Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Р. Фаталов, Точные асимптотики винеровских интегралов типа Лапласа для L^p -функционалов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2010, том 74, выпуск 1, 197–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im738>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 03:27:29

УДК 519.2

В. Р. Фаталов

Точные асимптотики винеровских интегралов типа Лапласа для L^p -функционалов

Доказаны теоремы о точных асимптотиках интегралов

$$\mathbb{E} \exp \left\{ u \left(\int_0^1 |\xi(t)|^p dt \right)^{\alpha/p} \right\}, \quad \mathbb{E} \exp \left\{ -u \int_0^1 |\xi(t)|^p dt \right\}, \quad u \rightarrow \infty,$$

при $p > 0$, $0 < \alpha < 2$ для двух случайных процессов $\xi(t)$: винеровского процесса и броуновского моста. Получен ряд иных родственных результатов. Методом исследования является метод Лапласа для бесконечномерных распределений: для гауссовских мер и для времени пребывания марковских процессов.

Библиография: 57 наименований.

Ключевые слова: большие отклонения, гауссовские процессы, марковские процессы, времена пребывания, ковариационный оператор, производящий оператор, оператор Шрёдингера, гипергеометрическая функция.

§ 1. Введение и формулировки основных результатов

В конце сороковых–начале пятидесятих годов М. Кац [1]–[3], желая придать строгий математический смысл результатам Р. Фейнмана [4], разработал чрезвычайно сильный метод вычисления винеровских интегралов типа Лапласа

$$\mathbb{E} \exp \left\{ -u \int_0^T g(w(t)) dt \right\} \equiv \int_{C[0,1]} \exp \left\{ -u \int_0^T g(x(t)) dt \right\} dP_w(x). \quad (1.1)$$

Здесь и далее $w(t)$, $t \geq 0$, – винеровский процесс, P_w – винеровская мера, т.е. распределение процесса $w(t)$ в пространстве $C[0,1]$ непрерывных на $[0,1]$ функций, $0 < T \leq 1$, $u > 0$ – некоторые числа, g – кусочно непрерывная неотрицательная функция, часто называемая *потенциалом*.

История вопроса и современное изложение упомянутого метода, основой которого является знаменитая формула Фейнмана–Каца, представлены в работах [5, т. 2], [6]–[13]. Как известно, формула Фейнмана–Каца, основанная на марковском свойстве винеровского процесса, дает выражение интеграла (1.1) через решение граничной задачи для дифференциального уравнения в частных производных параболического типа. Отметим, что впервые объекты теории марковских процессов были связаны с теорией дифференциальных уравнений в частных производных А. Н. Колмогоровым в работе [14]. Для простых функций g типа $g(x) = |x|^p$, $p > 0$, $g(x) = e^{\theta|x|}$, $\theta > 0$, метод Каца позволяет представить интеграл (1.1) в виде ряда (см. [13, с. 149], [6, § 3]), на основе

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 07-01-00077) и частичной поддержке DFG (грант № 436 RUS 113/722).

которого можно проводить дальнейшие вычисления. В частности, указанное представление в виде ряда позволяет легко находить точные асимптотики интеграла (1.1) при $T \rightarrow \infty$ для $u > 0$.

Удобного аналога формулы Фейнмана–Каца не существует в двух следующих важных случаях. Первый случай соответствует ситуации, когда в интеграле, стоящем слева в (1.1), вместо винеровского процесса записан произвольный неоднородный марковский процесс, например броуновский мост на отрезке $[0, T]$ (см. [8, с. 231], [9, с. 117], [11, с. 84]). Второй случай относится к ситуации, когда рассматривается интеграл, стоящий слева в (1.1), для значений $u < 0$ и неотрицательных функций g .

По этой причине возникает необходимость вычисления приближенных (асимптотических) значений интегралов типа (1.1) при больших значениях параметров: при $T \rightarrow \infty$, или при $u \rightarrow \infty$, или при $u \rightarrow -\infty$, последнее – в случае конечности интеграла (1.1) для всех $u < 0$. Отметим, что для больших $T > 1$ под интегралом (1.1) мы понимаем левую часть формулы (1.1).

Обозначим через $w_0(t) \equiv \{w(t) \mid w(0) = 0, w(1) = 0\}$, $0 \leq t \leq 1$, стандартный броуновский мост на отрезке $[0, 1]$.

Таким образом, большое теоретическое и прикладное значение имеют следующие четыре весьма разные и довольно сложные задачи:

1) задача о вычислении асимптотики интегралов

$$\mathbb{E}_a \exp \left\{ - \int_0^T g(w(t)) dt \right\}, \quad \mathbb{E}_{a,c} \exp \left\{ - \int_0^T g(w(t)) dt \right\}, \quad T \rightarrow \infty, \quad (1.2)$$

где $a \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$;

2) задача, состоящая в вычислении асимптотики интегралов

$$\mathbb{E} \exp \left\{ -u \int_0^1 g(w(t)) dt \right\}, \quad \mathbb{E} \exp \left\{ -u \int_0^1 g(w_0(t)) dt \right\}, \quad u \rightarrow \infty; \quad (1.3)$$

3) задача о вычислении асимптотики интегралов

$$\mathbb{E} \exp \left\{ \int_0^T g(w(t)) dt \right\}, \quad \mathbb{E}_{0,0} \exp \left\{ \int_0^T g(w(t)) dt \right\}, \quad T \rightarrow \infty; \quad (1.4)$$

4) задача, состоящая в вычислении асимптотики интегралов

$$\mathbb{E} \exp \left\{ u \int_0^1 g(w(t)) dt \right\}, \quad \mathbb{E} \exp \left\{ u \int_0^1 g(w_0(t)) dt \right\}, \quad u \rightarrow \infty. \quad (1.5)$$

Здесь и далее, ради краткости, мы используем обозначения

$$\begin{aligned} P_a \{w \in (\cdot)\} &:= P \{w \in (\cdot) \mid w(0) = a\}, \\ P_{a,c} \{w \in (\cdot)\} &:= P \{w \in (\cdot) \mid w(0) = a, w(T) = c\}, \end{aligned}$$

$\mathbb{E}_a$, $\mathbb{E}_{a,c}$ – усреднения по соответствующей вероятности, при этом, для простоты, индекс 0 в выражениях P_0 , $\mathbb{E}_0$ не выписываем.

Отметим, что интегралы (1.3), (1.5) представляют собой преобразования Лапласа случайных величин $\int_0^1 g(w(t)) dt$ и $\int_0^1 g(w_0(t)) dt$. При этом интегралы (1.3) существуют для всех $u > 0$, конечность же интегралов (1.5) в области

$u > 0$ зависит от неотрицательной функции g (см., в частности, ниже теорему 1.1 и предложение 1.1).

Общий метод существует только для решения задачи 1), а именно метод, основанный на теории марковских процессов. Для неотрицательных потенциалов, растущих на бесконечности (т.е. когда $g(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \pm\infty$), точная асимптотика первого интеграла в (1.2) фактически была найдена М. Кацем в статье [3] (см. также [13, с. 149] и формулу (1.21) ниже). Далее, в статье [15], был разработан мощный принцип больших уклонений Донскера–Варадана, позволяющий находить логарифмическую асимптотику интегралов типа (1.2) для широкого класса однородных марковских процессов, в том числе с дискретным временем. Точную асимптотику второго интеграла в (1.2) можно найти, используя и развивая далее утверждения и метод из статьи [16].

Насколько известно автору, в случае общего потенциала $g \geq 0$ пока не существует эффективного метода для решения задач 2)–4).

В настоящей статье мы найдем в явном виде точные асимптотики интегралов (1.2)–(1.5) в случае степенной функции $g(x) = |x|^p$, $p > 0$. Для этого потенциала вследствие однородности его p -й степени существует метод решения задачи 4), основанный на теории гауссовских процессов, – метод Лапласа. Этот метод для гауссовских интегралов в гильбертовом пространстве, позволяющий вычислить точную асимптотику интегралов типа (1.5), разработан в статьях [17] с учетом результатов из [5, § 18], [6, § 6].

Обстоятельный обзор упомянутых и ряда других утверждений об асимптотиках интегралов типов (1.2), (1.5) имеется в статье [18, гл. 3, § 5.1] (см. также [19], [20]). Отметим, что близкие по смыслу задачи, состоящие в вычислении асимптотик *вероятностей*

$$\begin{aligned} P\left\{\int_0^1 |w(t)|^p dt > u^p\right\}, \quad u \rightarrow \infty, \quad P\left\{\int_0^1 |w(t)|^p dt \leq \varepsilon^p\right\}, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \\ P\left\{\frac{1}{T} \int_0^T |w(t)|^p dt < c\right\}, \quad T \rightarrow \infty, \quad c > 0, \end{aligned} \quad (1.6)$$

решены в работах [21]–[23] в результате дальнейшего развития метода Лапласа (см. также [24, § 3], [25]).

В случае потенциала $g(x) = |x|^p$ между интегралами (1.2) и (1.3), а также между интегралами (1.4) и (1.5) существует простая связь, основанная на свойстве автомодельности винеровского процесса, *выходящего из нуля* (см. ниже предложение 1.2). По этой причине мы приведем формулировки результатов только для интегралов (1.2), (1.3) и (1.5), причем для задач 1) и 4) будут рассмотрены более общие интегралы. Отметим, что метод Лапласа применяется для вычисления асимптотик интегралов типа (1.4), (1.5) впервые в настоящей статье.

Перейдем к точным формулировкам полученных утверждений. Сначала изложим результаты для интеграла (1.4). Пусть $L^p = L^p[0, 1]$, $p > 0$, – множество измеримых функций, интегрируемых в p -й степени на $[0, 1]$. Положим

$$\|x\|_p := \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt\right)^{1/p}, \quad p > 0. \quad (1.7)$$

Как известно, при $p \geq 1$ пространство $(L^p, \|\cdot\|_p)$ является банаховым. Обозначим

$$\sigma^2 = \sigma^2(p) := \frac{2}{p\pi} \left(1 + \frac{p}{2}\right)^{(p-2)/p} \left[\frac{\Gamma(1/2 + 1/p)}{\Gamma(1 + 1/p)} \right]^2, \quad (1.8)$$

$$\theta = \theta(p, \alpha) = \frac{2 - \alpha}{2} (\alpha \sigma^2)^{\alpha/(2-\alpha)} > 0. \quad (1.9)$$

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $p > 0$, $0 < \alpha < 2$. Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) при $u \rightarrow \infty$ выполнено асимптотическое соотношение

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \exp \left\{ u \left(\int_0^1 |w(t)|^p dt \right)^{\alpha/p} \right\} \\ &= \exp \{ \theta u^{2/(2-\alpha)} \} \frac{2\sqrt{2}}{\pi^{1/4} \sqrt{2-\alpha}} \left[\frac{\Gamma(1/2 + 1/p)}{\Gamma(1 + 1/p)} \right]^{1/2} (1 + o(1)); \end{aligned} \quad (1.10)$$

(ii) при $u \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое соотношение

$$\mathbb{E} \exp \left\{ u \left(\int_0^1 |w_0(t)|^p dt \right)^{\alpha/p} \right\} = \exp \left\{ \frac{\theta}{4^{\alpha/(2-\alpha)}} u^{2/(2-\alpha)} \right\} \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{2-\alpha}} (1 + o(1)). \quad (1.11)$$

Теорема 1.1 имеет простой аналог для потенциала $g(x) = x^p$. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть фиксированы числа $p > 0$ и $0 < \alpha < 2$, имеющие следующий вид:

$$p = \frac{2k_1 - 1}{2k_2 - 1}, \quad \alpha = \frac{2k_3 - 1}{2k_4 - 1}, \quad \text{где} \quad k_j = 1, 2, 3, \dots, \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (1.12)$$

Тогда при $u \rightarrow \infty$ выполнены асимптотические соотношения

$$\mathbb{E} \exp \left\{ u \left(\int_0^1 w^p(t) dt \right)^{\alpha/p} \right\} = \frac{1}{2} \mathbb{E} \exp \left\{ u \left(\int_0^1 |w(t)|^p dt \right)^{\alpha/p} \right\} (1 + o(1)), \quad (1.13)$$

$$\mathbb{E} \exp \left\{ u \left(\int_0^1 w_0^p(t) dt \right)^{\alpha/p} \right\} = \frac{1}{2} \mathbb{E} \exp \left\{ u \left(\int_0^1 |w_0(t)|^p dt \right)^{\alpha/p} \right\} (1 + o(1)). \quad (1.14)$$

Далее асимптотики средних из правых частей формул (1.13), (1.14) вычисляются при помощи теоремы 1.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Ограничение сверху $\alpha < 2$ есть следствие известной теоремы Ландау–Маркуса–Шепша–Ферника об экспоненциальной интегрируемости квадрата нормы гауссовского случайного элемента (см. [20, § 12], [26, гл. 3, § 3], [27, с. 257], [28, § 2.6]). Согласно этой теореме при $p \geq 1$ имеет место равенство $\mathbb{E} \exp \{ u \|w\|_p^\alpha \} = +\infty$, если $\alpha > 2$ и $u > 0$ или если $\alpha = 2$ и $u \geq c_p$; кроме того, справедливо равенство $\mathbb{E} \exp \{ u \|w_0\|_p^\alpha \} = +\infty$, если $\alpha > 2$ и $u > 0$ или если $\alpha = 2$ и $u \geq \tilde{c}_p$; здесь $c_p > 0$ и $\tilde{c}_p > 0$ – некоторые вполне конкретные числа. Так, $c_2 = \pi^2/8$, $\tilde{c}_2 = \pi^2/2$ (см. ниже предложение 1.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Значения чисел $p > 0$ и $0 < \alpha < 2$ в теореме 1.2 подобраны таким образом, что для любого действительного числа r определены однозначно степени r^p , $r^{\alpha/p}$, принимающие действительные значения. При этом справедливы равенства $(-1)^p = -1$ и $(\int_0^1 (-\xi(t))^p dt)^{\alpha/p} = -(\int_0^1 \xi^p(t) dt)^{\alpha/p}$, где $\xi = w$ или $\xi = w_0$.

