Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Г. Плотников, О кратных рядах Уолша, сходящихся по кубам, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2007, том 71, выпуск 1, 61–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/im739>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 15:12:22

УДК 517.518.3

М. Г. Плотников

О кратных рядах Уолша, сходящихся по кубам

Рассмотрены функции Уолша на двоичной группе G . Изучаются множества единственности для N -кратных рядов Уолша при сходимости по кубам (иначе, $U_{N,\text{cube}}$ -множества). Доказано, что любое конечное множество является $U_{N,\text{cube}}$ -множеством. Построены примеры счетных $U_{N,\text{cube}}$ -множеств и непустых совершенных $U_{N,\text{cube}}$ -множеств. Построен пример $U_{N,\text{cube}}$ -множества, имеющего максимально возможную размерность Хаусдорфа.

Библиография: 15 наименований.

Работа посвящена изучению множеств единственности для кратных рядов Уолша при сходимости по кубам. Напомним, что множество A называется *множеством единственности* (или *U -множеством*) для рядов по некоторой системе функций, если всякий сходящийся к нулю вне множества A ряд по этой системе является тождественно нулевым. Если множество не является U -множеством для подобных рядов, то оно называется *множеством множественности* (или *M -множеством*) для этих рядов.

Множества единственности для N -кратных рядов Уолша

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} c_{n_1, \dots, n_N} \omega_{n_1, \dots, n_N}(\mathbf{z}) \quad (1)$$

исследовались в работах Х. О. Мовсисяна, В. А. Скворцова, С. Ф. Лукомского, Н. Н. Холщевниковой, Ш. Т. Тетунашвили (см. [1]–[7]) и др. При рассмотрении кратных рядов важно определить, что мы понимаем под их сходимостью. Из результатов работ [1] и [2] следует, что счетное множество является U -множеством для рядов (1) при сходимости по прямоугольникам. Широкий класс несчетных U -множеств для рядов (1) при сходимости по прямоугольникам был построен в работе [3] (для рядов по некоторым другим системам функций результаты для той же сходимости были получены в работе [4]).

Как уже отмечалось, в нашей работе функции Уолша рассматриваются на двоичной группе. Мы исследуем вопросы единственности для сходимости по кубам, при которой кубические частичные суммы

$$S_M(\mathbf{z}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n_1=0}^{M-1} \cdots \sum_{n_N=0}^{M-1} c_{n_1, \dots, n_N} \omega_{n_1, \dots, n_N}(\mathbf{z})$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 05-01-00206) и программ Президента РФ “Ведущие научные школы” (проект НШ-1657.2003.1) и “Молодые ученые” (проект МК-1214.2005.1).

ряда (1) сходятся в точке $\mathbf{z}$ к сумме $S(\mathbf{z})$, если $M \rightarrow \infty$. Исследование вопросов о единственности (и многих других вопросов) для такой сходимости сложнее, чем для сходимости по прямоугольникам. Это связано с тем, что из сходимости (числового) ряда по прямоугольникам следует стремление к нулю коэффициентов этого ряда, а из сходимости ряда по кубам – не следует, что значительно усложняет исследование рядов.

Ранее было известно лишь (см. [5, теорема 2.3.1]), что пустое множество есть U -множество для рядов (1) при сходимости по кубам. Мы докажем, что любое конечное множество является U -множеством для рядов (1) при такой сходимости. Далее, мы покажем, что любое счетное множество, имеющее всего одну предельную точку, также является U -множеством для рядов (1) при такой сходимости. Кроме того, будет установлено наличие непустых совершенных U -множеств для рядов (1) при сходимости по кубам. Также доказано, что существуют U -множества для рядов (1) при сходимости по кубам, хаусдорфова размерность которых совпадает с размерностью всего пространства. Отметим, что класс U -множеств для рядов (1) при сходимости по кубам не совпадает с аналогичным классом при сходимости по прямоугольникам (см. [6]).

Мы используем следующие определения (см., например, [8]–[11]). Двоичная группа G является множеством бесконечных последовательностей $t = \{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ ($t_k = 0, 1$). При этом отображение $\varphi(t)$, задаваемое формулой

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t_k 2^{-k-1}, \quad (2)$$

взаимно однозначно переводит G в так называемый модифицированный отрезок $J^* = [0, 1]^*$, который отличается от обычного отрезка $[0, 1]$ тем, что любая двоично-рациональная точка $t = p/2^n \in [0, 1]$, $p, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, считается дважды: левая точка $t - 0$, соответствующая последовательности $\{t_k^1\}$ такой, что $t_k^1 = 1$ при $k \geq M(t)$, и правая точка $t + 0$, соответствующая последовательности $\{t_k^2\}$ такой, что $t_k^2 = 0$ при $k \geq M(t)$. В силу взаимной однозначности соответствия $\varphi: G \rightarrow J^*$ мы не будем различать двоичную группу G и модифицированный отрезок J^* . Кроме отображения φ мы рассмотрим отображение $\tilde{\varphi}: G \rightarrow [0, 1]$, также задаваемое формулой (2). Положим $\tilde{\gamma}(\mathbf{t}) = (\tilde{\varphi}(t^1), \dots, \tilde{\varphi}(t^N))$ для любого $\mathbf{t} = (t^1, \dots, t^N) \in D^N$. Отображение $\tilde{\gamma}: D^N \rightarrow [0, 1]^N$ не является взаимно однозначным, но является сюръективным.

Рассмотрим функции Уолша $\omega_n(t)$ в нумерации Пэли (см. [8]–[11]). Если $n = \sum_{j=0}^{\infty} 2^j \varepsilon_j$, $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$, – двоичное представление числа n , то $\omega_n(t) = \prod_{j=0}^{\infty} [r_j(t)]^{\varepsilon_j}$, где $r_j(t) = (-1)^{t_j}$ – функция Радемахера.

Двоичный интервал на $(J^*)^N$ есть сегмент вида

$$\Delta_{\mathbf{n}}^{\mathbf{i}} = \left[\frac{i_1}{2^{n_1}} + 0, \frac{i_1 + 1}{2^{n_1}} - 0 \right] \times \dots \times \left[\frac{i_N}{2^{n_N}} + 0, \frac{i_N + 1}{2^{n_N}} - 0 \right], \quad (3)$$

где $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N)$, $n_s = 0, 1, \dots$; $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N)$, $i_s = 0, \dots, 2^{n_s} - 1$. Рангом такого двоичного интервала назовем вектор $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N)$. Топология на $(J^*)^N$ порождается всевозможными двоичными интервалами. При этом

сами двоичные интервалы будут являться одновременно открытыми и замкнутыми множествами в такой топологии. Двоичный куб есть двоичный интервал такой, что $n_1 = n_2 = \dots = n_N = n$; его рангом назовем просто число n . Двоичный куб $\Delta_{n,n,\dots,n}^i$ ранга n будем обозначать просто Δ_n^i . Будем называть 2^N попарно непересекающихся двоичных кубов ранга n *смежными*, если их объединение есть двоичный куб ранга $n - 1$.

Функция двоичного интервала $\Phi(\Delta)$ называется *аддитивной*, если

$$\Phi(\Delta') = \sum_{s=1}^p \Phi(\Delta_s)$$

для любых попарно непересекающихся двоичных интервалов Δ_s и двоичного интервала $\Delta' = \bigcup_{s=1}^p \Delta_s$.

Если $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_N) \in G^N$, то функция Уолша $\omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) \stackrel{\text{def}}{=} \omega_{n_1, \dots, n_N}(\mathbf{z})$ определяется как $\omega_{n_1}(z_1)\omega_{n_2}(z_2)\dots\omega_{n_N}(z_N)$. Если $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N)$ и $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_N)$, то сумму этих векторов и произведение вектора на число мы будем понимать в обычном смысле. Выражение $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ будет означать, что $a_i \leq b_i$ для всех $i = 1, \dots, N$. При $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_N)$ через $2^{\mathbf{k}}$ обозначим вектор $(2^{k_1}, \dots, 2^{k_N})$, через $\mathbf{1}$ – вектор $(1, \dots, 1)$, а через $\mathbf{0}$ – вектор $(0, \dots, 0)$. Под выражением $D_{\mathbf{K}}(\mathbf{z})$ будем понимать ядро Дирихле для системы (1), т. е.

$$D_{\mathbf{K}}(\mathbf{z}) = \prod_{s=1}^N D_{K_s}(z_s) = \sum_{n_1=0}^{K_1-1} \dots \sum_{n_N=0}^{K_N-1} \omega_{n_1, \dots, n_N}(\mathbf{z}).$$

Пусть $t_1 = \{t_0^1, t_1^1, t_2^1, \dots\}$ и $t_2 = \{t_0^2, t_1^2, t_2^2, \dots\}$ – элементы группы G . Суммой этих элементов $t_1 \oplus t_2$ называется элемент $t = \{t_0, t_1, t_2, \dots\}$, где $t_i = t_i^1 + t_i^2 \pmod{2}$. С помощью соответствия $\varphi: G \rightarrow J^*$ операция группового сложения переносится с группы G на модифицированный отрезок J^* . Естественным образом определяется операция сложения на G^N или на $(J^*)^N$. А именно, если $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_N) \in G^N$ и $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N) \in G^N$, то сумма $\mathbf{z} \oplus \mathbf{y}$ равна $(z_1 \oplus y_1, \dots, z_N \oplus y_N)$.

