Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Алексеевский, С. М. Натанзон, Алгебра двудольных графов и числа Гурвица лоскутных поверхностей, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2008, том 72, выпуск 4, 3–24

DOI: <https://doi.org/10.4213/im737>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 17:46:28

УДК 514.7+512.7

А. В. Алексеевский, С. М. Натанзон

Алгебра двудольных графов и числа Гурвица лоскутных поверхностей

Определение чисел Гурвица распространяется на лоскутные поверхности, участвующие в новых моделях математической физики. Доказано, что эти числа Гурвица образуют систему корреляторов клейновой топологической теории поля в смысле определений из [1]. Найдены отвечающие им карди-фробениусовы алгебры, что дает метод вычисления чисел Гурвица. Попутно доказано, что на векторном пространстве, порожденном двудольными графами с n ребрами, существует естественная бинарная операция, превращающая это пространство в некоммутативную фробениусову алгебру, изоморфную алгебре сплетающих операторов представления симметрической группы S_n в пространстве, порожденном множеством разбиений набора из n элементов на подмножества.

Библиография: 16 наименований.

§ 1. Введение

Авторы посвящают настоящую статью Э.Б. Винбергу в связи с его 70-летием.

Каждый голоморфный морфизм степени n римановых поверхностей (или, что то же самое, комплексных алгебраических кривых) $f: \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ сопоставляет точке $p \in \Omega$ локальный инвариант $\alpha(f, p) = \{n_1, \dots, n_k\}$ (диаграмму Юнга степени n), представляющий собой набор степеней отображения f в точках полного прообраза $f^{-1}(p) = \{p^1, \dots, p^k\}$. Более 100 лет назад А. Гурвиц [2] поставил задачу вычисления названных впоследствии (*классических*) чисел Гурвица

$$\sum_{f \in \text{Cov}_n(\Omega, \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\})} \frac{1}{|\text{Aut}(f)|}$$

для произвольного набора диаграмм Юнга $\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$. Здесь $\text{Cov}_n(\Omega, \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\})$ – множество классов биголоморфной эквивалентности голоморфных морфизмов $f: \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ с множеством критических значений $p_1, \dots, p_s \in \Omega$ и локальными инвариантами $\alpha(f, p_i) = \alpha_i$; $|\text{Aut}(f)|$ – порядок группы автоморфизмов отображения f .

Производящая функция для классических чисел Гурвица описывает свободную энергию суперсимметричной теории Янга–Милса [3]. Эти числа связаны с теорией струн [4], зеркальной симметрией [5], теорией особенностей [6], матричными моделями [7], интегрируемыми системами [8]. Аналог чисел Гурвица

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты № 07-01-00593, 05-02-89000-НБО-а), NSh-4719.2006.1, МТМ 2005-01637, CRDF RM1-2543-МО-03.

для вещественных алгебраических кривых был предложен в работе [1]. В настоящей статье мы распространяем теорию чисел Гурвица на лоскутные поверхности, также возникающие в математической физике [9], [10].

Обсудим неклассические числа Гурвица более подробно. Подобно тому, как категория комплексных алгебраических кривых изоморфна категории компактных римановых поверхностей, категория вещественных алгебраических кривых изоморфна категории компактных клейновых поверхностей [11] (см. также [12]). *Клейновой поверхностью* называется компактная поверхность, возможно, неориентируемая и/или с границей, снабженная атласом локальных карт со значениями в $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) \geq 0\}$, функции перехода между которыми дианалитичны (т. е. голоморфны или антиголоморфны). Граничные точки клейновой поверхности отвечают вещественным точкам соответствующих вещественных алгебраических кривых. Морфизмами клейновых поверхностей являются отображения, которые голоморфны или антиголоморфны в локальных картах и переводят граничные точки в граничные. Униформизация клейновых поверхностей [13] задает на них метрику постоянной (отрицательной в нетривиальных случаях) кривизны.

Клейновы лоскутные поверхности [10] получаются из конечного множества компактных клейновых поверхностей склейкой по граничным точкам. При этом требуется, чтобы возникающие на границе вещественные переходные функции были дианалитическими во всех, кроме конечного числа, точках и проколота окрестность любой точки была связна. (Наше определение отличается от определения, введенного в [10], тем, что в нашем допускаются неориентируемые клейновы поверхности.)

В настоящей статье мы рассматриваем лишь морфизмы степени n клейновых лоскутных поверхностей на клейновы поверхности. По определению это отображения, ограничения которых на каждую из клейновых поверхностей, составляющих лоскутную поверхность, являются морфизмами клейновых поверхностей и число прообразов внутренней точки общего положения равно n .

Пусть $f: \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ – морфизм степени n клейновой лоскутной поверхности на клейнову поверхность. Внутренняя точка $p \in \Omega - \partial\Omega$ называется *критическим значением* отображения f , если число ее прообразов меньше n . Отвечающий ей локальный топологический инвариант, как и раньше, описывается диаграммой Юнга $\alpha(p)$ степеней отображения в точках прообраза. Свяжем с граничной точкой $q \in \partial\Omega$ граф $f^{-1}(l)$, где $l \in \Omega$ – внутренняя часть границы достаточно малой окрестности $U \subset \Omega$ точки q . Класс топологической эквивалентности $\beta(f, q)$ этого графа и будет считаться локальным топологическим инвариантом, отвечающим точке q . Точка q называется *граничным критическим значением*, если хотя бы одна из связных компонент графа $\beta(f, q)$ имеет более двух вершин.

Числа Гурвица клейновых лоскутных поверхностей определяются формулой

$$H(\Omega, \{\alpha_p\}, \{\beta_q\}) = \sum_{f \in \text{Cov}_n(\Omega, \{\alpha_p\}, \{\beta_q\})} \frac{1}{|\text{Aut}(f)|},$$

где $\text{Cov}_n(\Omega, \{\alpha_p\}, \{\beta_q\})$ – множество классов дианалитической эквивалентности дианалитических морфизмов $f: \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ с множеством внутренних критических

значений $p_1, \dots, p_s \in \Omega$ таких, что $\alpha(f, p_i) = \alpha_i$ для всех i , и с множеством граничных критических значений $q_1, \dots, q_t \in \partial\Omega$ таких, что $\beta(f, q_j) = \beta_j$ для всех j . Как и раньше, $|\text{Aut}(f)|$ – порядок группы автоморфизмов отображения f .

Как топологическое пространство клейнова лоскутная поверхность является топологическим пространством, несколько более общим, чем особые топологические поверхности. Мы называем их (*топологическими*) *лоскутными поверхностями* и подробно описываем в § 3 настоящей статьи. Морфизмам степени n клейновых лоскутных поверхностей на клейновы поверхности отвечают специального вида непрерывные отображения $f: \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ (топологических) лоскутных поверхностей на компактные двумерные поверхности с границей. Мы называем эти отображения *накрытиями стратифицированной поверхности* и также подробно описываем их в § 3.

Для любой структуры клейновой поверхности на Ω существует единственная структура клейновой лоскутной поверхности на $\tilde{\Omega}$, превращающая накрытие f стратифицированной поверхности в морфизм степени n клейновой лоскутной поверхности на клейнову поверхность. Этот факт является прямым следствием соответствующего результата для клейновых поверхностей $\tilde{\Omega}$, доказанного в [13]. Топологически эквивалентным накрытиям отвечают при этом дианалитически эквивалентные. Все это приводит к чисто топологическому определению чисел Гурвица $H(\Omega, \{\alpha_p\}, \{\beta_q\})$. Переход в топологическую категорию и возможные в этой категории топологические перестройки позволяют доказать, что числа Гурвица $H(\Omega, \{\alpha_p\}, \{\beta_q\})$ являются корреляторами клейновой топологической теории поля.

Клейновы топологические теории поля [1] возникли как аксиоматизация и расширение теории открыто-замкнутых топологических струн [14] на струны с неориентируемой мировой поверхностью. Согласно [1] клейновы топологические теории поля взаимно однозначно отвечают алгебраическим структурам, называемым в настоящей статье *карди-фробениусовыми алгебрами* (в [1] эквивалентные структуры называются *структурными алгебрами*). В настоящей статье мы полностью описываем карди-фробениусовы алгебры, отвечающие числам Гурвица лоскутных поверхностей, что, в частности, дает эффективный метод их вычисления.

Карди-фробениусова алгебра состоит из взаимосвязанной пары фробениусовых алгебр (A, B) с дополнительными структурами. Мы доказываем, что для топологической теории поля накрытий лоскутными поверхностями степени n алгебра $A = A_n$ изоморфна центру групповой алгебры симметрической группы S_n , а алгебра $B = B_n$ изоморфна алгебре сплетающих операторов естественного представления группы S_n в A . Вытекающая из топологической теории поля взаимосвязь между алгебрами A и B (так называемое *условие Карди*) превращается при этом в нетривиальную теорему об алгебре сплетающих операторов (следствие 3.1).

Топологическая теория поля накрытий лоскутными поверхностями включает в себя построенные ранее топологические теории поля накрытий римановыми [15] и клейновыми [1] поверхностями. Алгебра A во всех рассмотренных

случаях одинакова, а алгебра B тривиальна в случае римановых поверхностей и является подалгеброй алгебры B_n в случае клейновых поверхностей.

Приведем содержание отдельных параграфов статьи. В § 2 мы описываем в удобной для нас форме алгебру B_n и получаем ее геометрическую интерпретацию. Мы доказываем, что на векторном пространстве, порожденном двудольными графами с n ребрами, существует (насколько нам известно, не замеченная ранее) естественная бинарная операция, преобразующая это пространство в некоммутативную фробениусову алгебру. Более того, эта алгебра изоморфна B_n и, следовательно, изоморфна алгебре сплетающих операторов.

В последнем § 3 мы определяем топологические лоскутные поверхности и связанные с ними числа Гурвица, доказываем, что они являются корреляторами клейновой топологической теории поля, и выражаем их в терминах алгебр A_n и B_n .

Авторы благодарят Институт высших научных исследований (IHES), где проводилась часть работы над статьей.