Отдельно сформулируем следующий важный частный случай теоремы 1.1.

СЛЕДСТВИЕ 1.1 (случай $\alpha = p = 1$). При $u \rightarrow \infty$ выполнены асимптотические соотношения

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp \left\{ u \int_0^1 |w(t)| dt \right\} &= 2 \exp \left\{ \frac{u^2}{6} \right\} (1 + o(1)), \\ \mathbb{E} \exp \left\{ u \int_0^1 |w_0(t)| dt \right\} &= 2 \exp \left\{ \frac{u^2}{24} \right\} (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Насколько известно автору, результаты теорем 1.1, 1.2 и следствия 1.1 новые. Точных формул для рассмотренных интегралов при $p \neq 1$, по-видимому, нет (см., в частности, [25, с. 93]). Интеграл из соотношения (1.15) был исследован при помощи метода М. Каца в работе [29] (см. также [30]). Формула (1.15) уточняет численное аппроксимационное соотношение, приведенное в [29, п. 2, с. 241].

В пограничном гильбертове случае $\alpha = p = 2$ возможны точные вычисления.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1 (случай $\alpha = p = 2$). Выполнены равенства

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp \{ u \|w\|_2^2 \} &\equiv \mathbb{E} \exp \left\{ u \int_0^1 w^2(t) dt \right\} = \frac{1}{\sqrt{\cos \sqrt{2u}}}, & \text{если } 0 < u < \frac{\pi^2}{8}, \\ \mathbb{E} \exp \{ u \|w_0\|_2^2 \} &\equiv \mathbb{E} \exp \left\{ u \int_0^1 w_0^2(t) dt \right\} = \frac{(2u)^{1/4}}{\sqrt{\sin \sqrt{2u}}}, & \text{если } 0 < u < \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

Предложение 1.1 доказывается при помощи известной формулы для гауссовских интегралов в гильбертовом пространстве (см., например, [26, с. 89], [28, с. 148]). При этом используется явный вид собственных чисел ковариационных операторов винеровского процесса и броуновского моста (см. [31, с. 279]), а также формула 8 из [32, с. 754] и формула 6 из [32, с. 753].

В следующем предложении описана указанная выше связь между интегралами (1.2) и (1.3), а также между интегралами (1.4) и (1.5) в случае потенциала $g(x) = |x|^p$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Пусть $p > 0$. Тогда для любого фиксированного $T > 0$ выполнены равенства

$$\mathbb{E} \exp \left\{ \pm \int_0^T |w(t)|^p dt \right\} = \mathbb{E} \exp \left\{ \pm T^{(2+p)/2} \int_0^1 |w(t)|^p dt \right\}, \quad (1.16)$$

$$\mathbb{E} \left[\exp \left\{ \pm \int_0^T |w(t)|^p dt \right\} \middle| w(T) = 0 \right] = \mathbb{E} \exp \left\{ \pm T^{(2+p)/2} \int_0^1 |w_0(t)|^p dt \right\}. \quad (1.17)$$

Здесь в обеих частях формул (1.16), (1.17) берется один и тот же знак. Утверждение предложения 1.2 есть следствие масштабной инвариантности винеровского процесса, выходящего из нуля (см. [9, § 2.1]).

Полагая $u = T^{(2+p)/2}$, мы видим, что $u \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда $T \rightarrow \infty$. Поэтому, используя теорему 1.1, можно легко выписать точные асимптотики для интегралов, находящихся в левых частях равенств (1.16) и (1.17) в случае знака “+”. Подобным образом можно получить иные аналогичные асимптотические формулы, например для интеграла $E \exp\{\frac{1}{T} \int_0^T |w(t)|^p dt\}$ при $0 < p < 2$ и $T \rightarrow \infty$. Утверждение, аналогичное предложению 1.2, очевидно, справедливо и для функции $g(x) = x^p$.

Сформулируем теперь результаты для интегралов (1.2) и (1.3). Для интегралов (1.2) рассмотрим общую ситуацию. Введем следующее условие:

(A1) пусть непрерывная функция $g(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, такова, что для некоторого числа $\tau > 0$ выполнено соотношение $g(x)/|x|^\tau \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$.

Введем гильбертово пространство функций, заданных на $\mathbb{R}$:

$$L_{\mathbb{R}}^2 := \left\{ v(x), x \in \mathbb{R} : \int_{-\infty}^{+\infty} v^2(x) dx < +\infty \right\}.$$

Обозначим через $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ множество ограниченных на $\mathbb{R}$ функций h таких, что h, h' абсолютно непрерывны и функция h'' ограничена. Напомним, что производящий оператор $\mathcal{A}$ винеровского процесса определен на множестве $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ и действует по правилу

$$(\mathcal{A}h)(x) = \frac{1}{2}h''(x), \quad h \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \quad (1.18)$$

(см. [9, теорема 2.14], [11, с. 66]). Определим множество $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}} := \{h \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \cap L_{\mathbb{R}}^2 : h'' \in L_{\mathbb{R}}^2\}$ и положим $\mathcal{D} := \{h \in \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}} : hg \in L_{\mathbb{R}}^2\}$, последнее множество всюду плотно в $L_{\mathbb{R}}^2$.

Рассмотрим оператор Шрёдингера $\mathcal{B} : L_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow L_{\mathbb{R}}^2$, определенный на множестве $\mathcal{D}$ (см. [33, с. 387]) и имеющий вид

$$\mathcal{B}y(t) = -\frac{1}{2}y''(t) + g(t)y(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad y(-\infty) = y(+\infty) = 0. \quad (1.19)$$

Далее, в лемме 7.2, доказано, что оператор $\mathcal{B}$ является самосопряженным, положительным и имеет дискретный однократный спектр.

Пусть $\kappa_0 > 0$ – минимальное собственное число самосопряженного оператора Шрёдингера $\mathcal{B}$ и $y_0(t) > 0$ – соответствующая нормированная собственная функция, т. е. y_0 есть единственное решение следующей граничной задачи для уравнения Шрёдингера:

$$-\frac{1}{2}y''(t) + g(t)y(t) = \kappa_0 y(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad y(-\infty) = y(+\infty) = 0, \quad (1.20)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t) dt = 1.$$

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть выполнено условие (A1) и $a \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. Тогда при $T \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические соотношения

$$E_a \exp\left\{-\int_0^T g(w(t)) dt\right\} = \exp\{-\kappa_0 T\} y_0(a) \int_{-\infty}^{+\infty} y_0(x) dx (1 + o(1)), \quad (1.21)$$

$$E_{a,c} \exp\left\{-\int_0^T g(w(t)) dt\right\} = \exp\{-\kappa_0 T\} \sqrt{2\pi T} y_0(a) y_0(c) (1 + o(1)). \quad (1.22)$$

При $a = 0$ формула (1.21) легко выводится из соотношения (105) в книге [13, с. 143]. Соотношение (1.22) автору в литературе не встречалось.

Полагая $g(x) = |x|^p$, $u = T^{(2+p)/2}$, $a = c = 0$ в теореме 1.3 и используя предложение 1.2, получаем следующий результат.

Пусть $\tilde{\kappa}_0 > 0$ – минимальное собственное число самосопряженного оператора Шрёдингера $\tilde{B}$, имеющего вид

$$By(t) = -\frac{1}{2}y''(t) + |t|^p y(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad y(-\infty) = y(+\infty) = 0,$$

и $\tilde{y}_0(t) > 0$ – соответствующая нормированная собственная функция.

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть $p > 0$; тогда при $u \rightarrow \infty$ выполнены асимптотические соотношения

$$\mathbb{E} \exp \left\{ -u \int_0^1 |w(t)|^p dt \right\} = \exp \{ -\tilde{\kappa}_0 u^{2/(2+p)} \} \tilde{y}_0(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{y}_0(x) dx (1 + o(1)), \quad (1.23)$$

$$\mathbb{E} \exp \left\{ -u \int_0^1 |w_0(t)|^p dt \right\} = \exp \{ -\tilde{\kappa}_0 u^{2/(2+p)} \} u^{1/(2+p)} \sqrt{2\pi} \tilde{y}_0^2(0) (1 + o(1)). \quad (1.24)$$

Соотношение (1.24), по-видимому, новое. При $p = 1$ и $p = 2$ известны точные неасимптотические формулы, записанные в явном виде. Приведем их.

Пусть $\text{Ai}(y)$ – функция Эйри (см. [34, § 10.4]), $\text{Ai}'(y)$ – ее производная, $0 < a'_1 < a'_2 < \dots < a'_k < \dots$ – нули функции $\text{Ai}'(-y)$. Известно, что $a'_1 \approx 1.0188$ (см. [34, табл. 10.13]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3 (случай $p = 1$). Для любого $u > 0$ выполнены равенства

$$\mathbb{E} \exp \left\{ -u \int_0^1 |w(t)| dt \right\} = \sum_{k=1}^{\infty} M_k \exp \left\{ -\frac{a'_k}{2^{1/3}} u^{2/3} \right\}, \quad M_k = \frac{1 + 3 \int_0^{a'_k} \text{Ai}(-y) dy}{3a'_k \text{Ai}(-a'_k)}, \quad (1.25)$$

$$\mathbb{E} \exp \left\{ -u \int_0^1 |w_0(t)| dt \right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{1/6}} u^{1/3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a'_k} \exp \left\{ -\frac{a'_k}{2^{1/3}} u^{2/3} \right\}. \quad (1.26)$$

Формула (1.25) доказана М. Кацем в [1]. Связанные с этой формулой результаты имеются в работах [6, пример 8], [11, с. 176, формула 1.8.7 (1)], [35, с. 186]. В работе [35, с. 189] приведены численные значения величин M_k для $k = 1, 2, \dots, 10$; в частности, укажем, что $M_1 \approx 1.48257$. Равенство (1.26) доказано С. Райсом в работе [29].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4 (случай $p = 2$). Для любого $u > 0$ выполнены равенства

$$\mathbb{E} \exp \left\{ -u \int_0^1 w^2(t) dt \right\} = \frac{1}{\sqrt{\text{ch} \sqrt{2u}}}, \quad \mathbb{E} \exp \left\{ -u \int_0^1 w_0^2(t) dt \right\} = \frac{(2u)^{1/4}}{\sqrt{\text{sh} \sqrt{2u}}}. \quad (1.27)$$

Первая из формул (1.27) доказана М. Кацем в статье [2] (см. также [26, гл. 1, теорема 3.4]). Вторая формула в (1.27) по существу доказана Н. В. Смирновым

в работе [36]. Информация о равенствах (1.27) и иных близких результатах имеется также в работах [6, § 3], [11, с. 176], [26, гл. 1, § 3].

Отметим, что асимптотики, получаемые из формул (1.25), (1.26) при $u \rightarrow \infty$, совпадают соответственно с асимптотиками (1.23), (1.24) при $p = 1$.

Укажем, что, применяя методы, использованные в настоящей статье, можно вычислить точные асимптотики интегралов

$$\mathbb{E} \exp \left\{ u^2 \int_0^1 g \left(\frac{w(t)}{u} \right) dt \right\}, \quad \mathbb{E} \exp \left\{ u^2 \int_0^1 g \left(\frac{w_0(t)}{u} \right) dt \right\}, \quad u \rightarrow \infty,$$

для тех гладких функций $g(x)$, для которых записанные интегралы конечны при всех $u > 0$ (см. [18, § 3]). Отметим также, что в работах [37]–[41] найдены точные асимптотики некоторых вероятностей типа (1.6) в случае винеровского процесса со сносом, процесса Орнштейна–Уленбека и бесселевского процесса. В работах [42]–[44] вычислены точные асимптотики некоторых интегралов из формул (1.2), (1.3), (1.5) для потенциалов $g(x) = e^{\theta|x|}$ и $g(x) = e^{\pm \theta x}$.