Часто исследование рядов на двоичных группах удобнее вести, используя так называемое формальное интегрирование. А именно, если задан ряд (1), то можно определить функцию множества $\Psi(\Delta)$, которая находится для любого двоичного интервала Δ по формуле

$$\Psi(\Delta) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_N=0}^{\infty} \int_{\Delta} c_{\mathbf{n}} \omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) d\mathbf{z}, \quad (4)$$

где интеграл можно понимать как интеграл Лебега по нормированной мере Хаара на группе G^N . Определение функции $\Psi(\Delta)$ не зависит от того, как мы понимаем суммирование в правой части формулы (4). Действительно, если $\mathbf{k}$ – ранг двоичного интервала Δ , то по определению функций Уолша

$$\int_{\Delta} \omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = 0,$$

если $n_i > 2^{k_i} - 1$ хотя бы для одного $i = 1, \dots, N$. Таким образом, в правой части формулы (4) лишь конечное число слагаемых отлично от нуля. Кроме того, заметим, что если $n_i \leq 2^{k_i} - 1$ для всех $i = 1, \dots, N$, то функция $\omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{z})$ постоянна на двоичном интервале Δ . Поэтому, обозначив

$$S_{\mathbf{Q}}(\mathbf{z}) = \sum_{n_1=0}^{Q_1-1} \cdots \sum_{n_N=0}^{Q_N-1} c_{n_1, \dots, n_N} \omega_{n_1, \dots, n_N}(\mathbf{z}),$$

получим формулу

$$\Psi(\Delta) = |\Delta| S_{2^{\mathbf{k}}}(\mathbf{z}), \quad (5)$$

где $\mathbf{z}$ – любая точка интервала Δ . Легко проверить, что $\Psi(\Delta)$ является аддитивной (по крайней мере, конечно-аддитивной) функцией двоичного интервала. Используя мартингалльные свойства рядов Уолша, по аналогии с одномерным случаем (см. [9, теоремы 3.1.2, 3.1.10]) несложно доказать, что соответствие между рядами (1) и аддитивными функциями двоичного интервала, определяемое формулой (4), является взаимно однозначным (и даже является линейным изоморфизмом, если естественным образом наделить множество рядов (1) и множество аддитивных функций двоичного интервала структурой линейного пространства). При этом коэффициенты ряда (1) восстанавливаются по функции $\Psi(\Delta)$:

$$c_{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{j}=0}^{2^{\mathbf{k}}-1} \omega_{\mathbf{n}}\left(\frac{\mathbf{j}}{2^{\mathbf{k}}} + \mathbf{0}\right) \Psi(\Delta_{\mathbf{k}}^{\mathbf{j}}), \quad (6)$$

причем правая часть формулы (6) не зависит от выбора $\mathbf{k}$, лишь бы $\mathbf{n} \leq 2^{\mathbf{k}} - 1$.

Иногда функцию $\Psi(\Delta)$ называют *квазимерой*, порожденной рядом вида (1). С этой точки зрения формула (6) означает, что любой ряд (1) является рядом Фурье–Стилтьеса порожденной им квазимерой.

Будем называть множество $A \subset G^N$ $U_{N, \text{cube}}$ -множеством ($M_{N, \text{cube}}$ -множеством), если оно является U -множеством (M -множеством) для рядов (1) при сходимости по кубам.

Сначала докажем следующий результат, одномерный аналог которого хорошо известен (этот аналог легко следует, например, из утверждения 3.3.3 работы [9]).

ЛЕММА 1. Пусть множество A является $M_{N, \text{cube}}$ -множеством. Пусть ряд (1) реализует $M_{N, \text{cube}}$ -множество A , т. е. этот ряд тождественно нулевой и сходится по кубам к нулю вне A . Если Ψ – функция, построенная для ряда (1) по формуле (4), то $\Psi(\Delta) = 0$ для любого двоичного интервала Δ такого, что $\Delta \cap A = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть утверждение леммы неверно и найдется двоичный интервал Δ_0 такой, что $\Delta_0 \cap A = \emptyset$ и $\Psi(\Delta_0) \neq 0$. При этом будем считать, что $\Psi(\Delta_0) > 0$ (если это не так, заменим ряд $\sum_{\mathbf{n}} c_{\mathbf{n}} \omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{z})$ на ряд $\sum_{\mathbf{n}} (-c_{\mathbf{n}}) \omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{z})$). Разбив Δ_0 на конечное число двоичных кубов, получим, с учетом аддитивности, что функция Ψ принимает положительное значение на одном из них. Поэтому можно сразу считать Δ_0 двоичным кубом. Пусть $\varepsilon > 0$ настолько мало,

что $\Psi(\Delta_0) - \varepsilon|\Delta_0| > 0$. Положим $\Phi(\Delta) = \Psi(\Delta) - \varepsilon|\Delta|$. Очевидно, Φ является аддитивной функцией двоичного интервала.

Поскольку $\Phi(\Delta_0) > 0$, то, разбив куб Δ_0 на 2^N смежных кубов, получим с учетом аддитивности, что функция Φ принимает положительное значение на одном из них. Продолжая этот процесс, получим вложенную последовательность двоичных кубов $\{\Delta_n\}_{n=0}^\infty$ таких, что $\Phi(\Delta_n) > 0$ для любого n . Пусть эта последовательность стягивается к точке $\mathbf{z} \in \Delta_0$. Тогда выполняется следующая цепочка соотношений:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\Psi(\Delta_n)}{|\Delta_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi(\Delta_n)}{|\Delta_n|} + \frac{\varepsilon|\Delta_n|}{|\Delta_n|} \geq 0 + \varepsilon = \varepsilon.$$

Итак, в точке $\mathbf{z}$ для ряда (1) в силу последней выкладки и формулы (5) не выполнено равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2^n}(\mathbf{z}) = 0$. Значит, $\mathbf{z} \in A$. Это противоречит тому, что $\Delta_0 \cap A = \emptyset$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $A \subset (J^*)^N$ – некоторое множество, а $\mathbf{z}$ – изолированная точка этого множества. Пусть Φ – аддитивная функция двоичного интервала, причем $\Phi(\Delta) = 0$, если $\Delta \cap A = \emptyset$. Тогда существует число b такое, что для любого двоичного интервала Δ , удовлетворяющего условию $\Delta \cap A = \{\mathbf{z}\}$, выполняется равенство $\Phi(\Delta) = b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольный двоичный интервал Δ' , содержащий точку $\mathbf{z}$. Пусть $\Phi(\Delta') = b$. Рассмотрим также любой другой двоичный интервал Δ'' такой, что $\Delta'' \cap A = \{\mathbf{z}\}$. Требуется показать лишь то, что $\Phi(\Delta'') = b$. Действительно, пересечение двоичных интервалов Δ' и Δ'' также есть двоичный интервал, который мы обозначим через Δ_0 . При этом Δ' можно представить как объединение конечного числа непересекающихся двоичных интервалов, один из которых есть Δ_0 , т. е. $\Delta' = \Delta_0 \cup \bigcup_{s=1}^l \Delta_s$. Тогда $\Phi(\Delta') = \Phi(\Delta_0) + \sum_{s=1}^l \Phi(\Delta_s)$. Очевидно, что $\Delta_s \cap A = \emptyset$ при $s = 1, \dots, l$, значит, по условию леммы $\Phi(\Delta_s) = 0$ при таких s . Отсюда $\Phi(\Delta') = \Phi(\Delta_0)$. Аналогично доказывается, что $\Phi(\Delta'') = \Phi(\Delta_0)$, т. е. $\Phi(\Delta'') = \Phi(\Delta')$, что и требовалось. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $A = \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n\} \subset (J^*)^N$ – конечное множество, а Φ – аддитивная функция двоичного интервала, причем $\Phi(\Delta) = 0$, если $\Delta \cap A = \emptyset$. Тогда существует конечный набор чисел $\{b_1, \dots, b_n\}$ такой, что $\Phi(\Delta) = \sum_{i: \mathbf{z}_i \in \Delta} b_i$ для любого двоичного интервала Δ , имеющего непустое пересечение с множеством A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2 для каждого $i = 1, \dots, n$ найдется такое число b_i , что $\Phi(\Delta) = b_i$ для любого двоичного интервала Δ , удовлетворяющего условию $\Delta \cap A = \{\mathbf{z}_i\}$. Если Δ – произвольный двоичный интервал, то его можно разбить на конечное число непересекающихся двоичных интервалов Δ^t , $t = 1, \dots, m$, таких, что каждый из интервалов Δ^t содержит не более одной точки из множества A . Тогда

$$\Phi(\Delta) = \sum_{t=1}^m \Phi(\Delta^t) = \sum_{\Delta^t: \Delta^t \cap A \neq \emptyset} \Phi(\Delta^t) + \sum_{\Delta^t: \Delta^t \cap A = \emptyset} \Phi(\Delta^t).$$

Первая сумма в правой части формулы равна $\sum_{i: \mathbf{z}_i \in \Delta} b_i$, а вторая – нулю. Утверждение леммы доказано.

