Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Покровский, О наилучшем несимметричном приближении в пространствах непрерывных функций, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2006, том 70, выпуск 4, 175–208

DOI: <https://doi.org/10.4213/im741>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 16:01:35

УДК 517.518.8

А. В. Покровский

О наилучшем несимметричном приближении в пространствах непрерывных функций

Рассматриваются аппроксимации выпуклыми множествами в пространстве непрерывных отображений компактного топологического пространства в локально выпуклое пространство относительно некоторых несимметричных полунорм. Для этого случая приводятся новые критерии элемента наименьшего уклонения, предложено определение сильной единственности элемента наименьшего уклонения и исследуются вопросы характеристики и существования такого элемента, особенно подробно в случае аппроксимаций со знакочувствительным весом вещественных непрерывных функций, заданных на метрическом компакте или на отрезке, элементами чебышевского пространства.

Библиография: 30 наименований.

Введение

Пусть $L = P_n$ – подпространство алгебраических полиномов степени не выше n в пространстве $C(\Delta)$ всех вещественных непрерывных функций на отрезке $\Delta = [-1, 1]$ с равномерной нормой $\|\cdot\|_\Delta$. Для функции $f \in C(\Delta)$ и точки $x \in \Delta$ введем обозначения:

$$R(f, \Delta) := \{y \in \Delta: |f(y)| = \|f\|_\Delta\}, \quad a(f, x) := \operatorname{sign}(f(x))(1, x, \dots, x^n).$$

Напомним, что полином $g \in P_n$ называется *элементом наименьшего равномерного уклонения в P_n функции $f \in C(\Delta)$* , если

$$\|f - g\|_\Delta = \inf_{l \in P_n} \|f - l\|_\Delta.$$

В 1943 г. Н. Г. Чеботарёв в заметке¹ [1], исходя из найденных им общих условий минимакса, установил критерий элемента наименьшего равномерного уклонения функции f в подпространстве P_n в следующей, отличной от теоремы П. Л. Чебышева об альтернансе, форме.

ТЕОРЕМА А (критерий Н. Г. Чеботарёва). *Для того чтобы полином $g \in P_n$ был элементом наименьшего равномерного уклонения в P_n функции $f \in C(\Delta) \setminus P_n$, необходимо и достаточно, чтобы для любого ненулевого вектора $c \in \mathbb{R}^{n+1}$ нашлись точки $x_1, x_2 \in R(f - g, \Delta)$, в которых (обычные) скалярные произведения $(a(f - g, x_1), c)$ и $(a(f - g, x_2), c)$ отличны от нуля и имеют разные знаки.*

¹Подробное изложение результатов этой заметки содержится в незавершенной работе [2].

Работа выполнена в рамках Государственной программы Украины (проект № 0105U000435).

Если $c = (c_0, c_1, \dots, c_n)$, то $(a(f - g, x), c) = (c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n) \operatorname{sign}(f(x) - g(x))$, откуда получаем следующую формулировку критерия Чеботарёва: для того чтобы полином $g \in P_n$ был элементом наименьшего равномерного уклонения в P_n функции $f \in C(\Delta) \setminus P_n$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sup_{x \in R(f-g, \Delta)} (l(x)) \operatorname{sign}(f(x) - g(x)) > 0 \quad \forall l \in P_n \setminus \{0\}. \quad (1)$$

Пусть $p(x) := |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда для всех $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, величина $y \operatorname{sign}(x)$ представляет собой значение производной функции p в точке x по направлению y :

$$Dp(x; y) := \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \frac{p(x + \alpha y) - p(x)}{\alpha} = y \operatorname{sign}(x),$$

откуда следует, что при всех $f \in C(\Delta) \setminus P_n$ и $g \in P_n$ условие (1) равносильно следующему:

$$\sup_{x \in R(f-g, \Delta)} Dp(f(x) - g(x); l(x)) > 0 \quad \forall l \in P_n \setminus \{0\}$$

(заметим, что именно в терминах производных по направлению результаты работ [1] и [2] изложены в [3]).

Используя теорему Каратеодори о барицентрическом представлении выпуклой оболочки непустого подмножества в $\mathbb{R}^n$, Н. Г. Чеботарёв дал в работах [1] и [2] еще одну формулировку своего критерия.

ТЕОРЕМА В (критерий Н. Г. Чеботарёва в геометрической форме). *Для того чтобы полином $g \in P_n$ был элементом наименьшего равномерного уклонения в P_n функции $f \in C(\Delta) \setminus P_n$, необходимо и достаточно, чтобы множество $R(f - g, \Delta)$ содержало такие точки $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$, что выпуклая оболочка векторов $a(f - g, x_0), a(f - g, x_1), \dots, a(f - g, x_{n+1})$ имеет непустую внутренность в $\mathbb{R}^{n+1}$, которая содержит нулевой вектор.*

Последнее условие, очевидно, означает существование такого числа $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$, что для любого ненулевого вектора $c \in \mathbb{R}^{n+1}$ найдется номер $j \in \{0, 1, \dots, n+1\}$, при котором угол между векторами c и $a(f - g, x_j)$ не превосходит α . Пусть $f \in C(\Delta) \setminus P_n$, g — элемент наименьшего равномерного уклонения функции f в P_n , $l(x) \equiv l_0 + l_1x + \dots + l_nx^n \in P_n \setminus \{0\}$, $\|l\|_\Delta < \|f - g\|_\Delta$, $c(l) = (l_0, l_1, \dots, l_n)$, и пусть $j(l) \in \{0, 1, \dots, n+1\}$ выбрано так, что угол между векторами $c(l)$ и $a(f - g, x_{j(l)})$ не превосходит α . Тогда

$$\begin{aligned} \|f - g + l\|_\Delta - \|f - g\|_\Delta &\geq |(f - g + l)(x_{j(l)})| - |(f - g)(x_{j(l)})| \\ &= (a(f - g, x_{j(l)}), c(l)) \geq |c(l)| |a(f - g, x_{j(l)})| \cos \alpha \\ &\geq |c(l)| \cos \alpha \left(\min_{k=0, n+1} |a(f - g, x_k)| \right), \end{aligned}$$

где $|c(l)| := (l_0^2 + \dots + l_n^2)^{1/2}$. Поскольку

$$\min_{k=0, n+1} |a(f - g, x_k)| > 0,$$

$|c(l)|$ и $\|l\|_\Delta$ — эквивалентные нормы на конечномерном пространстве P_n , то мы получаем следующее свойство элемента наименьшего равномерного уклонения:

существует $C_f > 0$, при котором для всех $l \in P_n$ выполнено неравенство

$$C_f \|l - g\|_{\Delta} \leq \|f - l\|_{\Delta} - \|f - g\|_{\Delta}.$$

В 1963 г. Д. Ньюмен и Х. Шапиро [4] установили это свойство (названное позже *сильной единственностью* элемента наименьшего уклонения) в более общем случае равномерных приближений вещественных непрерывных функций на абстрактном компакте Q элементами чебышевского пространства $L \subset C(Q)$ (напомним, что по теореме Мерхьюбера [5] каждый компакт Q , для которого существует чебышевское пространство $L \subset C(Q)$ размерности не меньше 2, гомеоморфно вкладывается в единичную окружность $\mathbb{T}^1$), уточнив тем самым классическую теорему А. Хаара [6], согласно которой чебышевность L необходима и достаточна для того, чтобы каждая функция $f \in C(Q)$ имела в L единственный элемент наименьшего равномерного уклонения. В дальнейшем свойство сильной единственности элемента наименьшего уклонения исследовалось в работах многих авторов (см., например, [7]–[10]), в том числе и для приближений элементами множеств, которые, вообще говоря, не являются линейными пространствами. Это свойство играет важную роль при обосновании сходимости итерационных алгоритмов типа Ремеза (см. [7], [10]). Однако, по-видимому, только в 1998 г. А. В. Маринов [11] обратил внимание на то, что это свойство было фактически установлено в упомянутых выше работах Н. Г. Чеботарёва. Отметим также, что рассуждения Н. Г. Чеботарёва практически без изменений охватывают рассмотренный Д. Ньюменом и Х. Шапиро случай приближения вещественных непрерывных функций на произвольном компакте Q элементами чебышевского пространства $L \subset C(Q)$, но все известные нам работы, в которых имеются ссылки на статьи [1] или [2], – это [3], [7], [11]–[13].

