{i(n-l_n(x), x)}| |\lambda_2|^{l_n(x)}$$

и положим $b(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n(x)$.

ТЕОРЕМА 2. Для $x \in \mathcal{R}$ имеем

$$a(x) = b(x), \quad \alpha(x-1) = \alpha(x) = a(x).$$

Далее, если существует предел $r_x(1) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_{n,x}(1)}{n}$, то $x \in \mathcal{R}$ и

$$\alpha(x-1) = \alpha(x) = \alpha_{\min} + r_x(1) \frac{\log 2}{\log 3}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $x \in \mathcal{R}$.

1) Если $i_n(x) = 0$ или $i_n(x) = 2$, то $b_n(x) = a_n(x)$.

2) Если $i_n(x) = 1$, то

$$3^{-nb_n(x)} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{N_{n,x}(1)-l_n^1(x)}.$$

Это означает, что

$$b_n(x) = \alpha_{\min} + \frac{(N_{n,x}(1) - l_n^1(x)) \log 2}{n \log 3},$$

$$a_n(x) = b_n(x) + \frac{l_n^1(x) \log 2}{n \log 3}.$$

Первое утверждение доказано.

Опять возьмем $x \in \mathcal{R}$ и фиксируем δ , $0 < \delta < 1$. Тогда найдется номер j' такой, что при $j \geq j'$ имеем

$$\frac{l_j^{0,2}(x)}{j} \leq \delta, \quad \frac{l_j^1(x)}{j} \leq \delta.$$

С другой стороны, для каждого j существует номер $j'' \geq j$ такой, что

$$a_{j''}(x) < a(x) + \delta,$$

откуда

$$|\lambda_{i(j'',x)}| > 3^{-j''(a(x)+\delta)}.$$

Полагая $\tilde{j} = \bar{j} - l_{\tilde{j}}^{0,2}(x)$, где $\bar{j} = j'' - l_{j''}^1(x)$, имеем $i_{\tilde{j}}(x) = 1$ и $i_{\tilde{j}+1}(x) = 0, 2$. Кроме того, если взять $j \geq j_1 = (1 - \delta)^{-1}j'$, то $j'' \geq j \geq j_1 \geq j'$ и $\bar{j} \geq j''(1 - \delta) \geq j'$, откуда $l_{\tilde{j}}^0(x) \leq \delta\bar{j}$.

Итак, получаем

$$\tilde{j} \geq j'' - \delta j'' - \delta \bar{j} \geq (1 - 2\delta)j''.$$

Отсюда вытекает, что

$$|\lambda_{i(\tilde{j},x)}| \geq |\lambda_{i(j'',x)}| > 3^{-j''(a(x)+\delta)} \geq 3^{-(a(x)+\delta)(1-2\delta)^{-1}\tilde{j}}.$$

Если $i_{\tilde{j}+1}(x) = 0$, то возьмем $h_j = \frac{2}{3} \cdot 3^{-\tilde{j}}$. Тогда $i(\tilde{j}, x + h_j) = i(\tilde{j}, x)$. С помощью (13) получаем

$$\begin{aligned} |F(x + h_j) - F(x)| &= |\lambda_{i(\tilde{j},x)}| |f(\tau^{\tilde{j}}(x + h_j)) - f(\tau^{\tilde{j}}(x))| \\ &= |\lambda_{i(\tilde{j},x)}| \left| f\left(y_{\tilde{j}} + \frac{2}{3}\right) - f(y_{\tilde{j}}) \right|, \end{aligned}$$

где $y_{\tilde{j}} = \tau^{\tilde{j}}(x)$. Однако $i_{\tilde{j}+1}(x) = 0$, откуда $y_{\tilde{j}} = \frac{1}{3}y_{\tilde{j}+1}$. Пользуясь уравнением (4) и тем, что f имеет носитель на $[0, 2]$, получаем

$$f(y_{\tilde{j}}) = \frac{2}{3}f(y_{\tilde{j}+1}), \quad f\left(y_{\tilde{j}} + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}f(y_{\tilde{j}+1} + 1) + f(y_{\tilde{j}+1}).$$