Перейдем к формулировке основных результатов настоящей работы.

ТЕОРЕМА 1. *Любое конечное множество $A \subset (J^*)^N$ является $U_{N, \text{cube}}$ -множеством.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что утверждение теоремы неверно и существует конечное множество $A = \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n\} \subset (J^*)^N$, являющееся $M_{N, \text{cube}}$ -множеством. Тогда существует ряд (1), не все коэффициенты которого нулевые, сходящийся к нулю вне множества A . Пусть $\Psi(\Delta)$ – аддитивная функция, построенная для данного ряда (1) по формуле (4). По лемме 1 имеем $\Psi(\Delta) = 0$ для любого двоичного интервала Δ такого, что $\Delta \cap A = \emptyset$. По лемме 3, примененной к функции Ψ , существует конечный набор чисел $\{b_1, \dots, b_n\}$ такой, что $\Psi(\Delta) = \sum_{i: \mathbf{z}_i \in \Delta} b_i$ для любого двоичного интервала Δ . При этом найдется такое j , что $b_j \neq 0$, иначе функция Ψ , а вместе с ней и ряд (1) были бы тождественно равны нулю. Этому значению b_j соответствует точка $\mathbf{z}_j \in A$. Покажем, что существует точка $\mathbf{y} \in (J^*)^N \setminus A$, в которой кубические частичные суммы ряда (1) не стремятся к нулю, и тем самым придем к противоречию с предположением, что множество A является $M_{N, \text{cube}}$ -множеством.

Введем одно определение. Если ненулевой элемент $t = \{t_k\}$ группы G таков, что $t_k = 0$ при $k < n_0$ и $t_{n_0} = 1$, то назовем число n_0 *порядком* этого элемента. Другими словами, элемент $t \in G$ имеет порядок n_0 , если $t \in [0 + 0, 1/2^{n_0} - 0]$, но $t \notin [0 + 0, 1/2^{n_0+1} - 0]$. Понятие порядка элемента можно перенести с группы G на модифицированный отрезок J^* .

Выберем точку $\mathbf{y} \in (J^*)^N \setminus A$ так, чтобы порядок всех координат точки $\mathbf{y} \oplus \mathbf{z}_j$ был равен некоторому натуральному числу m_0 , а порядок хотя бы одной координаты любой из точек $\mathbf{y} \oplus \mathbf{z}_k$ при $k \neq j$ был меньше m_0 . Такую точку можно выбрать, например, следующим образом. Возьмем двоичный куб Δ_0 , содержащий точку $\mathbf{z}_j$, но не содержащий точек $\mathbf{z}_k$ при $k \neq j$. Если ранг этого куба равен m_0 , а точка $\mathbf{z}_j$ имеет координаты $(z_j^1, \dots, z_j^N)$, то для всех $s = 1, \dots, N$ положим

$$y^s = z_j^s \oplus \left(\underbrace{0, 0, 0, \dots}_0, \underbrace{1, 0, 0, \dots}_{m_0} \right)$$

и рассмотрим точку $\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^N)$. При этом точка $\mathbf{y}$ будет обладать тем свойством, что порядок всех координат точки $\mathbf{y} \oplus \mathbf{z}_j$ равен m_0 . Действительно, из определения точки $\mathbf{y} \in G^N$ и из свойств группового сложения вытекает, что

$$y^s \oplus z_j^s = \left(\underbrace{0, 0, \dots}_0, \underbrace{1, 0, 0, \dots}_{m_0} \right).$$

Далее, порядок хотя бы одной координаты любой из точек $\mathbf{y} \oplus \mathbf{z}_k$ при $k \neq j$ меньше m_0 (в силу того, что точка $\mathbf{y}$ принадлежит Δ_0 , а точки $\mathbf{z}_k$ не принадлежат). Докажем, что в точке $\mathbf{y}$ ряд (1) не сходится к нулю по кубам. Для этого покажем, что подпоследовательность кубических частичных сумм $S_{2^m+2^{m_0}}(\mathbf{y})$ не стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$.

Выразим $S_{2^m+2^{m_0}}(\mathbf{y})$ через функцию $\Psi(\Delta)$. Пусть $m > m_0$. Воспользуемся формулой (6), а также свойством функций Уолша, состоящим в том, что $\omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{w}_1)\omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{w}_2) = \omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{w}_1 \oplus \mathbf{w}_2)$ (это свойство непосредственно вытекает из определения функций Уолша). Получаем, что

$$\begin{aligned}
 S_{2^m+2^{m_0}}(\mathbf{y}) &= \sum_{\mathbf{n}=0}^{(2^m+2^{m_0}-1) \cdot 1} c_{\mathbf{n}} \omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{y}) \\
 &= \sum_{\mathbf{n}=0}^{(2^m+2^{m_0}-1) \cdot 1} \sum_{\mathbf{i}=0}^{2^{(m+1) \cdot 1}-1} \omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{y}) \omega_{\mathbf{n}}\left(\frac{\mathbf{i}}{2^{m+1}} + \mathbf{0}\right) \Psi(\Delta_{m+1}^{\mathbf{i}}) \\
 &= \sum_{\mathbf{i}=0}^{2^{(m+1) \cdot 1}-1} \Psi(\Delta_{m+1}^{\mathbf{i}}) \sum_{\mathbf{n}=0}^{(2^m+2^{m_0}-1) \cdot 1} \omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{y}) \omega_{\mathbf{n}}\left(\frac{\mathbf{i}}{2^{m+1}} + \mathbf{0}\right) \\
 &= \sum_{\mathbf{i}=0}^{2^{(m+1) \cdot 1}-1} \Psi(\Delta_{m+1}^{\mathbf{i}}) D_{(2^m+2^{m_0}) \cdot 1} \left(\mathbf{y} \oplus \left(\frac{\mathbf{i}}{2^{m+1}} + \mathbf{0} \right) \right) \\
 &= \sum_{\mathbf{i}=0}^{2^{(m+1) \cdot 1}-1} \Psi(\Delta_{m+1}^{\mathbf{i}}) \prod_{s=1}^N D_{2^m+2^{m_0}} \left(y_s \oplus \left(\frac{i_s}{2^{m+1}} + 0 \right) \right).
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$S_{2^m+2^{m_0}}(\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{i}=0}^{2^{(m+1) \cdot 1}-1} \Psi(\Delta_{m+1}^{\mathbf{i}}) \prod_{s=1}^N D_{2^m+2^{m_0}} \left(y_s \oplus \left(\frac{i_s}{2^{m+1}} + 0 \right) \right). \quad (7)$$

Далее нам понадобится следующее утверждение.

ЛЕММА 4. При $m > m_0$ значение выражения $D_{2^m+2^{m_0}}(t)$ равно $\pm 2^{m_0}$, если порядок точки $t \in J^*$ равен m_0 , и нулю, если порядок точки t меньше m_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По известной формуле (см., например, [9, формула (1.4.11)]) имеем

$$D_{2^m+2^{m_0}}(t) = D_{2^m}(t) + \omega_{2^m}(t) D_{2^{m_0}}(t). \quad (8)$$

Несложно заметить, что

$$D_{2^m}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если порядок точки } t \text{ меньше } M, \\ 2^M & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (9)$$

Если порядок точки t меньше либо равен m_0 , то по условию леммы этот порядок меньше m . По формуле (9) при выполнении условий леммы первое слагаемое в правой части формулы (8) равно нулю. Выражение $D_{2^{m_0}}(t)$ в формуле (8) по формуле (9) равно нулю или 2^{m_0} , в зависимости от того, меньше или равен m_0 порядок точки t . Учитывая, что $\omega_{2^m}(t) = \pm 1$, получаем утверждение леммы.