§ 2. Алгебра двудольных графов

2.1. Алгебра разбиений. Как обычно, обозначим через $\mathbb{C}$ поле комплексных чисел. *Фробениусовой парой* над полем $\mathbb{C}$ мы называем множество $(D, l^D, *_D)$, где:

- 1) D – конечномерная ассоциативная алгебра над $\mathbb{C}$ с единичным элементом 1^D ;
- 2) $l^D: D \rightarrow \mathbb{C}$ – это $\mathbb{C}$ -линейный функционал такой, что билинейная форма $(d_1, d_2)^D = l^D(d_1 d_2)$ невырождена и симметрична на D ;
- 3) $*_D: D \rightarrow D$ – инволютивный антиавтоморфизм (т. е. $*_D^2 = 1$, $*_D(xy) = *_D(y) *_D(x)$) алгебр такой, что $l^D(d^*) = l^D(d)$, где $d^* = *_D(d)$.

В частности, если $(D, l^D, *_D)$ – фробениусова пара, то D – фробениусова алгебра в смысле стандартных определений [16]. Фробениусова пара называется *полупростой* (соответственно, *коммутативной*), если алгебра D полупроста (соответственно, коммутативна). Коммутативная фробениусова пара $(D, l^D, *_D)$ с тождественной инволюцией $*_D$ будет обозначаться (D, l^D) .

Фробениусовы пары появились в работах Фробениуса как групповые алгебры конечных групп с естественными линейной формой и инволюцией. Линейная форма l^D и инволюция $*_D$ для групповой алгебры $D = \mathbb{C}[G]$ группы G определяются следующим образом. На базисе $\{g \mid g \in G\}$ из элементов группы положим $l^D(g) = \delta_{g,e}$, где $e \in G$ – единичный элемент. Соответствующая билинейная форма является стандартной билинейной формой, вводимой на групповой алгебре. Инволютивный антиавтоморфизм определяется формулой $g^* = g^{-1}$ на базисе из элементов группы и продолжается на D по линейности.

Центр групповой алгебры D , очевидно, инвариантен относительно инволюции $*_D$. Ограничения линейной функции l^D и инволюции $*_D$ на центр определяют, как легко проверить, структуру коммутативной фробениусовой пары на нем.

Опишем в удобной для дальнейшего форме важный пример фробениусовой пары – центра групповой алгебры симметрической группы S_n . Отметим, что

в силу специфики симметрической группы обратный элемент g^{-1} сопряжен g для любого элемента $g \in S_n$. Это приводит к тому, что инволюция $*_D$ на центре алгебры $D = \mathbb{C}[S_n]$ действует тривиально.

Фиксируем конечное множество E . Через $|E|$ обозначается число элементов множества E . Группа S_E всех перестановок элементов из E изоморфна симметрической группе $S_{|E|}$. *Разбиением* σ множества E называется представление этого множества в виде объединения попарно непересекающихся подмножеств $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$.

Обозначим через $\Sigma = \Sigma(E)$ множество всех разбиений. Группа S_E действует на Σ по правилу $s\sigma = \{s\sigma_1, \dots, s\sigma_k\}$, где $s \in S_E$ и образ подмножества $\sigma_i = \{e_1^i, \dots, e_{m_i}^i\}$ при действии s определен как $s\sigma_i = \{se_1^i, \dots, se_{m_i}^i\}$.

Обозначим через $\mathcal{A} = \mathcal{A}(E)$ множество орбит этого действия. Разбиения, принадлежащие одной орбите, назовем *изоморфными*. Обозначим через $[\sigma] \in \mathcal{A}$ орбиту, содержащую $\sigma \in \Sigma$. Положим $\text{Aut}(\sigma) = \{s \in S_E \mid s\sigma = \sigma\}$.

Множество $\mathcal{A}$ естественным образом отождествляется с множеством классов сопряженности симметрической группы $S_{|E|}$ и, следовательно, с множеством диаграмм Юнга порядка $|E|$. Используя это, свяжем с упорядоченным набором диаграмм Юнга $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathcal{A}^m$ константы

$$\hat{S}_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} = \frac{1}{|E|!} \sum_{(a_1, \dots, a_m)} \delta_{a_1 \dots a_m, 1},$$

где сумма берется по всем упорядоченным наборам $(a_1, \dots, a_m)$ элементов группы $S_{|E|}$ таким, что $a_i \in \alpha_i$ (здесь α_i отождествлено с классом сопряженности элементов группы $S_{|E|}$), и 1 – единица группы $S_{|E|}$.

Группа $S_{|E|}$ действует на наборы своих элементов $(a_1, \dots, a_m)$ по формуле

$$s(a_1, \dots, a_m) = (sa_1s^{-1}, \dots, sa_ms^{-1}), \quad s \in S_{|E|}.$$

Наборы из одной орбиты назовем *сопряженными*. Сгруппировав слагаемые, соответствующие сопряженным наборам, мы перепишем формулу для чисел $\hat{S}_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}$. Для этого введем обозначение $\mathcal{A}(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ для множества упорядоченных наборов $(a_1, \dots, a_m)$ элементов симметрической группы $S_{|E|}$ таких, что $a_1 \in \alpha_1, \dots, a_m \in \alpha_m$ и $a_1 \dots a_m = 1$. Обозначим через $\tilde{\mathcal{A}}(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ множество орбит действия $S_{|E|}$ на $\mathcal{A}(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Положим $\text{Aut}(a_1, \dots, a_m) = \{s \in S_{|E|} \mid s(a_1, \dots, a_m) = (a_1, \dots, a_m)\}$. Группы автоморфизмов сопряженных наборов, очевидно, изоморфны, поэтому для класса $\tilde{\alpha}$ сопряженности набора $(a_1, \dots, a_m)$ мы вводим обозначение $|\text{Aut}(\tilde{\alpha})| = |\text{Aut}(a_1, \dots, a_m)|$.

Легко показать, что определенные выше константы представляются в виде

$$\hat{S}_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} = \sum_{\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{A}}(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} \frac{1}{|\text{Aut}(\tilde{\alpha})|}.$$

Обозначим через $A = A(E)$ пространство формальных линейных комбинаций с коэффициентами в поле $\mathbb{C}$ диаграмм Юнга порядка $|E|$. Для фиксированного m определенные выше числа $\hat{S}_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}$ порождают m -линейную форму на A . В частности, числа $\hat{S}_{\alpha_1, \alpha_2}$ определяют билинейную форму, которую мы

обозначим $(\cdot, \cdot)^A$. Таким образом, для двух диаграмм Юнга $\alpha', \alpha'' \in A$ имеем $(\alpha', \alpha'')^A = \hat{S}_{\alpha', \alpha''}$. Очевидно, $\hat{S}_{\alpha', \alpha''} = \delta_{\alpha', \alpha''} \frac{1}{|\text{Aut}(\alpha')|}$, поэтому эта билинейная форма невырождена и симметрична. Коэффициенты двойственной билинейной формы обозначим через $\hat{F}^{\alpha', \alpha''}$, причем $\hat{F}^{\alpha', \alpha''} = \delta_{\alpha', \alpha''} |\text{Aut}(\alpha')|$.

Положим $c_{\alpha', \alpha''}^{\alpha'''} = \hat{S}_{\alpha', \alpha'', \alpha} F^{\alpha, \tilde{\alpha}}$ (здесь и далее повторяющиеся индексы принимают значения из всех диаграмм Юнга и по ним происходит суммирование). Равенство $\alpha' \alpha'' = c_{\alpha', \alpha''}^{\alpha'''} \alpha'''$ для любых двух диаграмм Юнга α' и α'' определяет умножение, преобразуя A в алгебру. Единица 1 группы $S_{|E|}$ порождает единицу $1^A = [1]$ алгебры A .

Определим также линейную форму на A формулой $l^A(\alpha) = (\alpha, 1^A)^A$.

ТЕОРЕМА 2.1. *Пара (A, l^A) с тривиальной инволюцией является полупростой коммутативной фробениусовой парой, изоморфной центру групповой алгебры симметрической группы.*

Для доказательства теоремы 2.1 прежде всего отметим, что ассоциативность и коммутативность алгебры A следуют из приведенной ниже леммы.

ЛЕММА 2.1. *Для любых диаграмм Юнга порядка $|E|$ и $1 < r < t$ имеет место равенство $\hat{S}_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} = \hat{S}_{\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha'} \hat{F}^{\alpha', \alpha''} \hat{S}_{\alpha'', \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_m}$. Число $\hat{S}_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}$ не меняется при произвольной перестановке индексов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Циклическая инвариантность $\hat{S}_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} = \hat{S}_{\alpha_m, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}}$ очевидна. Свяжем с упорядоченным набором диаграмм Юнга $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathcal{A}^m$ и элементом $a \in S_{|E|}$ число $\hat{S}_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(a) = \frac{1}{|E|!} \sum_{(a_1, \dots, a_m)} \delta_{a_1 \dots a_m, a}$, где сумма берется по всем упорядоченным наборам $(a_1, \dots, a_m)$ элементов группы $S_{|E|}$ таким, что $a_i \in \alpha_i$. Очевидно, если элементы a и a' сопряжены, то $\hat{S}_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(a) = \hat{S}_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(a')$. Поэтому $\hat{S}_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(a) = \hat{S}_{\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha} \left(\frac{|E|!}{|\text{Aut}(a)|} \right)^{-1}$, где α – класс сопряженности элемента a^{-1} , или, что то же самое, элемента a . Тогда

$$\begin{aligned} \hat{S}_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} &= |E|! \sum_{a \in S_{|E|}} \hat{S}_{\alpha_1, \dots, \alpha_r}(a) \hat{S}_{\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_m}(a^{-1}) \\ &= |E|! \sum_{a \in S_{|E|}} \hat{S}_{\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha} \frac{|\text{Aut}(a)|}{|E|!} \hat{S}_{\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_m, \alpha} \frac{|\text{Aut}(a)|}{|E|!}. \end{aligned}$$

Группируя по классам сопряженности и проводя сокращения, получаем

$$\hat{S}_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \hat{S}_{\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha} |\text{Aut}(\alpha)| \hat{S}_{\alpha, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_m} = \hat{S}_{\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha} \hat{F}^{\alpha, \alpha'} \hat{S}_{\alpha', \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_m}.$$

Ввиду совпадения классов сопряженности симметричность $\hat{S}_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}$ доказывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{S}_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} &= \frac{1}{|E|!} \sum_{(a_1, a_2, a_3)} \delta_{a_1 a_2 a_3, 1} \\ &= \frac{1}{|E|!} \sum_{(a_3^{-1}, a_2^{-1}, a_1^{-1})} \delta_{a_3^{-1} a_2^{-1} a_1^{-1}, 1} = \hat{S}_{\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1} [a^{-1}] = [a]. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Ассоциативность и коммутативность алгебры A следуют из леммы 2.1. Кроме того, отображение, задаваемое формулой $\alpha \mapsto \sum_{a \in \alpha} a$, является изоморфизмом алгебры A с центром групповой алгебры симметрической группы S_E , и, следовательно, алгебра A полупроста.