С другой стороны, в 1948 г. А. Н. Колмогоров [14] установил свой известный критерий приближения непрерывных комплекснозначных функций на компакте $Q \subset \mathbb{C}$ полиномами одного комплексного переменного степени не выше n , который в дальнейшем обобщался в работах многих авторов, в частности для равномерных аппроксимаций непрерывных функций f на произвольном компакте Q со значениями в банаховом пространстве Y ($f \in C(Q, Y)$) элементами замкнутых выпуклых подмножеств в $C(Q, Y)$ – С. И. Зуховицким и М. Г. Крейном (1950, $Y = \mathbb{C}^n$), С. И. Зуховицким и С. Б. Стечкиным (1956, Y – гильбертово пространство), И. Зингером (1957), В. Н. Никольским (1963), А. Л. Гаркави (1964) и В. К. Дзядыком (1977). Последнему принадлежит наиболее общий результат в этом направлении, содержащий результаты всех перечисленных выше авторов (см. [15, с. 46–62, 98]).

Отметим также работу Е. А. Севастьянова [16], в которой установлен критерий типа Колмогорова для аппроксимаций со знакочувствительным весом вещественных непрерывных функций на метрическом компакте Q элементами выпуклого множества $A \subset C(Q, \mathbb{R}) =: C(Q)$.

В отличие от классических весовых аппроксимаций, аппроксимации со знакочувствительным весом учитывают не только модуль разности приближаемой и приближающей функций, но также и знак этой разности. Они являются частным случаем аппроксимаций относительно неотрицательного сублинейного функционала, рассмотренных впервые Г. Минковским [17]. Для знакочувствительного веса p с положительными непрерывными компонентами p_- и p_+ аппроксимации вещественных непрерывных функций на отрезке Δ изучались

М. Г. Крейн и А. А. Нудельманом [18] в связи с их исследованием проблемы моментов А. А. Маркова, для весов p с неотрицательными полунепрерывными сверху компонентами – в работах Е. П. Долженко и Е. А. Севастьянова [19], [20] (основные результаты этих работ ранее были изложены в заметках [21] и [22]; в них и появились термины “знакочувствительные аппроксимации” и “знакочувствительный вес”), а также Е. А. Севастьянова [16], в которых исследованы вопросы существования и единственности элемента наименьшего отклонения в чебышевских пространствах, устойчивость элемента наименьшего отклонения при вариации веса, связь с аппроксимациями в хаусдорфовой метрике и с теорией ужей, описаны веса, для которых справедлив аналог упомянутой выше теоремы Хаара.

Отметим (см. [16], [19]), что в отличие от классических аппроксимаций, в теории аппроксимаций со знакочувствительным весом p с неотрицательными полунепрерывными сверху компонентами p_- и p_+ наибольший интерес представляет случай, когда величина $E(p, L, f)$ наименьшего отклонения функции f при ее приближении элементами подпространства L с весом p равна нулю: $E(p, L, f) = 0$. Существенную роль при исследовании этого случая играют понятия *свободы* и *жесткости* системы “знакочувствительный вес p – подпространство L ”, введенные в упомянутых выше работах Е. П. Долженко и Е. А. Севастьянова.

Представим содержание настоящей работы. В §1 рассмотрено приближение непрерывных функций, определенных на компактном топологическом пространстве T и принимающих значения в локально выпуклом пространстве Y элементами выпуклого множества $A \subset C(T, Y)$, при этом отклонение приближаемой функции от приближающей определяется с помощью неотрицательного сублинейного функционала P , предложенного в работах [23, с. 162–166] и [24, с. 93–99] (см. ниже определение *элемента наименьшего P -уклонения*). Основным результатом здесь – теорема 1, являющаяся критерием типа Чеботарёва–Колмогорова, характеризующим элемент наименьшего P -уклонения. В качестве следствий этой теоремы получается большинство известных нам критериев элемента наименьшего отклонения, относящихся к случаю приближения непрерывных функций непрерывными. В теоремах 2 и 3 и их следствиях дана близкая по форме к теореме 1 характеристика элемента наименьшего отклонения, восходящая к работе П. Л. Папини [27] и изученная в ряде работ других авторов (см., например, [28]). В §2 дано определение сильно единственного элемента наименьшего P -уклонения и приведены различные критерии существования такого элемента (теорема 4 и ее следствия). В случае, когда приближение осуществляется элементами конечномерного линейного пространства $L \subset C(T, Y)$ и величина наименьшего P -уклонения функции f в L равна нулю, характеристика сильно единственного элемента наименьшего P -уклонения функции f в L естественным образом приводит к понятию *свободы* системы “неотрицательный сублинейный функционал P – подпространство L ”, введенному в упомянутых работах Е. П. Долженко и Е. А. Севастьянова (теорема 5). В §3 рассмотрен случай знакочувствительных аппроксимаций вещественных непрерывных функций, определенных на метрическом компакте Q , элементами чебышевского пространства $L \subset C(Q)$. Основным результатом здесь является теорема 7, в которой даны условия на вес p и чебышевское пространство $L \subset C(Q)$, необходимые и достаточные для того, чтобы каждая функция

$f \in C(Q)$ имела в L сильно единственный элемент наименьшего уклонения с весом p . В § 4 при использовании результатов Е. П. Долженко и Е. А. Севастьянова уточняется теорема 7 для случая, когда компакт Q является отрезком Δ на вещественной оси. В этом случае условия на вес p и чебышевское пространство $L \subset C(\Delta)$, необходимые и достаточные для того, чтобы каждая функция $f \in C(\Delta)$ имела в L сильно единственный элемент наименьшего уклонения с весом p , формулируются только в терминах веса p и линейной размерности пространства L над $\mathbb{R}$. Кроме этого, здесь дана характеристика сильно единственного элемента g наименьшего уклонения функции f в L с весом p для случая, когда уклонение функции f от элемента g с весом p равно нулю. Эти результаты применяются к исследованию единственности элемента наименьшего уклонения для аппроксимаций со знакочувствительным весом.

§ 1. Критерии элемента наименьшего уклонения

Напомним, что линейное топологическое пространство Y называется *локально выпуклым*, если оно хаусдорфово и в нем существует база окрестностей нуля, состоящая из выпуклых множеств. Заданная на локально выпуклом пространстве Y функция $p: Y \rightarrow \mathbb{R}$ называется *сублинейной*, если для всех $x, y \in Y$ и для любого $\alpha > 0$ имеют место соотношения

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad p(\alpha x) = \alpha p(x)$$

(заметим, что в выпуклом анализе обычно допускают, что сублинейная функция принимает также и бесконечные значения, но в настоящей работе мы будем рассматривать только всюду конечные сублинейные функции).

Непосредственно из определения получаем, что для каждой сублинейной функции $p: Y \rightarrow \mathbb{R}$ при всех $x, y \in Y$ и при любых $\alpha_2 \geq \alpha_1 > 0$ справедливы неравенства

$$-p(-y) \leq \frac{p(x + \alpha_1 y) - p(x)}{\alpha_1} \leq \frac{p(x + \alpha_2 y) - p(x)}{\alpha_2} \leq p(y), \quad (2)$$

откуда следует, что для каждой пары $x, y \in Y$ существует производная функции p в точке x по направлению y :

$$Dp(x; y) := \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \frac{p(x + \alpha y) - p(x)}{\alpha},$$

при этом

$$-p(-y) \leq Dp(x, y) \leq \frac{p(x + \alpha y) - p(x)}{\alpha} \leq p(y) \quad \forall \alpha > 0. \quad (3)$$

Легко проверяется (см., например, [24, с. 34]), что при каждом фиксированном x функция $Dp(x; y)$ сублинейна по y .

