Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Рождественский, О необходимых условиях
для мультипликаторов Фурье слабого типа, *Изв. РАН.
Сер. матем.*, 2007, том 71, выпуск 1, 79–100

DOI: <https://doi.org/10.4213/im736>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 15:57:21

УДК 517.51

А. В. Рождественский

О необходимых условиях для мультипликаторов Фурье слабого типа

Получены необходимые условия того, что ограниченная функция φ является мультипликатором Фурье слабого типа $(\psi(L)(G), \psi(L)(G))$ в случае, когда $G = \mathbb{R}^d$ или $G = \mathbb{T}^d$, а функция Юнга $\psi(t)$ растет при стремлении t к бесконечности медленнее, чем $t \ln^{1/2} t$.

Библиография: 16 наименований.

§ 1. Введение и основные обозначения

Пусть $G = \mathbb{R}^d$ или $G = \mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$, а Γ – группа, двойственная к G (т. е. $\Gamma = \mathbb{R}^d$, если $G = \mathbb{R}^d$, и $\Gamma = \mathbb{Z}^d$, если $G = \mathbb{T}^d$). Через $B(\Gamma)$ обозначим пространство равномерно ограниченных измеримых комплекснозначных функций на Γ .

Выпуклую функцию $\psi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ будем называть *функцией Юнга*, если $\psi(0) = 0$ и $\psi(y) > 0$ при $y > 0$. Предположим, что ψ удовлетворяет Δ_2 -условию (т. е. найдется $K > 0$ такое, что $\psi(2y) \leq K\psi(y)$ при достаточно большом y). Далее будем предполагать выполнение этого условия.

Класс Орлича $\psi(L)(G) := \{f: G \rightarrow \mathbb{C}, \int_G \psi(|f(x)|) dx < \infty\}$, снабженный нормой

$$\|f\|_{\psi(L)(G)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_G \psi \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) dx \leq 1 \right\},$$

является банаховым пространством, которое называется *пространством Орлича*¹. В случае, когда $\psi(y) = y^p$ при некотором $1 \leq p < \infty$, норма $\|\cdot\|_{\psi(L)(G)}$ эквивалентна стандартной норме пространства $L^p(G)$. Для $\delta > 0$ будем обозначать через $L \log_{+}^{\delta} L(G)$ пространство Орлича, соответствующее функции Юнга $\psi(y) = y \ln^{\delta}(y + e)$.

Пусть $\mathcal{F}$ обозначает преобразования Фурье. Для интегрируемой на G функции f ее преобразование Фурье вычисляется по формуле

$$\mathcal{F}f(x) = \int_G f(t) e^{-2\pi i \langle x, t \rangle} dt.$$

Здесь и всюду ниже $\langle x, y \rangle = \sum_{\nu} x_{\nu} y_{\nu}$ обозначает скалярное произведение векторов x и y , а $|x| = |x|_{\infty} = \max_j |x_j|$ – ℓ^{∞} -норму вектора x . В случае, когда $G = \mathbb{T}^d$, будем также вместо $\mathcal{F}f(q)$ записывать $\hat{f}(q)$.

¹Как обычно, совпадающие п. в. функции считаются неразличимыми.

Работа выполнена при поддержке INTAS (грант № 03-51-5070), РФФИ-ГФЕН Китая (грант № 05-01-39005), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-5813.2006.1) и РФФИ (гранты № 05-01-00066, 04-01-00066).

Для заданных $\varphi \in B(\Gamma)$ и функции Юнга ψ определим линейный оператор T_φ на $\psi(L)(G) \cap L^2(G)$ посредством следующего соотношения между преобразованиями Фурье:

$$\mathcal{F}T_\varphi f(x) = \varphi(x)\mathcal{F}f(x), \quad f \in \psi(L)(G) \cap L^2(G), \quad x \in \Gamma. \quad (1)$$

Пусть также задана еще одна функция Юнга ψ_1 . Говорят, что φ есть *мультипликатор типа* $(\psi(L)(G), \psi_1(L)(G))$, если существует положительная константа C такая, что

$$\|T_\varphi f\|_{\psi_1(L)(G)} \leq C\|f\|_{\psi(L)(G)}$$

для любой функции $f \in \psi(L)(G) \cap L^2(G)$.

Функция φ из пространства $B(\Gamma)$ называется *мультипликатором слабого типа* $(\psi(L)(G), \psi(L)(G))$, если найдется положительная константа C такая, что

$$\text{mes}\{x \in G: |T_\varphi f(x)| \geq \lambda\} \leq C \int_G \psi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx$$

для любого $\lambda > 0$ и любой функции $f \in \psi(L)(G) \cap L^2(G)$. Точную верхнюю грань отношения $\text{mes}\{x \in G: |T_\varphi f(x)| \geq \lambda\} / \int_G \psi(|f(x)|/\lambda) dx$ по всем $f \in \psi(L)(G) \cap L^2(G)$, $f \neq 0$, и $\lambda > 0$ будем обозначать через $\|\varphi\|_{M_\psi^*(\Gamma)}$.

Отметим, что в случае $G = \mathbb{T}^d$ в определениях мультипликаторов типа $(\psi(L)(G), \psi_1(L)(G))$ и слабого типа $(\psi(L)(G), \psi(L)(G))$ пространство $L^2(G)$ можно заменить на любое всюду плотное в $\psi(L)(G)$ подпространство, например на пространство тригонометрических полиномов $\mathcal{T}$.

Нетрудно показать, что если функция $\varphi \in B(\Gamma)$ есть мультипликатор типа $(\psi(L)(G), \psi(L)(G))$, то она является мультипликатором слабого типа $(\psi(L)(G), \psi(L)(G))$.

Работы по теории мультипликаторов Фурье посвящены в основном исследованию ситуации, когда $\psi(y) = y^p$, $\psi_1(y) = y^q$, $1 \leq p, q \leq \infty$ (см. [1], [2] и ссылки в этих работах).

Напомним, что *пространством Лоренца* $L^{1,\infty}(G)$ называется пространство измеримых на G функций f , для которых величина

$$\|f\|_{L^{1,\infty}(G)} := \sup_{t>0} t \text{mes}\{x \in G: |f(x)| \geq t\}$$

конечна.

Будем говорить, что функция $\varphi \in B(\Gamma)$ является *мультипликатором типа* $(\psi(L)(G), L^{1,\infty}(G))$, если существует положительная константа C такая, что

$$\|T_\varphi f\|_{L^{1,\infty}(G)} \leq C\|f\|_{\psi(L)(G)}$$

для любой функции $f \in \psi(L)(G) \cap L^2(G)$. Ясно, что функция φ есть мультипликатор типа $(L^1(G), L^{1,\infty}(G))$, если и только если она является мультипликатором слабого типа $(L^1(G), L^1(G))$.

Положим $e(y) = e^{2\pi i y}$ для скалярного y , и $e_q(x) = e(\langle q, x \rangle)$, если $q \in \mathbb{Z}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Через I обозначим отрезок $[-1/2, 1/2] \subset \mathbb{R}$. Для заданного множества $M \subset \mathbb{R}^d$ через $\mathbf{1}_M$ будем обозначать его характеристическую функцию, т.е. $\mathbf{1}_M(x) = 1$, если $x \in M$, и $\mathbf{1}_M(x) = 0$ в противном случае. Для заданных вектора $q \in \mathbb{R}^d$ и положительного числа a введем операторы сдвига $\tau_q f(x) = f(x - q)$ и растяжения $\mathfrak{d}_a f(x) = f(\frac{1}{a}x)$.

Положим

$$\mathfrak{A}_n = \{\delta \in \{-1; 0; 1\}^n : |\delta_1| + \dots + |\delta_n| \leq 1\},$$

$$\mathfrak{B}_n = \{\delta \in \{-1; 0; 1\}^n : |\delta_1| + \dots + |\delta_n| \geq 2\}.$$

(Ясно, что $\mathfrak{A}_n \cup \mathfrak{B}_n = \{-1; 0; 1\}^n$.)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть заданы строго монотонно возрастающие последовательности $\{\eta_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+$ и $\{v_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+$, причем $\eta_n \leq v_n$, $v_n = O(\sqrt{n})$. Будем говорить, что функция $\varphi \in B(\Gamma)$ принадлежит классу $\mathfrak{R}(\Gamma, \eta, v)$, если для любого натурального $n \geq 2$ найдутся элементы $q_1^n \in \Gamma, \dots, q_n^n \in \Gamma$, $|q_{s+1}^n| \geq 3|q_s^n|$, $s = 1, \dots, n-1$, $q_1^n \neq 0$, такие, что справедливы неравенства

$$\eta_n^2 \leq \sum_{\delta \in \mathfrak{A}_n} |\varphi(\delta_1 q_1^n + \dots + \delta_n q_n^n)|^2 \leq v_n^2, \quad (2)$$

$$\sum_{\delta \in \mathfrak{B}_n} |\varphi(\delta_1 q_1^n + \dots + \delta_n q_n^n)|^2 \leq \eta_n^2. \quad (3)$$

Особо выделим “предельный случай”: будем говорить, что $\varphi \in B(\Gamma)$ принадлежит классу $\mathfrak{R}^*(\Gamma)$, если существует константа $C_1 > 0$ такая, что для любого натурального $n \geq 2$ найдутся элементы $q_1^n \in \Gamma, \dots, q_n^n \in \Gamma$, $|q_{s+1}^n| \geq 3|q_s^n|$, $s = 1, \dots, n-1$, $q_1^n \neq 0$, для которых

$$\sum_{\delta \in \mathfrak{A}_n} |\varphi(\delta_1 q_1^n + \dots + \delta_n q_n^n)|^2 \geq C_1 n, \quad (4)$$

$$\sum_{\delta \in \mathfrak{B}_n} |\varphi(\delta_1 q_1^n + \dots + \delta_n q_n^n)|^2 \leq C_1 n. \quad (5)$$

Наконец, будем говорить, что $\varphi \in B(\Gamma)$ принадлежит классу $\mathfrak{R}^{**}(\Gamma)$, если существует константа $C_1 > 0$ такая, что для любых натуральных чисел A и $n \geq 2$ найдутся элементы $q_1^n \in \Gamma, \dots, q_n^n \in \Gamma$ такие, что $|q_{s+1}^n| \geq 3|q_s^n|$, $s = 1, \dots, n-1$, $|q_1^n| \geq A$, и справедливы неравенства (4), (5).

Ясно, что $\mathfrak{R}^{**}(\Gamma) \subset \mathfrak{R}^*(\Gamma)$.

Изложим план работы. В §2 среди прочих утверждений приведены достаточные условия принадлежности фурье-мультипликаторов классам $\mathfrak{R}^*$ и $\mathfrak{R}^{**}$. В §3 доказаны необходимые условия для мультипликаторов типа $(\psi(L)(\mathbb{T}^d), L^{1,\infty}(\mathbb{T}^d))$ и показано, что эти условия, вообще говоря, нельзя усилить. Приведен важный пример мультипликатора из теории динамических систем на торе. В §4 доказаны необходимые условия для мультипликаторов слабого типа $(\psi(L)(\mathbb{R}^d), \psi(L)(\mathbb{R}^d))$. В качестве примера рассмотрены мультипликаторы, возникающие при исследовании канонической проекции пространств Орлича–Соболева. В §5 доказаны необходимые условия для так называемых локальных мультипликаторов, занимающих в определенном смысле промежуточное положение между мультипликаторами на $\mathbb{T}^d$ и $\mathbb{R}^d$. В качестве следствия получено усиление одного результата Тао и Райта.