2.2. Алгебра пар разбиений. Опишем теперь некоммутативную фробениусову алгебру, играющую важную роль в настоящей статье. Обозначим через $\Sigma^m = \Sigma^m(E)$ множество всех упорядоченных наборов из m разбиений множества E . Группа S_E действует на Σ^m по правилу $s(\sigma_1, \dots, \sigma_m) = (s\sigma_1, \dots, s\sigma_m)$. Наборы разбиений, принадлежащие одной орбите, назовем *изоморфными*. Обозначим через $\mathcal{A}_m = \mathcal{A}_m(E)$ множество классов изоморфности. Положим $\mathcal{B} = \mathcal{A}_2$. Нетрудно видеть, что при $|E| = |E'|$ между множествами $\mathcal{B}(E)$ и $\mathcal{B}(E')$ имеется естественное взаимно однозначное соответствие. Через $[\sigma_1, \sigma_2] \in \mathcal{B}$ обозначим орбиту, содержащую $(\sigma_1, \sigma_2) \in \Sigma^2$. Положим $\text{Aut}([\sigma_1, \sigma_2]) = \{s \in S_E \mid s\sigma_i = \sigma_i, i = 1, 2\}$. Зададим инволюцию $*$: $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$, полагая $*([\sigma_1, \sigma_2]) = [\sigma_1, \sigma_2]^* = [\sigma_2, \sigma_1]$.

Будем говорить, что $(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \in \Sigma^m$ порождает $(\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathcal{B}^m$, если $(\sigma_i, \sigma_{i+1}) \in \beta_i$ при $i < m$ и $(\sigma_m, \sigma_1) \in \beta_m$. Положим

$$\hat{T}_{\beta_1, \dots, \beta_m} = \frac{1}{|E|!} \sum_{(\sigma_1, \dots, \sigma_m)} 1,$$

где сумма берется по всем упорядоченным наборам разбиений, порождающим $(\beta_1, \dots, \beta_m)$.

Наборы разбиений, порождающие $(\beta_1, \dots, \beta_m)$, распадаются на классы изоморфности, принадлежащие $\mathcal{A}_m$. Обозначим через $\mathcal{B}(\beta_1, \dots, \beta_m)$ множество всех таких классов изоморфности. Очевидно, число наборов разбиений, изоморфных данному набору $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$, равно $\frac{n!}{|\text{Aut}([\sigma_1, \dots, \sigma_m])|}$. Таким образом, определенные выше константы представляются в виде

$$\hat{T}_{\beta_1, \dots, \beta_m} = \sum_{\tilde{\beta} \in \mathcal{B}(\beta_1, \dots, \beta_m)} \frac{1}{|\text{Aut}(\tilde{\beta})|}.$$

В частности, $\hat{T}_{\beta_i, \beta_j} = \delta_{\beta_i, \beta_j^*} \frac{1}{|\text{Aut}(\beta_i)|}$. Рассмотрим обратную матрицу

$$\hat{F}^{\beta_i, \beta_j} = \delta_{\beta_i, \beta_j^*} |\text{Aut}(\beta_i)|.$$

ЛЕММА 2.2. *Имеет место равенство*

$$\hat{T}_{\beta_1, \dots, \beta_m} = \hat{T}_{\beta_1, \dots, \beta_r, \beta_i} \hat{F}^{\beta_i, \beta_j} \hat{T}_{\beta_j, \beta_{r+1}, \dots, \beta_m}.$$

Число $\hat{T}_{\beta_1, \beta_2, \beta_3}$ не меняется при циклической перестановке индексов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сопоставим упорядоченному набору разбиений $(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \in \Sigma^m$ пару наборов разбиений $(\sigma_1, \dots, \sigma_k) \in \Sigma^k$ и $(\sigma_k, \dots, \sigma_m, \sigma_1) \in$

Σ^{m-k+2} . Тогда сумма $|E|! \hat{T}_{\beta_1, \dots, \beta_m} = \sum_{(\sigma_1, \dots, \sigma_m)} 1$ представится в виде

$$\begin{aligned} \sum_{(\sigma_1, \dots, \sigma_k)} 1 \sum_{(\sigma_k, \dots, \sigma_m, \sigma_1)} 1 &= \sum_{\beta \in \mathcal{B}} \sum_{(\sigma_1, \sigma_k) \in \beta} \left(\sum_{(\sigma_1, \dots, \sigma_k)} 1 \sum_{(\sigma_k, \dots, \sigma_m, \sigma_1)} 1 \right) \\ &= \sum_{\beta \in \mathcal{B}} \frac{|E|! \hat{T}_{\beta_1, \dots, \beta_{k-1}, \beta} |E|! \hat{T}_{\beta^*, \beta_k, \dots, \beta_m}}{\frac{|E|!}{|\text{Aut}(\beta)|}} \\ &= \hat{T}_{\beta_1, \dots, \beta_r, \beta_i} \hat{F}^{\beta_i, \beta_j} \hat{T}_{\beta_j, \beta_{r+1}, \dots, \beta_m}. \end{aligned}$$

Второе утверждение леммы очевидно.

Обозначим через $B = B(E)$ пространство формальных линейных комбинаций с коэффициентами в поле $\mathbb{C}$ элементов множества $\mathcal{B}$. Определенные выше числа $\hat{T}_{\beta_1, \dots, \beta_m}$ порождают полилинейные формы на B . Положим $c_{\beta_i, \beta_j}^{\beta_k} = \hat{T}_{\beta_i, \beta_j, \beta_l} \hat{F}^{\beta_l, \beta_k}$. Равенство $\beta_i \beta_j = c_{\beta_i, \beta_j}^{\beta_k} \beta_k$ определяет умножение, преобразуя B в алгебру.

Обозначим через $V = V_E$ пространство формальных линейных комбинаций с коэффициентами в поле $\mathbb{C}$ разбиений множества E и через $M = M_E$ алгебру эндоморфизмов пространства V . Действие S_E на $\Sigma(E)$ порождает гомоморфизм $\rho: S_E \rightarrow M$.

Сопоставим паре разбиений $(\sigma_i, \sigma_j) \in \Sigma^2$ эндоморфизм $M_{\sigma_i, \sigma_j} \in M$ такой, что $M_{\sigma_i, \sigma_j} \sigma_r = \delta_{\sigma_j, \sigma_r} \sigma_i$. Эндоморфизмы M_{σ_i, σ_j} образуют базис алгебры M . Равенство $\psi(\beta) = \sum_{(\sigma_i, \sigma_j) \in \beta} M_{\sigma_i, \sigma_j}$ порождает линейный оператор $\psi: B \rightarrow M$.

ЛЕММА 2.3. *Отображение $\psi: B \rightarrow M$ является инъективным гомоморфизмом алгебр. Образ $\psi(B)$ совпадает с алгеброй сплетающих операторов представления ρ , т.е. состоит из всех эндоморфизмов, коммутирующих с $\rho(S_E)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множества $\{(\sigma_i, \sigma_j) \in \Sigma^2 \mid (\sigma_i, \sigma_j) \in \beta\}$ попарно не пересекаются при различных β . Отсюда следует инъективность ψ . Кроме того,

$$\begin{aligned} \psi(\tilde{\beta})\psi(\tilde{\beta}') &= \sum_{(\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2) \in \tilde{\beta}} M_{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2} \sum_{(\tilde{\sigma}'_1, \tilde{\sigma}'_2) \in \tilde{\beta}'} M_{\tilde{\sigma}'_1, \tilde{\sigma}'_2} \\ &= \sum_{(\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2) \in \tilde{\beta}, (\tilde{\sigma}'_1, \tilde{\sigma}'_2) \in \tilde{\beta}'} M_{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2} M_{\tilde{\sigma}'_1, \tilde{\sigma}'_2} = \sum_{(\sigma_1, \sigma_2) \in \tilde{\beta}, (\sigma_2, \sigma_3) \in \tilde{\beta}'} M_{\sigma_1, \sigma_3}. \end{aligned}$$

В последней сумме коэффициенты при сопряженных парах разбиений (σ_1, σ_3) совпадают. Поэтому сумму можно записать как $\sum_{\beta \in \mathcal{B}} C_{\tilde{\beta}, \tilde{\beta}'}^{\beta} \psi(\beta)$, где коэффициент $C_{\tilde{\beta}, \tilde{\beta}'}^{\beta}$ равен частному от деления числа наборов разбиений $\{(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in \Sigma^3 \mid (\sigma_1, \sigma_2) \in \tilde{\beta}, (\sigma_2, \sigma_3) \in \tilde{\beta}', (\sigma_1, \sigma_3) \in \beta\}$ на число наборов разбиений $\{(\sigma_1, \sigma_3) \in \Sigma_2 \mid (\sigma_1, \sigma_3) \in \beta\}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \psi(\tilde{\beta})\psi(\tilde{\beta}') &= \sum_{\beta \in \mathcal{B}} \frac{|E|! \hat{T}_{\tilde{\beta}, \tilde{\beta}', \beta^*}}{\frac{|E|!}{|\text{Aut}(\beta)|}} \psi(\beta) = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} \hat{T}_{\tilde{\beta}, \tilde{\beta}', \beta^*} |\text{Aut}(\beta)| \psi(\beta) \\ &= \sum_{\beta \in \mathcal{B}} \hat{T}_{\tilde{\beta}, \tilde{\beta}', \beta^*} \hat{F}^{\beta^*, \beta} \psi(\beta) = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} \psi(\hat{T}_{\tilde{\beta}, \tilde{\beta}', \beta^*} \hat{F}^{\beta^*, \beta} \beta) = \psi(\tilde{\beta} \tilde{\beta}'). \end{aligned}$$

Заметим теперь, что эндоморфизм $m \in M$ коммутирует со всеми операторами множества $\rho(S_E)$ тогда и только тогда, когда в разложении m в сумму базисных эндоморфизмов M_{σ_i, σ_j} коэффициенты при M_{σ_p, σ_q} и $M_{s(\sigma_p), s(\sigma_q)}$ совпадают для всех $(\sigma_p, \sigma_q) \in \Sigma^2$ и $s \in S_E$. По построению образ представления ψ как раз и совпадает с множеством таких эндоморфизмов.