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть вектор $\mathbf{i}_0$ таков, что точка $\mathbf{z}_j \in A$ лежит в кубе $\Delta_{m+1}^{\mathbf{i}_0}$. Рассмотрим правую часть формулы (7). Если $\mathbf{i} = \mathbf{i}_0$, то

порядок всех точек $y_s \oplus (i_s/(m+1) + 0)$ равен m_0 и по лемме 4 имеем

$$\prod_{s=1}^N D_{2^m+2^{m_0}} \left(y_s \oplus \left(\frac{i_s}{2^{m+1}} + 0 \right) \right) = \pm 2^{m_0 N}. \quad (10)$$

Пусть теперь $\mathbf{i} \neq \mathbf{i}_0$. Если при этом порядок всех координат точки $\mathbf{y} \oplus ((\mathbf{i}/2^{m+1}) + \mathbf{0})$ не меньше m_0 , то точки $\mathbf{y}$ и $(\mathbf{i}/2^{m+1}) + \mathbf{0}$ лежат в одном двоичном кубе ранга m_0 , т.е. в кубе Δ_0 . Поэтому $\Delta_{m+1}^{\mathbf{i}} \subset \Delta_0$, но $\Delta_{m+1}^{\mathbf{i}} \neq \Delta_{m+1}^{\mathbf{i}_0}$ в силу того, что $\mathbf{i} \neq \mathbf{i}_0$. Из всего сказанного выше вытекает, что двоичный куб $\Delta_{m+1}^{\mathbf{i}}$ не содержит ни одну из точек множества $A = \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n\}$. Отсюда по лемме 1 вытекает, что $\Psi(\Delta_{m+1}^{\mathbf{i}}) = 0$, т.е.

$$\Psi(\Delta_{m+1}^{\mathbf{i}}) \prod_{s=1}^N D_{2^m+2^{m_0}} \left(y_s \oplus \left(\frac{i_s}{2^{m+1}} + 0 \right) \right) = 0. \quad (11)$$

Пусть теперь $\mathbf{i} \neq \mathbf{i}_0$ и порядок хотя бы одной координаты точки $\mathbf{y} \oplus ((\mathbf{i}/2^{m+1}) + \mathbf{0})$ меньше m_0 . Тогда по лемме 4 один из сомножителей в произведении в правой части формулы (7) равен нулю. Значит, в этом случае также выполняется формула (11).

Подставляя в правую часть формулы (7) выражения (10), (11), получаем, что $S_{2^m+2^{m_0}}(\mathbf{y}) = \pm b_j \cdot 2^{m_0 N}$, откуда следует

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2^m+2^{m_0}}(\mathbf{y}) \neq 0.$$

Таким образом, последовательность кубических частичных сумм исходного ряда не стремится к нулю в точке $\mathbf{y} \notin A$. Получаем противоречие с тем, что множество A является $M_{N,\text{cube}}$ -множеством. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Если счетное множество $A \subset (J^*)^N$ имеет только одну предельную точку, то это множество является $U_{N,\text{cube}}$ -множеством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A = \{\mathbf{z}_i\}_{i=1}^\infty$ – искомое множество. Тогда все точки этого множества, кроме, может быть, одной, являются изолированными. Пусть $\mathbf{z}$ – единственная предельная точка множества A . Предположим, что утверждение теоремы неверно и множество A является $M_{N,\text{cube}}$ -множеством. Тогда существует тождественно ненулевой ряд (1), который сходится к нулю вне множества A . Пусть $\Psi(\Delta)$ – аддитивная функция, построенная для данного ряда (1) по формуле (4). По лемме 1 $\Psi(\Delta) = 0$ для любого двоичного интервала Δ такого, что $\Delta \cap A = \emptyset$. По лемме 2, примененной к функции Ψ , для каждой точки $\mathbf{z}_i \neq \mathbf{z}$ существует число b_i , обладающее тем свойством, что $\Psi(\Delta) = b_i$ для любого двоичного интервала Δ такого, что $\Delta \cap A = \{\mathbf{z}_i\}$.

Рассмотрим два случая. Если $b_j \neq 0$ хотя бы для одного j , то выберем точку $\mathbf{y} \in (J^*)^N \setminus A$ подобно тому, как это сделано в доказательстве теоремы 2, т.е. так, чтобы порядок всех координат точки $\mathbf{y} \oplus \mathbf{z}_j$ был равен некоторому натуральному числу m_0 , а порядок хотя бы одной координаты каждой из точек $\mathbf{y} \oplus \mathbf{z}_k$ при $k \neq j$ был меньше m_0 . Дословно повторяя рассуждения из доказательства теоремы 1, получим, что в точке $\mathbf{y}$ ряд (1) не сходится к нулю по кубам, а это противоречит тому, что множество A является $M_{N,\text{cube}}$ -множеством.

Если же $b_j = 0$ для всех j , то из геометрических соображений ясно, что существует такое число b , что $\Psi(\Delta) = b$, если $\mathbf{z} \in \Delta$, и $\Psi(\Delta) = 0$ в противном случае. При этом $b \neq 0$, иначе функция Ψ , а вместе с ней и ряд (1), были бы тождественно равны нулю. Теперь выберем точку $\mathbf{y} \in (J^*)^N \setminus A$ так, чтобы порядок всех координат точки $\mathbf{y} \oplus \mathbf{z}$ был равен некоторому натуральному числу m_0 . Тогда по формуле (7) при $m > m_0$ имеем

$$\begin{aligned} S_{2^m+2^{m_0}}(\mathbf{y}) &= \Psi(\Delta_{m+1}^{\mathbf{i}^0}) \prod_{s=1}^N D_{2^m+2^{m_0}}\left(y_s \oplus \left(\frac{i_s^0}{2^{m+1}} + 0\right)\right) \\ &= b \prod_{s=1}^N D_{2^m+2^{m_0}}\left(y_s \oplus \left(\frac{i_s^0}{2^{m+1}} + 0\right)\right), \end{aligned}$$

где $\Delta_{m+1}^{\mathbf{i}^0}$ – двоичный куб ранга $m+1$, содержащий точку $\mathbf{z}$. Используя лемму 4, получаем, что $S_{2^m+2^{m_0}}(\mathbf{y}) = \pm b \cdot 2^{m_0 N}$, откуда следует, что в точке $\mathbf{y}$ ряд (1) не сходится к нулю по кубам, а это противоречит тому, что множество A является $M_{N,\text{cube}}$ -множеством. Теорема доказана.

Для доказательства следующих двух теорем нам понадобится дальнейшее построение. Пусть $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ – любая последовательность целых неотрицательных чисел, удовлетворяющих условиям:

- 1) $a_0 = 0, a_1 = 1$;
- 2) $0 \leq a_{n+1} - a_n \leq 1$ для всех n , т. е. $a_{n+1} - a_n$ равно 0 или 1;
- 3) $a_n \rightarrow +\infty, a_n - n \rightarrow -\infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Если последовательность целых неотрицательных чисел $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ удовлетворяет условию 2), то условие 3) равносильно условию

- 4) $a_{n+1} - a_n = 0$ для бесконечного множества значений n и $a_{n+1} - a_n = 1$ для бесконечного множества значений n .

Очевидно, что последовательность целых неотрицательных чисел, удовлетворяющая условиям 1)–3), существует. Далее, зафиксируем любую такую последовательность и по этой последовательности построим новые последовательности целых неотрицательных чисел $\{n_k\}_{k=0}^\infty$ и $\{l_k\}_{k=1}^\infty$. А именно, пусть $n_0 = 0$, а $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ – последовательность (бесконечная, в силу первой части условия 4)) всех номеров таких, что $a_{n_k} - a_{n_k-1} = 0$, и $\{l_k\}_{k=1}^\infty$ – последовательность (бесконечная, в силу второй части условия 4)) всех номеров таких, что $a_{l_k} - a_{l_k-1} = 1$.

ТЕОРЕМА 3. *Существуют непустые совершенные (в топологии $(J^*)^N$) $U_{N,\text{cube}}$ -множества.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим любую последовательность целых неотрицательных чисел $\{a_n\}$, удовлетворяющую условиям 1)–3), а также соответствующую ей последовательность $\{n_k\}_{k=0}^\infty$. Индукцией по k построим последовательность непустых замкнутых множеств $\{B_k\}_{k=0}^\infty$, причем B_k – объединение $2^{N(n_k-k)}$ попарно непересекающихся двоичных кубов ранга n_k . Положим $B_0 = [0, 1]^N$. Далее, пусть B_k – объединение $2^{N(n_k-k)}$ попарно непересекающихся двоичных кубов ранга n_k . Рассмотрим все двоичные кубы ранга n_{k+1} .