Пусть T – компактное топологическое пространство, Y – локально выпуклое пространство (вещественное или комплексное), $C(T, Y)$ – линейное пространство всех непрерывных функций на T со значениями в Y (над тем же числовым полем, что и Y), $\{p_t\}_{t \in T}$ – семейство непрерывных неотрицательных сублинейных функций на Y , относительно которого мы предполагаем, что отображение

$(t, y) \rightarrow p_t(y)$ полунепрерывно сверху на $T \times Y$. Определим сублинейный функционал $P: C(T, Y) \rightarrow \mathbb{R}$ равенством

$$P(h) := \sup_{t \in T} p_t(h(t)). \quad (4)$$

Пусть $f \in C(T, Y)$, A – выпуклое подмножество $C(T, Y)$ с вещественной линейной размерностью $\dim_{\mathbb{R}} A \geq 1$, $g \in A$,

$$R(f - g, P, T) := \{t \in T: p_t(f(t) - g(t)) = P(f - g)\}$$

(из полунепрерывности сверху отображения $(t, y) \rightarrow p_t(y)$ вытекает возможность замены $\sup$ в (4) на $\max$ и компактность множества $R(f - g, P, T)$). Мы говорим, что g является элементом наименьшего P -уклонения функции f в A , если

$$P(f - g) = \inf_{l \in A} P(f - l) =: E(P, A, f).$$

Величину $E(P, A, f)$ мы будем называть величиной наименьшего P -уклонения функции f в A .

В принятых выше обозначениях сформулируем наш первый результат – критерий типа Чеботарёва–Колмогорова, характеризующий элемент наименьшего P -уклонения функции f в A .

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы g был элементом наименьшего P -уклонения функции f в A , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\sup_{t \in R(f - g, P, T)} Dp_t(f(t) - g(t); g(t) - l(t)) \geq 0 \quad \forall l \in A.$$

Отметим, что конечномерность множества A в теореме 1 не требуется, причем теорема справедлива как для вещественного, так и для комплексного пространства Y . Ключевую роль в доказательстве теоремы 1 играет следующий вспомогательный результат, из которого, в частности, вытекает, что $\sup$ в теореме 1 (и в приводимых ниже теоремах 2–4 и в следствиях 15 и 16) можно заменить на $\max$.

ЛЕММА 1. *Пусть $f \in C(T, Y)$, $g, l \in A$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) *функция $Dp_t(f(t) - g(t); g(t) - l(t))$ полунепрерывна сверху на множестве $R(f - g, P, T)$;*

б) *существует точка $\tau \in R(f - g, P, T)$, для которой*

$$\begin{aligned} & Dp_{\tau}(f(\tau) - g(\tau); g(\tau) - l(\tau)) \\ &= \sup_{t \in R(f - g, P, T)} Dp_t(f(t) - g(t); g(t) - l(t)); \end{aligned} \quad (5)$$

в) *для каждого $\tau \in R(f - g, P, T)$ справедливо неравенство*

$$Dp_{\tau}(f(\tau) - g(\tau); g(\tau) - l(\tau)) \leq DP(f - g; g - l);$$

г) *если $DP(f - g; g - l) \geq 0$, то для каждой точки $\tau \in R(f - g, P, T)$, удовлетворяющей (5), выполняется равенство*

$$Dp_{\tau}(f(\tau) - g(\tau); g(\tau) - l(\tau)) = DP(f - g; g - l). \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $l \in A$, $h = g - l$. Докажем утверждение а). Выберем произвольно точку $\tau \in R(f - g, P, T)$ и $\varepsilon > 0$. Из определения производной по направлению и неравенств (2) следует, что найдется такое $\alpha_0 > 0$, при котором для всех $\alpha \in (0, \alpha_0]$ справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} Dp_\tau(f(\tau) - g(\tau); h(\tau)) &\leq \frac{p_\tau(f(\tau) - g(\tau) + \alpha h(\tau)) - p_\tau(f(\tau) - g(\tau))}{\alpha} \\ &\leq \frac{p_\tau(f(\tau) - g(\tau) + \alpha_0 h(\tau)) - p_\tau(f(\tau) - g(\tau))}{\alpha_0} \\ &\leq Dp_\tau(f(\tau) - g(\tau); h(\tau)) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Поскольку $p_t(f(t) - g(t)) = P(f - g)$ для любого $t \in R(f - g, P, T)$ и функция $p_t(f(t) - g(t) + \alpha_0 h(t))$ полунепрерывна сверху на T , то существует такая окрестность U точки τ , что при всех $t \in U \cap R(f - g, P, T)$ выполняется двойное неравенство

$$\begin{aligned} Dp_t(f(t) - g(t); h(t)) &\leq \frac{p_t(f(t) - g(t) + \alpha_0 h(t)) - p_t(f(t) - g(t))}{\alpha_0} \\ &\leq Dp_\tau(f(\tau) - g(\tau); h(\tau)) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Поскольку τ и ε в наших рассуждениях выбирались произвольным образом, то это и означает полунепрерывность функции $Dp_t(f(t) - g(t); h(t))$ на $R(f - g, P, T)$.

Утверждение б) сразу же вытекает из а), поскольку каждая функция, полунепрерывная сверху на компактном множестве, достигает на нем своего максимума.

Докажем утверждение в). Пусть $\tau \in R(f - g, P, T)$. Тогда

$$\begin{aligned} &\frac{p_\tau(f(\tau) - g(\tau) + \alpha h(\tau)) - p_\tau(f(\tau) - g(\tau))}{\alpha} \\ &\leq \frac{P(f - g + \alpha h) - P(f - g)}{\alpha} \quad \forall \alpha > 0, \end{aligned}$$

откуда переходом к пределу при $\alpha \rightarrow 0$ получаем неравенство

$$Dp_\tau(f(\tau) - g(\tau); h(\tau)) \leq DP(f - g; h).$$

Осталось доказать утверждение г). Пусть точка τ удовлетворяет равенству (5) и $DP(f - g; h) \geq 0$. Докажем, что

$$Dp_\tau(f(\tau) - g(\tau); h(\tau)) \geq DP(f - g; h).$$

Предположим противное. Тогда

$$\delta := DP(f - g; h) - Dp_\tau(f(\tau) - g(\tau); h(\tau)) > 0$$

и, значит,

$$Dp_t(f(t) - g(t); h(t)) \leq DP(f - g; h) - \delta \quad \forall t \in R(f - g, P, T).$$

Пусть $\varepsilon = \frac{\delta}{3}$. Так же, как и при доказательстве утверждения а), устанавливаем, что для каждого $t \in R(f - g, P, T)$ существуют открытое множество $U(t) \ni t$ и положительное число $\alpha(t)$ такие, что при всех $s \in U(t)$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{p_s(f(s) - g(s) + \alpha(t)h(s)) - P(f - g)}{\alpha(t)} \\ & \leq Dp_\tau(f(\tau) - g(\tau); h(\tau)) + 2\varepsilon \leq DP(f - g; h) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Поскольку $R(f - g, P, T)$ компактно в T , то существуют натуральное k и точки $t_1, \dots, t_k \in R(f - g, P, T)$ такие, что множества $U(t_1), \dots, U(t_k)$ образуют покрытие $R(f - g, P, T)$. Пусть $\alpha_0 = \min_{j=\overline{1, k}} \alpha(t_j)$, $U = \bigcup_{j=1}^k U(t_j)$. Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{p_t(f(t) - g(t) + \alpha_0 h(t)) - P(f - g)}{\alpha_0} \\ & \leq Dp_\tau(f(\tau) - g(\tau); h(\tau)) + 2\varepsilon \leq DP(f - g; h) - \varepsilon \quad \forall t \in U. \end{aligned} \quad (7)$$

Поскольку множество $T \setminus U$ компактно, то

$$\sup_{t \in T \setminus U} p_t(f(t) - g(t)) = \max_{t \in T \setminus U} p_t(f(t) - g(t)) < P(f - g)$$