Положим $1^B = \sum_{\sigma \in \Sigma} [\sigma, \sigma]$. Как и в п. 2.1, матрица $\hat{F}_{\beta_i, \beta_j} = \hat{T}_{\beta_i, \beta_j}$ определяется равенством $(\beta_i, \beta_j)^B = \hat{F}_{\beta_i, \beta_j}$ невырожденную симметрическую билинейную форму на B . Рассмотрим линейную форму $l^B(\beta) = (\beta, 1^B)^B$ на B . Продолжим по линейности инволюцию $*$: $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ до инволюции $*_B: B \rightarrow B$.

ТЕОРЕМА 2.2. *Набор $(B, l^B, *_B)$ является полупростой фробениусовой парой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полупростота алгебры B следует из леммы 2.3, остальные свойства – из леммы 2.2.

2.3. Алгебра двудольных графов. Алгебру пар разбиений можно интерпретировать как алгебру двудольных графов. *Двудольным графом* мы называем топологическое пространство, состоящее из:

- 1) конечного числа точек (*вершин*), разбитых на две (упорядоченные) группы V_1, V_2 ;
- 2) соединяющих вершины попарно непересекающихся отрезков (*ребер*) E , причем любое ребро $e \in E$ имеет конец $V_1(e) \in V_1$ и конец $V_2(e) \in V_2$.

Такой граф будет обозначаться тройкой (V_1, E, V_2) . Число ребер с концом в вершине v называется *валентностью* вершины v . Далее, не оговаривая это специально, мы будем рассматривать лишь графы, валентности вершин которых положительны.

Изоморфизмом между двудольными графами (V_1, E, V_2) и (V'_1, E', V'_2) называется гомеоморфизм $\iota: \bigcup_{e \in E} e \rightarrow \bigcup_{e' \in E'} e'$ такой, что $\iota(V_i) = V'_i$. Обозначим через $\text{Aut}(V_1, E, V_2)$ группу автоморфизмов двудольного графа (V_1, E, V_2) , через $[(V_1, E, V_2)] \in \mathcal{B}_n$ класс изоморфности двудольного графа (V_1, E, V_2) и через $\mathcal{B}_n$ множество классов изоморфности двудольных графов с n ребрами.

Формальные линейные комбинации элементов из $\mathcal{B}_n$ с коэффициентами из поля $\mathbb{C}$ образуют векторное пространство B_n . Определим на B_n бинарную операцию. Пусть (V_1, E, V_2) и (V'_1, E', V'_2) – пара двудольных графов с n ребрами. Обозначим через $\text{Hom}(V_2, V'_1)$ множество отображений $\chi: V_2 \rightarrow V'_1$, сохраняющих валентность вершин. Каждому такому отображению сопоставим двудольный граф (V_2, E_χ, V'_1) , ребра которого соединяют лишь вершины v и $\chi(v)$, где $v \in V_2$, причем число ребер, соединяющих v и $\chi(v)$, равно валентности вершины v .

Подмножество $F \subset E \times E'$ назовем *согласованным* с χ , если ограничения на F естественных проекций $E \times E' \rightarrow E$, $E \times E' \rightarrow E'$ взаимно однозначны и $\chi(V_2(e)) = V_1(e')$ для любого $(e, e') \in F$. Обозначим через M_χ множество всех таких F . Сопоставим подмножеству $F \in M_\chi$ двудольный граф $(V_1, \bar{F}, V'_2)$, ребрами которого являются склеенные по точкам $V_2(e)$ и $V_1(e')$ пары ребер

$(e, e') \in F$. Обозначим через $\text{Aut}_F(V_1, \bar{F}, V'_2) \subset \text{Aut}(V_1, \bar{F}, V'_2)$ подгруппу, состоящую из автоморфизмов, индуцирующих на множестве E автоморфизм графа (V_1, E, V_2) .

Построим теперь отображение $\mathcal{B}_n \times \mathcal{B}_n \rightarrow B_n$, положив

$$[(V_1, E, V_2)] [(V'_1, E', V'_2)] = \sum_{\chi \in \text{Hom}(V_2, V'_1)} \sum_{F \in M_\chi} \frac{|\text{Aut}(V_2, E_\chi, V'_1)|}{|\text{Aut}_F(V_1, \bar{F}, V'_2)|} [(V_1, \bar{F}, V'_2)].$$

Продолжая его по линейности, получаем бинарную операцию, преобразующую B_n в алгебру. Эта операция имеет простую геометрическую интерпретацию. Вклад в произведение $[(V_1, E, V_2)] [(V'_1, E', V'_2)]$ дают сохраняющие валентность отождествления вершин из V_2 с вершинами из V'_1 . В результате такого отождествления возникает “особый граф” с вершинами $V_1 \cup V'_2$ и ребрами, пересекающимися на “множестве особенностей” $V_2 = V'_1$. Произведением называется линейная комбинация “разрешений” этих особенностей, т. е. порождающих двудольный граф попарных склеек приходящих в общую вершину ребер из (V_1, E, V_2) и (V'_1, E', V'_2) . Коэффициенты линейной комбинации выбраны таким образом, чтобы (как мы докажем ниже) получившаяся алгебра была ассоциативной алгеброй с единицей.

Рассмотрим произвольный двудольный граф (V_1, E, V_2) с n ребрами. Вершины множества V_i группируют ребра, образуя разбиения $\sigma_i(V_1, E, V_2) \in \Sigma(E)$. Нетрудно видеть, что соответствие $(V_1, E, V_2) \mapsto (\sigma_1(V_1, E, V_2), \sigma_2(V_1, E, V_2)) \in \Sigma^2(E)$ определяет взаимно однозначное отображение $\tilde{\varrho}: \mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{B}(E_n)$, где E_n – множество из n элементов.

ЛЕММА 2.4. *Отображение $\tilde{\varrho}$ порождает изоморфизм алгебр $\varrho: B_n \rightarrow B(E_n)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение $\tilde{\varrho}$ порождает изоморфизм групп $\text{Aut}(V_1, E, V_2)$ и $\text{Aut}(\tilde{\varrho}(V_1, E, V_2))$. Таким образом,

$$\widehat{F}^{\beta_i, \beta_j} = \delta_{\beta_i, \beta_j} |\text{Aut}(V_1, E, V_2)|,$$

где $\beta_i, \beta_j \in \mathcal{B}(E_n)$ и $\beta_i = \tilde{\varrho}(V_1, E, V_2)$. Кроме того, для любой пары двудольных графов (V_1, E, V_2) , (V'_1, E', V'_2) , $\chi \in \text{Hom}(V_2, V'_1)$ и $F \in M_\chi$ отображение $\tilde{\varrho}$ порождает изоморфизм групп $\text{Aut}_F(V_1, \bar{F}, V'_2)$ и $\text{Aut}([\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3])$, где $[\sigma_1, \sigma_2] = [(V_1, E, V_2)]$, $[\sigma_2, \sigma_3] = [(V'_1, E', V'_2)]$ и $[\sigma_1, \sigma_3] = [(V_1, \bar{F}, V'_2)]$. Таким образом,

$$\widehat{T}_{[\sigma_1, \sigma_2], [\sigma_2, \sigma_3], [\sigma_3, \sigma_1]} = \frac{1}{|\text{Aut}_F(V_1, \bar{F}, V'_2)|}.$$

Следовательно, при отображении $\tilde{\varrho}$ структурным константам $\frac{|\text{Aut}(V_2, E_\chi, V'_1)|}{|\text{Aut}_F(V_1, \bar{F}, V'_2)|}$ алгебры B_n отвечают структурные константы $c_{\beta_i, \beta_j}^{\beta_k} = \widehat{T}_{\beta_i, \beta_j, \beta_l} \widehat{F}^{\beta_l, \beta_k}$ алгебры $B(E_n)$.

Из теоремы 2.2, леммы 2.4 имеем

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Число классов изоморфности двудольных графов с n ребрами равно размерности алгебры сплетающих операторов естественного представления симметрической группы S_n в множестве разбиений множества $\{1, \dots, n\}$ на подмножества.

ПРИМЕР 2.1 (двудольные графы с тремя ребрами). Имеются три диаграммы Юнга степени 3. Они соответствуют разложениям $3 = 1 + 1 + 1$, $3 = 1 + 2$, $3 = 3$. В первом и третьем классах содержится по одному разбиению множества $\{1, 2, 3\}$, во втором – три: $\{1\} \cup \{2, 3\}$, $\{2\} \cup \{3, 1\}$, $\{3\} \cup \{1, 2\}$. Значит, соответствующее векторное пространство V пятимерно. Представление S_3 , индуцированное перестановками разбиений, очевидно, разлагается в прямую сумму трех одномерных и одного двумерного представлений. Таким образом, при подходящем выборе базиса в V образ представления состоит из всех пятимерных матриц $\{C_{ij}\}$, где $C_{33} = C_{44} = C_{55}$ и $C_{ij} = 0$ во всех случаях, кроме $i = j$ или $i, j < 3$. Матрицы, коммутирующие с ними, – это все матрицы $\{B_{ij}\}$ такие, что $B_{11} = B_{22}$ и $B_{1i} = B_{2i} = B_{i1} = B_{i2} = 0$ при $i > 2$. Значит, алгебра сплетающих операторов изоморфна прямой сумме матричных алгебр порядка 3 и порядка 1, и, следовательно, ее размерность равна 10. По доказанному эта алгебра изоморфна алгебре двудольных графов с тремя ребрами. Ее базис состоит из 10 классов изоморфности двудольных графов с тремя ребрами (рис. 1). Умножение в этом базисе описано в табл. 1. Базисные элементы этой таблицы соответствуют графам и обозначены, как на рис. 1.