§ 2. Несколько вспомогательных утверждений

Следующая лемма устанавливает полезное для дальнейшего изложения соотношение между нормами в пространствах $L^1(I^d)$, $L^2(I^d)$ и квазинормой² $\|\cdot\|_{L^{1,\infty}(I^d)}$.

ЛЕММА 1. Пусть последовательность функций $\{H_n\}_{n=1}^\infty \subset L^2(I^d)$ удовлетворяет условиям

$$\|H_n\|_{L^1(I^d)} \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty, \quad (6)$$

$$\ln \frac{\|H_n\|_{L^2(I^d)}}{\|H_n\|_{L^1(I^d)}} = o(\|H_n\|_{L^1(I^d)}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Тогда $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|H_n\|_{L^{1,\infty}(I^d)} = \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что

$$\frac{\|F\|_{L^1(I^d)}}{\|F\|_{L^{1,\infty}(I^d)}} \leq 1 + 2 \ln \frac{\|F\|_{L^2(I^d)}}{\|F\|_{L^{1,\infty}(I^d)}} \quad (8)$$

для любой функции $F \in L^2(I^d)$, $\|F\|_{L^2(I^d)} \neq 0$.

Положим $\delta = \left(\frac{\|F\|_{L^{1,\infty}(I^d)}}{\|F\|_{L^2(I^d)}} \right)^2$, а через $F^*: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ обозначим невозрастающую перестановку функции F , $F^*(y) = \inf\{z > 0: \lambda\{x \in I^d: |F(x)| > z\} \leq y\}$. Имеем

$$\|F\|_{L^1(I^d)} = \int_0^1 F^*(y) dy = \int_0^\delta F^*(y) dy + \int_\delta^1 F^*(y) dy.$$

При этом

$$\begin{aligned} \int_0^\delta F^*(y) dy &\leq \|F\|_{L^2(I^d)} \sqrt{\delta}, \\ \int_\delta^1 F^*(y) dy &= \int_\delta^1 y F^*(y) \frac{dy}{y} \leq \|F\|_{L^{1,\infty}(I^d)} \ln \frac{1}{\delta}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\|F\|_{L^1(I^d)} \leq \|F\|_{L^2(I^d)} \sqrt{\delta} + \|F\|_{L^{1,\infty}(I^d)} \ln \frac{1}{\delta} = \|F\|_{L^{1,\infty}(I^d)} \left(1 + 2 \ln \frac{\|F\|_{L^2(I^d)}}{\|F\|_{L^{1,\infty}(I^d)}} \right),$$

что и требовалось показать.

Теперь предположим противное к заключению леммы, т. е. что величины $X_n := \|H_n\|_{L^{1,\infty}(I^d)}$ равномерно ограничены, $X_n \leq C < \infty$. Введем обозначения: $A_n := \|H_n\|_{L^1(I^d)}$ и $B_n := \|H_n\|_{L^2(I^d)}$. Неравенство (8) перепишем в следующем виде:

$$\frac{A_n}{X_n} - 2 \ln \frac{A_n}{X_n} - 1 \leq 2 \ln \frac{B_n}{A_n}. \quad (9)$$

Из неравенства (9), условия (6) и неравенства $y - 2 \ln y - 1 \geq y/2$, справедливого для достаточно большого y , следует, что $\frac{1}{2C} A_n \leq 2 \ln \frac{B_n}{A_n}$ при достаточно большом n , что противоречит условию (7). Лемма доказана.

²Напомним, что $\|f\|_{L^{1,\infty}(I^d)} = \sup_{\lambda > 0} \lambda \operatorname{mes}\{x \in I^d: |f(x)| \geq \lambda\}$.

Для $j \in \mathbb{N}$ через $\Delta_j \subset \mathbb{Z}^d$ обозначим j -й двоичный слой, $\Delta_j = \{q \in \mathbb{Z}^d: 2^j \leq |q| \leq 2^{j+1} - 1\}$.

Следующая лемма доказана в работе [3].

ЛЕММА А. Пусть ограниченная функция $\varphi: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяет условию

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \text{card}\{q \in \Delta_j: |\varphi(q)| > \lambda\} < \infty$$

для любого $\lambda > 0$. Тогда для любых последовательности $Q = \{Q_s\}_{s=1}^\infty \subset \mathbb{Z}^d$, $|Q_1| < |Q_2| < \dots$, убывающей функции $\xi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ и $n \geq 4$ найдется n элементов $q_1^n, q_2^n, \dots, q_n^n$ последовательности Q , $|q_1^n| < \dots < |q_n^n|$, таких, что

$$\max_{\delta \in \mathfrak{B}_n} |\varphi(\delta_1 q_1^n + \dots + \delta_n q_n^n)| \leq \xi(n).$$

Доказательство следующей леммы практически полностью повторяет доказательство леммы А.

ЛЕММА А'. Пусть функция $\varphi \in B(\mathbb{R}^d)$ удовлетворяет условию

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \text{card}\left\{q \in \Delta_j: \sup_{|x-q| \leq 1/2} |\varphi(x)| > \lambda\right\} < \infty$$

для любого $\lambda > 0$. Тогда для любых последовательности $Q = \{Q_s\}_{s=1}^\infty \subset \mathbb{R}^d$, $|Q_1| < |Q_2| < \dots$, $\lim_{s \rightarrow \infty} |Q_s| = \infty$, убывающей функции $\xi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ и $n \geq 4$ найдутся элементы $q_1^n, q_2^n, \dots, q_n^n$ последовательности Q , $|q_1^n| < \dots < |q_n^n|$, такие, что

$$\max_{\delta \in \mathfrak{B}_n} |\varphi(\delta_1 q_1^n + \dots + \delta_n q_n^n)| \leq \xi(n).$$

Лемма А (соответственно, лемма А') дает достаточное условие принадлежности функции классу $\mathfrak{R}^{**}(\mathbb{Z}^d)$ (соответственно, классу $\mathfrak{R}^{**}(\mathbb{R}^d)$), состоящее в том, что невозрастающие перестановки функции φ (соответственно, функции $\bar{\varphi}(q) := \sup_{|x-q| \leq 1/2} |\varphi(x)|$) на двоичных слоях равномерно мажорируются убывающей функцией и при этом функция φ равномерно отделена от нуля на некоторой стремящейся к бесконечности последовательности аргументов. Это условие формализовано ниже в леммах 2 и 3.

ЛЕММА 2. Предположим, что ограниченная функция $\varphi: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяет условиям:

А) $\limsup_{|q| \rightarrow \infty} |\varphi(q)| > 0$;

В) $\sup_{j \in \mathbb{N}} \text{card}\{q \in \Delta_j: |\varphi(q)| > \lambda\} < \infty$ для любого $\lambda > 0$.

Тогда $\varphi \in \mathfrak{R}^{**}(\mathbb{Z}^d)$.

ЛЕММА 3. Предположим, что функция $\varphi \in B(\mathbb{R}^d)$ удовлетворяет условиям:

А') $\limsup_{|x| \rightarrow \infty} |\varphi(x)| > 0$;

В') $\sup_{j \in \mathbb{N}} \text{card}\{q \in \Delta_j: \sup_{|x-q| \leq 1/2} |\varphi(x)| > \lambda\} < \infty$ для любого $\lambda > 0$.

Тогда $\varphi \in \mathfrak{R}^{**}(\mathbb{R}^d)$.

В работе [4] доказано утверждение, которое в наших обозначениях может быть записано следующим образом.

ЛЕММА В. Пусть функция $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывна на $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ и ограничена. Предположим, что существуют $a \in \mathbb{R}^d$, последовательность $\{q_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}^d$, $\lim_{n \rightarrow \infty} |\langle a, q_n \rangle| = \infty$, и непрерывная функция $\xi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \xi(t) = 0$, такие, что $\inf_n |\varphi(q_n)| > 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} |\varphi(\pm q_n + x)| < \xi(\langle a, x \rangle)$ для любого $x \in \mathbb{R}^d$. Тогда $\varphi \in \mathfrak{R}^*(\mathbb{R}^d)$.

Известно (см., например, [5] или [6]), что если непрерывная функция $\varphi \in B(\mathbb{R}^d)$ есть мультипликатор слабого типа $(L^1(\mathbb{R}^d), L^1(\mathbb{R}^d))$, то ее сужение на $\mathbb{Z}^d$ есть мультипликатор слабого типа $(L^1(\mathbb{T}^d), L^1(\mathbb{T}^d))$.

Используя схему доказательства этого утверждения из работы [5], докажем следующую лемму.

ЛЕММА 4. Пусть функция $\varphi \in B(\mathbb{R}^d)$ непрерывна на $\mathbb{Z}^d$. Предположим, что φ является мультипликатором слабого типа $(\psi(L)(\mathbb{R}^d), \psi(L)(\mathbb{R}^d))$. Тогда функция $\tilde{\varphi} := \varphi|_{\mathbb{Z}^d}$ является мультипликатором слабого типа $(\psi(L)(\mathbb{T}^d), \psi(L)(\mathbb{T}^d))$, причем $\|\tilde{\varphi}\|_{M_\psi^*(\mathbb{Z}^d)} \leq \|\varphi\|_{M_\psi^*(\mathbb{R}^d)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $k = 1, 2, \dots$ введем в рассмотрение бесконечно дифференцируемую функцию $\omega_k: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ такую, что $w(x) = 1$ при $|x| \leq k$ и $w(x) = 0$ при $|x| \geq k + 1$. Для $m \in \mathbb{N}$ через ω_k^m обозначим функцию $\mathfrak{d}_m \omega_k$.