§ 2. Метод Лапласа для гауссовских интегралов в банаховых пространствах

В [17] был разработан чрезвычайно эффективный асимптотический метод Лапласа для гауссовских интегралов в гильбертовом пространстве. Как указано в [18, замечание 3.3], основной результат статьи [17, гл. I, теорема 2.1] может быть переформулирован для общих гауссовских мер в банаховых пространствах. Далее мы приводим соответствующее утверждение. Необходимые сведения о гауссовских мерах в банаховых пространствах имеются в [20], [26]–[28], [31].

Пусть $(B, \|\cdot\|)$ – действительное сепарабельное банахово пространство, $\mathcal{B}$ – борелевская σ -алгебра в B , B^* – сопряженное к B пространство, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – линейная форма, устанавливающая двойственность между B и B^* . Пусть P_A – гауссовская мера, определенная на $\mathcal{B}$ и имеющая среднее нулевое значение и инъективный ковариационный оператор $A: B^* \rightarrow B$. Напомним, что ковариационный оператор A является симметричным, т. е. $\langle Ax, y \rangle = \langle Ay, x \rangle$ для всех $x, y \in B^*$; положительным, т. е. $\langle Ay, y \rangle \geq 0$ для всех $y \in B^*$; ядерным (см. [27, гл. 3, § 1, п. 1, § 2, п. 3]).

Инъективность оператора A означает, что $\langle Ay, y \rangle > 0$ для всех $0 \neq y \in B^*$.

Будем обозначать первую и вторую производные по Фреше числовой функции $S: B \rightarrow \mathbb{R}$ в точке x через $S'(x)$ и $S''(x)$ (необходимые определения можно найти в [45, § 2], [46, § 2.2]).

Как правило, мы будем предполагать, что производные $S'(x)$ и $S''(x)$ можно рассматривать как ограниченные линейные операторы из B в $\mathbb{R}$ и из B в B^* соответственно, при этом будем использовать равенства

$$S'(x)[h] = \langle h, S'(x) \rangle, \quad S''(x)[h, v] = \langle h, S''(x)v \rangle, \quad h, v \in B.$$

В некоторых случаях мы будем допускать, что правая часть последнего равенства принимает бесконечные значения; такие случаи будем отмечать особо.

Пусть $\text{Dom}(T)$ – область определения оператора T , $\text{Ran}(T)$ – область значений оператора T , I – тождественный оператор в B . Через T^{-1} будем обозначать обратный оператор к оператору T . Везде ниже произведение операторов означает их композицию, $\|\cdot\|$ – операторная норма.

Обозначим через $(H_A, \|\cdot\|_A)$ гильбертово пространство, ассоциированное с ковариационным оператором A , т.е. пополнение области значений $\text{Ran}(A)$ оператора A относительно предгильбертовой нормы $\|Ay\|_A := \sqrt{\langle Ay, y \rangle}$, $y \in B^*$ (см., например, [27, с. 126]). Скалярное произведение в $H \equiv H_A$ будем записывать в виде $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$. Как обычно, сужение оператора $S: B \rightarrow B$ на H_A обозначаем через $S|_{H_A}$.

Сведения о детерминантах, связанных с ядерными операторами в гильбертовом и банаховом пространствах можно найти в книгах [7, с. 29], [47], [48, с. 199], [49, гл. 27].

Предположим, что выполнены следующие условия.

(D1) Пусть f и F – непрерывные действительные функции, заданные на B и такие, что для некоторых постоянных $b_1 > 0$, $b_2 \geq 0$, $0 \leq b_3 < \frac{1}{2\|A\|}$, $b_4 \geq 0$ справедливы неравенства

$$|f(x)| \leq b_1 \exp\{b_2\|x\|^2\}, \quad F(x) \geq -b_3\|x\|^2 - b_4, \quad x \in B.$$

(D2) Функционал $\Lambda(x) := F(x) + \frac{1}{2}\langle x, A^{-1}x \rangle$ достигает своего минимума на $\text{Dom}(A^{-1})$ в конечном числе точек $x^1, x^2, \dots, x^m$. Предположим, что минимум $\inf_{x \in H_A} [F(x) + \frac{1}{2}\|x\|_A^2]$ также достигается только в точках $x^1, x^2, \dots, x^m$.

(D3) Пусть существует малое число $\delta_0 > 0$ такое, что для замкнутых окрестностей $U_i \equiv U_i(\delta_0) := \{x \in B: \|x - x^i\| \leq \delta_0\}$ точек x^i при $i = 1, 2, \dots, m$ выполнены условия:

1) справедливо представление $U_i = S_i \cup V_i$, где $S_i \cap V_i = \emptyset$, $P_A(S_i) = 0$, V_i – выпуклое множество и функция $F: B \rightarrow \mathbb{R}$ дважды дифференцируема по Фреше в точках множества V_i , при этом $x^i \in V_i$, $F'(x^i) \in B^*$ и имеет место соотношение

$$|\langle h, F''(x)h \rangle| \leq \infty, \quad x \in V_i, \quad h \in B;$$

2) оператор $AF''(x^i): B \rightarrow B$ является компактным и для некоторого $\alpha > 0$ имеет место соотношение

$$\|AF''(x) - AF''(x^i)\| = O(\|x - x^i\|^\alpha) \quad \text{при} \quad \|x - x^i\| \rightarrow 0, \quad x \in V_i$$

(справедливо условие непрерывности типа Гёльдера порядка α в точке x^i).

(D4) Предположим, что для $i = 1, 2, \dots, m$ собственные значения β_{ik} , $k = 1, 2, \dots$, компактного оператора $AF''(x^i): B \rightarrow B$ таковы, что конечен и не равен нулю детерминант $\det R_i := \prod_{k=1}^{\infty} (1 + \beta_{ik})$, где $R_i = I + AF''(x^i): B \rightarrow B$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть P_A – гауссовская мера в B , имеющая нулевое среднее значение и инъективный ковариационный оператор A . Пусть выполнены условия (D1)–(D4) и $f(x^i) \neq 0$ при $i = 1, 2, \dots, m$. Тогда $\det R_i > 0$, имеют место равенства $x^i = -AF'(x^i)$, $i = 1, 2, \dots, m$, и при $v \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое соотношение

$$\int_B f(x) \exp\{-v^2 F(x)\} dP_A(vx) = \exp\{-v^2 \Lambda(x^1)\} \sum_{i=1}^m f(x^i) [\det R_i]^{-1/2} (1 + o(1)). \quad (2.1)$$

Теорема 2.1 представляет собой банаховозначный вариант упомянутого выше результата Р. Эллиса и Дж. Розен [17, гл. I, теорема 2.1] об асимптотическом разложении гауссовского интеграла типа Лапласа в гильбертовом пространстве (см. также [18, § 3]). Отметим, что условие (D3) в теореме 2.1 является значительно более слабым, чем соответствующее условие из [17, гл. I]

о бесконечной дифференцируемости по Фреше функций f и F на всем пространстве. Ограничение на F из условия (D1) обеспечивает конечность интеграла в левой части формулы (2.1), это следует из упомянутой теоремы Ландау–Маркуса–Шепша–Ферника.

Отметим, что условия теоремы 2.1 записаны в иной, более точной форме, чем условия теоремы 3.4 из [18] при $D = B$ (см. также условия теоремы 2 в работе [42]).

§ 3. Выбор банахова функционального пространства, используемого при доказательствах теорем 1.1, 1.2

Доказательство теорем 1.1 и 1.2 проводится при помощи теоремы 2.1. Ниже мы подробно изложим только доказательство теоремы 1.1. Пусть фиксированы числа $p > 0$ и $0 < \alpha < 2$. Напомним, что винеровский процесс $w(t)$ и броуновский мост $w_0(t)$, $t \in [0, 1]$, – это п. н. непрерывные гауссовские процессы с нулевым средним, имеющие соответственно следующие ковариационные функции: $Ew(t)w(s) = \min(t, s)$, $Ew_0(t)w_0(s) = \min(t, s) - ts$, $t, s \in [0, 1]$ (см., например, [9, с. 57, 118]).

Пусть P_w и P_{w_0} – распределения процессов $w(t)$, $w_0(t)$, $t \in [0, 1]$, в пространстве $C[0, 1]$ непрерывных на $[0, 1]$ функций, снабженном нормой супремум.

При вычислениях, связанных с функционалом (1.7), выбор подходящего банахова функционального пространства B , на котором удобно рассматривать гауссовы меры P_w и P_{w_0} , следует проводить в зависимости от того, будет ли $p \geq 2$, или $1/2 < p < 2$, или $0 < p \leq 1/2$. Именно, положим

$$\tilde{p} := \begin{cases} p, & \text{если } p \geq 2, \\ 2, & \text{если } \frac{1}{2} < p \leq 2, \\ \frac{1}{p} + \varepsilon_0, & \text{если } 0 < p \leq \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (3.1)$$

где $\varepsilon_0 > 0$ – любое фиксированное число. Таким образом, имеем $\tilde{p} \geq 2$. Пусть $2 \geq \tilde{q} > 1$ – число, сопряженное к $\tilde{p}$, т. е. $1/\tilde{p} + 1/\tilde{q} = 1$.

Мы будем рассматривать гауссовские меры P_w и P_{w_0} , считая их заданными в пространстве $B \equiv L^{\tilde{p}}$, имея в виду, что эти меры сосредоточены на $C[0, 1]$.

Как известно [26, с. 47], [28, с. 51], в этом случае меры P_w и P_{w_0} имеют нулевые средние и инъективные ковариационные операторы соответственно $A_w: L^{\tilde{q}} \rightarrow L^{\tilde{p}}$ и $A_{w_0}: L^{\tilde{q}} \rightarrow L^{\tilde{p}}$ интегрального типа:

$$A_w x(t) = \int_0^1 \min(t, s) x(s) ds, \quad A_{w_0} x(t) = \int_0^1 [\min(t, s) - ts] x(s) ds, \quad x \in L^{\tilde{q}}. \quad (3.2)$$

Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – каноническая билинейная форма между пространствами $L^{\tilde{p}}$ и $L^{\tilde{q}}$, которая, как известно, имеет интегральный вид:

$$\langle h, g \rangle = \int_0^1 h(t) g(t) dt, \quad h \in L^{\tilde{p}}, \quad g \in L^{\tilde{q}}.$$

Обозначим через $C^2[0, 1]$ множество дважды дифференцируемых на $[0, 1]$ функций.

ЛЕММА 3.1. *Области значений ковариационных операторов A_w, A_{w_0} , определенных в формуле (3.2), имеют вид*

$$\begin{aligned}\operatorname{Ran}(A_w) &= \{x \in C^2[0, 1]: x(0) = x'(1) = 0\}, \\ \operatorname{Ran}(A_{w_0}) &= \{x \in C^2[0, 1]: x(0) = x(1) = 0\}.\end{aligned}\quad (3.3)$$

Обратные операторы задаются формулами

$$\begin{aligned}A_w^{-1}y(t) &= -y''(t), & y \in \operatorname{Ran}(A_w), & \quad t \in [0, 1], \\ A_{w_0}^{-1}y(t) &= -y''(t), & y \in \operatorname{Ran}(A_{w_0}), & \quad t \in [0, 1].\end{aligned}\quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения леммы хорошо известны и получаются в результате двукратного дифференцирования по t равенств $y(t) = A_w x(t)$ и $y(t) = A_{w_0} x(t)$ (см., например, [26, с. 48], [31, с. 279]).

Возьмем в качестве функционала F из теоремы 2.1 следующий функционал:

$$F(x) := -\|x\|_p^\alpha \equiv -\left(\int_0^1 |x(t)|^p dt\right)^{\alpha/p}, \quad p > 0, \quad x \in L^{\tilde{p}}. \quad (3.5)$$

Ниже мы используем определение производной по Фреше, данное в [45, § 2, п. 2.2], где допускается, что рассматриваемый оператор определен всего лишь на некотором всюду плотном подмножестве банахова пространства; значения, равные $\pm\infty$, также допускаются (см. [46, п. 2.2.1, определение 1, с. 137]).

Функционал $-F(x)$ согласно (3.5) представляет собой степень интегрального функционала. Как известно, интегральные функционалы дифференцируемы по Фреше (см. [45, § 2, п. 2.6], [46, § 2.4], [50], [51, § 20]).