Рис. 1

Таблица 1. Таблица умножения алгебры двудольных графов с тремя ребрами

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	a	0	c	0	0	f	0	0	0	0
b	0	b	0	d	0	0	g	0	0	0
c	0	c	0	a	0	0	f	0	0	0
d	0	0	0	b	0	0	g	0	0	0
e	0	0	0	0	e	$i + j$	0	0	0	0
f	0	0	0	0	$3a$	0	0	$3c$	f	$2f$
g	0	0	0	0	$3d$	0	0	$3b$	g	$2g$
h	0	h	0	e	0	0	$i + j$	0	0	0
i	0	0	0	0	e	0	0	h	i	j
j	0	0	0	0	$2e$	0	0	$2h$	j	$i + 2j$

Пусть $\mathcal{B}_n^1 \subset \mathcal{B}_n$ – подмножество, состоящее из классов изоморфности двудольных графов таких, что каждая вершина соединена ребром ровно с одной другой вершиной. Нетрудно видеть, что при изоморфизме ρ единице алгебры $B(E_n)$ отвечает элемент $1^{B_n} = \sum_{\Gamma \in \mathcal{B}_n^1} \frac{\Gamma}{\text{Aut}(\Gamma)}$. Равенство $(\beta_i, \beta_j)^{B_n} = \delta_{\beta_i, \beta_j} \frac{1}{|\text{Aut}(\beta_i)|}$ определяет симметрическую билинейную форму на B_n . Зададим равенством $l^{B_n}(\beta) = (\beta, 1^{B_n})^{B_n}$ линейный функционал на B_n . Инволюция $(V_1, E, V_2) \mapsto (V_2, E, V_1)$ порождает инволюцию $*$: $B_n \rightarrow B_n$.

Из теоремы 2.2, леммы 2.4 имеем

СЛЕДСТВИЕ 2.2. *Двудольные графы с n ребрами порождают полупростую фробениусову пару $(B_n, l^{B_n}, *)$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Алгебра двудольных графов B_n имеет естественные подалгебры $B_n(\frac{s}{t})$, порожденные графами с s вершинами, валентность каждой из которых равна t . Эти алгебры (и их суммы) также порождают полупростые фробениусовы пары $(B_n(\frac{s}{t}), l^{B_n}, *)$.

2.4. Карди-фробениусовы алгебры. Карди-фробениусовой алгеброй над $\mathbb{C}$ мы называем множество $\{(A, l^A, *_A), (B, l^B, *_B), \phi\}$, где:

1) $(A, l^A, *_A)$ и $(B, l^B, *_B)$ – фробениусовы пары над $\mathbb{C}$, причем A – коммутативная алгебра;

2) $\phi: A \rightarrow B$ – гомоморфизм алгебр такой, что $\phi(A)$ принадлежит центру алгебры B и $\phi(a^*) = (\phi(a))^*$;

3) условие Карди выполнено.

Для того чтобы сформулировать условие Карди, нам понадобятся дополнительные определения. Обозначим через $\phi^\bullet$ двойственное к ϕ отображение, отождествленное с отображением B в A с помощью невырожденных билинейных форм $l^B(xy)$ и $l^A(xy)$ на алгебрах B и A соответственно, т. е. $\phi^\bullet: B \rightarrow A$ – линейный оператор такой, что $l^A(a\phi^\bullet(b)) = l^B(\phi(a)b)$ для $a \in A, b \in B$. Условие Карди состоит в том, что для любых $x, y \in B$ выполняется равенство

$l^A(\phi^\bullet(x)\phi^\bullet(y))_A = \text{tr}(W_{x,y})$, где $W_{x,y}: B \rightarrow B$ – линейный оператор такой, что $W_{x,y}(b) = xby$.

Рассмотрим базисы векторных пространств $\{\alpha_i\} \subset A$ и $\{\beta_i\} \subset B$. Обозначим через F^{α_i, α_j} и F^{β_i, β_j} матрицы, обратные к матрицам $l^A(\alpha_i \alpha_j)$ и $l^B(\beta_i \beta_j)$. Оснащением карди-фробениусовой алгебры $\{(A, l^A, *_A), (B, l^B, *_B)\}$ мы называем элемент $U \in A$ такой, что $U^2 = F^{\alpha_i, \alpha_j} \alpha_i \alpha_j^*$, $l^B(b\phi(U)) = l^B(bF^{\beta_i, \beta_j} \beta_i \beta_j^*)$, $(aU)^* = aU$ для всех $a \in A$, $b \in B$.

Простейший пример карди-фробениусовой алгебры таков. Любая одномерная фробениусова пара имеет вид $C_\alpha = (\mathbb{C}, l_\alpha, \text{Id})$, где линейная форма определяется числом $\alpha \in \mathbb{C}^*$, инволюция тождественна. Построим карди-фробениусову алгебру M из двух фробениусовых пар C_α и C_β , а именно $M = \{C_\alpha, C_\beta, \phi\}$, где ϕ – тождественный изоморфизм алгебры $\mathbb{C}$. Проверяется, что условие Карди выполнено тогда и только тогда, когда $\alpha = \beta^2$, и в этом случае M является карди-фробениусовой алгеброй. Эта алгебра имеет единственное оснащение $U \in \mathbb{C}$, а именно $U = \frac{1}{\beta}$.

В работе [1] дано определение *структурной алгебры*. Структурной алгеброй названа ассоциативная алгебра H , представленная в виде прямой суммы подалгебры A и двустороннего идеала B . Эта алгебра оснащена дополнительными структурами (инвариантными невырожденными билинейными формами на A и B , инволютивным антиавтоморфизмом алгебры H , элементом $U \in A$) и удовлетворяет ряду аксиом. В частности, из аксиом следует, что $A \cdot B = B \cdot A \subset B$.

Определение оснащенной карди-фробениусовой алгебры эквивалентно определению структурной алгебры, что, в частности, объясняет использование термина “алгебра”. А именно, пусть дана оснащенная карди-фробениусова алгебра $\{(A, l^A, *_A), (B, l^B, *_B), \phi\}$. Построим алгебру $H = A \oplus B$. Элементы из A (соответственно, из B) умножаются, как в алгебре A (соответственно, B); для любых $a \in A$, $b \in B$ положим $ab = ba = \phi(a)b$. Проверяется, что построенная таким способом алгебра H является ассоциативной алгеброй. Более того, билинейные формы, инволюции и элемент U определяют дополнительные элементы на H , превращая ее в структурную алгебру, и полученное соответствие между оснащенными карди-фробениусовыми алгебрами и структурными алгебрами является взаимно однозначным.

Оснащенным карди-фробениусовым алгебрам взаимно однозначно отвечают клейновы топологические теории поля [1]. К карди-фробениусовым алгебрам приводят, в частности, открыто-замкнутые модели теории струн [14]. Распространение открыто-замкнутых моделей на неориентируемые струны связано с выбором оснащения [1].

Карди-фробениусова алгебра называется *полупростой*, если алгебры A и B полупросты. Любая полупростая карди-фробениусова алгебра имеет одно или несколько оснащений [1]. Приведем три примера полупростых карди-фробениусовых алгебр с оснащением.

ПРИМЕР 2.2 (комплексные числа и матрицы, вариант 1). Рассмотрим набор

$$\left\{ (\mathbb{C}, l_{\mu^2}), (\mathbb{M}(n, \mathbb{C}), l_{\mu}^M, *), \phi_M, \frac{1}{\mu} \right\},$$

где $\mu \neq 0 \in \mathbb{C}$, $l_\mu^M(z) = \mu \operatorname{tr}(z)$ для $z \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$, $*$ – транспонирование матрицы и $\phi_M: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ – естественный изоморфизм чисел в скалярные матрицы.

ПРИМЕР 2.3 (комплексные числа и матрицы, вариант 2). Рассмотрим набор

$$\left\{ (\mathbb{C}, l_{\mu^2}), (\mathbb{M}(2n, \mathbb{C}), l_\mu^M, \tilde{*}), \phi_M, -\frac{1}{\mu} \right\},$$

где $\tilde{*}$ – инволюция, построенная по следующему правилу. Представим $m \in \mathbb{M}(2n, \mathbb{C})$ в блочном виде: $m = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$; тогда $m^{\tilde{*}} = \begin{pmatrix} m_{22}^* & -m_{12}^* \\ -m_{21}^* & m_{11}^* \end{pmatrix}$.

ПРИМЕР 2.4 (пара комплексных чисел и пара матриц, вариант 3). Обозначим через C коммутативную фробениусову пару, состоящую из алгебры $A = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, линейной формы $l^A(x, y) = \mu^2(x + y)$, где $(x, y) \in A$, и инволютивного антиавтоморфизма $*_A(x, y) = (y, x)$ (одновременно являющегося автоморфизмом в силу коммутативности алгебры A). Обозначим через M фробениусову пару, состоящую из алгебры $B = \mathbb{M}(2n, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{M}(2n, \mathbb{C})$, линейной формы $l^B(X, Y) = \mu(\operatorname{tr}(X) + \operatorname{tr}(Y))$, где $(X, Y) \in B$, и инволютивного антиавтоморфизма $*_B(X, Y) = (Y^*, X^*)$. Пусть ϕ – изоморфизм алгебры A с центром алгебры B , т. е. $\phi(x, y) = (xE, yE)$, где E – единичная матрица. Тогда набор $\{A, B, \phi\}$ является карди-фробениусовой алгеброй. Единственным ее оснащением является элемент $U = 0$.

Ортогональной суммой фробениусовых пар $(D_1, l^{D_1}, *_D)$ и $(D_2, l^{D_2}, *_D)$ мы называем фробениусову пару

$$(D, l^D, *_D) = (D_1, l^{D_1}, *_D) \oplus (D_2, l^{D_2}, *_D),$$

где $D = D_1 \oplus D_2$ – прямая сумма алгебр ($d_1 d_2 = 0$ для $d_i \in D_i$), $l^D = l^{D_1} \oplus l^{D_2}$ и $*_{D_i}$ – ограничение $*_D$ на D_i .