Пусть f – произвольный тригонометрический полином. Положим $\Delta_{k,m} = T_\varphi(\omega_k^m f) - \omega_k^m T_{\tilde{\varphi}} f$. В работе [5] доказано, что $\|\Delta_{k,m}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \rightarrow 0$, если $m \rightarrow \infty$. Отсюда заключаем, что для любых $\lambda > 0$, $t > 1$ и $k \in \mathbb{N}$

$$\text{mes}\{x \in \mathbb{R}^d: |\omega_k^m(x) T_{\tilde{\varphi}} f(x)| > \lambda\} \leq \text{mes}\left\{x \in \mathbb{R}^d: |T_\varphi(\omega_k^m f)(x)| > \frac{\lambda}{t}\right\} \quad (10)$$

при достаточно большом m . С другой стороны, из определения ω_k^m и периодичности функции $T_{\tilde{\varphi}} f$ следует, что

$$\begin{aligned} \text{mes}\{x \in \mathbb{R}^d: |\omega_k^m(x) T_{\tilde{\varphi}} f(x)| > \lambda\} &\geq \text{mes}\{|x| \leq km: |T_{\tilde{\varphi}} f(x)| > \lambda\} \\ &= (km)^d \text{mes}\{x \in \mathbb{T}^d: |T_{\tilde{\varphi}} f(x)| > \lambda\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Кроме того,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi\left(t \frac{|\omega_k^m(x) f(x)|}{\lambda}\right) dx \leq (m(k+1))^d \int_{\mathbb{T}^d} \psi\left(t \frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx. \quad (12)$$

Из условия леммы следует, что

$$\text{mes}\left\{x \in \mathbb{R}^d: |T_\varphi(\omega_k^m f)(x)| > \frac{\lambda}{t}\right\} \leq \|\varphi\|_{M_\psi^*(\mathbb{R}^d)} \int_{\mathbb{R}^d} \psi\left(t \frac{|\omega_k^m(x) f(x)|}{\lambda}\right) dx. \quad (13)$$

Из неравенств (10)–(13) заключаем, что

$$\text{mes}\{x \in \mathbb{T}^d: |T_{\tilde{\varphi}} f(x)| > \lambda\} \leq \left(1 + \frac{1}{k}\right)^d \|\varphi\|_{M_\psi^*(\mathbb{R}^d)} \int_{\mathbb{T}^d} \psi\left(t \frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx$$

для любых $k \in \mathbb{N}$, $t > 1$ и любого тригонометрического полинома f , что завершает доказательство леммы.

§ 3. Необходимые условия для мультипликаторов типа $(\psi(L)(\mathbb{T}^d), L^{1,\infty}(\mathbb{T}^d))$

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что ограниченная функция $\varphi: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}$ принадлежит классу $\mathfrak{R}(\mathbb{Z}^d, \eta, v)$, а функция Юнга ψ удовлетворяет условию³*

$$\frac{\psi(2^n)}{2^n} = o\left(\frac{\eta_n}{\ln(2v_n/\eta_n)}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Тогда φ не является мультипликатором типа $(\psi(L)(\mathbb{T}^d), L^{1,\infty}(\mathbb{T}^d))$.

ПРИМЕР 1. Пусть $\alpha \in (0, 1/2]$, $\varphi_\alpha \in B(\mathbb{Z}^d)$, $\sup \varphi_\alpha = \mathbf{q} = \{q_s\}_{s=1}^\infty \subset \mathbb{Z}^d$, $|q_{s+1}| \geq 3|q_s|$, и $|\varphi_\alpha(q_s)| \asymp s^{\alpha-1/2}$, $s = 1, 2, \dots$. (Здесь запись вида $A_s \asymp B_s$ означает, что существуют положительные константы C_1 и C_2 , не зависящие от выбора s , такие, что $C_1 B_s \leq A_s \leq C_2 B_s$.) По теореме 1 функция φ_α не является мультипликатором типа $(\psi(L)(\mathbb{T}^d), L^{1,\infty}(\mathbb{T}^d))$, если $\psi(2^n)/2^n = o(n^\alpha)$, $n \rightarrow \infty$. (Нетрудно видеть, что $\varphi_\alpha \in \mathfrak{R}(\mathbb{Z}^d, \eta, v)$, где $\eta_n \asymp n^\alpha \asymp v_n$.) С другой стороны, в работе [3] доказано, что функция $\mathbf{1}_{\mathbf{q}}(x)$ является мультипликатором типа $(L \log_+^{1/2} L(\mathbb{T}^d), L^2(\mathbb{T}^d))$ (в случае $d = 1$ это утверждение доказано в [7, гл. 12, § 7]). Отсюда немедленно следует, что в случае $\alpha = 1/2$ функция φ_α есть мультипликатор типа $(L \log_+^{1/2} L(\mathbb{T}^d), L^2(\mathbb{T}^d))$.

Теперь перейдем к случаю $\alpha < 1/2$. Рассмотрим оператор T , который функции $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ ставит в соответствие последовательность $\{\hat{f}(q_s)\}_{s=1}^\infty$. Ясно, что T непрерывно действует из $L^1(\mathbb{T}^d)$ в $l^\infty(\mathbb{N})$, а из упомянутого выше результата работы [3] заключаем, что T непрерывно действует из $L \log_+^{1/2} L(\mathbb{T}^d)$ в $l^2(\mathbb{N})$. Интерполируя, получим, что T непрерывно действует из $L \log_+^\beta L(\mathbb{T}^d)$ в $l^{1/\beta}(\mathbb{N})$ для любого $\beta \in (0, 1/2)$ (соответствующее обобщение интерполяционной теоремы Рисса–Торина на пространства Орлича см., например, в статье [8]).

Имеем

$$\|T_{\varphi_\alpha} f\|_{L^2(\mathbb{T}^d)} = \left(\sum_s |\hat{f}(q_s)|^2 |\varphi_\alpha(q_s)|^2 \right)^{1/2} \asymp \left(\sum_s c_s s^{2\alpha-1} \right)^{1/2},$$

где $c_s = |\hat{f}(q_s)|^2$. Пусть $\alpha < \beta < 1/2$. В силу неравенства Гёльдера

$$\sum_s c_s s^{2\alpha-1} \leq \left(\sum_s c_s^{1/(2\beta)} \right)^{2\beta} \left(\sum_s s^{(2\alpha-1)/(2\beta')} \right)^{2\beta'},$$

где $\beta' = 1/2 - \beta$. Имеем $\sum_s s^{(2\alpha-1)/(2\beta')} < \infty$, а в силу доказанного выше свойства оператора T справедливы соотношения

$$\left(\sum_s c_s^{1/(2\beta)} \right)^{2\beta} = \left(\sum_s |\hat{f}(q_s)|^{1/\beta} \right)^{2\beta} \leq C \|f\|_{L \log_+^\beta L(\mathbb{T}^d)}^2,$$

где $C > 0$ не зависит от f . Итак, получаем, что φ_α является мультипликатором типа $(L \log_+^\beta L(\mathbb{T}^d), L^2(\mathbb{T}^d))$ при любом $\beta > \alpha$.

³Заметим, что из определения функции Юнга следует, что последовательность $\{\psi(2^n)/2^n\}$ монотонно неубывающая, следовательно, это условие влечет: $\eta_n / \ln(2v_n/\eta_n) \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из результатов работы [9] следует, что для любого $0 \leq p < 1$ условие “функция φ является мультипликатором типа $(\psi(L)(\mathbb{T}^d), L^{1,\infty}(\mathbb{T}^d))$ ” равносильно условию “оператор T_φ можно продолжить до линейного ограниченного перестановочного со сдвигами оператора из $\psi(L)(\mathbb{T}^d)$ в $L^p(\mathbb{T}^d)$ ”. Здесь $L^0(\mathbb{T}^d)$ обозначает линейное пространство классов эквивалентности совпадающих п. в. измеримых на $\mathbb{T}^d$ функций, наделенное метрикой $\rho_0(f, g) = \int_{\mathbb{T}^d} \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} dx$.

Поэтому теорему 1 можно переписать в следующем виде.

ТЕОРЕМА 1'. Пусть φ и ψ удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда ни для какого $p \in [0, 1)$ оператор T_φ нельзя продолжить до линейного ограниченного перестановочного со сдвигами оператора из $\psi(L)(\mathbb{T}^d)$ в $L^p(\mathbb{T}^d)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Построим последовательность тригонометрических полиномов $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ такую, что $\sup_n \|f_n\|_{\psi(L)(\mathbb{T}^d)} < \infty$ и

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|T_\varphi(f_n)\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{T}^d)} = \infty. \quad (15)$$

Положим $\theta(y) = \psi(y)/y$, $\theta_n = \theta(2^n)$. Из определения функции Юнга следует, что функция θ монотонно неубывающая. Введем в рассмотрение полиномы Рисса

$$R_n(x) = R(x; q_1^n, \dots, q_n^n) = \prod_{s=1}^n (1 + \kappa \cos(2\pi \langle q_s^n, x \rangle)),$$

где $q_1^n, \dots, q_n^n$ – те векторы, существование которых постулируется в определении класса $\mathfrak{R}(\mathbb{Z}^d, \eta, \nu)$; константа $\kappa \in (0, 1)$ будет определена ниже.

Следующие свойства полиномов R_n хорошо известны (см., например, [7, гл. 5, § 7]):

- а) $\widehat{R}_n(q) \neq 0$ тогда и только тогда, когда q представимо в виде $q = \sum_{j=1}^n \delta_j q_j^n$, $\delta_j \in \{-1; 0; 1\}$;
- б) $\widehat{R}_n(\pm q_s^n) = \frac{\kappa}{2}$, $s = 1, \dots, n$;
- с) $0 < \widehat{R}_n(q) \leq \frac{\kappa^2}{4}$, если q представимо в виде $q = \sum_{j=1}^n \delta_j q_j^n$, $\delta \in \mathfrak{B}_n$;
- д) $R_n(x) \geq 0$, $\|R_n\|_{L^1(\mathbb{T}^d)} = 1$, $\|R_n\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)} = R_n(0) = (1 + \kappa)^n$.

Положим $f_n(x) = \frac{1}{\theta_n} R_n(x)$. Из свойства д) и монотонности функции θ следует, что

$$\int_{\mathbb{T}^d} \psi(|R_n(x)|) dx = \int_{\mathbb{T}^d} R_n(x) \theta(R_n(x)) dx \leq \theta_n,$$

и, значит,

$$\|f_n\|_{\psi(L)(\mathbb{T}^d)} = \frac{1}{\theta_n} \|R_n\|_{\psi(L)(\mathbb{T}^d)} \leq \frac{1}{\theta_n} \int_{\mathbb{T}^d} \psi(|R_n(x)|) dx \leq 1.$$

Полином f_n представим в виде $f_n = h_n^1 + h_n^2$, где

$$\begin{aligned} h_n^1(x) &= \sum_{\delta \in \mathfrak{A}_n} \hat{f}_n(\delta_1 q_1^n + \dots + \delta_n q_n^n) e_q(x), \\ h_n^2(x) &= \sum_{\delta \in \mathfrak{B}_n} \hat{f}_n(\delta_1 q_1^n + \dots + \delta_n q_n^n) e_q(x). \end{aligned}$$

Пусть $H_n^1 = T_\varphi h_n^1$, $H_n^2 = T_\varphi h_n^2$ и $H_n = T_\varphi f_n = H_n^1 + H_n^2$. Из свойства с) и определения $\mathfrak{R}(\mathbb{Z}^d, \eta, v)$ следует, что

$$\|H_n^2\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}^2 = \frac{1}{\theta_n^2} \sum_{q=\sum_{s=1}^n \delta_s q_s^n, \delta \in \mathfrak{B}_n} |\widehat{R}_n(q)|^2 |\varphi(q)|^2 \leq \frac{\kappa^4}{16} \frac{\eta_n^2}{\theta_n^2}. \quad (16)$$