Пусть эти кубы имеют вид $\Delta_{n_{k+1}}^i$, причем нумерация соответствует нумерации в формуле (3). Положим

$$B_{k+1} = \bigcup_{\substack{\Delta_{n_{k+1}}^i \subset B_k: \\ i_s \equiv 0 \pmod{2}, s=1, \dots, N}} \Delta_{n_{k+1}}^i.$$

Заметим, что B_{k+1} – объединение $2^{N(n_k-k)}2^{N(n_{k+1}-n_k-1)} = 2^{N(n_{k+1}-(k+1))}$ непересекающихся двоичных кубов ранга n_{k+1} . Тем самым, индукцией по k искомая последовательность $\{B_k\}$ построена.

Пусть $B = \bigcap_{k=0}^{\infty} B_k$. В силу второй части условия 4) множество B не имеет изолированных (в топологии $(J^*)^N$) точек. Кроме того, очевидно, множество B замкнуто и непусто. В итоге мы имеем совершенное множество B . Покажем, что B является $U_{N, \text{cube}}$ -множеством.

Предположим, что это не так и множество B является $M_{N, \text{cube}}$ -множеством. Тогда существует ряд (1), не все коэффициенты которого равны нулю, сходящийся к нулю вне множества A . Пусть $\Psi(\Delta)$ – аддитивная функция, построенная для данного ряда (1) по формуле (4). При этом $\Psi(\Delta') \neq 0$ для некоторого двоичного интервала Δ' , так как в противном случае функция $\Psi(\Delta)$, а вместе с ней и ряд (1) будут тождественно равны нулю. Выберем достаточно большое натуральное m_0 такое, что $a_{m_0+1} - a_{m_0} = 0$. Разобьем двоичный интервал Δ' на конечное число непересекающихся двоичных кубов ранга m_0 . В силу аддитивности функции $\Psi(\Delta)$ имеем $\Psi(\Delta'') \neq 0$ для некоторого двоичного куба $\Delta'' \subset \Delta'$ ранга m_0 .

Отметим, что в силу леммы 1 и того факта, что $\Psi(\Delta'') \neq 0$, выполняется соотношение $\Delta'' \cap B \neq \emptyset$. Пусть σ – N -мерный вектор, состоящий только из нулей и единиц, а Σ_N – множество таких векторов. Разобьем двоичный куб Δ'' на 2^N двоичных кубов $\Delta_{m_0+1}^{2i_0+\sigma}$, $\sigma \in \Sigma_N$, ранга $m_0 + 1$ (нумерация таких кубов соответствует нумерации в формуле (3)). Тогда из построения множества B следует, что

$$\Delta_{m_0+1}^{2i_0+\sigma} \cap B = \emptyset \quad \text{при} \quad \sigma \neq \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \Delta_{m_0+1}^{2i_0} \cap B \neq \emptyset. \quad (12)$$

Из формулы (12) и леммы 1 получаем

$$\Psi(\Delta_{m_0+1}^{2i_0+\sigma}) = 0 \quad \text{при} \quad \sigma \neq \mathbf{0}. \quad (13)$$

Кроме того, используя равенство (13) и аддитивность функции Ψ , получаем, что

$$\Psi(\Delta_{m_0+1}^{2i_0}) = d \neq 0. \quad (14)$$

Возьмем любую точку $\mathbf{y} \in \Delta_{m_0+1}^{2i_0+1}$, т. е. точка $\mathbf{y}$ такова, что она принадлежит двоичному кубу ранга m_0+1 , который “имеет общую диагональ” с кубом $\Delta_{m_0+1}^{2i_0}$. Как и в теореме 1, можно положить $\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^N)$, где

$$y^s = z^s \oplus \left(\underbrace{0, 0, 0, \dots}_0, \underbrace{1, 0, 0, \dots}_{m_0} \right),$$

а $\mathbf{z} = (z^1, \dots, z^N)$ – любая точка куба $\Delta_{m_0+1}^{2i_0}$.

Из формулы (12) получаем, что $y \notin B$. Если мы покажем, что ряд (1) не сходится по кубам к нулю в этой точке, то получим противоречие с тем, что множество B является $M_{N,\text{cube}}$ -множеством.

Рассмотрим далее подпоследовательность кубических частичных сумм $S_{2^{n_k}+2^{m_0}}(\mathbf{z})$ при $n_k > m_0$, где $\{n_k\}$, как и ранее, последовательность всех номеров таких, что $a_{n_k} - a_{n_k-1} = 0$. Дальнейшее доказательство несколько напоминает доказательство теоремы 1. По формуле (7)

$$S_{2^{n_k}+2^{m_0}}(\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{i}=0}^{2^{(n_k+1) \cdot 1} - 1} \Psi(\Delta_{n_k+1}^{\mathbf{i}}) \prod_{s=1}^N D_{2^{n_k}+2^{m_0}} \left(y_s \oplus \left(\frac{i_s}{2^{n_k+1}} + 0 \right) \right). \quad (15)$$

Рассмотрим слагаемые в правой части формулы (15). Пусть вектор $\mathbf{i}$ таков, что двоичный куб $\Delta_{n_k+1}^{\mathbf{i}}$ удовлетворяет условию $\Delta_{n_k+1}^{\mathbf{i}} \cap \Delta'' = \emptyset$. Тогда при некотором $s \in \{1, \dots, N\}$ порядок точки $y_s \oplus ((i_s/2^{n_k+1}) + 0)$ меньше m_0 . Следовательно, по лемме 4 имеем $D_{2^{n_k}+2^{m_0}}(y_s \oplus ((i_s/2^{n_k+1}) + 0)) = 0$ и

$$\Psi(\Delta_{n_k+1}^{\mathbf{i}}) \prod_{s=1}^N D_{2^{n_k}+2^{m_0}} \left(y_s \oplus \left(\frac{i_s}{2^{n_k+1}} + 0 \right) \right) = 0. \quad (16)$$

Пусть теперь вектор $\mathbf{i}$ таков, что $\Delta_{n_k+1}^{\mathbf{i}} \subset \Delta''$ и, кроме того, $\Delta_{n_k+1}^{\mathbf{i}} \subset \Delta_{m_0+1}^{2\mathbf{i}_0+\sigma}$ при $\sigma \neq \mathbf{0}$. В силу формулы (12) двоичный куб $\Delta_{m_0+1}^{2\mathbf{i}_0+\sigma}$, а с ним и куб $\Delta_{n_k+1}^{\mathbf{i}}$ имеют пустое пересечение с множеством B , следовательно, $\Psi(\Delta_{n_k+1}^{\mathbf{i}}) = 0$ для таких $\mathbf{i}$. Таким образом, для таких $\mathbf{i}$ также выполняется равенство (16).

Пусть, наконец, вектор $\mathbf{i}$ таков, что $\Delta_{n_k+1}^{\mathbf{i}} \subset \Delta_{m_0+1}^{2\mathbf{i}_0}$. Тогда порядок всех координат точки $y_s \oplus ((i_s/2^{n_k+1}) + 0)$ равен m_0 и из леммы 4 вытекает, что при любом $s \in \{1, \dots, N\}$ выполняется равенство

$$D_{2^{n_k}+2^{m_0}} \left(y_s \oplus \left(\left(\frac{i_s}{2^{n_k+1}} \right) + 0 \right) \right) = \omega_{2^{n_k}} \left(y_s \oplus \left(\left(\frac{i_s}{2^{n_k+1}} \right) + 0 \right) \right) 2^{m_0}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Psi(\Delta_{n_k+1}^{\mathbf{i}}) \prod_{s=1}^N D_{2^{n_k}+2^{m_0}} \left(y_s \oplus \left(\frac{i_s}{2^{n_k+1}} + 0 \right) \right) \\ = 2^{m_0 N} \Psi(\Delta_{n_k+1}^{\mathbf{i}}) \prod_{s=1}^N \omega_{2^{n_k}} \left(y_s \oplus \left(\frac{i_s}{2^{n_k+1}} + 0 \right) \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{i}: \Delta_{n_k+1}^{\mathbf{i}} \subset \Delta_{m_0+1}^{2\mathbf{i}_0}} \Psi(\Delta_{n_k+1}^{\mathbf{i}}) \prod_{s=1}^N \omega_{2^{n_k}} \left(y_s \oplus \left(\frac{i_s}{2^{n_k+1}} + 0 \right) \right) \\ = \sum_{\substack{\mathbf{i}: \Delta_{n_k+1}^{\mathbf{i}} \subset \Delta_{m_0+1}^{2\mathbf{i}_0} \\ i_s \equiv 0 \pmod{2}, s=1, \dots, N}} \Psi(\Delta_{n_k+1}^{\mathbf{i}}) \prod_{s=1}^N \omega_{2^{n_k}} \left(y_s \oplus \left(\frac{i_s}{2^{n_k+1}} + 0 \right) \right) \\ = \pm \sum_{\substack{\mathbf{i}: \Delta_{n_k+1}^{\mathbf{i}} \subset \Delta_{m_0+1}^{2\mathbf{i}_0} \\ i_s \equiv 0 \pmod{2}, s=1, \dots, N}} \Psi(\Delta_{n_k+1}^{\mathbf{i}}) = \pm \Psi(\Delta_{m_0+1}^{2\mathbf{i}_0}) = \pm d. \end{aligned} \quad (18)$$