Ортогональной суммой карди-фробениусовых алгебр $\{(A_1, l^{A_1}, *_A), (B_1, l^{B_1}, *_B), \phi_1\}$ и $\{(A_2, l^{A_2}, *_A), (B_2, l^{B_2}, *_B), \phi_2\}$ мы называем карди-фробениусову алгебру

$$\begin{aligned} \{(A, l^A, *_A), (B, l^B, *_B), \phi\} &= \{(A_1, l^{A_1}, *_A), (B_1, l^{B_1}, *_B), \phi_1\} \\ &\oplus \{(A_2, l^{A_2}, *_A), (B_2, l^{B_2}, *_B), \phi_2\}, \end{aligned}$$

где $(A, l^A, *_A) = (A_1, l^{A_1}, *_A) \oplus (A_2, l^{A_2}, *_A)$, $(B, l^B, *_B) = (B_1, l^{B_1}, *_B) \oplus (B_2, l^{B_2}, *_B)$ и $\phi = \phi_1 \oplus \phi_2$.

Кроме прямой суммы карди-фробениусовых алгебр, определим также прямую сумму коммутативной фробениусовой пары и карди-фробениусовой алгебры, которая также является карди-фробениусовой алгеброй. А именно, для коммутативной фробениусовой пары $C = (\tilde{A}, \tilde{l}^A, *_A)$ и карди-фробениусовой алгебры $M = \{(A, l^A, *_A), (B, l^B, *_B), \phi\}$ положим

$$C \oplus M = \{(\tilde{A}, \tilde{l}^A, *_A) \oplus (A, l^A, *_A), (B, l^B, *_B), \tilde{\phi}\},$$

где ограничение $\tilde{\phi}$ на $\tilde{A}$ равно нулю, а ограничение $\tilde{\phi}$ на A равно ϕ . Очевидно, $C \oplus M$ является карди-фробениусовой алгеброй.

Согласно [1] произвольная полупростая карди-фробениусова алгебра изоморфна прямой сумме карди-фробениусовых алгебр из примеров 2.2, 2.3 и полупростой коммутативной фробениусовой пары.

Пусть теперь (A, l^A) и $(B, l^B, *_B)$ – фробениусовы пары, построенные в пп. 2.1 и 2.2. Для $\alpha \in \mathcal{A}$ и $\beta \in \mathcal{B}$ положим

$$\hat{R}_{\alpha, \beta} = \frac{1}{n!} \sum_{a \in \alpha, (\sigma_1, \sigma_2) \in \beta} \delta_{a(\sigma_1), \sigma_2}.$$

Продолжим по линейности соответствие $\alpha \mapsto \sum_{\beta} \hat{R}_{\alpha, \beta'} T^{\beta'} \beta$ до линейного оператора $\phi: A \rightarrow B$. Сопоставим перестановке $x \in S_E$ класс $a(x) \in \mathcal{A}$ разбиения множества E на орбиты элемента x^2 . Положим $U_A = \sum_{a \in \mathcal{A}} \frac{d(a)a}{n!} \in A$, где $d(a)$ – число элементов $x \in S_E$ таких, что $a(x) = a$. В § 3 мы докажем, что семейство алгебр разбиений $((A, l^A), (B, l^B, *_B), \phi, U_A)$ является полупростой карди-фробениусовой алгеброй с оснащением. Разложение этой алгебры в сумму простых – интересная нерешенная задача.

§ 3. Числа Гурвица лоскутных поверхностей

3.1. Лоскутные поверхности. Далее под *поверхностью* мы будем понимать двумерное связное компактное (не обязательно ориентируемое) топологическое многообразие с границей, состоящей из конечного (возможно, нулевого) числа попарно непересекающихся простых контуров.

Стратифицированной поверхностью мы будем называть поверхность с конечным положительным числом выделенных точек, расположенных таким образом, что на каждом граничном контуре лежит хотя бы одна выделенная точка. Выделенные точки будем называть также *специальными точками* стратифицированной поверхности. Специальные точки являются нульмерными стратами стратификации, отрезки границы между соседними граничными специальными точками – одномерными стратами, дополнение до нульмерных и одномерных стратов образует двумерный страт.

Шовным графом мы называем одномерное топологическое пространство Δ без границы с конечным множеством выделенных точек $\Delta_v \in \Delta$, называемых *вершинами*, таким, что множество $\Delta - \Delta_v$ состоит из несвязного объединения интервалов. Эти интервалы называются *ребрами* графа. Требуется, чтобы любая связная компонента графа Δ не являлась точкой. Шовным графом с вершинами в специальных точках является, в частности, граница $\partial\Omega$ стратифицированной поверхности Ω .

Морфизмом шовного графа Δ^1 в шовный граф Δ^2 назовём непрерывное отображение $f: \Delta^1 \rightarrow \Delta^2$, являющееся локальным гомеоморфизмом на ребрах графа и такое, что $f^{-1}(\Delta_v^2) = \Delta_v^1$.

Лоскутной поверхностью называется набор $(\Omega, \Delta, \varphi)$, где Ω – несвязное объединение стратифицированных поверхностей, Δ – шовный граф и $\varphi: \partial\Omega \rightarrow \Delta$ – эпиморфный морфизм шовных графов такой, что ограничение φ на каждый граничный контур $c \subset \partial\Omega$ является накрытием над $\varphi(c)$ и выполняется приведенное ниже условие (*).

Отождествляя точки из $\partial\Omega$, имеющие одинаковые образы в Δ , мы склеиваем из Ω стратифицированное топологическое пространство Ω_φ , открытые двумерные страты которого гомеоморфны двумерным стратам Ω , одномерные страты совпадают с ребрами графа Δ , а нульмерными стратами считаются вершины графа Δ и внутренние специальные точки поверхностей Ω . Требуется, чтобы:

(*) *проколота́я окрестность каждой вершины графа Δ в пространстве Ω_φ была связна.*

Внутренние специальные точки стратифицированных поверхностей Ω образуют множество *внутренних специальных точек* Ω_a лоскутной поверхности $(\Omega, \Delta, \varphi)$. Вершины шовного графа образуют множество *ее шовных специальных точек* Ω_b .

Стратифицированной поверхности Ω отвечает лоскутная поверхность $(\Omega, \partial\Omega, \text{Id})$, где Id – тождественное отображение. Это позволяет распространить на стратифицированные поверхности все определения, которые мы будем использовать для лоскутных поверхностей. *Изоморфизмом лоскутных поверхностей* $(\Omega, \Delta, \varphi)$ и $(\Omega', \Delta', \varphi')$ называется гомеоморфизм $f: \Omega_\varphi \rightarrow \Omega'_{\varphi'}$, индуцирующий изоморфизм шовных графов Δ и Δ' . Изоморфизм лоскутной поверхности на себя называется *автоморфизмом*.

Сопоставим каждой вершине v шовного графа Δ лоскутной поверхности $(\Omega, \Delta, \varphi)$ (комбинаторный, а не топологический) граф ν_v . Вершиной графа ν_v является флаг f графа Δ в вершине v , т.е. пара, состоящая из вершины и примыкающей к ней половины ребра графа Δ . Ребро графа ν_v определяется точкой $v' \in \partial\Omega$ такой, что $\varphi(v') = v$. На поверхности Ω к точке v' примыкают ровно два ребра шовного графа. Их образы в Ω_φ и определяют два флага, соединяемые ребром, отвечающим v' . Граф ν_v является связным в силу условия (*). Более того, нетрудно видеть, что малая окрестность $U \subset \Omega_\varphi$ точки v гомеоморфна конусу над топологическим графом, соответствующим комбинаторному графу ν_v .

3.2. Накрытия стратифицированных поверхностей лоскутными поверхностями. Далее нам потребуются только накрытия лоскутными поверхностями обычных стратифицированных поверхностей. Поэтому необходимые определения приведены в этом пункте только для такой ситуации.

Накрытием степени n стратифицированной поверхности Ω с помощью лоскутной поверхности $(\tilde{\Omega}, \tilde{\Delta}, \tilde{\varphi})$ называется непрерывное отображение $f: \tilde{\Omega}_\varphi \rightarrow \Omega$ такое, что:

- 1) $f(\tilde{\Omega}_\varphi) = \Omega$;
- 2) отображение f индуцирует морфизм $\tilde{\Delta} \rightarrow \partial\Omega$ шовных графов;
- 3) $f^{-1}(\Omega_a) = \tilde{\Omega}_a$;
- 4) $|f^{-1}(p)| = n$, если p – внутренняя неспециальная точка.

Под *накрытием* всегда понимается накрытие некоторой (конечной) степени n .

Построим локальные инварианты, описывающие поведение накрытия на прообразе окрестности U специальной точки $v \in \Omega$. Если v – внутренняя специальная точка, то можно считать, что U – диск, граница которого $u = \partial U$ –

простой контур, состоящий из внутренних точек поверхности. В этом случае $f^{-1}(u)$ распадается на простые контуры $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_m$. Локальное поведение накрытия f описывается неупорядоченным набором чисел $\alpha = (n_1, \dots, n_m)$, где n_i – степень ограничения отображения f на $\tilde{u}_i$. Этот набор α мы и будем считать локальным топологическим инвариантом накрытия f в точке v . Сумма всех n_i равна n . Поэтому можно считать, что α – это диаграмма Юнга степени n . Группа автоморфизмов $\text{Aut}(\alpha)$ инварианта α состоит из автогомеоморфизмов множества $\tilde{u}_1 \cup \dots \cup \tilde{u}_m$, перестановочных с накрытием f .

Пусть теперь v – граничная точка. Рассмотрим прообраз $f^{-1}(v) = \{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_m\}$ и объединение $\beta = (\nu_{\tilde{v}_1}, \dots, \nu_{\tilde{v}_m})$ локальных графов вершин $\tilde{v}_i$. Объединение конусов над локальными графами вершин $\tilde{v}_i$ гомеоморфно прообразу $f^{-1}(U)$. Отображение f переводит вершины графа β в вершины графа ν_v . Этим вершин ровно две, и они отвечают примыкающим к точке v ребрам шовного графа $\partial\Omega$.