и, следовательно, существует такое $\alpha_1 \in (0, \alpha_0]$, что

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in T \setminus U} p_t(f(t) - g(t) + \alpha_1 h(t)) \\ & \leq \sup_{t \in T \setminus U} p_t(f(t) - g(t)) + \alpha_1 \sup_{t \in T \setminus U} p_t(h(t)) \\ & \leq \max_{t \in T \setminus U} p_t(f(t) - g(t)) + \alpha_1 \max_{t \in T \setminus U} p_t(h(t)) < P(f - g), \end{aligned}$$

откуда получаем неравенство

$$\sup_{t \in T \setminus U} p_t(f(t) - g(t) + \alpha_1 h(t)) - P(f - g) < 0. \quad (8)$$

Из соотношений (7) и (8) вытекает, что

$$\begin{aligned} DP(f - g; h) & \leq \frac{P(f - g + \alpha_1 h) - P(f - g)}{\alpha_1} \\ & = \sup_{t \in T} \frac{p_t(f(t) - g(t) + \alpha_1 h(t)) - P(f - g)}{\alpha} < \max\{0, DP(f - g; h)\}. \end{aligned}$$

С другой стороны, $DP(f - g; h) \geq 0$. Полученное противоречие устанавливает справедливость равенства (6). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Из неравенств (3) следует, что g является элементом наименьшего P -уклонения функции f в A тогда и только тогда,

когда при всех $l \in A$ выполняется неравенство $DP(f - g; g - l) \geq 0$. Применяя лемму 1, отсюда сразу же получаем утверждение доказываемой теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если для функций $f \in C(T, Y)$ и $g \in A$ выполнено условие

$$\sup_{t \in R(f-g, P, T)} Dp_t(f(t) - g(t); g(t) - l(t)) > 0 \quad \forall l \in A,$$

то из неравенств (3) следует, что g – единственный элемент наименьшего P -уклонения функции f в A . Обратное, как показывает следующий пример, вообще говоря, неверно.

ПРИМЕР 1. Пусть $T = \Delta = [-1, 1]$, $Y = \mathbb{R}$, $p_t(\cdot) = |\cdot|$ для любого $t \in \Delta$, $f(t) \equiv 1 - t^2$, $A = L = \{l(t) \equiv ct : c \in \mathbb{R}\}$. Тогда $P(h) = \|h\|_\Delta$ для любого $h \in C(\Delta)$ и функция $g \equiv 0$ является единственным элементом наименьшего равномерного уклонения функции f в A . В самом деле, если $l_\varepsilon(t) \equiv \varepsilon t$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, то, приравнявая нулю производную, получим, что функция $|f(t) - l_\varepsilon(t)|$ достигает своего максимума на Δ в точке $t = -\frac{\varepsilon}{2}$ и $\|f - \varepsilon l_1\|_\Delta = \|f - l_\varepsilon\|_\Delta = 1 + \frac{\varepsilon^2}{4}$. Поэтому

$$dP(f; -l_1) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\|f - \varepsilon l_1\|_\Delta - \|f\|_\Delta}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{(1 + \frac{\varepsilon^2}{4}) - 1}{\varepsilon} = 0.$$

Приведем ряд следствий, вытекающих из теоремы 1. Пусть, как обычно, Y' обозначает пространство всех линейных функционалов на Y (алгебраически сопряженное к Y), Y^* – пространство всех непрерывных линейных функционалов на Y (топологически сопряженное к Y).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $f \in C(T, Y)$, $E(P, A, f) > 0$, $g \in A$. Тогда для того, чтобы g был элементом наименьшего P -уклонения функции f в A , необходимо и достаточно, чтобы для каждого $l \in A$ нашлись точка $\tau \in R(f - g, P, T)$ и функционал $l' \in Y'$ такие, что:

- а) $\operatorname{Re} l'(y) \leq p_\tau(y)$ для любого $y \in Y$;
- б) $\operatorname{Re} l'(f(\tau) - g(\tau)) = p_\tau(f(\tau) - g(\tau))$;
- в) $\operatorname{Re} l'(g(\tau) - l(\tau)) \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть g – элемент наименьшего P -уклонения функции f в A , $l \in A$. Применив теорему 1 и лемму 1, найдем точку $\tau \in R(f - g, P, T)$, для которой справедливо неравенство

$$Dp_\tau(f(\tau) - g(\tau); g(\tau) - l(\tau)) \geq 0. \quad (9)$$

Пусть X – линейная оболочка над $\mathbb{R}$ векторов $f(\tau) - g(\tau)$ и $l(\tau) - g(\tau)$. Поскольку $E(P, A, f) > 0$, то $f \in C(T, Y) \setminus A$ и $f(\tau) - g(\tau) \neq 0$, поэтому $\dim_{\mathbb{R}} X = 1$ либо $\dim_{\mathbb{R}} X = 2$. Если $\dim_{\mathbb{R}} X = 1$, то определим на X вещественный линейный функционал $l'_{\mathbb{R}}$ при помощи равенства

$$l'_{\mathbb{R}}(f(\tau) - g(\tau)) = p_\tau(f(\tau) - g(\tau)) = P(f - g).$$

Тогда из формулы (9) вытекает, что при достаточно малых $\alpha > 0$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} l'_{\mathbb{R}}(f(\tau) - g(\tau)) + \alpha l'_{\mathbb{R}}(g(\tau) - l(\tau)) \\ = l'_{\mathbb{R}}(f(\tau) - g(\tau) + \alpha(g(\tau) - l(\tau))) \\ = p_{\tau}(f(\tau) - g(\tau) + \alpha(g(\tau) - l(\tau))) \\ \geq p_{\tau}(f(\tau) - g(\tau)) = l'_{\mathbb{R}}(f(\tau) - g(\tau)), \end{aligned}$$

откуда следует, что $l'_{\mathbb{R}}(g(\tau) - l(\tau)) \geq 0$.

Пусть теперь $\dim_{\mathbb{R}} X = 2$. Тогда определяем линейный функционал $l'_{\mathbb{R}}: X \rightarrow \mathbb{R}$ равенствами

$$\begin{aligned} l'_{\mathbb{R}}(f(\tau) - g(\tau)) &= p_{\tau}(f(\tau) - g(\tau)), \\ l'_{\mathbb{R}}(g(\tau) - l(\tau)) &= Dp_{\tau}(f(\tau) - g(\tau); g(\tau) - l(\tau)) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \frac{p_{\tau}(f(\tau) - g(\tau) + \alpha(g(\tau) - l(\tau))) - p_{\tau}(f(\tau) - g(\tau))}{\alpha}. \end{aligned}$$

Покажем, что $l'_{\mathbb{R}}(y) \leq p_{\tau}(y)$ для любого $y \in X$. При всех $\alpha, \beta \leq 0$ имеет место неравенство

$$l'_{\mathbb{R}}(\beta(f(\tau) - g(\tau)) + \alpha(g(\tau) - l(\tau))) \leq 0.$$

С другой стороны, неравенство

$$\begin{aligned} l'_{\mathbb{R}}(\beta(f(\tau) - g(\tau)) + \alpha(g(\tau) - l(\tau))) \\ \leq p_{\tau}(\beta(f(\tau) - g(\tau)) + \alpha(g(\tau) - l(\tau))) \end{aligned}$$

тривиально в случае $\alpha\beta = 0$, а при $\alpha, \beta \geq 0$ оно вытекает из определения производной по направлению функции p_{τ} (ввиду положительной однородности функционала $l'_{\mathbb{R}}$ и функции p_{τ} в этом случае можно считать $\beta = 1$, и, применяя неравенство

$$\begin{aligned} Dp_{\tau}(f(\tau) - g(\tau); g(\tau) - l(\tau)) \\ \leq \frac{p_{\tau}(f(\tau) - g(\tau) + \alpha(g(\tau) - l(\tau))) - p_{\tau}(f(\tau) - g(\tau))}{\alpha}, \end{aligned}$$