Покажем, что функционал $F(x)$ дважды дифференцируем по Фреше для достаточно богатого (всюду плотного) в $L^{\tilde{p}}$ множества точек x . В самом деле, введем следующий класс функций:

$$\mathcal{X} = \begin{cases} L^{\tilde{p}}, & \text{если } p \geq 2, \\ \{x \in C[0, 1]: x(t) \text{ имеет конечное число нулей на } [0, 1]\}, & \text{если } \frac{1}{2} < p < 2, \\ \{x \in C[0, 1]: |x(t)|^{p-1} \in L^{\tilde{q}}\}, & \text{если } 0 < p \leq \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Ясно, что для любого $0 < p \leq 1/2$ множество $\mathcal{X}$ всюду плотно в $C[0, 1]$, следовательно, и в $L^{\tilde{p}}$. Очевидно, что при $0 < p < 2$ каждая непрерывная функция, тождественно равная нулю на некотором интервале из $[0, 1]$, не принадлежит множеству $\mathcal{X}$, в частности $0 \notin \mathcal{X}$ при $0 < p < 2$.

ЛЕММА 3.2. *Пусть $y(t)$, $t \in [0, 1]$, — непрерывная функция такая, что $y(0) = 0$, $y(t) > 0$ при $t > 0$ и*

$$y(t) = c_0 t(1 + o(1)) \quad \text{при} \quad t \rightarrow 0, \quad (3.7)$$

где $c_0 > 0$ — некоторая постоянная. Тогда для любого $p > 0$ имеют место включения $y \in \mathcal{X}$ и $y^{p-1} \in L^{\tilde{q}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы основано на формулах (3.1), (3.6), (3.7) и проводится посредством достаточно простых оценок.

ЛЕММА 3.3. *Функционал F дважды дифференцируем по Фреше в каждой точке $x \in \mathcal{X}$ с производными*

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\alpha \left(\int_0^1 |x(s)|^p ds \right)^{(\alpha-p)/p} |x(t)|^{p-1} \operatorname{sign} x(t), \\ F''(x)g &= \alpha(1-p) \|x\|_p^{\alpha-p} |x(t)|^{p-2} g \\ &\quad + \alpha(p-\alpha) \|x\|_p^{\alpha-2p} |x(t)|^{p-1} \operatorname{sign} x(t) \langle g, |x(t)|^{p-1} \operatorname{sign} x(t) \rangle, \quad g \in \tilde{L}^p. \end{aligned} \quad (3.8)$$

При $p \geq 2$ оператор (3.8) является ограниченным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы получаем, применяя теорему о суперпозиции дифференцируемых отображений [46, п. 2.2.2] и известные формулы для первых двух производных функционала $\hat{F}(x) = \int_0^1 |x(t)|^p dt$ (см. [45, пп. 2.6, 4.2], [50, предложение 5, с. 887], [51, п. 20.12]).

Нашей целью является применение теоремы 2.1 к функционалу (3.5) и гауссовским мерам P_w и P_{w_0} , заданным на пространстве $B = \tilde{L}^p$. Положим

$$v = u^{1/(2-\alpha)}. \quad (3.9)$$

Тогда $u = v^{2-\alpha}$, кроме того, $v \rightarrow \infty$ при $u \rightarrow \infty$. Функционал (3.5) обладает свойством однородности порядка α : $F(rx) = r^\alpha F(x)$, $r > 0$. Используя это свойство, запишем средние из формул (1.10), (1.11) в виде модельных интегралов Лапласа:

$$\mathbb{E} \exp \left\{ u \left(\int_0^1 |w(t)|^p dt \right)^{\alpha/p} \right\} \equiv \mathbb{E} \exp \{-uF(w)\} = \mathbb{E} \exp \left\{ -v^2 F\left(\frac{w}{v}\right) \right\}, \quad (3.10)$$

$$\mathbb{E} \exp \left\{ u \left(\int_0^1 |w_0(t)|^p dt \right)^{\alpha/p} \right\} \equiv \mathbb{E} \exp \{-uF(w_0)\} = \mathbb{E} \exp \left\{ -v^2 F\left(\frac{w_0}{v}\right) \right\}. \quad (3.11)$$

Нам понадобится следующее полезное неравенство для функционала (1.7).

ЛЕММА 3.4. *Пусть фиксированы числа $0 < s < r < \infty$. Тогда справедливо неравенство $\|x\|_s \leq \|x\|_r$, если $\|x\|_r < \infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы см., например, в книгах [51, с. 13] и [52, с. 147].

ЛЕММА 3.5. *Для функционала (3.5) и ковариационных операторов A_w, A_{w_0} , заданных в (3.2), выполнено условие (D1).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем только для оператора A_w . Рассмотрим сначала случай, когда $1/2 < p \leq 2$. Тогда согласно (3.1) имеем $\tilde{p} = 2$ и основное банахово пространство представляет собой гильбертово пространство $(L^2, \|\cdot\|_2)$. Применяя лемму 3.4 при $s = p$ и $r = 2$, получаем следующее неравенство для функционала (3.5):

$$-F(x) \leq \|x\|_2^\alpha, \quad x \in L^2. \quad (3.12)$$

Положим $C = (3\|A_w\|)^{1/(2-\alpha)} > 0$ и представим пространство L^2 в следующем виде: $L^2 = E_1 \cup E_2$, где $E_1 = \{x: \|x\|_2 \leq C\}$, $E_2 = \{x: \|x\|_2 > C\}$. Используя неравенство (3.12), получаем оценку $-F(x) \leq C^\alpha = (3\|A_w\|)^{\alpha/(2-\alpha)}$,

если $x \in E_1$. В силу (3.12) на множестве E_2 имеем следующую оценку: $-F(x) \leq \|x\|_2^2/C^{2-\alpha} = \|x\|_2^2/(3\|A_w\|)$, если $x \in E_2$.

Из этих двух оценок следует, что при $1/2 < p \leq 2$ для функционала (3.5) выполнено условие (D1) с постоянными $b_3 = (3\|A_w\|)^{-1}$ и $b_4 = (3\|A_w\|)^{\alpha/(2-\alpha)}$.

Аналогично рассматриваются два других случая, когда $p > 2$ и $0 < p \leq 1/2$. Лемма доказана.

§ 4. Доказательство утверждения (i) теоремы 1.1

Доказательство формул (1.14), (1.16) основано на теореме 2.1. Прежде всего нужно решить экстремальную задачу из теоремы 2.1 в случае, когда $A \equiv A_w$ и $P_A \equiv P_w$. Описание гильбертова пространства $(H_{A_w}, \|\cdot\|_{A_w})$, ассоциированного с ковариационным оператором A_w , хорошо известно (см., например, [18, с. 68], [20, с. 87], [26, с. 75], [28, с. 55]). Приведем соответствующий результат.

Пусть $C_0 = C_0[0, 1]$ – пространство непрерывных функций $x(t)$ на отрезке $[0, 1]$ с нормой супремума таких, что $x(0) = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Гильбертово пространство H_{A_w} , ассоциированное с распределением стандартного винеровского процесса $w(t)$ в пространстве C_0 , представляет собой гильбертово пространство абсолютно непрерывных функций $x(t)$ на отрезке $[0, 1]$, $x(0) = 0$, для которых конечна величина*

$$\|x\|_{A_w}^2 := \int_0^1 (x'(t))^2 dt.$$

Скалярное произведение в H_{A_w} задается следующим образом: $\langle x, y \rangle_{A_w} = \int_0^1 x'(t)y'(t) dt$, $x, y \in H_{A_w}$, норма равна $\|\cdot\|_{A_w}$.

Как видим, для винеровского процесса гильбертово пространство H_{A_w} представляет собой пространство типа Соболева.

4.1. Решение экстремальной задачи. Пусть $p > 0$ и $0 < \alpha < 2$ фиксированы. Введем следующие положительные величины:

$$b_0 = b_0(p, \alpha) = (\alpha\sigma^2)^{1/(2-\alpha)}, \quad C_0 = C_0(p, \alpha) = \frac{p+2}{2}b_0^p, \\ \lambda_0 = \lambda_0(p, \alpha) = \frac{\alpha}{p}b_0^{\alpha-p},$$

здесь число σ^2 такое, как в (1.8). Обозначим через $F(\cdot, \cdot; \cdot; t)$ гипергеометрическую функцию Гаусса (см. [34, гл. 15]). Напомним, что число θ введено в формуле (1.9).

ЛЕММА 4.1. *Пусть $p > 0$ и $0 < \alpha < 2$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(i) *функционал $F(x) + \frac{1}{2}\langle x, A_w^{-1}x \rangle$ достигает на $L^{\tilde{p}}$ своего минимума, равно-го $-\theta$ в двух точках $x_0(t)$ и $-x_0(t)$, при этом $x_0(0) = 0$, функция $x_0(t)$ положительна, строго монотонно возрастает на отрезке $[0, 1]$ и удовлетворяет функциональному уравнению*

$$x(t)F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{p}; 1 + \frac{1}{p}; \frac{x^p(t)}{C_0}\right) = \sqrt{2\lambda_0 C_0}t, \quad t \in [0, 1],$$

кроме того, $x_0^p(1) = C_0$ и $\int_0^1 x_0^p(t) dt = b_0^p$;

(ii) при $t \rightarrow 0$ выполнено соотношение

$$x_0(t) = \sqrt{2\lambda_0 C_0 t}(1 + o(1)), \quad (4.1)$$

функция x_0 принадлежит $\mathcal{X}$ и $x_0^{p-1} \in L^{\tilde{q}}$, следовательно, $F'(x_0) \in L^{\tilde{q}}$; экстремальная функция $x_0(t)$ удовлетворяет граничной задаче

$$x''(t) = -\alpha b_0^{\alpha-p} x^{p-1}(t), \quad t \in [0, 1], \quad x(0) = x'(1) = 0; \quad (4.2)$$

(iii) минимум $\inf_{x \in H_{A_w}} [F(x) + \frac{1}{2} \|x\|_{A_w}^2]$ также достигается только в двух точках $x_0(t)$ и $-x_0(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на переходе к условной экстремальной задаче. Справедливо следующее равенство:

$$\inf_{x \in L^{\tilde{p}}} \left[\frac{1}{2} \langle x, A_w^{-1} x \rangle - \|x\|_p^\alpha \right] = \inf_{b > 0} \inf_{\{x \in L^{\tilde{p}} : \|x\|_p = b\}} \left[\frac{1}{2} \langle x, A_w^{-1} x \rangle - b^\alpha \right]. \quad (4.3)$$

Решение внутренней экстремальной задачи в (4.3) при фиксированном $b > 0$ проводится по той же схеме, что и решение экстремальной задачи в работе [21, с. 686]. Минимизируя по $b > 0$ найденное решение внутренней экстремальной задачи, получаем утверждения (i), (ii) леммы. При этом включения $x_0 \in \mathcal{X}$ и $x_0^{p-1} \in L^{\tilde{q}}$ вытекают из определения функции x_0 , формулы (4.1) и леммы 3.2.

Используя предложение 4.1, можно доказать, что минимум $\inf_{x \in H_{A_w}} [F(x) + \frac{1}{2} \|x\|_{A_w}^2]$ также достигается только в двух точках $x_0(t)$ и $-x_0(t)$. Лемма доказана.

4.2. Исследование спектра интегрального оператора $A_w F''(x_0)$. Как видим, вследствие лемм 3.5, 4.1 гауссовская мера P_w и функционал (3.5) удовлетворяют условиям (D1), (D2) теоремы 2.1. Мы имеем $m = 2$ экстремальные точки x_0 и $-x_0$. При этом в силу формулы (3.8) выполнено равенство $F''(x_0) \equiv F''(-x_0)$, поэтому достаточно рассмотреть только случай оператора $A_w F''(x_0)$. Исследуем спектр интегрального оператора $A_w F''(x_0): L^{\tilde{p}} \rightarrow L^{\tilde{p}}$.

Учитывая формулу (3.8) и равенство $\|x_0\|_p = b_0$, получаем следующее представление:

$$F''(x_0) = F_1(x_0) + F_2(x_0), \quad (4.4)$$

где

$$F_1(x_0)z := \alpha(1-p)b_0^{\alpha-p}x_0^{p-2}(t)z(t), \quad t \in [0, 1], \quad (4.5)$$

$$F_2(x_0)z := \alpha(p-\alpha)b_0^{\alpha-2p}x_0^{p-1}(t)\langle z, x_0^{p-1} \rangle, \quad t \in [0, 1]. \quad (4.6)$$

Таким образом, в силу (4.4) справедливо следующее представление для оператора $A_w F''(x_0)$:

$$A_w F''(x_0) = A_w F_1(x_0) + A_w F_2(x_0). \quad (4.7)$$

Отметим, что в формуле (4.7) операторы $A_w F_1(x_0)$, $A_w F_2(x_0)$ знакопостоянные: оператор $A_w F_1(x_0)$ отрицателен при $p \geq 1$ и положителен при $0 < p < 1$, а оператор $A_w F_2(x_0)$ отрицателен при $\alpha \geq p$ и положителен при $\alpha < p$.