Для полинома H_n^1 имеем

$$\|H_n^1\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}^2 = \frac{1}{\theta_n^2} \left(|\varphi(0)|^2 + \frac{\kappa^2}{4} \sum_{s=1}^n (|\varphi(q_s^n)|^2 + |\varphi(-q_s^n)|^2) \right).$$

Следовательно,

$$\frac{\kappa^2}{4} \frac{\eta_n^2}{\theta_n^2} \leq \|H_n^1\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}^2 \leq \frac{v_n^2}{\theta_n^2}. \quad (17)$$

Спектр полинома H_n^1 является множеством, лакунарным в смысле Адамара (с константой лакунарности, равной 3), поэтому найдется константа $B \in (0, 1)$ (которая не зависит от выбора n) такая, что $\|H_n^1\|_{L^1(\mathbb{T}^d)} \geq B \|H_n^1\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}$ (см. [10, § 5.7.7]), и, значит,

$$\|H_n^1\|_{L^1(\mathbb{T}^d)} \geq B \cdot \frac{\kappa}{2} \frac{\eta_n}{\theta_n}. \quad (18)$$

Итак, полагая $\kappa = B$, из (16)–(18) получим неравенства

$$\|H_n\|_{L^2(\mathbb{T}^d)} \leq \|H_n^1\|_{L^2(\mathbb{T}^d)} + \|H_n^2\|_{L^2(\mathbb{T}^d)} \leq 2 \cdot \frac{v_n}{\theta_n}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \|H_n\|_{L^1(\mathbb{T}^d)} &\geq \|H_n^1\|_{L^1(\mathbb{T}^d)} - \|H_n^2\|_{L^1(\mathbb{T}^d)} \geq \|H_n^1\|_{L^1(\mathbb{T}^d)} - \|H_n^2\|_{L^2(\mathbb{T}^d)} \\ &\geq B \cdot \frac{\kappa}{2} \frac{\eta_n}{\theta_n} - \frac{\kappa^2}{4} \frac{\eta_n}{\theta_n} = \frac{B^2}{4} \frac{\eta_n}{\theta_n}. \end{aligned} \quad (20)$$

Из (19), (20) заключаем также, что $\|H_n\|_{L^2(\mathbb{T}^d)} / \|H_n\|_{L^1(\mathbb{T}^d)} \leq 8v_n / (B^2 \eta_n)$. Из условия (14), в частности, следует, что $\eta_n / \theta_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, и, значит, $\|H_n\|_{L^1(\mathbb{T}^d)} \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, в силу (20). Теперь условие (14) перепишем в виде $\ln(2v_n / \eta_n) = o(\eta_n / \theta_n)$. Тогда

$$\ln \frac{\|H_n\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}}{\|H_n\|_{L^1(\mathbb{T}^d)}} \leq \ln \frac{4}{B^2} + \ln \frac{2v_n}{\eta_n} = o\left(\frac{\eta_n}{\theta_n}\right) = o(\|H_n\|_{L^1(\mathbb{T}^d)}).$$

Теперь, применяя лемму 1 к последовательности тригонометрических полиномов $\{H_n\}$, получим (15). Теорема доказана.

Из леммы 2 и теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть для функции Юнга ψ справедливо $\psi(y) = o(y \ln^{1/2} y)$, $y \rightarrow \infty$, а ограниченная функция $\varphi: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяет условиям А) и В) леммы 2. Тогда φ не является мультипликатором типа $(\psi(L)(\mathbb{T}^d), L^{1,\infty}(\mathbb{T}^d))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае, когда $d = 1$ и $\psi(y) = y$, это утверждение доказано в работе [11].

ПРИМЕР 2. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}^d$ – заданный вектор, причем числа $1, \alpha_1, \dots, \alpha_d$ линейно независимы над $\mathbb{Z}$, и задано $r > 0$. Определим функцию $\varphi^{r,\alpha}: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}$ по формуле

$$\varphi^{r,\alpha}(q) = \frac{1}{(1 + |q|^2)^{r/2}(e_q(\alpha) - 1)}, \quad q \neq 0, \quad \varphi^{r,\alpha}(0) = 0.$$

Такой мультипликатор возникает при исследовании разрешимости так называемого *аддитивного кохомологического уравнения теории динамических систем*:

$$w(x + \alpha) - w(x) = f(x) - \int_{\mathbb{T}^d} f(t) dt, \quad x \in \mathbb{T}^d, \quad (21)$$

где f – заданная периодическая функция класса Орлича–Лиувилля $I_r\psi(L)(\mathbb{T}^d)$, а w – неизвестная измеримая функция. Из результатов работы [3] следует, что для того, чтобы уравнение (21) имело измеримое решение для любого $f \in I_r\psi(L)(\mathbb{T}^d)$, необходимо, чтобы функция $\varphi^{r,\alpha}$ была мультипликатором типа $(\psi(L)(\mathbb{T}^d), L^{1,\infty}(\mathbb{T}^d))$. В этой же работе доказано, что для всякого $r \geq d$ найдется вектор $\hat{\alpha}$ такой, что функция $\varphi^{r,\hat{\alpha}}$ равномерно ограничена, является мультипликатором типа $(L \log_+^{1/2} L(\mathbb{T}^d), L^2(\mathbb{T}^d))$ и при этом удовлетворяет условиям А), В) леммы 2. Отсюда, применяя следствие 1, делаем вывод о том, что $\varphi^{r,\hat{\alpha}}$ не является мультипликатором типа $(\psi(L)(\mathbb{T}^d), L^{1,\infty}(\mathbb{T}^d))$, если $\psi(y) = o(y \ln^{1/2} y)$, $y \rightarrow \infty$.

§ 4. Необходимые условия для мультипликаторов слабого типа $(\psi(L)(\mathbb{R}^d), \psi(L)(\mathbb{R}^d))$

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что непрерывная в $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ функция $\varphi \in B(\mathbb{R}^d)$ принадлежит классу $\mathfrak{R}(\mathbb{R}^d, \eta, v)$, а функция Юнга ψ удовлетворяет условию*

$$\frac{\psi(2^n)}{2^n} = o\left(\frac{\eta_n}{\ln(2v_n/\eta_n)}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Тогда φ не является мультипликатором слабого типа $(\psi(L)(\mathbb{R}^d), \psi(L)(\mathbb{R}^d))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для векторов $q_1^n \in \mathbb{R}^d, \dots, q_n^n \in \mathbb{R}^d$ выполнены условия (2) и (3). Поскольку φ непрерывна, можно предполагать, что координаты этих векторов – рациональные числа. Найдем натуральное $Q = Q(n)$ такое, что $p_s^n := Qq_s^n \in \mathbb{Z}^d$, $s = 1, \dots, n$. Пусть $w: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ – бесконечно дифференцируемая функция такая, что $w(x) = 1$ при $|x| \leq 1/2$ и $w(x) = 0$ при $|x| \geq 1$. Введем в рассмотрение полином Рисса вида

$$R_n(x) = \prod_{s=1}^n (1 + \kappa \cos(2\pi \langle p_s^n, x \rangle)),$$

где константа κ – из доказательства теоремы 1.

Определим финитную бесконечно дифференцируемую функцию F_n по формуле $F_n = \frac{1}{\theta_n} \mathfrak{d}_Q(R_n \mathfrak{d}_m w)$, где $m = m(n) \in \mathbb{N}$ будет определено ниже.

Фиксируем $\lambda > 0$ и оценим сверху интеграл $\int \psi(|F_n(x)|/\lambda) dx$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \psi\left(\frac{|F_n(x)|}{\lambda}\right) dx &= Q^d \int_{\mathbb{R}^d} \psi\left(\frac{R_n(x) \mathfrak{d}_m w(x)}{\theta_n \lambda}\right) dx \\ &\leq Q^d \int_{|x| \leq m} \psi\left(\frac{R_n(x)}{\theta_n \lambda}\right) dx = Q^d (2m)^d \int_{\mathbb{T}^d} \psi\left(\frac{R_n(x)}{\theta_n \lambda}\right) dx. \end{aligned} \quad (22)$$

С другой стороны, нетрудно видеть, что $\text{mes}\{x: |T_\varphi F_n(x)| > \lambda\} = Q^d \text{mes}\{x: |\mathfrak{d}_{1/Q} T_\varphi F_n(x)| > \lambda\}$.

Теперь воспользуемся следующим соотношением, справедливым для любого $a > 0$ и любой финитной функции $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$:

$$\mathfrak{d}_{1/a}(T_\varphi f) = T_{\mathfrak{d}_a \varphi}(\mathfrak{d}_{1/a} f). \quad (23)$$

Полагая в (23) $a = Q$ и $f = F_n$, получим

$$\begin{aligned} \text{mes}\{x: |\mathfrak{d}_{1/Q} T_\varphi F_n(x)| > \lambda\} &= \text{mes}\{x: |T_{\mathfrak{d}_Q \varphi} \mathfrak{d}_{1/Q} F_n(x)| > \lambda\} \\ &= \text{mes}\{x: |T_{\mathfrak{d}_Q \varphi}(R_n \mathfrak{d}_m w)(x)| > \theta_n \lambda\}, \end{aligned}$$

и, значит,

$$\text{mes}\{x: |T_\varphi F_n(x)| > \lambda\} = Q^d \text{mes}\{x: |T_{\mathfrak{d}_Q \varphi}(R_n \mathfrak{d}_m w)(x)| > \theta_n \lambda\}. \quad (24)$$

Обозначим $\varphi_n = \mathfrak{d}_Q \varphi$. Из условия теоремы следует, что $|p_{s+1}^n| \geq 3|p_s^n|$, $s = 1, \dots, n-1$, и для функции φ_n справедливы неравенства (2) и (3) (так как $\varphi_n(\delta_1 p_1^n + \dots + \delta_n p_n^n) = \varphi_n(Q(\delta_1 q_1^n + \dots + \delta_n q_n^n)) = \varphi(\delta_1 q_1^n + \dots + \delta_n q_n^n)$).