немедленно получаем требуемое). Поэтому достаточно доказать неравенство

$$\begin{aligned} l'_{\mathbb{R}}(\beta(f(\tau) - g(\tau)) + \alpha(g(\tau) - l(\tau))) \\ \leq p_{\tau}(\beta(f(\tau) - g(\tau)) + \alpha(g(\tau) - l(\tau))) \end{aligned} \quad (10)$$

при условии, что $\alpha\beta < 0$. Если $\alpha > 0$, $\beta < 0$, то (10) эквивалентно неравенству

$$\begin{aligned} \alpha Dp_{\tau}(f(\tau) - g(\tau); g(\tau) - l(\tau)) \\ \leq p_{\tau}(-|\beta|(f(\tau) - g(\tau)) + \alpha(g(\tau) - l(\tau))) + |\beta|p_{\tau}(f(\tau) - g(\tau)), \end{aligned}$$

которое вытекает из сублинейности функции p_{τ} и неравенства

$$Dp_{\tau}(f(\tau) - g(\tau); g(\tau) - l(\tau)) \leq p_{\tau}(g(\tau) - l(\tau)).$$

Если же $\alpha < 0$, $\beta > 0$, то ввиду положительной однородности обеих частей (10) можно считать $\beta = 1$ и, таким образом, нужно для любого $\alpha < 0$ доказать неравенство

$$l'_{\mathbb{R}}(f(\tau) - g(\tau) + \alpha(g(\tau) - l(\tau))) \\ \leq p_{\tau}(f(\tau) - g(\tau) + \alpha(g(\tau) - l(\tau))),$$

которое эквивалентно неравенству

$$p_{\tau}(f(\tau) - g(\tau)) \leq p_{\tau}(f(\tau) - g(\tau) + \alpha(g(\tau) - l(\tau))) \\ + |\alpha| Dp_{\tau}(f(\tau) - g(\tau); g(\tau) - l(\tau)).$$

Из определения производной по направлению следует, что последнее будет выполнено, если для любого $\gamma > 0$ справедливо неравенство

$$p_{\tau}(f(\tau) - g(\tau)) \leq p_{\tau}(f(\tau) - g(\tau) - |\alpha|(g(\tau) - l(\tau))) \\ + |\alpha| \frac{p_{\tau}(f(\tau) - g(\tau) + \gamma(g(\tau) - l(\tau))) - p_{\tau}(f(\tau) - g(\tau))}{\gamma},$$

которое после умножения обеих частей на γ и прибавления к ним слагаемого $|\alpha|p_{\tau}(f(\tau) - g(\tau))$ приобретает следующий вид:

$$(\gamma + |\alpha|)p_{\tau}(f(\tau) - g(\tau)) \leq p_{\tau}(\gamma(f(\tau) - g(\tau)) - \gamma|\alpha|(g(\tau) - l(\tau))) \\ + p_{\tau}(|\alpha|(f(\tau) - g(\tau)) + \gamma|\alpha|(g(\tau) - l(\tau))).$$

Однако последнее сразу же вытекает из сублинейности функции p_{τ} , что доказывает справедливость неравенства (10). Таким образом,

$$l'_{\mathbb{R}}(y) \leq p_{\tau}(y) \quad (11)$$

при всех $y \in X$. Применяя теорему Хана–Банаха (см., например, [24]), продолжим функционал $l'_{\mathbb{R}}$ с X на Y таким образом, что оценка (11) имеет место при всех $y \in Y$. Если пространство Y вещественное, то полагаем $l'(y) := l'_{\mathbb{R}}(y)$, $y \in Y$. Если же Y – комплексное пространство, то, пользуясь тем, что в Y определено умножение на мнимую единицу i , определяем функционал $l': Y \rightarrow \mathbb{C}$ с помощью равенства

$$l'(y) = l'_{\mathbb{R}}(y) - il'_{\mathbb{R}}(iy). \quad (12)$$

Тогда l' – функционал, для которого выполнены свойства а)–в).

Достаточность. Если элемент $g \in A$ удовлетворяет условию следствия, то, фиксируя произвольным образом элемент $l \in A$, точку $\tau \in R(f - g, P, T)$ и функционал l' , для которого выполнены свойства а)–в), при каждом $\alpha > 0$ получаем цепочку соотношений

$$p_{\tau}(f(\tau) - g(\tau) + \alpha(g(\tau) - l(\tau))) - p_{\tau}(f(\tau) - g(\tau)) \\ \geq \operatorname{Re} l'(f(\tau) - g(\tau) + \alpha(g(\tau) - l(\tau))) - l'(f(\tau) - g(\tau)) \\ \geq \operatorname{Re} l'(f(\tau) - g(\tau) + \alpha(g(\tau) - l(\tau))) - \operatorname{Re} l'(f(\tau) - g(\tau)) \\ \geq \alpha \operatorname{Re} l'(g(\tau) - l(\tau)),$$

которая в сочетании с формулами (2) и (3) приводит к неравенству

$$Dp_\tau(f(\tau) - g(\tau); g(\tau) - l(\tau)) \geq \operatorname{Re} l'(g(\tau) - l(\tau)).$$

Применяя теорему 1, заключаем, что g – элемент наименьшего P -уклонения функции f в A . Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2 [23], [24]. Пусть L – конечномерное линейное подпространство в $C(T, Y)$, $\dim_{\mathbb{R}} L \geq 1$, $f \in C(T, Y)$, $E(P, L, f) > 0$, $g \in L$. Тогда для того, чтобы g был элементом наименьшего P -уклонения функции f в L , необходимо и достаточно, чтобы нашлись натуральное число $r \leq \dim_{\mathbb{R}} L + 1$, точки $t_1, \dots, t_r \in T$, элементы $l'_1, \dots, l'_r \in Y'$ и неотрицательные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, $\sum_{j=1}^r \alpha_j = 1$, такие, что:

- а) $\operatorname{Re} l'_j(y) \leq p_{t_j}(y)$ для любого $y \in Y$, $j = \overline{1, r}$;
- б) $\operatorname{Re} l'_j(f(t_j) - g(t_j)) = p_{t_j}(f(t_j) - g(t_j)) = P(f - g)$, $j = \overline{1, r}$;
- в) $\sum_{j=1}^r \alpha_j \operatorname{Re} l'_j(l(t_j)) = 0$ для любого $l \in L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n = \dim_{\mathbb{R}} L$. Заметим, что в случае подпространства $A = L$ условие в) следствия 1 равносильно следующему условию:

в') $\operatorname{Re} l'(l(\tau)) \geq 0$ для всех $l \in L$.

Необходимость. Зафиксируем в L базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ и двойственный к нему базис $\{e^1, \dots, e^n\}$ в пространстве $L' = L^*$: $e^k(e_k) = 1$, $e^k(e_j) = 0$ $k, j = \overline{1, n}$, $k \neq j$. Пусть g – элемент наименьшего P -уклонения функции f в L . Тогда для каждого $l \in L$ найдутся точка $\tau \in R(f - g, P, T)$ и функционал $l' \in Y'$, удовлетворяющие условиям а), б) следствия 1 и условию в'), которые в совокупности определяют функционал $l^* \in L^*$ равенством $l^*(h) = \operatorname{Re} l'(h(\tau))$ для любого $h \in L$. Если

$$l = a_1(l)e_1 + \dots + a_n(l)e_n, \quad l^* = b_1(l)e^1 + \dots + b_n(l)e^n,$$

то

$$l^*(l) = a_1(l)b_1(l) + \dots + a_n(l)b_n(l) = (a(l), b(l)),$$

где $a(l) = (a_1(l), \dots, a_n(l))$, $b(l) = (b_1(l), \dots, b_n(l))$. Таким образом, каждому вектору $l \in L$ мы ставим в соответствие векторы $a(l), b(l) \in \mathbb{R}^n$, при этом условие в') означает, что

$$(a(l), b(l)) \geq 0 \quad \forall l \in L. \quad (13)$$

Пусть B – множество всех векторов вида $b(l)$, $l \in L$. Поскольку $\{a(l): l \in L\} = \mathbb{R}^n$, то условие (13) означает, что для любого $h \in \mathbb{R}^n$ найдется такой вектор $b(l) \in B$, при котором $(h, b(l)) \geq 0$. Последнее равносильно тому, что выпуклая оболочка множества B содержит нуль и, следовательно, по теореме Каратеодори о барицентрическом представлении выпуклой оболочки непустого подмножества $\mathbb{R}^n$ (см., например, [24]) существуют натуральное $r \leq n + 1$, элементы $l_1, \dots, l_r \in L$, неотрицательные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, $\sum_{j=1}^r \alpha_j = 1$, такие, что $\alpha_1 b(l_1) + \dots + \alpha_r b(l_r) = 0$. Учитывая определение векторов $b(l_1), \dots, b(l_r)$, приходим к условиям а)–в) следствия.