Из свойства (7) имеем

$$f\left(y_{\tilde{j}} + \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}f(y_{\tilde{j}+1}) + \frac{1}{3}.$$

Следовательно,

$$|F(x + h_j) - F(x)| = \frac{1}{3}|\lambda_{i(\tilde{j},x)}| \geq C|h_j|^{a(x)+\delta'}.$$

Тот же результат можно получить, взяв $h_j = -\frac{2}{3} \cdot 3^{-\tilde{j}}$, если $i_{\tilde{j}+1}(x) = 2$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $r_x(1) = 0$, то $\alpha(x-1) = \alpha(x) = \alpha_{\min}$. Если же $r_x(1) = 1$ (например, для точек вида $3^{-j}(l + \frac{1}{2})$), то $\alpha(x-1) = \alpha(x) = 1$. Таким образом, теорема 2 показывает, что функция де Рама действительно мультифрактальна: гёльдеровы показатели заполняют отрезок $[\alpha_{\min}, 1]$. Для нормальной точки, т. е. при $r_x(0) = r_x(1) = r_x(2) = \frac{1}{3}$, получаем

$$\alpha(x-1) = \alpha(x) = \alpha_{\min} + \frac{1}{3} \frac{\log 2}{\log 3} \simeq 0,57938 \dots$$

§ 4. Масштабирующая функция

Докажем следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. При всех $q > 0$ имеем

$$\zeta(q) = 1 + q - \frac{\log(2 \cdot 2^q + 1)}{\log 3}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала получим оценку снизу. Возьмем h такое, что $3^{-j} \leq |h| < 3^{-(j-1)}$. Если $h > 0$, то из сосредоточенности функции F на $[-1, 1]$ вытекает, что

$$\begin{aligned} S_q(h) &= \int_{-1-h}^{-1} |F(x+h) - F(x)|^q dx + \int_{-1}^{1-h} |F(x+h) - F(x)|^q dx \\ &\quad + \int_{1-h}^1 |F(x+h) - F(x)|^q dx. \end{aligned}$$

Поскольку $F \in C^{\alpha_{\min}}(\mathbb{R})$, имеем

$$\int_{-1-h}^{-1} |F(x+h) - F(x)|^q dx + \int_{-1}^{1-h} |F(x+h) - F(x)|^q dx \leq C|h|^{1+q\alpha_{\min}}. \quad (16)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1-h} |F(x+h) - F(x)|^q dx &= \int_{-1}^{-h} |F(x+h) - F(x)|^q dx \\ &\quad + \int_{-h}^0 |F(x+h) - F(x)|^q dx + \int_0^{1-h} |F(x+h) - F(x)|^q dx. \end{aligned}$$

Снова имеем

$$\int_{-h}^0 |F(x+h) - F(x)|^q dx \leq C|h|^{1+q\alpha_{\min}}. \quad (17)$$

Далее,

$$\int_{-1}^{-h} |F(x+h) - F(x)|^q dx = \int_0^{1-h} |f(x+h) - f(x)|^q dx.$$

С другой стороны,

$$\int_0^{1-h} |F(x+h) - F(x)|^q dx = \int_0^{1-h} |f(x+h) - f(x)|^q dx.$$

В итоге получаем, что

$$\begin{aligned} S_q(h) &\leq C|h|^{1+\alpha_{\min}q} + 2 \int_0^{1-h} |f(x+h) - f(x)|^q dx \\ &\leq C|h|^{1+\alpha_{\min}q} + 2 \int_0^{1-3^{-j}} |f(x+h) - f(x)|^q dx. \end{aligned} \quad (18)$$

Пусть $B_j = [0, 1 - 3^{-j}[$. По-другому можно охарактеризовать B_j как множество всех $x \in [0, 1]$, у которых хотя бы одна цифра $i_k(x)$, $k = 1, \dots, j$, равна 0 или 1. Разобьем B_j на множества $B_{j,k}$, $k = 1, \dots, j$, где

$$B_{j,k} = \{x \in [0, 1] : i_k(x) = 0, 1, \text{ причем } i_{k+1}(x) = i_{k+2}(x) = \dots = i_j(x) = 2\}.$$