Введем в рассмотрение тригонометрический полином $G_n(x) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^d} \varphi_n(p) \times \widehat{R}_n(p) e_p(x)$ и положим

$$\Delta_{n,m} = T_{\varphi_n}(R_n \mathfrak{d}_m w) - G_n \mathfrak{d}_m w.$$

Из [5, предложение 2] следует, что при достаточно большом m справедливо неравенство

$$\|\Delta_{n,m}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{\theta_n}{3} \lambda. \quad (25)$$

Из неравенства (25) и определения функции w заключаем, что

$$\begin{aligned} \text{mes}\{x: |T_{\varphi_n}(R_n \mathfrak{d}_m w)(x)| > \theta_n \lambda\} &\geq \text{mes}\left\{x: |\mathfrak{d}_m w G_n(x)| > \frac{4}{3} \theta_n \lambda\right\} \\ &\geq \text{mes}\left\{x: |G_n(x)| > \frac{4}{3} \theta_n \lambda, |x| \leq \frac{m}{2}\right\} = m^d \text{mes}\left\{x \in \mathbb{T}^d: |G_n(x)| > \frac{4}{3} \theta_n \lambda\right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Наконец, из (22), (24) и (26), полагая $H_n = \frac{1}{\theta_n} G_n$, получим неравенство

$$\frac{\text{mes}\{x: |T_\varphi F_n(x)| > \lambda\}}{\int_{\mathbb{R}^d} \psi\left(\frac{|F_n(x)|}{\lambda}\right) dx} \geq \frac{1}{2^d} \frac{\text{mes}\{x \in \mathbb{T}^d: |H_n(x)| > \frac{4}{3} \lambda\}}{\int_{\mathbb{T}^d} \psi\left(\frac{R_n(x)}{\theta_n \lambda}\right) dx}. \quad (27)$$

Заметим, что

$$\int_{\mathbb{T}^d} \psi\left(\frac{R_n(x)}{\theta_n \lambda}\right) dx = \int_{\mathbb{T}^d} \frac{R_n(x)}{\theta_n \lambda} \theta\left(\frac{R_n(x)}{\theta_n \lambda}\right) dx \leq \frac{1}{\theta_n \lambda} \theta\left(\frac{2^n}{\theta_n \lambda}\right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda > 0} \frac{\text{mes}\{x: |T_\varphi F_n(x)| > \lambda\}}{\int_{\mathbb{R}^d} \psi\left(\frac{|F_n(x)|}{\lambda}\right) dx} &\geq \frac{3}{2^{d+2}} \sup_{\lambda > 0} \left(\frac{\theta_n}{\theta\left(\frac{4}{3} \frac{2^n}{\lambda \theta_n}\right)} \cdot \lambda \text{mes}\{x \in \mathbb{T}^d: |H_n(x)| > \lambda\} \right) \\ &\geq \frac{3}{2^{d+2}} \sup_{\lambda \geq \lambda_0} \lambda \text{mes}\{x \in \mathbb{T}^d: |H_n(x)| > \lambda\}, \end{aligned} \quad (28)$$

где $\lambda_0 = \frac{4}{3\theta_1}$. (Из монотонности θ следует, что $\theta\left(\frac{4}{3} \frac{2^n}{\lambda \theta_n}\right) \leq \theta\left(\frac{4}{3} \frac{2^n}{\lambda \theta_1}\right) \leq \theta_n$ при $\lambda \geq \lambda_0$.)

Применяя к последовательности полиномов $\{H_n\}_{n=2}^\infty$ рассуждения, использованные в доказательстве теоремы 1, получаем что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|H_n\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{T}^d)} = \infty$. Из этого, во-первых, следует, что

$$\sup_{\lambda \geq \lambda_0} \lambda \text{mes}\{x \in \mathbb{T}^d: |H_n(x)| > \lambda\} = \|H_n\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{T}^d)}$$

для бесконечно многих n , и, во-вторых, привлекая неравенство (28), получаем:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{\lambda > 0} \frac{\text{mes}\{x: |T_\varphi F_n(x)| > \lambda\}}{\int_{\mathbb{R}^d} \psi\left(\frac{|F_n(x)|}{\lambda}\right) dx} = \infty,$$

т. е. T_φ не является оператором слабого типа $(\psi(L)(\mathbb{R}^d), \psi(L)(\mathbb{R}^d))$.

С помощью леммы 3 из теоремы 2 выводим следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть для функции Юнга ψ справедливо $\psi(y) = o(y \ln^{1/2} y)$, $y \rightarrow \infty$. Предположим, что непрерывная на $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ функция $\varphi \in B(\mathbb{R}^d)$ удовлетворяет условиям A') и B') леммы 3 или условиям леммы B. Тогда φ не является мультипликатором слабого типа $(\psi(L)(\mathbb{R}^d), \psi(L)(\mathbb{R}^d))$.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим функцию $\varphi_0(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{1 + (x_1 x_2)^2}$, $\varphi_0: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Этот мультипликатор возникает при исследовании проблемы ограниченности так называемой канонической проекции соболевских пространств. Именно, пусть $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}_+^d$ – заданный набор мультииндексов такой, что с каждым своим элементом α набор $\mathcal{S}$ содержит любой мультииндекс β , удовлетворяющий условию $\beta_j \leq \alpha_j$, $j = 1, \dots, d$. Пространством Орлича–Соболева $\psi(L)_{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^d)$ назовем множество функций $f \in \psi(L)(\mathbb{R}^d)$, для которых норма

$$\|f\|_{\mathcal{S}, \psi} = \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{S}} \|\partial^\alpha f\|_{\psi(L)}^2 \right)^{1/2}$$

конечна.

Каноническое вложение $J_{\mathcal{S}}$ пространства $\psi(L)_{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^d)$ в $\bigoplus_{\mathcal{S}} \psi(L)(\mathbb{R}^d)$ (т. е. в прямое произведение $\text{card } \mathcal{S}$ копий пространства $\psi(L)(\mathbb{R}^d)$) определяется формулой $J_{\mathcal{S}} f = (\partial^\alpha f)_{\alpha \in \mathcal{S}}$. Канонической проекцией $P_{\mathcal{S}}$ называется ортогональная проекция $\bigoplus_{\mathcal{S}} L^2(\mathbb{R}^d)$ на $J_{\mathcal{S}} L_{\mathcal{S}}^2(\mathbb{R}^d)$.

Поставим вопрос: будет ли $P_{\mathcal{S}}$ линейным ограниченным оператором в пространстве $\bigoplus_{\mathcal{S}} \psi(L)(\mathbb{R}^d)$? Известно [12], что $P_{\mathcal{S}}$ ограничен в $\bigoplus_{\mathcal{S}} L^p(\mathbb{R}^d)$, если $1 < p < \infty$. Однако в пространстве $\bigoplus_{\mathcal{S}} L^1(\mathbb{R}^d)$, при определенных условиях на набор $\mathcal{S}$, отображение $P_{\mathcal{S}}$ не является даже оператором слабого типа⁴

⁴То есть среди элементов его матрицы найдется оператор, который не имеет слабый тип $(L^1(\mathbb{R}^d), L^1(\mathbb{R}^d))$.

(см. [13]). В работе [13] показано, что при определенных условиях на набор $\mathcal{S}$ гладкостей *второго порядка* (т.е. таких, что $\max_{\alpha \in \mathcal{S}} |\alpha|_1 = 2$) необходимым условием того, что $P_{\mathcal{S}}$ есть оператор слабого типа в $\bigoplus_{\mathcal{S}} L^1(\mathbb{R}^d)$, является требование, чтобы функция φ_0 была мультипликатором слабого типа $(L^1(\mathbb{R}^2), L^1(\mathbb{R}^2))$. В работе [4] доказано, что φ_0 удовлетворяет условиям леммы В. Значит, в силу следствия 2 функция φ_0 не является мультипликатором типа $(\psi(L)(\mathbb{R}^2), \psi(L)(\mathbb{R}^2))$, если $\psi(y) = o(y \ln^{1/2} y)$, $y \rightarrow \infty$.

Введем в рассмотрение множество $S^{\#}$ максимальных элементов набора $\mathcal{S}$ и *генерирующий многочлен* $Q_{S^{\#}}(\xi) = \sum_{\alpha \in S^{\#}} \xi^{2\alpha}$. В случае, когда $\mathcal{S}$ имеет порядок 2, многочлен $Q_{S^{\#}}$ запишем в виде

$$Q_{S^{\#}}(\xi) = \sum_{1 \leq i < j \leq d} a_{i,j} \xi_i^2 \xi_j^2 + \sum_{k=1}^d b_k \xi_k^4.$$

Повторяя рассуждения из [13, § 6], заключаем, что если набор $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}_+^3$ гладкостей порядка 2 удовлетворяет условиям:

- 1) $\mathcal{S}$ невырожденный, т.е. единичные координатные векторы e_1, e_2, e_3 принадлежат $\mathcal{S}$,
- 2) $\mathcal{S}$ неприводимый, т.е. никакая координата x_i не делит многочлен $Q_{S^{\#}}$,
- 3) $\mathcal{S}$ однородный, т.е. многочлен $Q_{S^{\#}}$ является однородным,
- 4) найдутся индексы $1 \leq i < j \leq 3$ такие, что $a_{ij} = 0$ и $b_i b_j = 0$,

то $P_{\mathcal{S}}$ не является оператором слабого типа $(\bigoplus_{\alpha \in \mathcal{S}} \psi(L)(\mathbb{R}^3), \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{S}} \psi(L)(\mathbb{R}^3))$, если $\psi(y) = o(y \ln^{1/2} y)$, $y \rightarrow \infty$.

§ 5. Необходимые условия для локальных мультипликаторов

Пусть задана функция Юнга ψ . Будем говорить, что функция $\varphi \in B(\mathbb{R}^d)$ есть *мультипликатор типа* $(\psi(L)(I^d), L^{1,\infty}(I^d))$, если для линейного оператора T_{φ} , определенного соотношением (1), найдется положительная константа C такая, что

$$\|T_{\varphi} f\|_{L^{1,\infty}(I^d)} \leq C \|f\|_{\psi(L)(I^d)}$$

для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\text{supp } f \subset I^d$.

Мультипликатор такого типа можно назвать *локальным*, так как действие оператора T_{φ} проверяется только на функциях, сосредоточенных на компакте (см. также определение из работы [14], приведенное ниже).

Введем в рассмотрение следующее множество “весовых функций”:

$$\Omega = \{\omega \in C(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d) : \omega(x) > 0, 0 \leq \mathcal{F}\omega(\xi) \leq 1, \text{supp } \mathcal{F}\omega \subset I^d\}.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\varphi \in B(\mathbb{R}^d)$ – непрерывная действительнoзначная функция, а функция Юнга ψ удовлетворяет условию $\psi(y) = o(y \ln^{1/2} y)$, $y \rightarrow \infty$. Предположим, что существуют константы $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \frac{1}{2}$, $\alpha > 0$, $K \geq 1$, $0 < \varepsilon_3 \leq \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{6}{\pi^2} \right)^d} - 1 \right)$, последовательность $\mathbf{q} = \{q_s\}_{s=1}^{\infty} \subset \mathbb{Z}^d$, $|q_{s+1}| \geq 3|q_s|$, $s = 1, 2, \dots$, и функция $\omega \in \Omega$ такие, что выполнены следующие требования:

- а) $\text{sign } \varphi(q_s + x) = \text{const}$ при $|x| \leq \varepsilon_2$ и $|\varphi(q_s + x)| \geq \alpha$ при $|x| \leq \varepsilon_1$, $s \in \mathbb{N}$;

b) $\int_{|x| \geq \varepsilon_2} |\varphi(q_s + x)| \omega(x) dx \leq \varepsilon_3 \int_{|x| \leq \varepsilon_2} |\varphi(q_s + x)| \omega(x) dx, \quad s \in \mathbb{N};$

c) для любых натуральных A и $n \geq 2$ найдутся элементы $q_1^n, q_2^n, \dots, q_n^n$ последовательности $\mathbf{q}$ такие, что $A \leq |q_1^n| < \dots < |q_n^n|$ и

$$\sum_{\delta \in \mathfrak{B}_n} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi^2(x + \delta_1 q_1^n + \dots + \delta_n q_n^n) \omega^2(x) dx \leq Kn.$$

Тогда φ не является мультипликатором типа $(\psi(L)(I^d), L^{1,\infty}(I^d))$. В случае, когда функция φ всюду на $\mathbb{R}^d$ одного знака, условие b) можно не использовать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$R_n(x) = R_n(x; \mu_1, \dots, \mu_n, q_1^n, \dots, q_n^n) = \prod_{s=1}^n (1 + \kappa \mu_s \cos(2\pi \langle q_s^n, x \rangle)),$$

где $0 < \kappa \leq 1$, $\mu_s \in \{-1; 1\}$, $q_s^n \in \mathbf{q}$, $|q_1^n| < |q_2^n| < \dots < |q_n^n|$. Тригонометрический полином R_n запишем также в аддитивной форме:

$$R_n(x) = \sum_{q \in \Lambda} \gamma_q e_q(x), \quad (29)$$

где $\Lambda = \{q = \sum_{s=1}^n \delta_s q_s^n, \delta_s \in \{-1; 0; 1\}\}$.