Будем считать, что окрестность U ориентирована. Занумеруем примыкающие к v ребра так, чтобы ориентация переводила ребро σ_1 в ребро σ_2 . Тогда множество вершин графа β можно представить в виде $V_1 \cup V_2$, где V_i – множество вершин, переходящих в σ_i под действием f . Таким образом, мы сопоставили граничной специальной точке v с локальной ориентацией o двудольный граф (V_1, E, V_2) , где E – множество ребер графа β . Класс изоморфности графа мы и будем считать локальным топологическим инвариантом накрытия f в точке v с локальной ориентацией o .

Изоморфизмом между накрытиями $f: \tilde{\Omega}_{\tilde{\varphi}} \rightarrow \Omega$ и $f': \tilde{\Omega}'_{\tilde{\varphi}'} \rightarrow \Omega$ лоскутными поверхностями $(\tilde{\Omega}, \tilde{\Delta}, \tilde{\varphi})$ и $(\tilde{\Omega}', \tilde{\Delta}', \tilde{\varphi}')$ называется изоморфизм лоскутных поверхностей $F: \Omega_{\varphi} \rightarrow \Omega'_{\varphi'}$ такой, что $f'F = f$. Если $(\tilde{\Omega}, \tilde{\Delta}, \tilde{\varphi}) = (\tilde{\Omega}', \tilde{\Delta}', \tilde{\varphi}')$, то изоморфизм называется *автоморфизмом*. Автоморфизмы накрытия f образуют группу $\text{Aut}(f)$. Группы автоморфизмов изоморфных накрытий изоморфны.

3.3. Числа Гурвица. Обозначим через $\mathcal{A}$ множество диаграмм Юнга степени n и через $\mathcal{B}$ множество классов изоморфности двудольных графов с n ребрами. Обозначим через $*$: $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ инволюцию $(V_1, E, V_2) \mapsto (V_2, E, V_1)$.

Напомним теперь, что диаграммам Юнга взаимно однозначно отвечают классы сопряженности симметрической группы S_n . При этом если $g \in \alpha \in \mathcal{A}$, то группа $\text{Aut}(\alpha)$ изоморфна централизатору $\text{Aut}(g)$ элемента g в группе S_n . Обозначим через $U(\alpha)$ множество инволюций без неподвижных точек в группе $\text{Aut}(g)$.

Пусть $(\Omega, \mathcal{O})$ – стратифицированная поверхность с множеством Ω_a внутренних специальных точек, множеством Ω_b граничных специальных точек и набором локальных ориентаций в окрестностях специальных точек. Рассмотрим отображения $\alpha: \Omega_a \rightarrow \mathcal{A}$, $\beta: \Omega_b \rightarrow \mathcal{B}$ и положим $\alpha_p = \alpha(p)$, $\beta_q = \beta(q)$. Обозначим через $\text{Cov}((\Omega, \mathcal{O}), \{\alpha_p\}, \{\beta_q\})$ множество классов изоморфности таких накрытий стратифицированной поверхности Ω лоскутными поверхностями $(\tilde{\Omega}, \tilde{\Delta}, \tilde{\varphi})$, что локальные инварианты в точках $p \in \Omega_a$ равны $\alpha_p \in \mathcal{A}$ и локальные инварианты в точках $q \in \Omega_b$ с локальными ориентациями $\mathcal{O}$ равны $\beta_q \in \mathcal{B}$.

Числом Гурвица степени n называется число

$$H((\Omega, \mathcal{O}), \{\alpha_p\}, \{\beta_q\}) = \sum_{[f] \in \text{Cov}_n((\Omega, \mathcal{O}), \{\alpha_p\}, \{\beta_q\})} \frac{1}{|\text{Aut}([f])|}.$$

Число Гурвица несвязного объединения поверхностей определяется как сумма чисел Гурвица компонент. Главным для нас свойством чисел Гурвица является то, как они преобразуются при редукции поверхности по разрезу. Ориентированную связную кривую без самопересечений $\gamma \subset \Omega$ назовем *разрезом* на стратифицированной поверхности Ω , если эта кривая не содержит специальных точек и является либо замкнутым контуром, состоящим из внутренних точек поверхности, либо отрезком, концы которого лежат на границе $\partial\Omega$, а внутренние точки являются внутренними точками поверхности. Разрезы подразделяются на девять топологических типов, описанных в [1].

Компактифицируем поверхность $\Omega - \gamma$ парами (x, c) , где $x \in \gamma$ и c – ко-ориентация разреза γ в окрестности точки x . Множество C точек вида (x, c) распадается на связные компоненты C_i , которых может быть две или одна. В последнем случае разрез называется *неориентируемым*. Стянув в точку c_i каждую компоненту C_i , получим компактную поверхность или пару компактных поверхностей. Назовем это многообразие $\hat{\Omega}$ *редукцией* по разрезу γ . Редукция является объединением стратифицированных поверхностей, множество специальных точек которого – это специальные точки поверхности Ω и точки c_i . Ориентация разреза порождает локальные ориентации в окрестностях точек c_i .

ЛЕММА 3.1. Пусть $(\Omega, \mathcal{O})$ – стратифицированная поверхность с множеством $\Omega_a \cup \Omega_b$ специальных точек и набором локальных ориентаций $\mathcal{O}$ в их окрестностях. Пусть γ – разрез и $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{O}})$ – редукция по этому разрезу с множеством $\hat{\Omega}_a \cup \hat{\Omega}_b$ специальных точек. Отождествим множество $\Omega_a \cup \Omega_b$ с его образом в $\hat{\Omega}_a \cup \hat{\Omega}_b$ и положим $P = \hat{\Omega}_a \cup \hat{\Omega}_b - \Omega_a \cup \Omega_b$.

Тогда имеет место один из следующих случаев:

1) γ – коориентируемый контур, $P \in \hat{\Omega}_a$, P состоит из двух точек и

$$H((\Omega, \mathcal{O}), \{\alpha_p\}, \{\beta_q\}) = \sum_{\alpha \in A} |\text{Aut}(\alpha)| H((\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{O}}), \{\alpha, \alpha, \alpha_p\}, \{\beta_q\});$$

2) γ – некоориентируемый контур, $P \in \hat{\Omega}_a$, P состоит из одной точки и

$$H((\Omega, \mathcal{O}), \{\alpha_p\}, \{\beta_q\}) = \sum_{\alpha \in A} |U(\alpha)| H((\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{O}}), \{\alpha, \alpha_p\}, \{\beta_q\});$$

3) γ – отрезок, $P \in \hat{\Omega}_b$, P состоит из двух точек и

$$H((\Omega, \mathcal{O}), \{\alpha_p\}, \{\beta_q\}) = \sum_{\beta \in B} |\text{Aut}(\beta)| H((\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{O}}), \{\alpha_p\}, \{\beta, \beta, \beta_q\}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство мало чем отличается от случая накрытий поверхностями с границей, рассмотренного в [1]. Главная идея состоит в том, что редукция по разрезу переводит накрытие $f: \tilde{\Omega}_{\tilde{\varphi}} \rightarrow \Omega$ в накрытие над $\hat{\Omega}$. Прообраз $f^{-1}(\gamma)$ при этом образует диаграмму Юнга или двудольный

граф, совпадающий с топологическим инвариантом нового накрытия в точке c_i . Более того, “обращение” этой конструкции позволяет строить накрытие поверхности Ω по накрытию поверхности $\hat{\Omega}$. Появление коэффициентов $|\text{Aut}(\alpha)|$, $|\text{Aut}(\beta)|$ и $|U(\alpha)|$ связано с несовпадением групп автоморфизмов старого и нового накрытий.

Из леммы 3.1 и нескольких дополнительных очевидных свойств чисел Гурвица следует

ТЕОРЕМА 3.1. *Числа Гурвица являются корреляторами клейновой топологической теории поля в смысле [1].*

Согласно [1] отсюда вытекает, что числа Гурвица порождают некоторую карди-фробениусову алгебру с оснащением, которую мы назовем *алгеброй лоскутных накрытий*.

3.4. Алгебра лоскутных накрытий. Как и ранее, мы будем использовать взаимно однозначные соответствия: “диаграммы Юнга $\leftrightarrow$ классы сопряженности разбиений” и “классы изоморфности двудольных графов $\leftrightarrow$ классы сопряженности пар разбиений”.

ТЕОРЕМА 3.2. *Алгебра лоскутных накрытий степени n естественно изоморфна семейству алгебр разбиений $\{(A, l^A), (B, l^B, *_{\mathcal{B}}), \phi, U\}$ множества из n элементов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построение алгебры лоскутных накрытий начинается с определения невырожденной билинейной формы

$$(x^1, x^2)^{A^\circ} = H((S_2, \mathcal{O}), \{x_{p_1}^1\}, \{x_{p_2}^2\}),$$

где S_2 – сфера с двумя специальными точками p_1, p_2 . Умножение $(x_1, x_2) \mapsto x_1 \circ x_2$, превращающее векторное пространство A в алгебру A° , определяется условием

$$(x_1 x_2, x_3)^{A^\circ} = H((S_3, \mathcal{O}), \{x_{p_1}^1\}, \{x_{p_2}^2\}, \{x_{p_3}^3\}),$$

где S_3 – сфера с тремя специальными точками p_1, p_2, p_3 и x_3 – произвольный вектор из A . Единица алгебры определяется условием

$$(1^{A^\circ}, x_2)^{A^\circ} = H((S_2, \mathcal{O}), \{(1^{A^\circ})_{p_1}\}, \{x_{p_2}^2\}),$$

где x_2 – произвольный вектор из A . Положим $l^{A^\circ}(x) = (1^{A^\circ}, x)_{A^\circ}$. Оснащение $U^\circ \in A$ определяется условием

$$(U^\circ, x^2)^{A^\circ} = H((P_2, \mathcal{O}), \{U_{p_1}^\circ\}, \{x_{p_2}^2\}),$$

где $(P_2, \mathcal{O})$ – проективная плоскость с двумя специальными точками p_1, p_2 и x_2 – произвольный вектор из A . Совпадения фробениусовых пар $(A^{A^\circ}, l^{A^\circ}) = (A, l^A)$ и векторов $U^\circ = U$ доказаны в [1].