Достаточность проще проверить непосредственно: если существуют натуральное $r \leq n + 1$, точки $t_1, \dots, t_r \in T$, элементы $l'_1, \dots, l'_r \in Y'$ и неотрицательные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, $\sum_{j=1}^r \alpha_j = 1$, удовлетворяющие условиям а)–в)

следствия, то для произвольного $l \in L$ имеем цепочку соотношений

$$\begin{aligned}
 P(f - g) &= \sum_{j=1}^r \alpha_j p_{t_j}(f(t_j) - g(t_j)) = \sum_{j=1}^r \alpha_j \operatorname{Re} l'_j(f(t_j) - g(t_j)) \\
 &\leq \sum_{j=1}^r \alpha_j \operatorname{Re} l'_j(f(t_j) - g(t_j)) + \sum_{j=1}^r \alpha_j \operatorname{Re} l'_j(l(t_j)) \\
 &\leq \sum_{j=1}^r \alpha_j p_{t_j}(f(t_j) - g(t_j) + l(t_j)) \\
 &\leq \sum_{j=1}^r \alpha_j P(f - g + l) = P(f - g + l),
 \end{aligned}$$

которая и означает, что g – элемент наименьшего P -уклонения функции f в L . Следствие доказано.

В работах [23] и [24] этот результат установлен при помощи так называемой теоремы об очистке в субдифференциальной форме. Приведенное выше доказательство, основанное на применении теоремы Каратеодори, в значительной степени использует рассуждения Н.Г. Чеботарёва (см. [1] и [2]) и имеет то преимущество, что практически без изменений позволяет установить подобную характеризацию сильно единственного элемента наименьшего P -уклонения функции f в конечномерном подпространстве $L \subset C(T, Y)$ (см. далее следствие 18). Из приведенного доказательства следствия 2 вытекает еще одна формулировка содержащегося в нем критерия.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть L – конечномерное линейное подпространство в $C(T, Y)$, $\dim_{\mathbb{R}} L \geq 1$, $f \in C(T, Y)$, $E(P, L, f) > 0$, $g \in L$. Тогда для того, чтобы g был элементом наименьшего P -уклонения функции f в L , необходимо и достаточно, чтобы нашлись натуральное число $r \leq \dim_{\mathbb{R}} L + 1$, точки $t_1, \dots, t_r \in T$ и элементы $l'_1, \dots, l'_r \in Y'$ такие, что:

- а) $\operatorname{Re} l'_j(y) \leq p_{t_j}(y)$ для любого $y \in Y$, $j = \overline{1, r}$;
- б) $\operatorname{Re} l'_j(f(t_j) - g(t_j)) = p_{t_j}(f(t_j) - g(t_j)) = P(f - g)$, $j = \overline{1, r}$;
- в) для любого $l \in L$ найдется номер $j \in \{1, \dots, r\}$, при котором выполнено неравенство $\operatorname{Re} l'_j(l(t_j)) \geq 0$.

Для формулировки следующего результата введем ряд обозначений. Пусть Y – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_Y$. Как обычно, норма элемента $y^* \in Y^*$ определяется равенством

$$\|y^*\|_{Y^*} = \sup_{y \in Y \setminus \{0\}} \frac{|y^*(y)|}{\|y\|_Y}.$$

Если $y \in Y \setminus \{0\}$, то $S^*(y) := \{y^* \in Y^* : \|y^*\|_{Y^*} = 1, y^*(y) = \|y\|_Y\}$ (из теоремы Хана–Банаха вытекает, что $S^*(y) \neq \emptyset$). Пусть $p_t(\cdot) = p(\cdot) := \|\cdot\|_Y$ для любого $t \in T$. Тогда

$$P(h) = \|h\|_{C(T, Y)} := \max_{t \in T} \|h(t)\|_Y$$

для всех $h \in C(T, Y)$, и, как обычно, будем называть элемент наименьшего P -уклонения функции f в A ее элементом наименьшего равномерного уклонения в A .

СЛЕДСТВИЕ 4 [15, с. 58–62]. Пусть Y – комплексное банахово пространство, $f \in C(T, Y) \setminus A$, $g \in A$. Тогда для того, чтобы g был элементом наименьшего равномерного уклонения функции f в A , необходимо и достаточно, чтобы для каждого $l \in A$ нашлись точка $\tau \in R(f - g, \|\cdot\|_{C(T, Y)}, T)$ и функционал $l^* \in S^*(f(\tau) - g(\tau))$ такие, что выполнено неравенство $\operatorname{Re} l^*(g(\tau) - l(\tau)) \geq 0$.

Заметив, что условия а) и б) следствия 1 в применении к нашему случаю равносильны условию $l' \in S^*(f(\tau) - g(\tau))$, а для функционала l' , определенного равенством (12), справедлива импликация $(\|l'_\mathbb{R}\|_{Y^*} \leq 1) \implies (\|l'\|_{Y^*} \leq 1)$ (см., например, доказательство теоремы Хана–Банаха для комплексного случая в [25, гл. 3]), приходим к выводу, что следствие 4 – частный случай следствия 1.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть Y – комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, $f \in C(T, Y) \setminus A$. Тогда для того, чтобы элемент $g \in A$ был элементом наименьшего равномерного уклонения функции f в A , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\max_{t \in R(f - g, \|\cdot\|_{C(T, Y)}, T)} \operatorname{Re}(f(t) - g(t), g(t) - l(t)) \geq 0 \quad \forall l \in A.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В этом случае $p_t(y) = p(y) = \|y\|_Y = \sqrt{(y, y)}$ для всех $t \in T$ и $y \in Y$, и доказательство сводится к элементарной проверке того, что при всех $x \in Y \setminus \{0\}$ и $y \in Y$ имеет место равенство $Dp(x; y) = \frac{\operatorname{Re}(x, y)}{\|x\|_Y}$.

Этот результат, конечно же, вытекает и из следствия 4, если учесть общий вид непрерывного линейного функционала в гильбертовом пространстве. Для случая, когда $A = L$ – конечномерное линейное подпространство в $C(T, Y)$, следствие 5 впервые установлено С. И. Зуховицким и С. Б. Стечкиным (см. [26]).