Положим $F_n(x) = \frac{1}{\theta_n} R_n(x) w(x)$, где $\theta_n = \psi(2^n)/2^n$, $w = \mathcal{F}^{-1}\omega$. Из определения класса Ω следует, что

$$\int_{I^d} \psi(R_n(x) w(x)) dx \leq \int_{\mathbb{T}^d} \psi(R_n(x)) dx \leq \theta_n,$$

и, значит,

$$\|F_n\|_{\psi(L)(I^d)} = \frac{1}{\theta_n} \|R_n w\|_{\psi(L)(I^d)} \leq 1. \quad (30)$$

Используя аддитивную форму записи (29) полинома R_n , получим $\mathcal{F}F_n(\xi) = \frac{1}{\theta_n} \sum_{q \in \Lambda} \gamma_q \tau_q \omega(\xi)$.

Пусть

$$H_n^j = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{\theta_n} \sum_{q \in \Lambda_j} \gamma_q \varphi \tau_q \omega \right), \quad j = 1, 2, \quad (31)$$

где $\Lambda_1 = \Lambda_1(q_1^n, \dots, q_n^n) = \{q = \sum_{s=1}^n \delta_s q_s^n, \delta \in \mathfrak{A}_n\}$, $\Lambda_2 = \Lambda_2(q_1^n, \dots, q_n^n) = \{q = \sum_{s=1}^n \delta_s q_s^n, \delta \in \mathfrak{B}_n\}$. Поскольку $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 = \Lambda$, $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$, имеем $H_n := T_\varphi F_n = H_n^1 + H_n^2$.

Оценим $\|H_n^1\|_{L^2(I^d)}$ снизу. Для этого введем в рассмотрение функции

$$E(x) = \prod_{j=1}^d (1 - 2|x_j|)_+, \quad \Phi(\xi) = \mathcal{F}E(\xi) = \prod_{j=1}^d \frac{2 \sin^2(\pi \xi_j / 2)}{(\pi \xi_j)^2}.$$

Ясно, что $0 \leq E(\xi) \leq 1$ и $E(\xi) \leq \mathbf{1}_{I^d}(\xi)$ при всех ξ . Поэтому $\|H_n^1\|_{L^2(I^d)} \geq \|EH_n^1\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$, и будем далее оценивать снизу величину $\|EH_n^1\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$. Имеем

$$EH_n^1 = \frac{1}{\theta_n} \mathcal{F}^{-1} \Phi \mathcal{F}^{-1} \left(\sum_{q \in \Lambda_1} \gamma_q \varphi \tau_q \omega \right) = \frac{1}{\theta_n} \mathcal{F}^{-1} \left(\Phi * \sum_{q \in \Lambda_1} \gamma_q \varphi \tau_q \omega \right).$$

Отсюда, полагая $b_q = \Phi * \varphi \tau_q \omega$ и используя равенство Парсеваля и свойства коэффициентов γ_q (см. доказательство теоремы 1), заключаем, что ⁵

$$\begin{aligned} \|EH_n^1\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &= \frac{1}{\theta_n^2} \int \left| \sum_{q \in \Lambda_1} \gamma_q b_q(x) \right|^2 dx \\ &= \frac{1}{\theta_n^2} \sum_{q \in \Lambda_1} \int \gamma_q^2 b_q^2(x) dx + \frac{1}{\theta_n^2} \sum_{p_1, p_2 \in \Lambda_1, p_1 \neq p_2} \int \gamma_{p_1} \gamma_{p_2} b_{p_1}(x) b_{p_2}(x) dx \\ &\geq \frac{\kappa^2}{4\theta_n^2} \sum_{s=1}^n \int b_{q_s^n}^2(x) dx - \frac{\kappa^4}{16\theta_n^2} \sum_{p_1, p_2 \in \Lambda_1, p_1 \neq p_2} \left| \int b_{p_1}(x) b_{p_2}(x) dx \right| \\ &= \Sigma_1(n) - \Sigma_2(n). \end{aligned} \quad (32)$$

Для любых $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^d$ справедливо представление

$$\begin{aligned} \int b_{p_1}(x) b_{p_2}(x) dx &= \\ &= \iint \varphi(\xi_1 + p_1) \omega(\xi_1) \Omega(x - \xi_1 - p_1) d\xi_1 \int \varphi(\xi_2 + p_2) \omega(\xi_2) \Omega(x - \xi_2 - p_2) d\xi_2 dx \\ &= \iint \varphi(\xi_1 + p_1) \varphi(\xi_2 + p_2) \omega(\xi_1) \omega(\xi_2) \beta(\xi_1 - \xi_2 + p_1 - p_2) d\xi_1 d\xi_2, \end{aligned} \quad (33)$$

где $\beta(z) = \int \Omega(x - z) \Omega(x) dx$. Нетрудно видеть, что

$$\beta(z) = (\Phi * \Phi)(z) = \mathcal{F}E^2(z) = \prod_{j=1}^d \frac{2(\pi z_j - \sin(\pi z_j))}{\pi^3 z_j^3} > 0, \quad z \in \mathbb{R}^d.$$

Из вида функции β и условия $\varepsilon_2 \leq 1/2$ заключаем, что

$$\min_{|\xi_1|, |\xi_2| \leq \varepsilon_2} \beta(\xi_1 - \xi_2) = \min_{|z| \leq 2\varepsilon_2} \beta(z) \geq \min_{|z| \leq 1} \beta(z) = \beta(1, \dots, 1) = \left(\frac{2}{\pi^2}\right)^d, \quad (34)$$

$$\|\beta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} = \beta(0) = 3^{-d}. \quad (35)$$

Следовательно, из (33), полагая $p_1 = p_2 = q$, выводим равенство

$$\begin{aligned} \int b_q^2(x) dx &= \iint_{\max(|\xi_1|, |\xi_2|) \leq \varepsilon_2} \varphi(\xi_1 + q) \varphi(\xi_2 + q) \omega(\xi_1) \omega(\xi_2) \beta(\xi_1 - \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \\ &\quad + \iint_{\max(|\xi_1|, |\xi_2|) \geq \varepsilon_2} \varphi(\xi_1 + q) \varphi(\xi_2 + q) \omega(\xi_1) \omega(\xi_2) \beta(\xi_1 - \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \\ &= I_1(q) + I_2(q). \end{aligned}$$

Используя (34) и свойство постоянства знака $\varphi(q_s + x)$ при $|x| \leq \varepsilon_2$, заключаем, что

$$I_1(q_s^n) \geq \left(\frac{2}{\pi^2}\right)^d \left(\int_{|\xi| \leq \varepsilon_2} |\varphi(\xi + q_s^n)| \omega(\xi) d\xi \right)^2. \quad (36)$$

⁵В тех выражениях, где для интеграла не указана область интегрирования, мы предполагаем, что интеграл берется по всему пространству $\mathbb{R}^d$.

С другой стороны, из соотношения (35) и очевидного включения $\{(\xi_1, \xi_2): \max\{|\xi_1|, |\xi_2|\} \geq \varepsilon_2\} \subset \{(\xi_1, \xi_2): |\xi_1| \geq \varepsilon_2\} \cup \{(\xi_1, \xi_2): |\xi_2| \geq \varepsilon_2\}$ следует, что

$$I_2(q_s^n) \leq \frac{2}{3^d} \int |\varphi(\xi + q_s^n)| \omega(\xi) d\xi \int_{|\xi| \geq \varepsilon_2} |\varphi(\xi + q_s^n)| \omega(\xi) d\xi. \quad (37)$$

Из неравенств (36), (37) и условия b) следует, что $|I_2(q_s^n)| \leq \frac{1}{2} I_1(q_s^n)$ и, таким образом,

$$\int b_{q_s^n}^2(x) dx \geq I_1(q_s^n) - |I_2(q_s^n)| \geq \frac{1}{2} I_1(q_s^n). \quad (38)$$

Отметим, что если φ всюду на $\mathbb{R}^d$ одного знака, то, очевидно, $I_2(q_s^n) \geq 0$, и, следовательно, мы заключаем, что справедливо неравенство (38) без привлечения условия b).

Из (36) и условия a) также следует, что

$$I_1(q_s^n) \geq \left(\frac{2}{\pi^2}\right)^d \left(\int_{|\xi| \leq \varepsilon_2} |\varphi(\xi + q_s^n)| \omega(\xi) d\xi\right)^2 \geq \alpha^2 \left(\frac{2}{\pi^2}\right)^d \left(\int_{|\xi| \leq \varepsilon_1} \omega(\xi) d\xi\right)^2. \quad (39)$$

Из (38) и (39) заключаем, что

$$\Sigma_1(n) \geq \frac{n}{\theta_n^2} \frac{\kappa^2}{8} \alpha^2 \left(\frac{2}{\pi^2}\right)^d \left(\int_{|\xi| \leq \varepsilon_1} \omega(\xi) d\xi\right)^2. \quad (40)$$

Для оценки сверху $\Sigma_2(n)$ также воспользуемся представлением (33) и следующими рассуждениями. Нетрудно видеть, что

$$\iint_{\max(|\xi_1|, |\xi_2|) \geq N} \omega(\xi_1) \omega(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 < \frac{\theta_n^2}{2n^2} \Sigma_1(n) \frac{3^d}{\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}^2} \quad (41)$$

при достаточно большом N . Значит, при таком N

$$\begin{aligned} & \left| \iint_{\max(|\xi_1|, |\xi_2|) < N} \varphi(\xi_1 + p_1) \varphi(\xi_2 + p_2) \omega(\xi_1) \omega(\xi_2) \beta(\xi_1 - \xi_2 + p_1 - p_2) d\xi_1 d\xi_2 \right| \\ & \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}^2 \|\beta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}^2 \iint_{\max(|\xi_1|, |\xi_2|) \geq N} \omega(\xi_1) \omega(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 < \frac{\theta_n^2}{2n^2} \Sigma_1(n). \end{aligned} \quad (42)$$