При $x \in B_{j,k}$ имеем

$$i(k-1, x+h) = i(k-1, x)$$

(поскольку $0 < h < 3^{-(j-1)}$ и $i_j(x) = 2$). Пользуясь свойством (13), получаем равенство

$$\int_{B_{j,k}} |f(x+h) - f(x)|^q dx = \int_{B_{j,k}} |\lambda_{i(k-1,x)}|^q |f(\tau^{k-1}(x+h)) - f(\tau^{k-1}(x))|^q dx.$$

Аналогичные рассуждения показывают, что

$$\int_{B_{j,k}} |f(x+h) - f(x)|^q dx \leq (3^{k-1}|h|)^{q\alpha_{\min}} \int_{B_{j,k}} |\lambda_{i(k-1,x)}|^q dx.$$

Первые $k-1$ троичных цифр числа $x \in B_{j,k}$ могут быть любыми, т.е. они независимо друг от друга принимают значения 0, 1, 2 с вероятностью $\frac{1}{3}$ каждое. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{B_{j,k}} |\lambda_{i(k-1,x)}|^q dx &= \left(\frac{1}{3}|\lambda_0|^q + \frac{1}{3}|\lambda_1|^q + \frac{1}{3}|\lambda_2|^q \right)^{k-1} \int_{\tau^{k-1}B_{j,k}} dx \\ &= \left(\frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^q + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^q \right)^{k-1} 3^{-j+k-1} = \left(2 \left(\frac{2}{3} \right)^q + \left(\frac{1}{3} \right)^q \right)^{k-1} 3^{-j}. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \int_{B_j} |f(x+h) - f(x)|^q dx &\leq C|h|^{q\alpha_{\min}} 3^{-j} \sum_{k=1}^j 3^{q\alpha_{\min}} \left(2 \left(\frac{2}{3} \right)^q + \left(\frac{1}{3} \right)^q \right)^k \\ &\leq C|h|^{q\alpha_{\min}} 3^{-j} \sum_{k=1}^j (2 + 2^{-q})^k \leq C|h|^{1+q} 2^{jq} (2 + 2^{-q})^j. \end{aligned}$$

В итоге получаем

$$\int_{B_j} |f(x+h) - f(x)|^q dx \leq C|h|^{1+q-\frac{\log(2 \cdot 2^q + 1)}{\log 3}}. \quad (19)$$

Поскольку $1 + q\alpha_{\min} > 1 + q - \frac{\log(2 \cdot 2^q + 1)}{\log 3}$, из (18) и (19) вытекает, что

$$S_q(h) \leq C|h|^{1+q - \frac{\log(2 \cdot 2^q + 1)}{\log 3}}. \quad (20)$$

Это верно и при $h < 0$. В виде следствия имеем

$$\zeta(q) \geq 1 + q - \frac{\log(2 \cdot 2^q + 1)}{\log 3}. \quad (21)$$

Теперь оценим $\zeta(q)$ сверху. Положим $h_j = 3^{-j-2}$, $B'_j = [3^{-j}, 1 - 3^{-j}]$ и ограничимся рассмотрением множества B''_j всех точек $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ таких, что $i_{j-1}(x) = i_{j+1}(x) = i_{j+2}(x) = i_{j+3}(x) = i_{j+4}(x) = 0$ и $i_j(x) = 2$. Если $x \in B''_j$, то у чисел $x + h_j$ и x первые $j + 1$ троичных цифр совпадают, так что

$$|F(x + h_j) - F(x)| = |\lambda_{i(j+1,x)}| |f(\tau^{j+1}(x + h_j)) - f(\tau^{j+1}(x))|.$$

Однако $\tau^{j+1}(x) \in [0, \frac{1}{33}]$ (поскольку $i_{j+2}(x) = i_{j+3}(x) = i_{j+4}(x) = 0$) и $\tau^{j+1}(x + h_j) = \frac{1}{3} + \tau^{j+1}(x) \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{3} + \frac{1}{33}]$. Поэтому, полагая $y = \tau^{j+1}(x)$, получаем из соотношений (4) и (7), что