ЛЕММА 4.2. (i) При $p \geq 2$ интегральный оператор $A_w F''(x_0): L^p \rightarrow L^p$ является ядерным.

(ii) При $p > 0$ оператор $A_w F_2(x_0): L^{\tilde{p}} \rightarrow L^{\tilde{p}}$ является одномерным.

(iii) При $0 < p < 2$ оператор $A_w F''(x_0): L^{\tilde{p}} \rightarrow L^{\tilde{p}}$ является компактным.

(iv) При $p > 0$ для функционала F и ковариационного оператора A_w выполнено условие (D3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p \geq 2$. Тогда согласно последнему утверждению леммы 3.3 оператор $F''(x_0): L^p \rightarrow L^p$ является ограниченным; напомним, что ковариационный оператор $A_w: L^p \rightarrow L^p$ является ядерным. Поскольку множество всех ядерных операторов, действующих на всем классе банаховых пространств, является операторным идеалом [49, с. 99], то результирующий оператор $A_w F''(x_0)$ представляет собой ядерный оператор. Утверждение (i) доказано.

Утверждение (ii) вытекает непосредственно из формул (3.2) и (4.6).

Докажем утверждение (iii). Покажем, что оператор $A_w F_1(x_0)$ является компактным. Для этого применим теорему Л. В. Канторовича [52, с. 420]. Используя формулы (3.2) и (4.5), запишем интегральный оператор $A_w F_1(x_0): L^{\tilde{p}} \rightarrow L^{\tilde{p}}$ в следующем виде:

$$[A_w F_1(x_0)z](s) = \alpha(1-p)b_0^{\alpha-p} \int_0^1 \min(s, t)x_0^{p-2}(t)z(t) dt, \quad s \in [0, 1], \quad z \in L^{\tilde{p}}. \quad (4.8)$$

Учитывая формулу (4.1), можно показать, что для оператора (4.8) выполнены условия теоремы 3 из [52, с. 420] с параметрами $D = D' = [0, 1]$, $p = q = \tilde{p} \geq 2$, $r = 1$ и $\sigma = 3/2$. Следовательно, оператор $A_w F_1(x_0)$ является компактным.

Из утверждения (ii) вытекает, что оператор $A_w F_2(x_0)$ является одномерным, а следовательно, и компактным. Таким образом, в силу равенства (4.7) оператор $A_w F''(x_0)$ является компактным как сумма двух компактных операторов (см., например, [52, с. 325]). Утверждение (iii) доказано.

Утверждение (iv) при $p \geq 2$, очевидно, вытекает из леммы 3.3 и результата статьи [50, предложение 5, с. 887] о гёльдеровости второй производной функции $\hat{F}(x) = \int_0^1 |x(t)|^p dt$ при $p \geq 2$. Доказательство утверждения (iv) при $0 < p < 2$ проводится при помощи лемм 3.3, 4.1, предложения 4.1 и достаточно простых оценок, основанных на следующих двух фактах. Первый факт – это неравенство $x^\gamma - y^\gamma \leq (x - y)^\gamma$, справедливое при $x \geq y \geq 0$ и $0 < \gamma \leq 1$. Вторым фактом – это утверждение о конечности интеграла $\int_0^\delta t|w(t)|^{p-2} dt$ при любом $\delta > 0$ и $0 < p < 2$. Последнее можно доказать, рассуждая аналогично доказательству утверждения о конечности интеграла $\int_0^\delta |w(t)|^{-\beta} dt$ при любых $\delta > 0$ и $0 < \beta < 1$ (см. [12, гл. 6, § 1, упражнение (1.29); гл. 9, § 1, упражнение (1.16)]). Лемма доказана.

В следующей лемме утверждается, что при всех $p > 0$ компактный оператор $A_w F''(x_0)$ имеет конечный след: данный оператор имеет счетную последовательность собственных чисел, при этом сходится ряд, составленный из их абсолютных величин (см. [5, т. 1, с. 231], [48, с. 198], [53, гл. 5]).

ЛЕММА 4.3. Пусть $p > 0$ и $0 < \alpha < 2$ фиксированы. Тогда компактный оператор $A_w F''(x_0)$ имеет счетную последовательность собственных чисел $\{\mu_n\}_{n=0}^\infty$ следующего вида:

$$\mu_0 = 1 - \alpha, \quad \mu_n = \frac{1 - p}{2p(n + 1/2)(n + 1/p)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для нахождения собственных чисел μ_n и соответствующих собственных функций z_n оператора $A_w F''(x_0)$ рассмотрим линейное интегральное уравнение (относительно μ и z)

$$A_w F''(x_0)z = \mu z, \quad z \in L^{\tilde{p}}. \quad (4.10)$$

Отметим, что при всех $p > 0$ собственные функции оператора $A_w F''(x_0): L^{\tilde{p}} \rightarrow L^{\tilde{p}}$ лежат в множестве $R(A_w) \subset L^2[0, 1]$. В силу инъективности оператора A_w уравнение (4.10) эквивалентно следующему уравнению:

$$F''(x_0)z = \mu A_w^{-1}z, \quad z \in R(A_w). \quad (4.11)$$

Используя соотношения (3.3), (3.4), (4.4)–(4.6), убеждаемся в том, что уравнение (4.11) имеет вид следующей граничной задачи для собственных чисел:

$$\begin{aligned} -\mu z''(t) &= \alpha(1-p)b_0^{\alpha-p}x_0^{p-2}(t)z(t) + \alpha(p-\alpha)b_0^{\alpha-2p}x_0^{p-1}(t) \int_0^1 x_0^{p-1}(s)z(s)ds, \\ t &\in [0, 1], \quad z(0) = z'(1) = 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Учитывая формулу (4.2) и дважды интегрируя по частям, получаем для функции $z \in R(A_w)$ цепочку равенств

$$\int_0^1 x_0(t)z''(t)dt = \int_0^1 x_0''(t)z(t)dt = -\alpha b_0^{\alpha-p} \int_0^1 x_0^{p-1}(t)z(t)dt. \quad (4.13)$$

Умножим обе части дифференциального уравнения из (4.12) на функцию $x_0(t)$ и проинтегрируем почленно полученное равенство по t от 0 до 1; в результате с учетом (4.13) и формулы $\|x_0\|_p = b_0$ получаем следующее равенство:

$$(\mu + \alpha - 1) \int_0^1 x_0^{p-1}(t)z(t)dt = 0. \quad (4.14)$$

Рассмотрим отдельно два случая выполнения равенства (4.14), когда:

- 1) функция $z \in R(A_w)$ такова, что $\int_0^1 x_0^{p-1}(t)z(t)dt = 0$;
- 2) $\mu = 1 - \alpha$.

Можно показать, что в случае 1) граничная задача (4.12) имеет в качестве решения собственные числа $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$, заданные в (4.9). Этим собственным числам соответствуют (ненормированные) собственные функции

$$z_n(t) = \tilde{c}_n x_0(t) P_n^{(1/p, -1/2)} \left(1 - 2 \frac{x_0^p(t)}{C_0} \right), \quad t \in [0, 1], \quad n = 1, 2, \dots; \quad (4.15)$$

здесь $\tilde{c}_n$ – постоянные, не зависящие от t , $P_n^{(1/p, -1/2)}(s)$, $s \in [-1, 1]$, – ортогональные многочлены Якоби (см. [34, гл. 22]).

В случае 2) граничная задача (4.12) имеет в качестве решения единственную собственную функцию $z_0(t) = \tilde{c}_0 x_0(t)$, которая линейно независима с системой функций (4.15). Этой функции соответствует собственное число $\mu_0 = 1 - \alpha$.

Других решений задача (4.12) не имеет. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.4. Пусть $p > 0$ и $0 < \alpha < 2$ фиксированы. Тогда справедливы равенства

$$\det[I + A_w F''(x_0)] = (2 - \alpha) \prod_{n=1}^\infty (1 + \mu_n) = (2 - \alpha) \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(1 + 1/p)}{2\Gamma(1/2 + 1/p)}. \quad (4.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение (4.16) вытекает из формулы (4.9) и [32, равенство 11, с. 754].

4.3. Доказательство утверждения (i) теоремы 1.1.

Пусть фиксированы числа $0 < \alpha < 2$ и $p > 0$. Вследствие лемм 3.3, 3.5, 4.1–4.4 гауссовская мера P_w и функционал (3.5) удовлетворяют условиям (D1)–(D4) теоремы 2.1 при $B = L^{\tilde{p}}$, $f \equiv 1$, $m = 2$, $x^1 = x_0$ и $x^2 = -x_0$. Таким образом, применима теорема 2.1, и мы можем использовать соотношение (2.1). Несложно видеть, что константы из правой части формулы (2.1) для обеих экстремальных функций совпадают, поэтому достаточно провести вычисления только для точки x_0 . Используя леммы 4.1, 4.4 и формулы (3.9), (3.10), (4.16), мы на основании соотношения (2.1) получаем формулу (1.10). Утверждение (i) теоремы 1.1 доказано.

§ 5. Доказательство формулы (1.13)

Доказательство формулы (1.13) проводится на основе теоремы 2.1 и по той же схеме, что и доказательство формулы (1.10). При этом существенно используются утверждения, полученные в § 4. Укажем основные моменты. Пусть выполнены условия (1.12) теоремы 1.2. В качестве банахова пространства B , участвующего в формулировке теоремы 2.1, возьмем опять пространство $L^{\tilde{p}}$, где $\tilde{p}$ – число, заданное в формуле (3.1). В качестве F возьмем функционал

$$F_0(x) = - \left(\int_0^1 x^p(t) dt \right)^{\alpha/p}, \quad x \in L^{\tilde{p}}. \quad (5.1)$$

При помощи замены (3.9) выражение из левой части формулы (1.13) можно записать в следующем виде:

$$\mathbb{E} \exp \left\{ u \left(\int_0^1 w^p(t) dt \right)^{\alpha/p} \right\} \equiv \mathbb{E} \exp \{ -u F_0(w) \} = \mathbb{E} \exp \left\{ -v^2 F_0 \left(\frac{w}{v} \right) \right\}. \quad (5.2)$$

Отметим, что в случае функционала (5.1) и гауссовской меры P_w экстремальная задача из условия (D2) имеет единственное решение – функцию $x_0(t)$, определенную в лемме 4.1. В этом можно убедиться, просматривая доказательство леммы 4.1. Для функционалов (3.5) и (5.1) выполнено неравенство $F_0(x) \geq F(x)$, $x \in L^{\tilde{p}}$, поэтому в силу леммы 3.5 функционал (5.1) и оператор A_w удовлетворяют условию (D1). Кроме того, справедливы равенства $F(x_0) = F_0(x_0)$, $F'(x_0) = F'_0(x_0)$, $F''(x_0) = F''_0(x_0)$. Таким образом, утверждения лемм 4.2–4.4 остаются справедливыми и для оператора $I + A_w F''_0(x_0) \equiv I + A_w F''(x_0)$. Следовательно, в условиях теоремы 1.2 для функционала (5.1) и меры $P_A = P_w$ применима теорема 2.1 при $B = L^{\tilde{p}}$, $f \equiv 1$, $m = 1$ и $x^1 = x_0$. Применяя теорему 2.1 и учитывая формулы (1.10), (3.9), (5.2), приходим к формуле (1.13).

§ 6. Доказательство утверждения (ii) теоремы 1.1

Доказательство формулы (1.11) также основано на теореме 2.1 и проводится по той же схеме, что и доказательство формулы (1.10). Решим экстремальную задачу из теоремы 2.1 в случае броуновского моста, когда $A \equiv A_{w_0}$, $P_A \equiv P_{w_0}$, а функционал F задан формулой (3.5).

6.1. Решение экстремальной задачи. Пусть $p > 0$ и $0 < \alpha < 2$ фиксированы. Введем следующие положительные величины:

$$b_1 = b_1(p, \alpha) = \left(\frac{\alpha}{4} \sigma^2 \right)^{1/(2-\alpha)}, \quad C_1 = C_1(p, \alpha) = \frac{p+2}{2} b_1^p, \\ \lambda_1 = \lambda_1(p, \alpha) = \frac{\alpha}{p} b_1^{\alpha-p},$$

число σ^2 определено в (1.8). Ради удобства записи формул обозначим через $(H_{w_0}, \|\cdot\|_{w_0})$ гильбертово пространство, ассоциированное с ковариационным оператором A_{w_0} . Отметим, что $H_{w_0} = \{x \in H_{A_w} : x(1) = 0\}$ – линейное подпространство гильбертова пространства H_{A_w} из предложения 4.1, норма $\|\cdot\|_{w_0}$ индуцирована нормой $\|\cdot\|_{A_w}$.