С другой стороны, если $\max(|\xi_1|, |\xi_2|) \leq N$, то $|p_1 - p_2 + \xi_1 - \xi_2| \geq |p_1 - p_2| - 2N$, и поэтому при достаточно большой величине $|p_1 - p_2|$ справедливо неравенство $\beta(\xi_1 - \xi_2 + p_1 - p_2) < \frac{\theta_n^2}{2n^2} \Sigma_1(n)$ при всех $|\xi_1| < N$, $|\xi_2| < N$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} & \iint_{\max(|\xi_1|, |\xi_2|) < N} \omega(\xi_1) \omega(\xi_2) \beta(p_1 - p_2 + \xi_1 - \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \\ & \leq \frac{\theta_n^2}{2n^2} \Sigma_1(n) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \omega(\xi) d\xi\right)^2 \leq \frac{\theta_n^2}{2n^2} \Sigma_1(n). \end{aligned} \quad (43)$$

Нетрудно видеть, что для любых $p_1, p_2 \in \Lambda_1$, $p_1 \neq p_2$, справедливо неравенство $|p_1 - p_2| \geq |q_1^n|$. Поэтому из (42) и (43) следует, что если $|q_1^n| \geq A_n$, где $A_n \in \mathbb{N}$ достаточно большое, то

$$\Sigma_2(n) \leq \frac{\kappa^4}{16\theta_n^2} (2n+1)^2 \frac{\theta_n^2}{2n^2} \Sigma_1(n) \leq \frac{1}{2} \Sigma_1(n).$$

Отсюда, используя (32) и (40), заключаем, что для каждого $n \geq 2$ найдется $A_n \in \mathbb{N}$ такое, что если $|q_1^n| \geq A_n$, то

$$\|H_n^1\|_{L^2(I^d)} \geq \alpha \frac{\kappa}{4} \left(\frac{2}{\pi^2}\right)^{d/2} \frac{\sqrt{n}}{\theta_n} \int_{|\xi| \leq \varepsilon_1} \omega(\xi) d\xi. \quad (44)$$

Теперь оценим $\|H_n^2\|_{L^2(I^d)}$ сверху. Имеем $\|H_n^2\|_{L^2(I^d)} \leq \|H_n^2\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$. Из равенства Парсеваля следует, что

$$\begin{aligned} \|H_n^2\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &= \frac{1}{\theta_n^2} \sum_{q \in \Lambda_2} \int \gamma_q^2 \xi_q^2(x) dx \\ &+ \frac{1}{\theta_n^2} \sum_{q_1, q_2 \in \Lambda_2, q_1 \neq q_2} \int \gamma_{q_1} \gamma_{q_2} \eta_{q_1}(x) \eta_{q_2}(x) dx = \Sigma_3(n) + \Sigma_4(n), \end{aligned} \quad (45)$$

где $\eta_q = \varphi \tau_q \omega$.

Из свойства коэффициентов полинома Рисса (см. доказательство теоремы 1) и условия c) следует, что

$$\Sigma_3(n) \leq \frac{1}{\theta_n^2} \frac{\kappa^4}{16} \sum_{q \in \Lambda_2} \int \xi_q^2(x) dx \leq K \frac{n}{\theta_n^2} \frac{\kappa^4}{16}. \quad (46)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \int \eta_{q_1}(x) \eta_{q_2}(x) dx &= \int \varphi^2(x + q_1) \omega(x) \omega(x - q_2 + q_1) dx \\ &\leq \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}^2 \int \omega(x) \omega(x - q_2 + q_1) dx. \end{aligned}$$

Из определения множества Λ_2 вытекает, что $|q_1 - q_2| \geq |q_1^n|$ для любых $q_1, q_2 \in \Lambda_2$, $q_1 \neq q_2$. Ясно также, что $\int \omega(x + z) \omega(x) dx \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$. Отсюда заключаем, что $\Sigma_4(n) \leq \Sigma_3(n)$, если $|q_1^n| \geq B_n$, а число $B_n \in \mathbb{N}$ достаточно велико. Из представления (45) и неравенств (46) заключаем, что

$$\|H_n^2\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{\sqrt{n}}{\theta_n} \frac{\sqrt{K} \kappa^2}{2}, \quad (47)$$

если только $|q_1^n| \geq B_n$.

Положим $a_s(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\kappa}{2}(\varphi \tau_{q_s^n} \omega + \varphi \tau_{-q_s^n} \omega)\right)$, $s = 1, \dots, n$, и $a_0(x) = \mathcal{F}^{-1}(\varphi \omega)$. Тогда формулу (31) в случае $j = 1$ перепишем в следующем виде:

$$H_n^1 = \frac{1}{\theta_n} \left(\mathcal{F}^{-1}(\varphi \omega) + \frac{\kappa}{2} \sum_{s=1}^n \mu_s \mathcal{F}^{-1}(\varphi \tau_{\pm q_s^n} \omega) \right) = \frac{1}{\theta_n} \left(a_0 + \sum_{s=1}^n \mu_s a_s \right).$$

Пусть $\rho_s(\eta) = \text{sign} \sin(2^{s-1} \pi \eta)$, $s = 1, 2, \dots$, — система Радемахера. Известно (см., например, [15, гл. 2, § 3]), что $L^p(I^d)$ при $2 \leq p < \infty$ является пространством типа X_2 , т. е. существует абсолютная константа $C_p > 0$ такая, что

$$\int_0^1 \left\| \sum_{s=1}^n \rho_s(\eta) f_s \right\|_{L^p(I^d)}^2 d\eta \leq C_p \sum_{s=1}^n \|f_s\|_{L^p(I^d)}^2$$

для всякого набора функций $f_s \in L^p(I^d)$, $s = 1, \dots, n$. Полагая в этом неравенстве $f_s = a_s$ и используя оценки

$$\begin{aligned} \|a_s\|_{L^p(I^d)} &\leq \|a_s\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \|\mathcal{F}a_s\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \frac{\kappa}{2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(\xi + q_s^n)| \omega(\xi) d\xi + \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(\xi - q_s^n)| \omega(\xi) d\xi \right) \leq \kappa \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}, \end{aligned}$$

приходим к неравенству

$$\int_0^1 \left\| \sum_{s=1}^n \rho_s(\eta) a_s \right\|_{L^p(I^d)}^2 d\eta \leq n C_p \kappa^2 \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}^2,$$

значит, найдется $\eta_0 \in (0, 1)$, $|\rho_s(\eta_0)| = 1$, $s = 1, \dots, n$, такое, что

$$\left\| \sum_{s=1}^n \rho_s(\eta_0) a_s \right\|_{L^p(I^d)} \leq \sqrt{C_p} \kappa \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \sqrt{n}.$$

Полагая $\mu_s = \rho_s(\eta_0)$, получим

$$\|H_n^1\|_{L^p(I^d)} \leq (1 + \sqrt{C_p}) \kappa \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \frac{\sqrt{n}}{\theta_n}. \quad (48)$$

Положим

$$\kappa = \frac{1}{256\sqrt{K}} \frac{4^d \alpha^4 \left(\int_{|\xi| \leq \varepsilon_1} \omega(\xi) d\xi \right)^4}{\pi^{4d} \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}^3 (1 + \sqrt{C_p})^3}.$$

Из выпуклости на отрезке $[0, 1]$ функции $\vartheta(\nu) := \ln \|H_n^1\|_{1/\nu}$ и неравенств (44), (48) заключаем (принимая во внимание выбор κ), что

$$\|H_n^1\|_{L^1(I^d)} \geq \|H_n^1\|_{L^2(I^d)}^4 \|H_n^1\|_{L^3(I^d)}^{-3} \geq \sqrt{K} \kappa^2 \frac{\sqrt{n}}{\theta_n}.$$

Отсюда, используя (47), получим неравенства

$$\begin{aligned} \|H_n\|_{L^1(I^d)} &\geq \|H_n^1\|_{L^1(I^d)} - \|H_n^2\|_{L^1(I^d)} \\ &\geq \|H_n^1\|_{L^1(I^d)} - \|H_n^2\|_{L^2(I^d)} \geq \left(\kappa^2 - \frac{1}{2} \kappa^2 \right) \frac{\sqrt{n}}{\theta_n} = \frac{\kappa^2}{2} \frac{\sqrt{n}}{\theta_n}. \end{aligned}$$

С другой стороны, из (47) и (48) (в случае $p = 2$) следует, что

$$\|H_n\|_{L^2(I^d)} \leq \|H_n^1\|_{L^2(I^d)} + \|H_n^2\|_{L^2(I^d)} \leq C_1 \frac{\sqrt{n}}{\theta_n},$$

где C_1 – положительная константа, не зависящая от выбора n .

Наконец, используя для последовательности функций $\{H_n\}_{n=4}^\infty$ лемму 1, получим

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|H_n\|_{L^{1,\infty}(I^d)} = \infty,$$

т. е. $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|T_\varphi F_n\|_{L^{1,\infty}(I^d)} = \infty$, что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 4. Пусть заданы функция $\eta(\cdot) \in C(\mathbb{R}^d)$, $\text{supp } \eta \subset I^d$, $0 \leq \eta(\cdot) \leq 1$, $\eta(0) = 1$, последовательность “знаков” $\{\mu_s\}_{s=1}^\infty$, $\mu_s \in \{-1; 1\}$, и последовательность векторов $\mathbf{q} = \{q_s\}_{s=1}^\infty \subset \mathbb{Z}^d$, $|q_{s+1}| \geq 3|q_s|$, $q_1 \neq 0$, $q_s \equiv 0 \pmod{2m}$, $m \in \mathbb{N}$. Покажем, что если m достаточно велико, то функция

$$\varphi(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \mu_s \eta(x - q_s)$$

удовлетворяет всем условиям теоремы 3.

Положим $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$. Из непрерывности η и условия $\eta(0) = 1$ следует, что найдется $\varepsilon_1 \in (0, \frac{1}{2}]$ такое, что $\eta(x) \geq \frac{1}{2}$ при $|x| \leq \varepsilon_1$. Из условия $\text{supp } \eta \subset I^d$ заключаем, что $|\varphi(x + q_s)| = \eta(x)$ при $|x| \leq \varepsilon_2$. Следовательно, выполнено условие а) теоремы 3.

Условие с) теоремы 3 является прямым следствием того, что для любых векторов $q_1^n \in \mathbf{q}, \dots, q_n^n \in \mathbf{q}$, $|q_1^n| < \dots < |q_n^n|$, и $\delta \in \mathfrak{B}_n$ справедливо неравенство $|q_s - (\delta_1 q_1^n + \dots + \delta_n q_n^n)| \geq 1$ для любого $s \in \mathbb{N}$.