Следующее следствие теоремы 1 относится к случаю аппроксимаций со знакочувствительным весом. Напомним их определение. Пусть $p = (p_-, p_+)$ – упорядоченная пара неотрицательных полунепрерывных сверху функций на T , называемая в дальнейшем полунепрерывным сверху *знакочувствительным весом* на T (см. [19], [20]), $Y = \mathbb{R}$. Для $y \in \mathbb{R}$ обозначим

$$y^+ := \max\{y, 0\}, \quad y^- := -\min\{y, 0\},$$

для функции $h \in C(T)$ –

$$\begin{aligned} h^+(t) &:= \max\{h(t), 0\}, & h^-(t) &:= -\min\{h(t), 0\}, \\ (h, p)(t) &= h^+(t)p_+(t) - h^-(t)p_-(t), & t &\in T. \end{aligned}$$

Пусть $p_t(y) := y^+p_+(t) + y^-p_-(t)$, $t \in T$, $y \in \mathbb{R}$,

$$P(h) = \sup_{t \in T} p_t(h(t)) = \max_{t \in T} |(h, p)(t)| =: \|h\|_{p, T}, \quad h \in C(T).$$

В этом случае элемент наименьшего P -уклонения функции f в A мы называем ее *элементом наименьшего уклонения в A с весом p* . Отметим, что если компоненты знакочувствительного веса $p = (p_-, p_+)$ априори только ограничены

на T , но не обязательно полунепрерывны сверху, то для веса $\bar{p} = (\bar{p}_-, \bar{p}_+)$, полученного из p с помощью *полунепрерывной сверху регуляризации по Бэру* его компонент (значение функции $\bar{p}_-$ в точке $\tau \in T$ определяется как наименьшее $y \in \mathbb{R}$, при котором для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность $U \ni \tau$, что $\bar{p}_-(t) \leq y + \varepsilon$ для любого $t \in U$; аналогично определяется $\bar{p}_+(\tau)$), при всех $h \in C(T)$ имеет место равенство

$$\sup_{t \in T} |(h, p)(t)| = \max_{t \in T} |(h, \bar{p})(t)|,$$

поэтому в теории знакочувствительных аппроксимаций с ограниченным весом непрерывных функций непрерывными можно без уменьшения общности ограничиться рассмотрением полунепрерывных сверху знакочувствительных весов, и в дальнейшем мы всегда будем иметь дело только с такими весами.

СЛЕДСТВИЕ 6 [16]. Пусть p – полунепрерывный сверху знакочувствительный вес на T , $f \in C(T)$, $g \in A$, $|f - g|_{p, T} > 0$. Тогда для того, чтобы g был элементом наименьшего уклонения функции f в A с весом p , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\max_{t \in R(f - g, |\cdot|_{p, T}, T)} (f(t) - g(t))(g(t) - l(t)) \geq 0 \quad \forall l \in A. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть g – элемент наименьшего уклонения с весом p функции f , l – произвольный элемент множества A . Определим функцию $p_{f-g}: R(f - g, |\cdot|_{p, T}, T) \rightarrow \mathbb{R}$ следующими равенствами: $p_{f-g}(t) = p_+(t)$ при $(f - g)(t) > 0$, $p_{f-g}(t) = -p_-(t)$ при $(f - g)(t) < 0$. Тогда элементарной проверкой получим

$$Dp_t(f(t) - g(t); g(t) - l(t)) = p_{f-g}(t)(g(t) - l(t))$$

для всех $t \in R(f - g, |\cdot|_{p, T}, T)$. Согласно теореме 1 и лемме 1 существует точка $\tau \in R(f - g, |\cdot|_{p, T}, T)$, в которой

$$p_{f-g}(\tau)(g(\tau) - l(\tau)) \geq 0. \quad (15)$$

Поскольку $|f - g|_{p, T} > 0$, то отсюда вытекает, что

$$(f(\tau) - g(\tau))(g(\tau) - l(\tau)) \geq 0, \quad (16)$$

и, следовательно, условие (14) выполнено. Обратно, если для функций $f \in C(T)$, $g \in A$, $|f - g|_{p, T} > 0$, выполнено (14), то для каждого $l \in A$ существует точка $\tau \in T$, для которой справедливо (16) и, значит, (15), откуда, применяя теорему 1, заключаем, что g – элемент наименьшего уклонения функции f в A с весом p . Следствие доказано.

Приведем еще один критерий элемента наименьшего P -уклонения, близкий по форме к теореме 1.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f \in C(T, Y)$, $g \in A$. Тогда для того, чтобы g был элементом наименьшего P -уклонения функции f в A , необходимо и достаточно, чтобы для каждого $l \in A$ выполнялось условие

$$\sup_{t \in R(f - l, P, T)} Dp_t(f(t) - l(t); l(t) - g(t)) \leq 0. \quad (17)$$

Подобная характеристика элемента наименьшего уклонения появилась в работе [27] (см. также [28]). В отличие от теоремы 1 условие типа (17) позволяет охарактеризовать единственность элемента наименьшего P -уклонения.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f \in C(T, Y)$, $g \in A$. Тогда для того, чтобы g был единственным элементом наименьшего P -уклонения функции f в A , необходимо и достаточно, чтобы для каждого $l \in A \setminus \{g\}$ выполнялось условие

$$\sup_{t \in R(f-l, P, T)} Dp_t(f(t) - l(t); l(t) - g(t)) < 0. \quad (18)$$

Докажем теоремы 2 и 3 одновременно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 2 И 3. Необходимость. Пусть g – элемент наименьшего P -уклонения функции f в A , $l \in A$, t – произвольная точка множества $R(f-l, P, T)$. Тогда $P(f-l) \geq P(f-g)$ и, используя (3), получаем

$$\begin{aligned} Dp_t(f(t) - l(t); l(t) - g(t)) &\leq p_t(f(t) - l(t) + (l(t) - g(t))) \\ &\quad - p_t(f(t) - l(t)) = p_t(f(t) - l(t) + (l(t) - g(t)) - P(f-l)) \\ &\leq P(f-l + (l-g)) - P(f-l) = P(f-g) - P(f-l) \leq 0, \end{aligned} \quad (19)$$

откуда следует (17). Если g – единственный элемент наименьшего P -уклонения функции f в A , то $P(f-g) - P(f-l) < 0$ и, поскольку t является произвольной точкой множества $R(f-l, P, T)$, из (19) получаем двойное неравенство

$$\sup_{t \in R(f-l, P, T)} Dp_t(f(t) - l(t); l(t) - g(t)) \leq P(f-g) - P(f-l) < 0,$$

которое, очевидно, влечет неравенство (18).

Достаточность в теореме 3 установим, рассуждая от противного. Если для всех $l \in A$ выполнено (18) и g не является единственным элементом наименьшего P -уклонения функции f в A , то существует $l \in A \setminus \{g\}$, для которого $P(f-l) \leq P(f-g)$. Поскольку функция $P(\alpha(f-l) + (1-\alpha)(f-g))$ непрерывна при $0 \leq \alpha \leq 1$, то она достигает своего минимума в некоторой точке $\alpha_0 \in (0, 1]$ и $l_0 = \alpha_0 l + (1-\alpha_0)g$ – элемент наименьшего P -уклонения функции f для ее приближения элементами вида $\alpha l + (1-\alpha)g$, $0 \leq \alpha \leq 1$. По теореме 1 имеем

$$\sup_{t \in R(f-l_0, P, T)} Dp_t(f(t) - l_0(t); l_0(t) - g(t)) \geq 0.$$

Полученное противоречие показывает, что g – единственный элемент наименьшего P -уклонения функции f в A .

Осталось установить достаточность в теореме 2.

Пусть при всех $l \in A$ выполнено неравенство (17). Предполагая, что g не является элементом наименьшего P -уклонения функции f в A , и рассуждая точно так же, как и выше, найдем такой элемент $l \in A \setminus \{g\}$, что $P(f-l) < P(f-g)$ и l – единственный элемент наименьшего P -уклонения функции f для ее приближения элементами вида $\alpha l + (1-\alpha)g$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Тогда, очевидно, $DP(f-l; l-g) \geq 0$, $f \neq g$ и, поскольку $f-l \neq f-g$, возможны следующие случаи:

- а) $f = l$;
- б) $f-l = k(f-g)$, где $k > 0$;

в) $f - l = k(f - g)$, где $k < 0$;

г) векторы $f - g$ и $f - l$ линейно независимы.

В случае а) $P(f - l) = 0$,

$$\frac{P(f - l + \alpha(l - g)) - P(f - l)}{\alpha} = \frac{\alpha P(f - g)}{\alpha} = P(f - g) \quad \forall \alpha > 0,$$

откуда $0 \geq DP(f - l; l - g) = P(f - g) \geq 0$ и, следовательно, $P(f - g) = 0$, что противоречит неравенству $P(f - l) < P(f - g)$.