ЛЕММА 6.1. Пусть $p > 0$ и $0 < \alpha < 2$. Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) функционал $F(x) + \frac{1}{2} \langle x, A_{w_0}^{-1} x \rangle$ достигает на $L^{\tilde{p}}$ своего минимума, равного $-\frac{\theta}{4^{\alpha/(2-\alpha)}}$ в двух точках $x_1(t)$ и $-x_1(t)$, при этом $x_1(0) = 0$, функция $x_1(t)$ положительна, симметрична относительно точки $t = 1/2$ (т. е. $x_1(t) = x_1(1-t)$ для $t \in [0, 1/2]$), строго монотонно возрастает на отрезке $[0, 1/2]$, имеет максимум в точке $t = 1/2$ и строго монотонно убывает на отрезке $[1/2, 1]$; функция $x_1(t)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$x(t) F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{p}; 1 + \frac{1}{p}; \frac{x^p(t)}{C_1}\right) = \sqrt{2\lambda_1 C_1} t, \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

кроме того, $C_1 = x_1^p(1/2)$ и $\int_0^1 x_1^p(t) dt = b_1^p$;

(ii) при $t \rightarrow 0$ выполнено соотношение

$$x_1(t) = \sqrt{2\lambda_1 C_1} t (1 + o(1)), \quad (6.1)$$

функция x_1 принадлежит $\mathcal{X}$ и $x_1^{p-1} \in L^{\tilde{q}}$, следовательно, $F'(x_1) \in L^{\tilde{q}}$; экстремальная функция $x_1(t)$ удовлетворяет граничной задаче

$$x''(t) = -\alpha b_1^{\alpha-p} x^{p-1}(t), \quad t \in [0, 1], \quad x(0) = x(1) = 0;$$

(iii) минимум $\inf_{x \in H_{w_0}} [F(x) + \frac{1}{2} \|x\|_{w_0}^2]$ также достигается только в двух точках $x_1(t)$ и $-x_1(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится аналогично доказательству леммы 4.1 (см. также [54, п. 4.1]). Включения $x_1 \in \mathcal{X}$ и $x_1^{p-1} \in L^{\tilde{q}}$ можно доказать, учитывая симметрию функции x_1 и формулу (6.1).

6.2. Исследование спектра интегрального оператора $A_{w_0} F''(x_1)$. Как видим, вследствие лемм 3.5, 6.1 гауссовская мера P_{w_0} и функционал (3.5) удовлетворяют условиям (D1), (D2) теоремы 2.1. Мы имеем $m = 2$ экстремальные точки x_1 и $-x_1$. При этом в силу формулы (3.8) выполнено равенство $F''(x_1) \equiv F''(-x_1)$, поэтому достаточно рассмотреть только случай оператора $A_{w_0} F''(x_1)$. Исследуем спектр интегрального оператора $A_{w_0} F''(x_1): L^{\tilde{p}} \rightarrow L^{\tilde{p}}$.

Учитывая формулу (3.8) и равенство $\|x_1\|_p = b_1$, получаем следующее представление:

$$F''(x_1) = F_1(x_1) + F_2(x_1), \quad (6.2)$$

где

$$\begin{aligned} F_1(x_1)z &:= \alpha(1-p)b_1^{\alpha-p}x_1^{p-2}(t)z(t), & t \in [0, 1], \\ F_2(x_1)z &:= \alpha(p-\alpha)b_1^{\alpha-2p}x_1^{p-1}(t)\langle z, x_1^{p-1} \rangle, & t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Таким образом, в силу (6.2) справедливо следующее представление для оператора $A_{w_0}F''(x_1)$:

$$A_{w_0}F''(x_1) = A_{w_0}F_1(x_1) + A_{w_0}F_2(x_1). \quad (6.3)$$

Отметим, что в формуле (6.3) операторы $A_{w_0}F_1(x_1)$ и $A_{w_0}F_2(x_1)$ знакопостоянные.

ЛЕММА 6.2. (i) При $p \geq 2$ интегральный оператор $A_{w_0}F''(x_1): L^p \rightarrow L^p$ является ядерным.

(ii) При $p > 0$ оператор $A_{w_0}F_2(x_1): L^{\tilde{p}} \rightarrow L^{\tilde{p}}$ является одномерным.

(iii) При $0 < p < 2$ оператор $A_{w_0}F''(x_1): L^{\tilde{p}} \rightarrow L^{\tilde{p}}$ является компактным.

(iv) При $p > 0$ для функционала F и ковариационного оператора A_{w_0} выполнено условие (D3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится аналогично доказательству леммы 4.2 с использованием теоремы Канторовича [52, с. 420].

В следующей лемме утверждается, что при всех $p > 0$ компактный оператор $A_{w_0}F''(x_1)$ имеет конечный след.

ЛЕММА 6.3. Пусть $p > 0$ и $0 < \alpha < 2$ фиксированы. Тогда множество собственных чисел компактного оператора $A_{w_0}F''(x_1)$ состоит из двух последовательностей $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\tilde{\mu}_n\}_{n=1}^{\infty}$, где числа $\mu_n, n \geq 0$, определены в формуле (4.9) и

$$\tilde{\mu}_n = \frac{1-p}{2pn(n+1/p-1/2)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится аналогично доказательству леммы 4.3.

ЛЕММА 6.4. Пусть $p > 0$ и $0 < \alpha < 2$ фиксированы. Тогда справедливы равенства

$$\det[I + A_{w_0}F''(x_1)] = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + \mu_n) \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \tilde{\mu}_n) = \frac{2-\alpha}{p}. \quad (6.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулу (6.4) и равенство 11 из справочника [32, с. 754], получаем соотношение

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \tilde{\mu}_n) = \frac{2\Gamma(1/2 + 1/p)}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/p)}. \quad (6.6)$$

Теперь формула (6.5) вытекает из равенств (4.16) и (6.6). Лемма доказана.

6.3. Доказательство утверждения (ii) теоремы 1.1. Пусть фиксированы числа $0 < \alpha < 2$ и $p > 0$. Вследствие лемм 3.3, 3.5, 6.1–6.4 гауссовская мера P_{w_0} и функционал (3.5) удовлетворяют условиям (D1)–(D4) теоремы 2.1 при $B = L^{\tilde{p}}, f \equiv 1, m = 2, x^1 = x_1$ и $x^2 = -x_1$. Таким образом, применима теорема 2.1, и мы можем использовать соотношение (2.1). Несложно видеть,

что константы из правой части формулы (2.1) для обеих экстремальных функций совпадают, поэтому достаточно провести вычисления только для точки x_1 . Используя леммы 6.1, 6.4 и формулы (3.9), (3.11), (6.5), мы на основании соотношения (2.1) получаем формулу (1.11). Утверждение (ii) теоремы 1.1, а вместе с ним и сама теорема 1.1 доказаны.

Доказательство формулы (1.14) проводится на основе теоремы 2.1 по той же схеме, что и доказательство формулы (1.11). При этом существенно используются утверждения, полученные в § 6; последовательность рассуждений здесь такая же, как и в § 5.

§ 7. Метод Лапласа для времени пребывания.

Доказательство теорем 1.3, 1.4

7.1. Связь задач (1.2) и (1.3) с теорией больших уклонений для времени пребывания. Доказательство утверждений типа теоремы 1.2 основано на использовании содержательной и эффективной теории больших уклонений, построенной для функционала *времени пребывания* однородных марковских процессов (см. [15], [16], [18, § 5.1], [23]). Дадим соответствующие определения и результаты применительно к нашему случаю винеровского процесса, траектории которого, как известно, непрерывны п. н.

Пусть $C[0, \infty)$ – множество непрерывных функций, определенных на $[0, \infty)$ со значениями в $\mathbb{R}$. Для любых $t > 0$, $z \in C[0, \infty)$ и борелевского B из $\mathbb{R}$ обозначим через $L_t(z, B) = \frac{1}{t} \int_0^t I_B(z(s)) ds$ часть времени из $[0, t]$, которую фиксированная траектория $z = z(\cdot)$ проводит в множестве B ; здесь $I_B(\cdot)$ – индикатор множества B . Функционал $L_t(z, B)$ кратко называют (*нормированным*) *временем пребывания*. Как функция от B этот функционал представляет собой вероятностную меру на $\mathbb{R}$. Имеет место следующее важное свойство (см. [8, гл. 3, § 4], [10, гл. 1, формула (4.1)], [12, гл. 6]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. Пусть действительная функция g измерима по Борелю и интегрируема на любом компактном множестве из $\mathbb{R}$. Тогда для каждого $T > 0$ и всех $\omega \in \Omega$ выполнено равенство

$$\frac{1}{T} \int_0^T g(w(s)) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) L_T(w, dx). \quad (7.1)$$

Заметим, что в равенстве (7.1) слева стоит *нелинейный* функционал от процесса w , в то время как справа присутствует *линейный* функционал от времени пребывания этого процесса. Отмеченное свойство линейности будет использовано ниже.

Приведем еще один нужный нам результат. Далее, до конца параграфа, мы полагаем, что $w(0) = 0$.

ЛЕММА 7.1. Пусть $p > 0$. Тогда для любого фиксированного $T > 0$ выполнены равенства

$$T^{(p+2)/2} \int_0^1 |w(t)|^p dt = T \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^p L_T(w, dx) \quad \text{п. н.}, \quad (7.2)$$

$$T^{(p+2)/2} \int_0^1 |w_0(t)|^p dt = \left\{ T \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^p L_T(w, dx) \mid w(T) = 0 \right\} \quad \text{п. н.} \quad (7.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на свойстве автомодельности винеровского процесса, выходящего из нуля (см., например, [9, § 2.1]), и формуле (7.1) для $g(x) = |x|^p$.

7.2. Точные асимптотики типа Лапласа. В настоящем параграфе мы будем обозначать через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скалярное произведение в $L^2_{\mathbb{R}}$,

$$\langle h, v \rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)v(x) dx, \quad h, v \in L^2_{\mathbb{R}}.$$

Как известно, переходная плотность винеровского процесса относительно меры Лебега имеет вид

$$p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{2t} \right\}, \quad t \in [0, \infty), \quad x, y \in \mathbb{R} \quad (7.4)$$

(см., например, [8], [9], [11], [12]). Несложно подсчитать, что

$$p(T, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}(1 + o(1)) \quad \text{при} \quad T \rightarrow \infty \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (7.5)$$

Отсюда видно, что переходная плотность – симметричная функция по переменным x, y , т.е. $p(t, x, y) = p(t, y, x)$; напомним, что это общее свойство одномерных диффузий (см. [11, с. 29]). Таким образом, винеровский процесс принадлежит классу так называемых *m -симметричных марковских процессов* [16], [55, с. 311], [56], [57], т.е. для него выполнено определяющее соотношение $\langle P_t g, h \rangle = \langle g, P_t h \rangle$, $g, h \in C_0(\mathbb{R})$; здесь $P_t h(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} p(t, x, y)h(y) dy$ – полугрупповой оператор и $C_0(\mathbb{R})$ – пространство непрерывных действительных функций на $\mathbb{R}$ с компактным носителем. Для m -симметричных марковских процессов развита плодотворная теория больших уклонений (см. [16], [18, § 5.1], [55]).

Как известно, производящий оператор $\mathcal{A}: \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \rightarrow L^2_{\mathbb{R}}$ винеровского процесса является симметричным и отрицательным. Следуя [56], определим билинейную *форму Дирихле*:

$$\mathcal{E}(h, v) := \langle \sqrt{-\mathcal{A}}h, \sqrt{-\mathcal{A}}v \rangle, \quad h, v \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \equiv \text{Dom}(\sqrt{-\mathcal{A}}),$$

где $\sqrt{-\mathcal{A}}$ – квадратный корень из симметричного положительного оператора $-\mathcal{A}$.

Имеет место равенство (см. [56, § 1.3])

$$\mathcal{E}(h, v) = -\langle \mathcal{A}h, v \rangle, \quad h \in \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}, \quad v \in \mathcal{D}(\mathcal{E}). \quad (7.6)$$

Приведем некоторые результаты о больших уклонениях из работы [16] для нашего случая винеровского процесса.