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{2}{3}f(3y), & f(3y) &= \frac{2}{3}f(9y) = \frac{4}{9}f(27y) \leq \frac{4}{9}, \\ f\left(\frac{1}{3} + y\right) &= \frac{2}{3}f(3y + 1) + \frac{1}{3}f(3y) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}f(3y). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|f(\tau^{j+1}(x + h_j)) - f(\tau^{j+1}(x))| = \left| \frac{2}{3} - f(3y) \right| \geq \frac{2}{3} - \frac{4}{9} > 0.$$

Отсюда имеем

$$S_q(h_j) \geq C \int_{B''_j} |\lambda_{i(j+1,x)}|^q dx.$$

Первые $j - 2$ троичных цифр числа $x \in B''_j$ могут быть любыми, т.е. они независимо друг от друга принимают значения 0, 1, 2 с вероятностью $\frac{1}{3}$ каждое. Рассуждая, как и для $B_{j,k}$, получаем

$$S_q(h_j) \geq C|h_j|^{1+q - \frac{\log(2 \cdot 2^q + 1)}{\log 3}}. \quad (22)$$

Таким образом, имеем

$$\zeta(q) \leq 1 + q - \frac{\log(2 \cdot 2^q + 1)}{\log 3}. \quad (23)$$

§ 5. Гёльдеров спектр и справедливость термодинамического формализма

Докажем справедливость термодинамического формализма для функции де Рама при $\alpha \in [\alpha_{\min}, 1 - \frac{2}{3} \frac{\log 2}{\log 3}]$, где $\alpha_{\min} = 1 - \frac{\log 2}{\log 3}$. Заметим, что $1 - \frac{2}{3} \frac{\log 2}{\log 3}$ есть значение гёльдерова показателя в нормальных точках, так что для этого

значения имеем $d(\alpha) = 1$, и мы утверждаем справедливость термодинамического формализма только для восходящей ветви спектра. Этого и следовало ожидать, так как термодинамический формализм, будучи преобразованием Лежандра, может иметь место только для выпуклых спектров, а поскольку масштабирующая функция $\zeta(q)$ определена лишь для положительных q , она может дать только восходящую ветвь $\cap$ -образного спектра.

Из теоремы 2 можно получить оценку снизу для гёльдерова спектра $d(\alpha)$. Для этого достаточно вычислить хаусдорфову размерность множества тех точек x , для которых предел $r_x(1)$ существует и равен заданному значению $r(1)$. Элементарное решение этой задачи дается следующей теоремой Эгглстона [20].

ТЕОРЕМА 4. Пусть $r(0)$, $r(1)$ и $r(2)$ – три положительных числа таких, что $r(0) + r(1) + r(2) = 1$. Тогда множество $E_{(r(0), r(1), r(2))}$ тех точек x , для которых предел $r_x(i)$ существует и равен $r(i)$ при $i = 0, 1, 2$, имеет хаусдорфову размерность

$$-\frac{1}{\log 3} (r(0) \log r(0) + r(1) \log r(1) + r(2) \log r(2)).$$

Выбирая $r_\alpha(1) = \frac{\log 3}{\log 2}(\alpha - \alpha_{\min})$ при $\alpha \in [\alpha_{\min}, 1]$, получаем

$$d(\alpha) \geq \sup_{0 \leq a \leq 1 - r_\alpha(1)} -\frac{a \log a + (1 - a - r_\alpha(1)) \log(1 - a - r_\alpha(1)) + r_\alpha(1) \log r_\alpha(1)}{\log 3}.$$

Этот супремум достигается в точке $a_\alpha := \frac{1 - r_\alpha(1)}{2}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} d(\alpha) \geq & -\frac{1}{\log 3} \left(\frac{\log 3}{\log 2} - \alpha \frac{\log 3}{\log 2} \right) \log \left(\frac{\log 3}{2 \log 2} - \alpha \frac{\log 3}{2 \log 2} \right) \\ & - \frac{1}{\log 3} \left(\alpha \frac{\log 3}{\log 2} - \frac{\log 3}{\log 2} + 1 \right) \log \left(\alpha \frac{\log 3}{\log 2} - \frac{\log 3}{\log 2} + 1 \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Получим теперь оценку сверху для гёльдерова спектра. Согласно предложению 1 имеем

$$E^{(\alpha)} \subset \tilde{E}^{(\alpha)} \cup T_1(\tilde{E}^{(\alpha)}),$$

где

$$\tilde{E}^{(\alpha)} = \{x \in [0, 1] : a(x) \leq \alpha\}, \quad T_1(\tilde{E}^{(\alpha)}) = \{x - 1 : x \in \tilde{E}^{(\alpha)}\}.$$