Первое и третье равенства в последней цепочке выполняются потому, что по построению множества B

$$\Delta_{n_k+1}^{\mathbf{i}} \cap B = \emptyset$$

для всех $\mathbf{i}$ таких, что $i_s \equiv 1 \pmod{2}$ хотя бы для одного $s \in \{1, \dots, N\}$, т. е. $\Psi(\Delta_{n_k+1}^{\mathbf{i}}) = 0$ для таких $\mathbf{i}$. Второе равенство имеет место в силу того, что значение выражения

$$\prod_{s=1}^N \omega_{2^{n_k}} \left(y_s \oplus \left(\frac{i_s}{2^{n_k+1}} + 0 \right) \right) = \prod_{s=1}^N r_k \left(y_s \oplus \left(\frac{i_s}{2^{n_k+1}} + 0 \right) \right)$$

одинаково для всех $\mathbf{i}$ таких, что $\Delta_{n_k+1}^{\mathbf{i}} \subset \Delta_{m_0+1}^{2\mathbf{i}_0}$ и $i_s \equiv 0 \pmod{2}$, $s = 1, \dots, N$. Из формул (14)–(18) следует, что при $n_k > m_0$

$$S_{2^{n_k+2m_0}}(\mathbf{y}) = \pm \Psi(\Delta_{m_0+1}^{2\mathbf{i}_0}) = \pm 2^{m_0 N} d \neq 0.$$

Таким образом, подпоследовательность кубических частичных сумм ряда (1) не стремится к нулю в некоторой точке $\mathbf{y} \in B$, что приводит к противоречию с тем, что множество B является $M_{N,\text{cube}}$ -множеством. Тем самым B является непустым совершенным $U_{N,\text{cube}}$ -множеством. Теорема доказана.

Особый интерес теорема 3 представляет в том случае, когда последовательность a_n , использованная в этой теореме, достаточно быстро растет (удовлетворяя при этом условиям 1)–3)). Несложно заметить, что класс U -множеств для рядов по какой-нибудь системе функций при какой-либо сходимости обладает свойством наследственности: если множество A является U -множеством, то тем более любое множество $B \subset A$ является U -множеством. В связи с этим естественно ожидать, что “густые” в некотором смысле множества не будут являться U -множествами. Мы покажем, что существуют $U_{N,\text{cube}}$ -множества, хаусдорфова размерность которых максимальна, т. е. равна N – размерности пространства.

Напомним, что *хаусдорфовой p -мерой* (см., например, [12, п. 6]) называется величина

$$\text{mes}_p E = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \inf \sum_i (\text{diam } \Omega_i)^p,$$

где точная нижняя грань берется по всем не более чем счетным наборам открытых кубов (или шаров) $\{\Omega_i\}$, $\text{diam } \Omega_i < \varepsilon$ для всех i , объединение которых содержит множество E . *Хаусдорфовой размерностью* множества E называется число $\text{Dim}_H E$, равное $\sup\{p \geq 0: \text{mes}_p E > 0\}$. Мы будем рассматривать хаусдорфову размерность не самих множеств из D^N , а их образов в $[0, 1]^N$ при отображении $\tilde{\gamma}$.

На практике чаще удобнее иметь дело с нижней и верхней емкостными размерностями множеств (см., например, [12, п. 6]). Одно из определений этих понятий такое. Пусть $M(\varepsilon, E)$ – минимальное число кубов диаметра ε , необходимое для покрытия множества E . Тогда *нижней и верхней емкостными размерностями* множества E называются величины

$$\underline{\dim}_{\text{Cap}} E = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\log M(\varepsilon, E)}{\log \frac{1}{\varepsilon}}, \quad \overline{\dim}_{\text{Cap}} E = \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\log M(\varepsilon, E)}{\log \frac{1}{\varepsilon}}$$

соответственно. В общем случае имеет место соотношение

$$\text{Dim}_H E \leq \underline{\dim}_{\text{Cap}} E \leq \overline{\dim}_{\text{Cap}} E.$$

Однако для некоторого класса замкнутых множеств имеет место совпадение хаусдорфовой размерности с обеими емкостными размерностями. Такой класс множеств описан в работе [13]. Опишем конструкцию, приводящую к таким множествам.

Пусть в $\mathbb{R}^N$ заданы замкнутые множества $J_1, \dots, J_d$. Для каждой бесконечной последовательности $(i_1, i_2, \dots)$, $i_s = 1, \dots, d$, рассмотрим при всех $q = 1, 2, \dots$ замкнутые множества $J_{i_1, \dots, i_q}$, удовлетворяющие условиям:

- 1') $J_{i_1, \dots, i_q, k} \subset J_{i_1, \dots, i_q}$ при всех $k = 1, \dots, d$;
- 2') $\underline{B}_{i_1, \dots, i_q} \subset J_{i_1, \dots, i_q} \subset \overline{B}_{i_1, \dots, i_q}$, где $\underline{B}_{i_1, \dots, i_q}$ и $\overline{B}_{i_1, \dots, i_q}$ — замкнутые шары с радиусами $K_1 r_{i_1, \dots, i_q}$ и $K_2 r_{i_1, \dots, i_q}$ соответственно, $0 < K_1 \leq K_2$;
- 3') если $(i_1, \dots, i_{q_1}) \neq (j_1, \dots, j_{q_1})$ и $q_2 \geq q_1$, то внутренности шаров $\underline{B}_{i_1, \dots, i_{q_1}}$ и $\underline{B}_{j_1, \dots, j_{q_2}}$ не пересекаются.

Пусть также для всех $(i_1, i_2, \dots)$ и $q, q_1, q_2 \geq 1$ имеют места соотношения

$$e^{-\alpha q} \leq r_{i_1, \dots, i_q} \leq e^{-\beta q}, \quad \alpha, \beta > 0, \quad (19)$$

$$r_{i_1, \dots, i_{q_1+q_2}} \leq r_{i_1, \dots, i_{q_1}} r_{i_1, \dots, i_{q_2}}. \quad (20)$$

В работе [13] (см. также [12, теорема 15.2]) доказывается, что если множества $J_{i_1, \dots, i_q}$ удовлетворяют условиям 1')–3') и выполнены соотношения (19), (20), то для множества

$$F = \bigcap_{q=1}^{\infty} \bigcup_{(i_1, \dots, i_q)} J_{i_1, \dots, i_q} \quad (21)$$

выполняется соотношение

$$\text{Dim}_H F = \underline{\dim}_{\text{Cap}} F = \overline{\dim}_{\text{Cap}} F. \quad (22)$$

ТЕОРЕМА 4. *Существуют $U_{N, \text{cube}}$ -множества, имеющие хаусдорфову размерность N .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем результат, несколько более слабый, чем утверждение теоремы.

ЛЕММА 5. *Для любого $\tau > 0$ среди множеств, построенных в теореме 3, существуют множества, имеющие хаусдорфову размерность, не меньшую, чем $N - \tau$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать лемму при $\tau < N/2$. Выберем последовательность целых неотрицательных чисел $\{a_n\}$, удовлетворяющую условиям 1)–3), а также условиям

$$\frac{a_n}{n} \rightarrow 1 - \frac{\tau}{N} \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty, \quad (23)$$

$$a_n - a_{n-2} \neq 0 \quad \text{ни для какого} \quad n \geq 2. \quad (24)$$

Напомним, что $\{l_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность всех номеров таких, что $a_{l_k} - a_{l_k-1} = 1$. Потребуем также от последовательности $\{a_n\}$ того, чтобы соответствующая последовательность $\{l_k\}$ удовлетворяла условию

$$l_{k_1+k_2} \geq l_{k_1} + l_{k_2} \quad \text{при всех } k_1, k_2 \geq 2. \quad (25)$$

Очевидно, последовательность $\{a_n\}$, удовлетворяющая условиям 1)–3) и (23)–(25) существует (отметим, что если заменить условие (23) на условие $a_n/n \rightarrow 1$, то искомой последовательности не нашлось бы). Покажем, что множество B , построенное по данной последовательности процедурой, описанной в доказательстве теоремы 3, можно рассматривать как предельное множество, полученное по формуле (21) из некоторой системы замкнутых множеств $J_{i_1, \dots, i_q}$, удовлетворяющей условиям 1')–3') и (19), (20).