Обозначим через $\mathcal{M}$ метрическое пространство вероятностных мер на $\mathbb{R}$, снабженное метрикой Прохорова ρ и борелевской σ -алгеброй. Полное метрическое пространство $(\mathcal{M}, \rho)$ не обладает линейной структурой. Учитывая, что производные по Фреше определяются, как правило, для линейных нормированных пространств (см. [46, § 2.2]), мы, следуя работе [16, с. 534], введем еще одно пространство мер.

Пусть $C_b(\mathbb{R})$ – банахово пространство ограниченных непрерывных действительных функций на $\mathbb{R}$ с нормой супремума $\|h\|_{C_b(\mathbb{R})} := \sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)|$. Выберем последовательность элементов $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty \subset C_b(\mathbb{R})$ и последовательность чисел $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset (0, \infty)$ так, чтобы выполнялись следующие три условия:

- 1) $\phi_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$, и $\|\phi_n\|_{C_b(\mathbb{R})} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;
- 2) $\{\|\phi_n\|_{L^2_{\mathbb{R}}}^{-1} \phi_n\}_{n=1}^\infty$ – полный ортонормированный базис в $L^2_{\mathbb{R}}$;
- 3) $\sum_{n=1}^\infty a_n \|\phi_n\|_{L^2_{\mathbb{R}}}^{-2} < \infty$.

Обозначим через $\mathcal{M}_A$ линейное нормированное пространство знакопеременных мер μ на $\mathbb{R}$ с конечной полной вариацией и нормой

$$\|\mu\|_A := \left[\sum_{n=1}^\infty a_n \|\phi_n\|_{L^2_{\mathbb{R}}}^{-2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n d\mu \right)^2 \right]^{1/2}$$

(см. [16, с. 534]). Положим $\mathcal{H} := \{v \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) : \langle v, v \rangle = 1\}$. Имеет место следующий асимптотический результат для функционала времени пребывания $L_T(w, dx)$ винеровского процесса.

ТЕОРЕМА 7.1 (точные асимптотики типа Лапласа для линейного функционала [16]). *Пусть для ограниченного линейного функционала $\Psi : \mathcal{M}_A \rightarrow \mathbb{R}$ экстремальная задача $\Psi(v^2 dx) + \mathcal{E}(v, v) \rightarrow \inf$, $v \in \mathcal{H}$, имеет единственное решение $v_0 > 0$. Тогда для $a \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ при $T \rightarrow \infty$ выполнены соотношения*

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_a \exp\{-T\Psi(L_T(w, \cdot))\} \\ &= \exp\{-T[\Psi(v_0^2 dx) + \mathcal{E}(v_0, v_0)]\} v_0(a) \int_{-\infty}^{+\infty} v_0(x) dx (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{a,c} \exp\{-T\Psi(L_T(w, \cdot))\} \\ &= \exp\{-T[\Psi(v_0^2 dx) + \mathcal{E}(v_0, v_0)]\} v_0(a) v_0(c) \sqrt{2\pi T} (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (7.8)$$

Точные асимптотики интегралов из формул (7.7), (7.8) фактически вычислены в работе [16, теоремы 2.19, 2.20, п. (1)]. Отметим, что в [16] рассмотрен случай m -симметричных марковских процессов, для которых переходные вероятности имеют плотность относительно некоторой *вероятностной* референтной меры на $\mathbb{R}$ (так называемой меры скорости). Внимательный анализ доказательства результатов из [16] показывает, что эти результаты справедливы и в случае винеровского процесса, для которого мерой скорости является мера Лебега. Формула (7.8) получается на основе утверждения, аналогичного теореме 2.19 из [16], с учетом того, что переходная плотность (7.4) винеровского процесса удовлетворяет соотношению (7.5).

Введем функционалы, посредством которых можно легко записать интегралы из формул (1.21) и (1.22):

$$F_0(\nu) := \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \nu(dx), \quad \nu \in \mathcal{M}_A, \quad U(v) := \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) v^2(x) dx, \quad v \in L^2_{\mathbb{R}}, \quad (7.9)$$

при этом, как легко видеть, $F_0(\nu) = U(v)$, если $\nu(dx) = v^2(x) dx \in \mathcal{M}$.

7.3. Решение экстремальной задачи. Функционал F_0 является линейным, вообще говоря, неограниченным и заданным на $(\mathcal{M}_A, \|\cdot\|_A)$, при этом F_0 не является ограниченным уже на множестве $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_A$. Тем не менее, пара

объектов – функционал F_0 и случайная вероятностная мера $L_T(w, \cdot)$ – обладают рядом хороших свойств, вследствие чего для них справедливо утверждение теоремы 7.1. В самом деле, используя п. н. непрерывность траекторий винеровского процесса и формулы (7.1), (7.9), получаем соотношение

$$F_0(L_T(w, \cdot)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) L_T(w, dx) = \frac{1}{T} \int_0^T g(w(t)) dt < \infty \quad \text{п. н.}$$

Учитывая это соотношение, несложно показать, что к линейному функционалу $\Psi(\nu) = F_0(\nu)$ применима теорема 7.1 при условии единственности решения указанной в ней экстремальной задачи.

Нам понадобится следующее утверждение.

ЛЕММА 7.2. *Оператор Шрёдингера $\mathcal{B}$, определенный в формуле (1.19), является самосопряженным, положительным и имеет дискретный простой спектр. Следовательно, уравнение $\mathcal{B}u = \kappa u$ обладает счетным числом решений (y_n, κ_n) , $n = 0, 1, 2, \dots$, где $0 < \kappa_0 < \dots < \kappa_n < \dots$ – собственные значения, $\{y_n\}$ – соответствующие им нормированные собственные функции, $\|y_n\|_{\mathbb{R}} = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положительность оператора $\mathcal{B}$ доказывается при помощи интегрирования по частям соответствующей квадратичной формы. Утверждения о самосопряженности и спектре оператора $\mathcal{B}$ вытекают из общих известных результатов (см., например, [33, с. 387, 398], [48, с. 240, 431]) с учетом доказанной положительности оператора $\mathcal{B}$. Лемма доказана.

Покажем, что для линейного функционала $\Psi(\nu) \equiv F_0(\nu)$ выполнено условие единственности из теоремы 7.1.

ЛЕММА 7.3. *Экстремальная задача для неотрицательного квадратичного функционала*

$$U(y) + \mathcal{E}(y, y) \rightarrow \inf, \quad y \in \mathcal{H}, \quad y > 0, \quad (7.10)$$

имеет единственное решение – функцию $y_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$, которая является единственным решением граничной задачи (1.20). При этом выполнены равенства

$$\begin{aligned} \inf [U(y) + \mathcal{E}(y, y) : y \in \mathcal{H}, y > 0] &= \inf [U(y) - \langle \mathcal{A}y, y \rangle : y \in \mathcal{H}, y > 0] \\ &= U(y_0) - \langle \mathcal{A}y_0, y_0 \rangle = \kappa_0. \end{aligned} \quad (7.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно первой теореме Вейерштрасса (см. [45, с. 114]) минимум в задаче (7.10) достигается. Рассуждая так же, как в работах [16, с. 543, предложение 2.1], [17, ч. I, лемма 3.1], можно показать, что точки, доставляющие минимум в задаче (7.10), принадлежат области определения $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ производящего оператора $\mathcal{A}$. Поэтому в силу формулы (7.6) задача (7.10) эквивалентна следующей задаче:

$$U(y) - \langle \mathcal{A}y, y \rangle \rightarrow \inf, \quad y \in \mathcal{D}, \quad \langle y, y \rangle = 1, \quad y > 0. \quad (7.12)$$

Применяя метод множителей Лагранжа [46, с. 252], найдем все локальные экстремумы задачи (7.12), затем выделим из них тот, который доставляет глобальный минимум в данной задаче. Функция Лагранжа задается формулой

$$\mathcal{L}(y) = \lambda_1 [U(y) - \langle \mathcal{A}y, y \rangle] + \lambda_2 [\langle y, y \rangle - 1], \quad y \in \mathcal{D}, \quad (7.13)$$

где $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$, — множители Лагранжа. Дифференцируя в (7.13) квадратичные функционалы, заключаем, что для того, чтобы точка y доставляла минимум в задаче (7.12), необходимо выполнение условия стационарности

$$\mathcal{L}'(y) \equiv 2\lambda_1[g(x)y - \mathcal{A}y] + 2\lambda_2 y = 0, \quad y \in \mathcal{D}, \quad (7.14)$$

и условия дополняющей нежесткости $\lambda_2[\langle y, y \rangle - 1] = 0$. Легко проверить, что в нашей задаче $\lambda_1 > 0$; обозначим $\kappa = -\lambda_2/\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Исследуя соотношение (7.14), несложно убедиться в том, что для функции y , доставляющей локальный экстремум в задаче (7.12), найдется число $\kappa = \kappa(y)$ такое, что пара (y, κ) будет удовлетворять следующей граничной задаче:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}y''(x) + g(x)y(x) &= \kappa y(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y(-\infty) = y(+\infty) = 0, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} y^2(x) dx &= 1. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Согласно определению (1.19) и лемме 7.2 задача (7.15) имеет счетное число решений (y_n, κ_n) , $n = 0, 1, 2, \dots$. Следовательно, с учетом формул (1.18), (1.19) и (7.9) получаем $U(y_n) - \langle \mathcal{A}y_n, y_n \rangle = \langle \mathcal{B}y_n, y_n \rangle = \kappa_n$. Таким образом, минимум в экстремальной задаче (7.12) достигается в единственной точке y_0 , причем $\inf[U(y) - \langle \mathcal{A}y, y \rangle : y \in \mathcal{H}, y > 0] = \langle \mathcal{B}y_0, y_0 \rangle = \kappa_0 > 0$. Отсюда, учитывая эквивалентность задач (7.10) и (7.12), получаем оба утверждения леммы. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3. Учитывая лемму 7.3, применим теорему 7.1 к интегралам, стоящим слева в формулах (1.21) и (1.22), положив $\Psi(\nu) = F_0(\nu)$, $\nu_0 = y_0$. Тогда, используя формулы (7.1), (7.7)–(7.9), (7.11), убеждаемся, что при $T \rightarrow \infty$ справедливы соотношения (1.21) и (1.22). Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4. Положим $g(x) = |x|^p$, $p > 0$, $a = c = 0$ в теореме 1.3. Тогда, используя формулы (7.2), (7.3), (1.21) и (1.22), убеждаемся, что при $T \rightarrow \infty$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp \left\{ -T^{(p+2)/2} \int_0^1 |w(t)|^p dt \right\} &= \mathbb{E} \exp \left\{ -T \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^p L_T(w, dx) \right\} \\ &= \exp \{ -T\tilde{\kappa}_0 \} \tilde{y}_0(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{y}_0(x) dx (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (7.16)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp \left\{ -T^{(p+2)/2} \int_0^1 |w_0(t)|^p dt \right\} &= \mathbb{E} \left[\exp \left\{ -T \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^p L_T(w, dx) \right\} \middle| w(T) = 0 \right] \\ &= \exp \{ -T\tilde{\kappa}_0 \} \sqrt{2\pi T} \tilde{y}_0^2(0) (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (7.17)$$

Положив $T = u^{2/(2+p)}$ в формулах (7.16), (7.17), получим соответственно соотношения (1.23), (1.24), поскольку при указанной замене $u = T^{(p+2)/2} \rightarrow \infty$ при $T \rightarrow \infty$. Теорема доказана.