Разложим $\tilde{E}^{(\alpha)}$ в объединение:

$$\tilde{E}^{(\alpha)} = \bigcup_{\beta \leq \alpha} A_\beta,$$

где

$$A_\beta = \{x \in [0, 1] : a(x) = \beta\}.$$

Положим

$$\theta(q) = -\log_3(|\lambda_0|^q + |\lambda_1|^q + |\lambda_2|^q) = -\log_3 \left(2 \left(\frac{2}{3} \right)^q + 2 \left(\frac{1}{3} \right)^q \right) = \zeta(q) - 1,$$

$$G(\beta) = \inf_{q > 0} (\beta q - \theta(q)).$$

Следующая лемма дает оценку сверху хаусдорфовой размерности $\dim(A_\beta)$ множества A_β .

ЛЕММА 1. *Имеем $\dim(A_\beta) \leq G(\beta)$. Таким образом,*

$$\dim(E^{(\alpha)}) \leq \dim(\tilde{E}^{(\alpha)}) \leq G(\alpha).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $q \in \mathbb{R}$, $b = -\theta(q)$ и $P_i = |\lambda_i|^q 3^{\theta(q)}$. Тогда $P_0 + P_1 + P_2 = 1$. Положим

$$S_j(x) = \frac{1}{3}x + \frac{j}{3}, \quad j = 0, 1, 2.$$

Рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ такую вероятностную меру ν , что

$$\forall (i_1, \dots, i_n) \in \{0, 1, 2\}^n \quad \nu(S_{i_1} \cdots S_{i_n}([0, 1])) = P_{i_1} \cdots P_{i_n}.$$

Такую меру легко построить по индукции (см. [21]). Пусть $x \in [0, 1]$, $s > 0$, $r > 0$. Рассмотрим такое целое j , что $3^{-j} \leq r < 3^{-(j-1)}$. Обозначая интервал $(x - r, x + r)$ через $B(x, r)$, имеем

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\nu(B(x, r))}{r^s} = \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{P_{i_1(x)} \cdots P_{i_j(x)}}{3^{-js}} = \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{(|\lambda_{i_1(x)}| \cdots |\lambda_{i_j(x)}|)^q 3^{j\theta(q)}}{3^{-js}}.$$

Допустим, что $\frac{-\theta(q)-s}{q} < -\beta$. Тогда

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\nu(B(x, r))}{r^s} = \infty,$$

так что согласно [22, предложение 4.9] имеем

$$\dim(A_\beta) \leq -\theta(q) + q\beta$$

для всех $q > 0$. Отсюда получаем $\dim(A_\beta) \leq G(\beta)$.

Второе утверждение леммы вытекает из первого, так как функция G возрастающая.

ТЕОРЕМА 5. *Для функции де Рама имеет место термодинамический формализм при $\alpha \in [1 - \frac{\log 2}{\log 3}, 1 - \frac{2}{3} \frac{\log 2}{\log 3}]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проводя очевидное вычисление, получим, что инфимум из определения $G(\alpha)$ достигается в точке

$$q_\alpha = \frac{\log((1 - \alpha) \log 3) - \log(2 \log 2 - 2(1 - \alpha) \log 3)}{\log 2}$$

и что $q_\alpha > 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha \in [\alpha_{\min}, 1 - \frac{2}{3} \frac{\log 2}{\log 3}]$. При этом значение выражения $\alpha q - \zeta(q) + 1$ в точке q_α равно

$$-\frac{(1-\alpha)}{\log 2} \log((1-\alpha) \log 3) - \left(\frac{1}{\log 3} + \frac{(\alpha-1)}{\log 2} \right) \log(2 \log 2 - 2(1-\alpha) \log 3) + \frac{1}{\log 3} \log(2 \log 2),$$

что совпадает с оценкой снизу для $d(\alpha)$ из (24).