Напомним, что множество B есть $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$, где B_k – объединение $2^{N(n_k-k)}$ попарно непересекающихся двоичных кубов ранга n_k ($\{n_k\}$ – последовательность номеров таких, что $a_{n_k} - a_{n_k-1} = 0$). Для любого целого неотрицательного q в силу условия (24) найдется такое k , что $n_k + 1 \leq l_q \leq n_{k+1}$. Тогда множество B_k можно представить еще и как объединение

$$2^{N((n_k-k)+(m_q-n_k))} = 2^{N(m_q-k)} = 2^{Nq}$$

попарно непересекающихся двоичных кубов ранга l_q . Эти кубы можно взять в качестве множеств $J_{i_1, \dots, i_q}$, $i_s = 1, \dots, 2^N$. При этом несложно занумеровать их так, что $J_{i_1, \dots, i_q, k} \subset J_{i_1, \dots, i_q}$ при всех $k = 1, \dots, 2^N$. Отметим, что по построению множества B выполнено:

- а) $J_{i_1, \dots, i_q} \cap B \neq \emptyset$ для любых $(i_1, \dots, i_q)$;
- б) $B \subset \bigcup_{(i_1, \dots, i_q)} J_{i_1, \dots, i_q}$ для любого q .

Отсюда следует

$$\bigcap_{q=1}^{\infty} \bigcup_{(i_1, \dots, i_q)} J_{i_1, \dots, i_q} = B.$$

Набор кубов $J_{i_1, \dots, i_q}$, очевидно, удовлетворяет условию 1'). Далее, для каждого куба $J_{i_1, \dots, i_q}$ ранга m_q найдутся замкнутые шары $\underline{B}_{i_1, \dots, i_q}$ и $\overline{B}_{i_1, \dots, i_q}$ с радиусами $K_1 r_{i_1, \dots, i_q}$ и $K_2 r_{i_1, \dots, i_q}$ соответственно, где $r_{i_1, \dots, i_q} = 2^{-l_q}$, $K_1 = 1/2$, $K_2 = \sqrt{N}/2$, причем $\underline{B}_{i_1, \dots, i_q} \subset J_{i_1, \dots, i_q} \subset \overline{B}_{i_1, \dots, i_q}$. Это доказывает выполнения свойства 2') для набора $J_{i_1, \dots, i_q}$. Условие 3') также, очевидно, имеет место. Далее имеет место равенство $a_{l_q} = q$ для любого $q = 1, 2, \dots$, откуда

$$\frac{l_q}{q} = \frac{l_q}{a_{l_q}} \rightarrow \frac{1}{1 - \tau/N} \quad \text{при } q \rightarrow \infty.$$

Из последнего равенства вытекает, что существуют $q_1, q_2 > 0$, удовлетворяющие условию

$$q_1 < \frac{l_q}{q} < q_2. \quad (26)$$

Из формулы (26) вытекает, что для набора чисел $r_{i_1, \dots, i_q} = 2^{-l_q}$ выполняется условие (19). Наконец,

$$r_{i_1, \dots, i_{q_1+q_2}} = 2^{-l_{q_1+q_2}} \leq 2^{-l_{q_1}} \cdot 2^{-l_{q_2}} = r_{i_1, \dots, i_{q_1}} r_{i_1, \dots, i_{q_2}}$$

(неравенство в последней выкладке выполнено в силу формулы (25)). Отсюда сразу вытекает выполнение неравенства (20) для набора $r_{i_1, \dots, i_q}$. Получается, что множество B и набор множеств $J_{i_1, \dots, i_q}$ удовлетворяют условиям 1')–3') и (19), (20). Значит, для множества B имеет место равенство (22). Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что $\dim_{\text{Сар}} B \geq N - \tau$.

Пусть $\varepsilon_k = 2^{-n_k}$. По построению множества B число кубов $M(\varepsilon_k, B)$ диаметра ε_k , необходимое для покрытия множества B , должно быть не меньше (даже больше), чем $2^{N(n_k - k)}$. Действительно, множество B есть $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$, а каждое множество B_k – объединение $2^{N(n_k - k)}$ двоичных кубов ранга n_k , причем расстояние между любыми двумя такими кубами не меньше, чем 2^{-n_k} . Тогда

$$\frac{\log M(\varepsilon_k, B)}{\log \frac{1}{\varepsilon_k}} \geq \frac{\log 2^{N(n_k - k)}}{\log 2^{n_k}} = \frac{N(n_k - k)}{n_k} = N \frac{n_k}{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} N \left(1 - \frac{\tau}{N}\right) = N - \tau,$$

откуда по определению верхней емкостной размерности выполнено неравенство $\dim_{\text{Сар}} B \geq N - \tau$, что и доказывает лемму.

Продолжим доказательство теоремы. Сначала построим счетный набор двоичных кубов F^v следующим образом. Разобьем единичный куб $([0, 1]^*)^N$ на 2^N смежных двоичных кубов вдвое меньшего линейного размера и $2^N - 1$ кубов из этого набора возьмем в качестве множеств F^v , $v = 1, \dots, 2^N - 1$, а оставшийся куб разобьем на 2^N смежных двоичных кубов вдвое меньшего линейного размера и $2^N - 1$ из этих кубов снова возьмем в качестве множеств F^v , $v = 2^N, \dots, 2^{N+1} - 2$, далее оставшийся куб снова разобьем на 2^N смежных двоичных кубов вдвое меньшего линейного размера. Продолжая процесс, получим счетный набор попарно непересекающихся двоичных кубов F^v , объединение которых есть единичный куб $([0, 1]^*)^N$ без одной точки, которую мы обозначим $\mathbf{z}_0$.

Далее, выберем стремящуюся к нулю последовательность положительных чисел $\{\tau_v\}_{v=1}^{\infty}$. Для каждого v найдем последовательность a_n^v , удовлетворяющую условиям 1)–3) и (23)–(25), а также свойству

$$\frac{a_n^v}{n} \rightarrow 1 - \frac{\tau_v}{N} \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (27)$$

Пусть через n_k^v обозначена, как и ранее, последовательность всех номеров, для которых выполнено равенство $a_{n_k}^v - a_{n_k-1}^v = 0$, и пусть $k'(v)$ – минимальное из значений k таких, что $a_{n_k}^v$ больше ранга двоичного куба F^v . Для каждого $v = 1, 2, \dots$ процедурой, несколько отличающейся от той, что описана в доказательстве теоремы 3, построим множества B_k^v , $k \geq k'(v)$, и множество $B^v = \bigcap_{k=k'(v)}^{\infty} B_k^v$. Зафиксируем любой двоичный куб, лежащий в F^v , взяв его в качестве множества $B_{k'(v)}^v$. Далее процесс построения множеств B_k^v , $k \geq k'(v)$, полностью повторяет процесс, проведенный в доказательстве теоремы 3. Единственное отличие состоит в том, что множество B_k^v состоит из $2^{N((n_k - k) - (n_{k'(v)} - k'(v)))}$ двоичных кубов ранга n_k^v , а не из $2^{N(n_k^v - k)}$, как

в указанной теореме. Это отличие нисколько не влияет на дальнейшие рассуждения. Далее, пусть $B^v = \bigcap_{k=k'(v)}^{\infty} B_k^v$. Покажем, что множество

$$\tilde{B} = \bigcup_{v=1}^{\infty} B^v$$

является $U_{N,\text{cube}}$ -множеством, имеющим хаусдорфову размерность N .

Покажем сначала, что $\text{Dim}_H \tilde{B} = N$. В силу условий 1)–3), (23)–(25) и (27) по лемме 5 имеем $\text{Dim}_H B^v \geq N - \tau_v$. По известной формуле (см., например, [12, теорема 1.1]) получаем

$$\text{Dim}_H \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i \right) = \sup_i \text{Dim}_H Z_i,$$

откуда $\text{Dim}_H \tilde{B} = \sup_v (N - \tau_v) = N$.

Остается показать, что множество $\tilde{B}$ является $U_{N,\text{cube}}$ -множеством.

Предположим, что это не так и множество $\tilde{B}$ является $M_{N,\text{cube}}$ -множеством. Тогда существует тождественно ненулевой ряд (1), сходящийся к нулю вне множества $\tilde{B}$. Пусть $\Psi(\Delta)$ – аддитивная функция, построенная для данного ряда (1) по формуле (4). Рассмотрим два случая.