Аналогично, с заменой сферы на диск и внутренних специальных точек на граничные, определяется фробениусова пара $(B^\circ, l^{B^\circ}, *^\circ)$, порожденная накрытиями лоскутных поверхностей. В этом случае надо считать, что при определении билинейной формы и умножения нумерация и локальные ориентации

специальных точек порождаются одной и той же ориентацией диска. Инволюция $*^\circ$ определяется условием

$$(x^1, *^\circ(x^2))^{B^\circ} = H((D_2, \tilde{\mathcal{O}}), \{x_{p_1}^1\}, \{x_{p_2}^2\}),$$

где $(D_2, \tilde{\mathcal{O}})$ – диск с двумя специальными точками p_1, p_2 , локальные ориентации которых не порождаются ни одной из ориентаций диска.

Пусть D_m – диск с множеством $P = \{p_1, \dots, p_m\}$ специальных точек и все точки $p_1, \dots, p_m$ граничные. Рассмотрим накрытие $f: \tilde{\Omega}_{\tilde{\varphi}} \rightarrow D_m$ степени n лоскутной поверхностью. Связные компоненты прообраза $f^{-1}(D - \partial D)$ образуют множество E , состоящее из n дисков. Топологический тип накрытия f определяется склейкой границ этих дисков, т. е. циклически упорядоченным набором из m разбиений элементов множества E . Локальный инвариант накрытия в точке $p \in P$ совпадает при этом с классом сопряженности упорядоченной пары разбиений, примыкающей к точке $p \in P$. Отсюда следуют совпадения фробениусовых пар $(B^{B^\circ}, l^{B^\circ}, *_{B^\circ}) = (B, l^B, *_{B^\circ})$.

Гомоморфизм $\phi^\circ: A^\circ \rightarrow B^\circ$ определяется условием

$$(\phi(x), y)^{A^\circ} = H((D, \mathcal{O}), \{x_p\}, \{y_q\}),$$

где $(D, \mathcal{O})$ – диск с внутренней специальной точкой p и граничной специальной точкой q , а y – произвольный вектор из B . Доказательство совпадения гомоморфизмов $\phi^\circ = \phi$ аналогично доказательству совпадения пар $(B^{B^\circ}, l^{B^\circ}) = (B, l_B)$. Таким образом, мы доказали, что

$$\{(A^\circ, l^{A^\circ}), (B, l^{B^\circ}, *_{B^\circ}), \phi^\circ, U^\circ\} = \{(A, l^A), (B, l^B, *_{B^\circ}), \phi, U\},$$

а в этом и состоит утверждение теоремы.

Сопоставляя теорему 3.2 с теоремой 4.2 из работы [1], находим

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Семейство алгебр разбиений $\{(A, l^A), (B, l^B, *_{B^\circ}), \phi, U\}$ является карди-фробениусовой алгеброй и, в частности, удовлетворяет условию Карди.

Доказанная выше теорема 3.2 и теорема 4.4 работы [1] сводит вычисление чисел Гурвица степени n лоскутных накрытий к теории алгебр разбиений $\{(A, l^A), (B, l^B, *_{B^\circ}), \phi, U\}$ множества из n элементов. Выберем базисы в векторных пространствах $\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\} \subset A$ и $\{\beta_1, \dots, \beta_t\} \subset B$ такие, что $l^A(\alpha_i \alpha_j) = l^B(\beta_i \beta_j) = \delta_{i,j}$. Положим $K_A = \sum_{i=1}^s \alpha_i^2$ и рассмотрим оператор $V_{K_B}: B \rightarrow B$, где $V_{K_B}(x) = \sum_{i=1}^t \beta_i x \beta_i$.

Рассмотрим стратифицированную поверхность Ω с границей, состоящей из s контуров, с внутренними специальными точками $\Omega_a = \{p_i\}$ и граничными специальными точками $\Omega_b = \{q_j^i\}$. Мы считаем, что индекс j означает номер граничного контура и локальные ориентации точек $\{q_j^i\}$ задают глобальную ориентацию контура, определяющую циклический порядок индексов i . Положим $\alpha_i = \alpha(p_i)$, $\beta_j^i = \beta(q_j^i)$, где $\alpha: \Omega_a \rightarrow \mathcal{A}$, $\beta: \Omega_b \rightarrow \mathcal{B}$.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. а) Пусть Ω – ориентируемая стратифицированная поверхность рода g с (возможно, пустой) границей и локальные ориентации

специальных точек определяются одной из глобальных ориентаций поверхности. Тогда

$$H((\Omega, \mathcal{O}), \{\alpha_i\}, \{\beta_j^i\}) = \\ = l^B(\phi(\alpha_1 \dots \alpha_m K_A^g)(\beta_1^1 \dots \beta_{m_1}^1) V_{K_B}(\beta_1^2 \dots \beta_{m_2}^2) \dots V_{K_B}(\beta_1^s \dots \beta_{m_s}^s)).$$

б) Пусть Ω – неориентируемая стратифицированная поверхность, которая после стягивания в точки граничных контуров гомеоморфна или проективной плоскости с a ручками, или бутылке Клейна с a ручками. В первом случае положим $g = a + \frac{1}{2}$, во втором случае положим $g = a + 1$. Тогда

$$H((\Omega, \mathcal{O}), \{\alpha_i\}, \{\beta_j^i\}) = \\ = l^B(\phi(\alpha_1 \dots \alpha_m U^{2g})(\beta_1^1 \dots \beta_{m_1}^1) V_{K_B}(\beta_1^2 \dots \beta_{m_2}^2) \dots V_{K_B}(\beta_1^s \dots \beta_{m_s}^s)).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Алгебры $B_n(\frac{s}{t})$ (см. замечание 2.1), порожденные парами разбиений на s групп по t элементов, и их суммы $B_n(\frac{\hat{s}}{t}) = \bigcup_{s \leq \hat{s}, t \leq t} B_n(\frac{s}{t})$ также образуют вместе с A карди-фробениусовы алгебры. Эти алгебры соответствуют классам накрытий поверхности Ω лоскутными поверхностями $\tilde{\Omega}$, переводящими в каждую граничную специальную точку поверхности Ω ровно s вершин шовного графа поверхности $\tilde{\Omega}$, причем среди прообразов отрезков стратификации поверхности Ω ровно t относятся к одной вершине шовного графа. Числа Гурвица таких накрытий так же находятся по формулам следствия 3.2. Алгебре $B_n(\frac{\hat{n}}{2})$ отвечают, например, рассмотренные в [1] числа Гурвица вещественных алгебраических кривых.

Список литературы

1. A. Alexeevski, S. Natanzon, “Noncommutative two-dimensional topological field theories and Hurwitz numbers for real algebraic curves”, *Selecta Math. (N.S.)*, **12**:3–4 (2006), 307–377; [arXiv: math/0202164](#).
2. A. Hurwitz, “Ueber Riemann’sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten”, *Math. Ann.*, **39**:1 (1891), 1–60.
3. S. Cordes, G. Moore, S. Ramgoolam, “Large N 2D Yang–Mills theory and topological string theory”, *Commun. Math. Phys.*, **185**:3 (1997), 543–619.
4. D. J. Gross, W. Taylor, “Twists and Wilson loops in the string theory of two dimensional QCD”, *Nuclear Phys. B*, **403**:1–2 (1993), 395–449.
5. R. Dijkgraaf, “Mirror symmetry and elliptic curves”, *Progr. Math.*, **129** (1995), 149–163.
6. В. И. Арнольд, “Топологическая классификация комплексных тригонометрических полиномов и комбинаторика графов с одинаковым числом ребер и вершин”, *Функц. анализ и его прил.*, **30**:1 (1996), 1–17; англ. пер.: V. I. Arnol’d, “Topological classification of trigonometric polynomials and combinatorics of graphs with an equal number of vertices and edges”, *Funct. Anal. Appl.*, **30**:1 (1996), 1–14.
7. I. K. Kostov, M. Staudacher, T. Wynter, “Complex matrix models and statistics of branched coverings of 2D surfaces”, *Comm. Math. Phys.*, **191**:2 (1998), 283–298.
8. A. Okounkov, R. Pandharipande, *Gromov–Witten theory, Hurwitz numbers and matrix models*, I, [arXiv: math/0101147](#).
9. M. Khovanov, L. Rozansky, “Topological Landau–Ginzburg models on a world-sheet foam”, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **11**:2 (2007), 233–260; [arXiv: hep-th/0404189](#).

10. L. Rozansky, “Topological A-models on seamed Riemann surfaces”, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **11**:4 (2007), 517–529; [arXiv: hep-th/0305205](#).
11. N. L. Alling, N. Greenleaf, “Foundations of the theory of Klein surfaces”, *Lecture Notes in Math.*, **219**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1971.
12. С. М. Натанзон, “Клейновы поверхности”, *УМН*, **45**:6 (1990), 47–89; англ. пер.: S. M. Natanzon, “Klein surfaces”, *Russian Math. Surveys*, **45**:6 (1990), 53–108.
13. С. М. Натанзон, *Модули римановых поверхностей, вещественных алгебраических кривых и их супераналоги*, Новые математические дисциплины, МЦМО, М., 2003.
14. C. I. Lazaroiu, “On the structure of open-closed topological field theory in two dimensions”, *Nuclear Phys. B*, **603**:3 (2001), 497–530.
15. R. Dijkgraaf, *Geometrical approach to two-dimensional conformal field theory*, Ph. D. Thesis, Utrecht, 1989.
16. C. Faith, *Algebra. II: Ring theory*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1976.

А. В. АЛЕКСЕЕВСКИЙ (A. V. ALEKSEEVSKIИ)

Научно-исследовательский институт

физико-химической биологии им. А. Н. Белозерского

МГУ им. М. В. Ломоносова

E-mail: aba@genebee.msu.ru

Поступило в редакцию

28.12.2005

15.02.2007

С. М. НАТАНЗОН (S. M. NATANZON)

Научно-исследовательский институт

физико-химической биологии им. А. Н. Белозерского

МГУ им. М. В. Ломоносова,

Институт теоретической и экспериментальной физики

(Государственный научный центр Российской Федерации),

Независимый московский университет

E-mail: natanzon@mccme.ru