Автор благодарит С. Жаффара (Университет Paris Est) за полезные обсуждения.

Список литературы

1. R. Benzi, G. Paladin, G. Parisi, A. Vulpiani, "On the multifractal nature of fully developed turbulence and chaotic systems", *J. Phys. A*, **17**:18 (1984), 3521–3531.
2. B. B. Mandelbrot, "Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier", *J. Fluid Mech.*, **62**:2 (1974), 331–358.
3. J.-P. Eckmann, D. Ruelle, "Ergodic theory of chaos and strange attractors", *Rev. Modern Phys.*, **57**:3 (1985), 617–656.
4. T. C. Halsey, M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, I. Procaccia, B. I. Shraiman, "Fractal measures and their singularities: the characterization of strange sets", *Phys. Rev. A* (3), **33**:2 (1986), 1141–1151.
5. U. Frisch, G. Parisi, "Fully developed turbulence and intermittency", *Proc. Int. Summer school Phys. Enrico Fermi*, North Holland, Amsterdam, 1985, 84–88.
6. E. Bacry, J. F. Muzy, A. Arnéodo, "Singularity spectrum of fractal signals from wavelet analysis: exact results", *J. Statist. Phys.*, **70**:3–4 (1993), 635–674.
7. J. Aouidi, M. Ben Slimane, "Multi-fractal formalism for quasi-self-similar functions", *J. Statist. Phys.*, **108**:3–4 (2002), 541–590.
8. S. Jaffard, "Multifractal formalism for functions. Part 1: Results valid for all functions; Part 2: Self-similar functions", *SIAM J. Math. Anal.*, **28**:4 (1997), 944–998.
9. S. Jaffard, "On the Frisch–Parisi conjecture", *J. Math. Pures Appl.* (9), **79**:6 (2000), 525–552.
10. A. Fraysse, "Generic validity of the multifractal formalism", *SIAM J. Math. Anal.*, **37**:2 (2007), 593–607.
11. I. Daubechies, J. C. Lagarias, "On the thermodynamic formalism for multifractal functions", *Rev. Math. Phys.*, **6**:5A (1994), 1033–1070.
12. G. De Rham, "Sur une courbe plane", *J. Math. Pures Appl.* (9), **35** (1956), 25–42.
13. G. De Rham, "Sur un exemple de fonction continue sans dérivée", *Enseignement Math.* (2), **3** (1957), 71–72.
14. I. Daubechies, J. C. Lagarias, "Two-scale difference equations. II. Local regularity, infinite products of matrices and fractals", *SIAM J. Math. Anal.*, **22**:4 (1992), 1031–1079.
15. Y. Meyer, "Fonctions multifractales", *Ecole Normale Supérieure de Cachan*, France.
16. S. Seuret, "On multifractality and time subordination for continuous functions", *Adv. Math.*, **220**:3 (2009), 936–963.
17. M. Ben Slimane, "Multifractal formalism for the generalized de Rham function", *Curr. Dev. Theory Appl. Wavelets*, **2**:1 (2008), 45–88.
18. В. Ю. Прогасов, "О гладкости кривых де Рама", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:3 (2004), 139–180; англ. пер.: V. Yu. Protasov, "On the regularity of de Rham curves", *Izv. Math.*, **68**:3 (2004), 567–606.

19. I. Daubechies, J. C. Lagarias, “Two-scale difference equations. I. Existence and global regularity of solutions”, *SIAM J. Math. Anal.*, **22**:5 (1991), 1388–1410.
20. H. G. Eggleston, “The fractional dimension of a set defined by decimal properties”, *Quart. J. Math., Oxford Ser.*, **20** (1949), 31–36.
21. J. E. Hutchinson, “Fractals and self-similarity”, *Indiana Univ. Math. J.*, **30**:5 (1981), 713–747.
22. K. Falconer, *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*, Wiley, New York, 1990.

М. БЕН СЛИМАН (M. BEN SLIMANE)
College of Science, King Saud University
E-mail: mbenslimane@ksu.edu.sa

Поступило в редакцию
06.03.2011

Перевод с английского А. В. Домрина