В первом случае $\Psi(\Delta) = 0$ для всех двоичных интервалов Δ , не содержащих точку $\mathbf{z}_0 = ([0, 1]^*)^N \setminus (\bigcup_{v=1}^{\infty} F^v)$. Тогда по лемме 2 существует число b такое, что $\Psi(\Delta) = b$ для всех двоичных интервалов Δ , содержащих точку $\mathbf{z}_0$. При этом $b \neq 0$, иначе функция Ψ , а вместе с ней и ряд (1) были бы тождественно равны нулю. Далее выберем точку $\mathbf{y} \in (J^*)^N \setminus \tilde{B}$ так, чтобы порядок всех координат точки $\mathbf{y} \oplus \mathbf{z}_0$ был равен некоторому натуральному числу m_0 . Дальнейшее рассуждение полностью повторяет заключительную часть доказательства теорем 1 и 2. В этом случае множество $\tilde{B}$ является $U_{N,\text{cube}}$ -множеством.

Во втором случае существует двоичный интервал Δ' , не содержащий точку $\mathbf{z}_0$, для которого выполнено равенство $\Psi(\Delta') \neq 0$. Разбив двоичный интервал Δ' на конечное число непересекающихся двоичных кубов и используя аддитивность функции Ψ , можно добиться того, что $\Psi(\Delta'') \neq 0$ для некоторого двоичного куба $\Delta'' \subset \Delta'$, не содержащего точку $\mathbf{z}_0$. Поскольку $\mathbf{z}_0 \notin \Delta''$ и Δ'' является двоичным кубом, то по построению множеств F^v имеем, что $\Delta'' \subset F^{v_0}$ для некоторого v_0 . Выберем $m_0 \in \mathbb{N}$ таким, что $a_{m_0+1}^{v_0} - a_{m_0}^{v_0} = 0$ и m_0 больше ранга куба Δ'' . Разбив, в свою очередь, двоичный куб Δ'' на конечное число непересекающихся двоичных кубов ранга m_0 и используя аддитивность функции $\Psi(\Delta)$, можно добиться того, что $\Psi(\Delta''') = d \neq 0$ для некоторого двоичного куба $\Delta''' \subset \Delta''$, имеющего ранг m_0 .

Дальнейшее доказательство полностью повторяет доказательство теоремы 3. Двоичный куб Δ''' разбивается на 2^N двоичных кубов $\Delta_{m_0+1}^{2\mathbf{i}_0+\boldsymbol{\sigma}}$, $\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma_N$, ранга $m_0 + 1$ (нумерация таких кубов соответствует нумерации в формуле (3)). Выбирается произвольная точка $\mathbf{y} \in \Delta_{m_0+1}^{2\mathbf{i}_0+1}$. Далее, с использованием формул (15)–(18) доказывается, что подпоследовательность кубических частичных сумм $S_{2^{n_k}+2^{m_0}}(\mathbf{y})$ ряда (1) не стремится к нулю, а это приводит к противоречию с тем, что множество $\tilde{B}$ является $M_{N,\text{cube}}$ -множеством. Тем самым множество $\tilde{B}$ есть $U_{N,\text{cube}}$ -множество с $\text{Dim}_H \tilde{B} = N$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если вместо сходимости по кубам рассматривать сходимость по прямоугольникам, а одномерные функции Уолша рассматривать не на двоичной группе G , а на отрезке $[0, 1]$, то утверждение теоремы 4 следовало бы из леммы 5 в силу аналогов известной теоремы Н. К. Бари (см. [14, гл. 14, § 6, теорема 3]). Аналог этой теоремы для кратных рядов Уолша и для сходимости по прямоугольникам был доказан Н. Н. Холщевниковой [7] (для одномерных рядов Уолша подобная теорема доказана в работе [15]). А именно, в [7] доказано, что счетное объединение замкнутых U -множеств для кратных рядов Уолша при сходимости по прямоугольникам, имеющих лебегову меру нуль и лежащих в $(0, 1)^N$, также является U -множеством. Отметим, что образы при отображении $\tilde{\gamma}$ всех U -множеств, построенных в настоящей работе, имеют лебегову меру нуль. Кроме того, несложно изменить конструкцию U -множеств из теоремы 3 так, что образы этих множеств при отображении $\tilde{\gamma}$ лежали бы в $(0, 1)^N$. Используя результат Н. Н. Холщевниковой и построив замкнутые U -множества B^v с $\dim_H B^v > 1 - 1/v$ (см. лемму 5), мы сразу бы получили U -множество $B = \bigcup_{v=1}^{\infty} B^v$ с $\dim_H B = 1$. Однако автору не известно, имеет ли место аналог теоремы Н. К. Бари для кратных рядов Уолша при сходимости по кубам.

Отметим, что если рассматривать одномерные функции Уолша не на двоичной группе G , а на отрезке $[0, 1]$, то неизвестно даже, является ли пустое множество U -множеством для рядов (1) при сходимости по кубам. Аналогичная проблема до сих пор не решена и для кратных тригонометрических рядов.

Список литературы

1. Х. О. Мовсисян, “О единственности двойных рядов по системам Хаара и Уолша”, *Изв. АН АрмССР. Математика*, **9**:1 (1974), 40–61.
2. В. А. Скворцов, “О коэффициентах сходящихся кратных рядов Хаара и Уолша”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика*, 1973, № 6, 77–79; англ. пер.: V. A. Skvortsov, “On the coefficients of convergent multiple Haar and Walsh series”, *Mosc. Univ. Math. Bull.*, **28**(1973):5/6 (1974), 119–121.
3. С. Ф. Лукомский, “О некоторых классах множеств единственности кратных рядов Уолша”, *Матем. сб.*, **180**:7 (1989), 937–945; англ. пер.: S. F. Lukomskii, “On certain classes of sets of uniqueness of multiple Walsh series”, *Math. USSR-Sb.*, **67**:2 (1990), 393–401.
4. Ш. Т. Тетунашвили, “О некоторых кратных функциональных рядах и решение проблемы единственности кратных тригонометрических рядов для сходимости по Прингсхейму”, *Матем. сб.*, **182**:8 (1991), 1158–1176; англ. пер.: Sh. T. Tetunashvili, “On some multiple functionseries and solution of the uniqueness problem for Pringsheim convergence of multiple trigonometric series”, *Math. USSR-Sb.*, **73**:2 (1992), 517–534.
5. С. Ф. Лукомский, *Представление функций рядами Уолша и коэффициенты сходящихся рядов Уолша*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, СГУ, Саратов, 1996.
6. S. F. Lukomskii, “On a U -set for multiple Walsh series”, *Anal. Math.*, **18**:2 (1992), 127–138.
7. Н. Н. Холщевникова, “Объединение множеств единственности кратных рядов – Уолша и тригонометрических”, *Матем. сб.*, **193**:4 (2002), 135–160; англ. пер.:

- N. N. Kholshchevnikova, "Union of sets of uniqueness for multiple Walsh and multiple trigonometric series", *Sb. Math.*, **193**:4 (2002), 609–633.
8. Г. Н. Агаев, Н. Я. Виленкин, Г. М. Джафарли, А. И. Рубинштейн, *Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах*, ЭЛМ, Баку, 1981.
 9. Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Волша: теория и применения*, Наука, М., 1987; англ. пер.: B. Golubov, A. Efimov, V. Skvortsov, *Walsh series and transforms. Theory and applications*, Mathematics and its Applications (Soviet Series), **64**, Kluwer Acad. Publ. Group, Dordrecht, 1991.
 10. R. E. A. C. Paley, "A remarkable series of orthogonal functions. I", *Proc. London Math. Soc.* (2), **34** (1932), 241–264; R. E. A. C. Paley, "A remarkable series of orthogonal functions. II", *Proc. London Math. Soc.* (2), **34** (1932), 265–279.
 11. N. J. Fine, "On the Walsh functions", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **65**:3 (1949), 372–414.
 12. Я. Б. Песин, *Теория размерности и динамические системы: современный взгляд и приложения*, Ин-т компьютерных исследований, М.–Ижевск, 2002.
 13. L. M. Barreira, "A non-additive thermodynamic formalism and applications to dimension theory of hyperbolic dynamical systems", *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **16**:5 (1996), 871–927.
 14. Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, ГИФМЛ, М., 1961; англ. пер.: N. K. Bary, *A treatise on trigonometric series*, v. I, II, The Macmillan Co., New York, 1964.
 15. W. R. Wade, "Summing closed U -set for Walsh series", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **29**:1 (1971), 123–125.

М. Г. Плотников (М. G. Plotnikov)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: mgplotnikov@mail.ru

Поступило в редакцию
28.12.2005