Список литературы

1. М. Кас, "On the average of a certain Wiener functional and a related limit theorem in calculus of probability", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **59**:3 (1946), 401–414.
2. М. Кас, "On distributions of certain Wiener functionals", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **65**:1 (1949), 1–13.
3. М. Кац, "О некоторых связях между теорией вероятностей, дифференциальными и интегральными уравнениями", *Математика. Сб. пер.*, **1**:2 (1957), 95–124; пер. с англ.: М. Кас, "On some connections between probability theory and differential and integral equations", *Proceedings of the second Berkeley symposium on mathematical statistics and probability*, Univ. of California Press, Berkeley, 1951, 189–251.
4. Р. Фейнман, "Пространственно-временной подход к нерелятивистской квантовой механике", *Вопросы причинности в квантовой механике*, ИЛ, М., 1955, 167–207; пер. с англ.: R. P. Feynman, "Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics", *Rev. Modern Phys.*, **20** (1948), 367–387.
5. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*. Т. 1. *Функциональный анализ*, Мир, М., 1977; Т. 2. *Гармонический анализ. Самосопряженность*, 1978; пер. с англ.: M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis*, Academic Press, New York–London, 1972; II. *Fourier analysis, self-adjointness*, 1975.
6. И. М. Ковальчик, "Интеграл Винера", *УМН*, **18**:1 (1963), 97–134; англ. пер.: I. M. Koval'chik, "The Wiener integral", *Russian Math. Surveys*, **18**:1 (1963), 97–134.
7. B. Simon, *Functional integration and quantum physics*, Pure Appl. Math., **86**, Academic Press, New York–London, 1979.
8. Н. Икэда, С. Ватанабэ, *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы*, Наука, М., 1986; пер. с англ.: N. Ikeda, Sh. Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion processes*, North-Holland Math. Library, **24**, North-Holland, Amsterdam–Oxford–New York, 1981.
9. Т. Хидэ, *Броуновское движение*, Наука, М., 1987; пер. с англ.: T. Hida, *Brownian motion*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1980.
10. А. Н. Бородин, И. А. Ибрагимов, *Предельные теоремы для функционалов от случайных блужданий*, Тр. МИАН, **195**, Наука, М., 1994; англ. пер.: A. N. Borodin, I. A. Ibragimov, *Limit theorems for functionals of random walks*, Proc. Steklov Inst. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
11. А. Н. Бородин, П. Салминен, *Справочник по броуновскому движению*, Лань, СПб., 2000.
12. D. Revuz, M. Yor, *Continuous martingales and Brownian motion*, Grundlehren Math. Wiss., **293**, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
13. М. Кац, *Несколько вероятностных задач физики и математики*, Наука, М., 1967.
14. А. Н. Колмогоров, "Об аналитических методах в теории вероятностей", *УМН*, 1938, № 5, 5–41; A. Kolmogoroff, "Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung", *Math. Ann.*, **104**:1 (1931), 415–458.
15. M. D. Donsker, S. R. S. Varadhan, "Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time. III", *Comm. Pure Appl. Math.*, **29**:4 (1976), 389–461.
16. Sh. Kusuoka, Y. Tamura, "Precise estimate for large deviation of Donsker–Varadhan type", *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **38**:3 (1991), 533–565.
17. R. S. Ellis, J. S. Rosen, "Asymptotic analysis of Gaussian integrals. I. Isolated minimum points", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **273**:2 (1982), 447–481; "II: Manifold of minimum points", *Comm. Math. Phys.*, **82**:2 (1981), 153–181.
18. В. И. Питербарг, В. Р. Фаталов, "Метод Лапласа для вероятностных мер в банаховых пространствах", *УМН*, **50**:6 (1995), 57–150; англ. пер.: V. I. Piterbarg,

- V.R. Fatalov, "The Laplace method for probability measures in Banach spaces", *Russian Math. Surveys*, **50**:6 (1995), 1151–1239.
19. А. Д. Вентцель, *Предельные теоремы о больших отклонениях для марковских случайных процессов*, Наука, М., 1986.
 20. М. А. Лифшиц, *Гауссовские случайные функции*, ТВИМС, Киев, 1995; англ. пер.: М. А. Lifshits, *Gaussian random functions*, Math. Appl., **322**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995.
 21. В. Р. Фаталов, "Большие отклонения гауссовских мер в пространствах l^p и L^p , $p \geq 2$ ", *Теория вероятн. и ее примен.*, **41**:3 (1996), 682–689; "Исправления к статье", **51**:3 (2006), 634–636; англ. пер.: V.R. Fatalov, "Large deviations of Gaussian measures in the spaces l^p and L^p , $p \geq 2$ ", *Theory Probab. Appl.*, **41**:3 (1996), 548–555; "Letter to the editors", **51**:3 (2007), 561–563.
 22. В. Р. Фаталов, "Асимптотики больших отклонений гауссовских процессов типа винеровского для L^p -функционалов, $p > 0$, и гипергеометрическая функция", *Матем. сб.*, **194**:3 (2003), 61–82; англ. пер.: V.R. Fatalov, "Asymptotics of large deviations of Gaussian processes of Wiener type for L^p -functionals, $p > 0$, and the hypergeometric function", *Sb. Math.*, **194**:3 (2003), 369–390.
 23. В. Р. Фаталов, "Метод Лапласа для малых отклонений гауссовских процессов типа винеровского", *Матем. сб.*, **196**:4 (2005), 135–160; англ. пер.: V.R. Fatalov, "The Laplace method for small deviations of Gaussian processes of Wiener type", *Sb. Math.*, **196**:4 (2005), 595–620.
 24. В. Р. Фаталов, "Константы в асимптотиках вероятностей малых отклонений для гауссовских процессов и полей", *УМН*, **58**:4 (2003), 89–134; англ. пер.: V.R. Fatalov, "Constants in the asymptotics of small deviation probabilities for Gaussian processes and fields", *Russian Math. Surveys*, **58**:4 (2003), 725–772.
 25. W. V. Li, "Small ball probabilities for Gaussian Markov processes under the L^p -norm", *Stochastic Process. Appl.*, **92**:1 (2001), 87–102.
 26. Х.-С. Го, *Гауссовские меры в банаховых пространствах*, Мир, М., 1979; пер. с англ.: Н. Н. Куо, *Gaussian measures in Banach spaces*, Lecture Notes in Math., **463**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1975.
 27. Н. Н. Вахания, В. И. Тариеладзе, С. А. Чобанян, *Вероятностные распределения в банаховых пространствах*, Наука, М., 1985; англ. пер.: N.N. Vakhania, V.I. Tarieladze, S.A. Chobanyan, *Probability distributions on Banach spaces*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **14**, Reidel Publ., Dordrecht, 1987.
 28. В. И. Богачёв, *Гауссовские меры*, Наука, М., 1997; англ. пер.: V.I. Bogachev, *Gaussian measures*, Math. Surveys Monogr., **62**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
 29. S.O. Rice, "The integral of the absolute value of the pinned Wiener process – calculation of its probability density by numerical integration", *Ann. Probab.*, **10**:1 (1982), 240–243.
 30. L. Tolmatz, "Asymptotics of the distribution of the integral of the absolute value of the Brownian bridge for large arguments", *Ann. Probab.*, **28**:1 (2000), 132–139.
 31. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Теория случайных процессов*, т. 1, Наука, М., 1971; англ. пер.: I.I. Gihman, A.V. Skorohod, *The theory of stochastic processes*. I, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1974.
 32. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Элементарные функции*, Наука, М., 1981; англ. пер.: A.P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O.I. Marichev, *Integrals and series*. Vol. 1. *Elementary functions*, Gordon & Breach, New York, 1986.
 33. М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, 2-е изд., Наука, М., 1969; нем. пер. 1-го изд.: М. А. Neumark, *Lineare Differentialoperatoren*, Akademie-Verlag, Berlin, 1960.

34. М. Абрамовиц, М. Стиган, *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, Наука, М., 1979; пер. с англ.: М. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, U.S. Government Printing Office, Washington, 1964.
35. L. Takács, "On the distribution of the integral of the absolute value of the Brownian motion", *Ann. Appl. Probab.*, **3**:1 (1993), 186–197.
36. Н. В. Смирнов, "О распределении ω^2 -критерия Мизеса", *Матем. сб.*, **2(44)**:5 (1937), 973–993.
37. В. Р. Фаталов, "Большие отклонения L^p -нормы винеровского процесса со сносом", *Матем. заметки*, **65**:3 (1999), 429–436; англ. пер.: V. R. Fatalov, "Large deviations of the L^p -norm of a Wiener process with drift", *Math. Notes*, **65**:3 (1999), 358–364.
38. В. Р. Фаталов, "Точные асимптотики больших отклонений стационарных процессов Орнштейна–Уленбека для L^p -функционалов, $p > 0$ ", *Пробл. передачи информ.*, **42**:1 (2006), 52–71; англ. пер.: V. R. Fatalov, "Exact asymptotics of large deviations of stationary Ornstein–Uhlenbeck processes for L^p -functionals, $p > 0$ ", *Probl. Inf. Transm.*, **42**:1 (2006), 46–63.
39. В. Р. Фаталов, "Времена пребывания и точные асимптотики распределений L^p -функционалов от процессов Орнштейна–Уленбека, $p > 0$ ", *Теория вероятн. и ее примен.*, **53**:1 (2008), 72–99; англ. пер.: V. R. Fatalov, "Occupation time and exact asymptotics of distributions of L^p -functionals of the Ornstein–Uhlenbeck processes, $p > 0$ ", *Probl. Inf. Transm.*, **53**:1 (2009), 13–36.
40. В. Р. Фаталов, "Точная асимптотика малых отклонений для нестационарного процесса Орнштейна–Уленбека в L^p -норме, $p \geq 2$ ", *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Матем., мех.*, 2007, № 4, 3–8; англ. пер.: V. R. Fatalov, "An exact asymptotics for small deviations of a nonstationary Ornstein–Uhlenbeck process in the L^p -norm, $p \geq 2$ ", *Moscow Univ. Math. Bull.*, **62**:4 (2007), 125–130.
41. В. Р. Фаталов, "Времена пребывания и точные асимптотики малых отклонений бесселевских процессов для L^p -норм, $p > 0$ ", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71**:4 (2007), 69–102; англ. пер.: V. R. Fatalov, "Occupation times and exact asymptotics of small deviations of Bessel processes for L^p -norms with $p > 0$ ", *Izv. Math.*, **71**:4 (2007), 721–752.
42. В. Р. Фаталов, "Точные асимптотики распределений интегральных функционалов от геометрического броуновского движения и иные родственные формулы", *Пробл. передачи информ.*, **43**:3 (2007), 75–96; англ. пер.: V. R. Fatalov, "Exact asymptotics of distributions of integral functionals of the geometric Brownian motion and other related formulas", *Probl. Inf. Transm.*, **43**:3 (2007), 233–254.
43. В. Р. Фаталов, "Интегральные функционалы для экспоненты от винеровского процесса и броуновского моста: точные асимптотики и функции Лежандра", *Матем. заметки* (в печати).
44. S. Albeverio, V. Fatalov, V. Piterbarg, "Asymptotic behavior of the sample mean of a function of the Wiener process and the MacDonald function", *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, **16** (2009), 55–93.
45. М. М. Вайнберг, *Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений*, Наука, М., 1972; англ. пер.: M. M. Vainberg, *Variational method and method of monotone operators in the theory of nonlinear equations*, Halsted Press, New York–Toronto, 1973.
46. В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, *Оптимальное управление*, Наука, М., 1979; англ. пер.: V. M. Alekseev, V. M. Tikhomirov, S. V. Fomin, *Optimal control*, Contemp. Soviet Math., Consultants Bureau, New York, 1987.
47. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965; англ. пер.: I. C. Gohberg, M. G. Kreĭn, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, Transl. Math. Monogr., **18**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969.

48. С. Г. Крейн (ред.), *Функциональный анализ*, 2-е изд., Наука, М., 1972; англ. пер. 1-го изд.: G. F. Votruba, L. F. Boron (eds.), *Functional analysis*, Wolters-Noordhoff Publ., Groningen, 1972.
49. А. Пич, *Операторные идеалы*, Мир, М., 1982; пер. с англ.: A. Pietsch, *Operator ideals*, Math. Monogr., **16**, VEB, Berlin, 1978.
50. R. Bonic, J. Frampton, “Smooth functions on Banach manifolds”, *J. Math. Mech.*, **15**:5 (1966), 877–898.
51. М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский, *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций*, Наука, М., 1966; англ. пер.: M. A. Krasnosel'skij, P. P. Zabrejko, E. I. Pustynnik, P. E. Sobolevskij, *Integral operators in spaces of summable functions*, Noordhoff, Leyden, 1976.
52. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1977; англ. пер.: L. V. Kantorovich, G. P. Akilov, *Functional analysis*, Pergamon Press, Oxford, 1982.
53. В. А. Садовничий, *Теория операторов*, 3-е изд., Дрофа, М., 2001; англ. пер. 2-го изд.: V. A. Sadovnichii, *Theory of operators*, Contemp. Soviet Math., Consultants Bureau, New York, 1991.
54. В. Р. Фаталов, “Точные асимптотики типа Лапласа для умеренных отклонений распределений сумм независимых банаховозначных случайных элементов”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **48**:4 (2003), 720–744; “Исправления к статье”, **51**:3 (2006), 634–636; англ. пер.: V. R. Fatalov, “Precise Laplace-type asymptotics for moderate deviations of the distributions of sums of independent Banach-valued random elements”, *Theory Probab. Appl.*, **48**:4 (2004), 642–663; “Letter to the editors”, **51**:3 (2007), 561–563.
55. M. Fukushima, M. Takeda, “A transformation of a symmetric Markov process and the Donsker–Varadhan theory”, *Osaka J. Math.*, **21**:2 (1984), 311–326.
56. M. Fukushima, *Dirichlet forms and Markov processes*, North-Holland Math. Library, **23**, North-Holland, Amsterdam–Oxford–New York, 1980.
57. M. Fukushima, Y. Oshima, M. Takeda, *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, de Gruyter, **19**, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

Поступило в редакцию
28.12.2005
19.10.2007