Теперь проверим условие б). Имеем $|\varphi(x + q_s)| = \eta(x) + \sum_{k \neq s} \eta(x + q_s - q_k)$, значит,

$$\begin{aligned} \int_{|x| \leq \varepsilon_2} |\varphi(x + q_s)| \omega(x) dx &= \int_{|x| \leq \varepsilon_2} \eta(x) \omega(x) dx, \\ \int_{|x| \geq \varepsilon_2} |\varphi(x + q_s)| \omega(x) dx &= \sum_{k \neq s} \int_{|x| \leq \varepsilon_2} \eta(x) \omega(x + q_k - q_s) dx \end{aligned} \quad (49)$$

для любого $\omega \in \Omega$. Пусть

$$\begin{aligned} \omega(x) &= \prod_{j=1}^d \Phi_{2m}(x_j), \\ \Phi_{2m}(y) &= \mathcal{F}(\mathfrak{d}_{1/(2m)}(\mathbf{1}_I * \underbrace{\dots * \mathbf{1}_I}_{2m-1}))(y) \\ &= \frac{1}{2m} \mathfrak{d}_{2m}((\mathcal{F}\mathbf{1}_I)^{2m})(y) = \frac{(2m)^{2m-1}}{\pi^{2m}} \frac{\sin^{2m}(\pi \frac{y}{2m})}{y^{2m}}. \end{aligned}$$

Обозначая через $q_{s,j}$ j -ю координату вектора q_s , из условия $q_s \equiv 0 \pmod{2m}$ заключаем, что

$$\Phi_{2m}(x_j + q_{k,j} - q_{s,j}) = \Phi_{2m}(x_j) \frac{x_j^{2m}}{(x_j + q_{k,j} - q_{s,j})^{2m}}.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \int_{|x| \leq \varepsilon_2} \eta(x) \omega(x + q_k - q_s) dx &\leq \int_{|x| \leq \varepsilon_2} \eta(x) \omega(x) dx \prod_{j=1}^d \max_{y \in I} \frac{y^{2m}}{(y + q_{k,j} - q_{s,j})^{2m}} \\ &\leq \int_{|x| \leq \varepsilon_2} \eta(x) \omega(x) dx (2|q_k - q_s| - 1)^{-2m}. \end{aligned} \quad (50)$$

Условие $|q_{s+1}| \geq 3|q_s|$ влечет за собой неравенство $|q_s - q_k| \geq |3^{s-1} - 3^{k-1}||q_1|$. Поэтому из (49) и (50) заключаем, что

$$\int_{|x| \geq \varepsilon_2} |\varphi(x + q_s)| \omega(x) dx \leq \int_{|x| \leq \varepsilon_2} \eta(x) \omega(x) dx \cdot \frac{1}{|q_1|_\infty^{2m}} \sum_{k \neq s} \frac{1}{(2|3^{s-1} - 3^{k-1}| - 1)^{2m}}.$$

Поскольку сумма

$$\sum_{k \neq s} \frac{1}{(2|3^{s-1} - 3^{k-1}| - 1)^{2m}}$$

ограничена сверху равномерно по s и m и $|q_1| \geq 2m$, то, выбирая m таким, чтобы было справедливо неравенство $(2m)^{2m} \geq \frac{1}{\sqrt{1+6^d \pi^{-2d} - 1}}$, приходим к неравенству б) теоремы 3.

Если в примере 4 функция φ локализована вокруг лакунарной в смысле Адамара последовательности, то в следующем примере функция φ всюду положительна.

ПРИМЕР 5. Пусть $d = 1$, и пусть задано $r > 0$. Положим

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{(|x| + 1 - 2^j)^r}, & \text{если } 2^j \leq |x| \leq \frac{3}{2} 2^j, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \\ \frac{1}{(-|x| + 1 + 2^{j+1})^r}, & \text{если } \frac{3}{2} 2^j \leq |x| \leq 2^{j+1}, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \end{cases}$$

и $\varphi(x) = 1$ при $|x| \leq 1$. В силу положительности φ нужно проверить выполнение лишь условий а) и с) теоремы 3. В качестве последовательности $\mathbf{q}$ здесь можно взять $\{4^j\}_{j=0}^\infty$, тогда условие а), очевидно, выполнено.

Для того чтобы убедиться в справедливости условия с) заметим, что

$$\varphi(q + x) \leq (1 + |x|)^r \varphi(q)$$

для любого $q \in \mathbb{Z}$, и, значит, полагая $\omega = \Phi_{2m}$, $m = [r/2] + 1$ (функция Φ_{2m} определена в примере 4), получаем, что найдется $K \geq 1$ такое, что

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi^2(x + \delta_1 q_1^n + \dots + \delta_n q_n^n) \omega^2(x) dx \leq K \varphi^2(\delta_1 q_1^n + \dots + \delta_n q_n^n) \quad (51)$$

для любых $q_1^n \in \mathbf{q}, \dots, q_n^n \in \mathbf{q}$, $|q_1^n| < \dots < |q_n^n|$, и любого $\delta \in \mathfrak{B}_n$.

Теперь заметим, что функция $\tilde{\varphi} := \varphi|_{\mathbb{Z}^d}$ удовлетворяет условиям леммы А, полагая в которой $\xi(n) = \frac{\sqrt{n}}{3^{n/2}}$, получим, что для любых $A \in \mathbb{N}$ и $n \geq 4$ найдутся $q_1^n \in \mathbf{q}, \dots, q_n^n \in \mathbf{q}$, $|q_1^n| < \dots < |q_n^n|$, такие, что справедливо неравенство

$$\sum_{\delta \in \mathfrak{B}_n} \varphi^2(\delta_1 q_1^n + \dots + \delta_n q_n^n) \leq n.$$

Отсюда и из (51) делаем вывод о справедливости условия с) теоремы 3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ называется *локальным мультипликативным типом* $(\psi(L)(\mathbb{R}), L^{1,\infty}(\mathbb{R}))$, если для любого компакта $\Omega \subset \mathbb{R}$ найдется положительная постоянная $K = K(\Omega)$ такая, что $\|T_\varphi f\|_{L^{1,\infty}(\Omega)} \leq K \|f\|_{\psi(L)(\mathbb{R})}$ для любой функции $f \in \psi(L)(\mathbb{R})$, у которой $\text{supp } f \subset \Omega$.

Для функции $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ определим ее q -вариацию на сегменте $[a, b] \subset \mathbb{R}$ по формуле

$$\text{Var}_q(\varphi, [a, b]) = \sup_{a=t_0 < t_1 < \dots < t_n=b, n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^n |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})|^q \right)^{1/q}.$$

Будем говорить, что функция φ принадлежит классу V_q , $q \geq 1$, если

$$\sup_{j \in \mathbb{Z}} \text{Var}_q(\varphi, [2^j, 2^{j+1}]) + \text{Var}_q(\varphi, [-2^{j+1}, -2^j]) < \infty.$$

В работе [14] доказано, что если функция $\varphi \in B(\mathbb{R})$ принадлежит классу V_q при некотором $1 \leq q < 2$, то она является локальным мультипликатором типа $(L \log_+^{1/2} L(\mathbb{R}), L^{1,\infty}(\mathbb{R}))$.

Из этого утверждения и теоремы 3 немедленно вытекает следующее предложение.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть функция $\varphi \in B(\mathbb{R})$ принадлежит классу V_q , $1 \leq q < 2$, и удовлетворяет условиям а)–с) теоремы 3. Тогда φ является локальным мультипликатором типа $(L \log_+^{1/2} L(\mathbb{R}), L^{1,\infty}(\mathbb{R}))$, но не является локальным мультипликатором типа $(\psi(L)(\mathbb{R}), L^{1,\infty}(\mathbb{R}))$, если $\psi(y) = o(y \ln^{1/2} y)$, $y \rightarrow \infty$.

Автор признателен В. Ю. Протасову за полезные обсуждения.

Список литературы

1. Л. Хермандер, *Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига*, ИЛ, М., 1962; пер. с англ.: L. Hörmander, “Estimates for translation invariant operators in L^p spaces”, *Acta Math.*, **104** (1960), 93–140.
2. И. М. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: I. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Math. Ser., **30**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970.
3. А. В. Рождественский, “Об аддитивном кохомологическом уравнении и замене времени в линейном потоке на торе с диофантовым вектором частот”, *Матем. сб.*, **195**:5 (2004), 115–156; англ. пер.: A. V. Rozhdestvenskii, “On the additive cohomological equation and time change for a linear flow on the torus with a Diophantine frequency vector”, *Sb. Math.*, **195**:5 (2004), 723–764.
4. M. Wojciechowski, “A necessary condition for multipliers of weak type $(1, 1)$ ”, *Canad. Math. Bull.*, **44**:1 (2001), 121–125.
5. K. Woźniakowski, “A new proof of the restriction theorem for weak type $(1, 1)$ multipliers on $\mathbb{R}^n$ ”, *Illinois J. Math.*, **40**:3 (1996), 479–483.
6. N. Asmar, E. Berkson, J. Bourgain, “Restrictions from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{Z}^n$ of weak type $(1, 1)$ multipliers”, *Studia Math.*, **108**:3 (1994), 291–299.
7. А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 1, 2, Мир, М., 1965; пер. с англ.: A. Zygmund, *Trigonometric series*, v. 1, 2, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, New York, 1959.

⁶Отметим, что если $\varphi \in V_2$, то φ – мультипликатор типа $(L^p(\mathbb{R}), L^p(\mathbb{R}))$ при всех $1 < p < \infty$ (см. [16]).

8. A. Yu. Karlovich, L. Maligranda, “On the interpolation constant for Orlicz spaces”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **129**:9 (2001), 2727–2739.
9. S. A. Pichugov, “Translation invariant operators in linear metric spaces”, *Anal. Math.*, **18**:3 (1992), 237–248.
10. W. Rudin, *Fourier analysis on groups*, Tracts in Pure and Applied Mathematics, **12**, Interscience Publ., New York, 1962.
11. А. В. Рождественский, “О неравенствах Джексона и мультипликаторах в L_p ”, *Матем. заметки*, **57**:4 (1995), 551–579; англ. пер.: A. V. Rozhdestvenskii, “Inequalities of Jackson type and multipliers in L_p ”, *Math. Notes*, **57**:4 (1995), 381–401.
12. A. Pelczyński, K. Senator, “On isomorphisms of anisotropic Sobolev spaces with “classical Banach spaces” and a Sobolev type embedding theorem”, *Studia Math.*, **84** (1986), 169–218.
13. E. Berkson, J. Bourgain, A. Pelczynski, M. Wojciechowski, “Canonical Sobolev projections of weak type $(1, 1)$ ”, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **150**:714 (2001), viii+75 pp.
14. T. Tao, J. Wright, “Endpoint multiplier theorems of Marcinkiewicz type”, *Rev. Mat. Iberoamericana*, **17**:3 (2001), 521–558.
15. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, М., Изд-во АФЦ, 1999; англ. пер.: B. S. Kashin, A. A. Saakyan, *Orthogonal series*, Translations of Mathematical Monographs, **75**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.
16. R. Coifman, J. L. Rubio de Francia, S. Semmes, “Multipliqueurs de Fourier de $L^p(\mathbb{R})$ et estimations quadratiques”, *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math.*, **306**:8 (1988), 351–354.

А. В. Рождественский (A. V. ROZHDESTVENSKIY)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова,

механико-математический факультет

E-mail: arozhd@mech.math.msu.su

Поступило в редакцию

28.12.2005