Рассмотрим случай б). Предположим, что $k < 1$. Тогда $l - g = (f - g) - (f - l) = (1 - k)(f - g)$ и при каждом $\alpha > 0$ имеем цепочку соотношений

$$\begin{aligned} & \frac{P(f - l + \alpha(l - g)) - P(f - l)}{\alpha} \\ &= \frac{P(k(f - g) + \alpha(1 - k)(f - g)) - kP(f - g)}{\alpha} \\ &= (1 - k)P(f - g) = DP(f - l; l - g) \leq 0, \end{aligned}$$

откуда $P(f - g) = P(f - l) = 0$ и неравенство $P(f - l) < P(f - g)$ невозможно. Если же $k \geq 1$, то $P(f - l) = kP(f - g) \geq P(f - g)$, что также противоречит неравенству $P(f - l) < P(f - g)$.

Пусть теперь имеет место случай в). Тогда $f \in [l, g]$ и для любого $\alpha > 0$ имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned} & \frac{P(f - l + \alpha(l - g)) - P(f - l)}{\alpha} \\ &= \frac{P(f - l + \alpha(l - f + f - g)) - P(f - l)}{\alpha} \\ &= \frac{P((1 - \alpha)(f - l) + \alpha k^{-1}(f - l)) - P(f - l)}{\alpha} \\ &= \frac{(1 - \alpha + \alpha k^{-1} - 1)P(f - l)}{\alpha} \\ &= (-1 + k^{-1})P(f - l) = DP(f - l; l - g). \end{aligned}$$

Из условия (17) и неравенства $DP(f - l; l - g) \geq 0$ следует, что $0 = P(f - l) < P(f - g)$. Но тогда

$$DP(f - f; f - g) = P(0; f - g) = P(f - g) > 0,$$

что противоречит условию теоремы 2.

Осталось рассмотреть случай г). Пусть X – подпространство в $C(T, Y)$, порожденное векторами f , g и l . Выберем в X базис, содержащий векторы $f - l$ и $f - g$, и для каждого $x \in X$ обозначим через $x(f - l)$ коэффициент при $f - l$ в разложении вектора x по выбранному базису. Определим непрерывный неотрицательный сублинейный функционал P_0 на X равенством $P_0(x) :=$

$|x(f - l)|$. Тогда при всех $\alpha, \beta \in (0, 1]$ имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned}
 & \frac{P_0(f - (\beta l + (1 - \beta)g) + \alpha(\beta l + (1 - \beta)g - g))}{\alpha} \\
 & - \frac{P_0(f - (\beta l + (1 - \beta)g))}{\alpha} \\
 & = \frac{P_0(\beta(f - l) + (1 - \beta)(f - g) + \alpha(\beta l + (1 - \beta)g - f + f - g))}{\alpha} \\
 & - \frac{P_0(\beta(f - l) + (1 - \beta)(f - g))}{\alpha} \\
 & = \frac{P_0(\beta(f - l) + (1 - \alpha)(1 - \beta)(f - g) - \alpha\beta(f - l) + \alpha(f - g))}{\alpha} \\
 & - \frac{P_0(\beta(f - l) + (1 - \beta)(f - g))}{\alpha} \\
 & = \frac{\beta - \alpha\beta - \beta}{\alpha} = -\beta = DP_0(f - (\beta l + (1 - \beta)g; \beta l + (1 - \beta)g - g)).
 \end{aligned}$$

Таким образом, построен непрерывный неотрицательный сублинейный функционал P_0 на X , для которого $DP_0(f - x; x - g) < 0$ при всех $x \in [l, g]$. Для каждого $\varepsilon > 0$ определим на множестве X непрерывный неотрицательный сублинейный функционал P_ε равенством $P_\varepsilon(x) := P(x) + \varepsilon P_0(x)$. Тогда $DP_\varepsilon(f - x; x - g) < 0$ при всех $x \in [l, g]$ и $\varepsilon > 0$. Отсюда, точно так же, как и при доказательстве достаточности в теореме 3, заключаем, что

$$P_\varepsilon(f - g) < P_\varepsilon(f - l) \quad \forall \varepsilon > 0,$$

и, переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем неравенство $P(f - g) \leq P(f - l)$, противоречащее сделанному предположению. Теоремы 2 и 3 доказаны.

Приведем несколько следствий, вытекающих из теорем 2 и 3.

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть $f \in C(T, Y)$, $g \in A$, $E(P, A, f) > 0$. Тогда для того, чтобы g был элементом наименьшего P -уклонения функции f в A , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие: каковы бы ни были $l \in A$, точка $\tau \in R(f - l, P, T)$ и функционал $l' \in Y'$ такой, что $\text{Re } l'(y) \leq p_\tau(y)$ при всех $y \in Y$ и $\text{Re } l'(f(\tau) - l(\tau)) = p_\tau(f(\tau) - l(\tau))$, справедливы неравенства $P(f - l) > 0$ и $\text{Re } l'(l(\tau) - g(\tau)) \leq 0$.

СЛЕДСТВИЕ 8. Пусть $f \in C(T, Y)$, $g \in A$, $E(P, A, f) > 0$. Тогда для того, чтобы g был единственным элементом наименьшего P -уклонения функции f в A , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие: каковы бы ни были $l \in A$, точка $\tau \in R(f - l, P, T)$ и функционал $l' \in Y'$ такой, что $\text{Re } l'(y) \leq p_\tau(y)$ при всех $y \in Y$ и $\text{Re } l'(f(\tau) - l(\tau)) = p_\tau(f(\tau) - l(\tau))$, справедливы неравенства $P(f - l) > 0$ и $\text{Re } l'(l(\tau) - g(\tau)) < 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЙ 7 и 8. Необходимость. Пусть g – элемент наименьшего P -уклонения функции f в A , $l \in A$, $\tau \in R(f - l, P, T)$, $l' \in Y'$, $\text{Re } l'(y) \leq p_\tau(y)$ при всех $y \in Y$, и пусть $\text{Re } l'(f(\tau) - l(\tau)) = p_\tau(f(\tau) - l(\tau))$. Тогда

$$\begin{aligned}
 \text{Re } l'(f(\tau) - l(\tau)) &= l'(f(\tau) - l(\tau)) = P(f - l) \\
 &\geq P(f - g) \geq p_\tau(f(\tau) - l(\tau)) \geq \text{Re } l'(f(\tau) - g(\tau)), \quad (20)
 \end{aligned}$$

откуда $\operatorname{Re} l'(l(\tau) - g(\tau)) \leq 0$. Если g – единственный элемент наименьшего P -уклонения функции f в A , то $P(f-l) > P(f-g)$ и из (20) получаем неравенство $\operatorname{Re} l'(l(\tau) - g(\tau)) < 0$. Необходимость условия $P(f-l) > 0$ в доказываемых следствиях очевидна.

Достаточность. Пусть выполнено условие следствия 7. Покажем, что тогда выполнено условие теоремы 2. Предположим противное. Тогда найдутся элемент $l \in A \setminus \{g\}$ и точка $\tau \in R(f-l, P, T)$, для которых выполнено неравенство

$$Dp_\tau(f(\tau) - l(\tau); l(\tau) - g(\tau)) > 0.$$

Рассмотрим отрезок $[l, g]$. Каждый отличный от l элемент $x \in [l, g]$ имеет вид $x = \alpha l + (1 - \alpha)g$, где $0 \leq \alpha < 1$, и $l - x = (1 - \alpha)(l - g)$,

$$\begin{aligned} Dp_\tau(f(\tau) - l(\tau); l(\tau) - x(\tau)) \\ = (1 - \alpha)Dp_\tau(f(\tau) - l(\tau); l(\tau) - g(\tau)) > 0 \quad \forall x \in [l, g] \setminus \{l\}. \end{aligned}$$

По теореме 1 имеем, что l – элемент наименьшего P -уклонения функции f для ее приближения элементами отрезка $[l, g]$. Далее, рассуждая точно так же, как и при доказательстве необходимости следствия 4, построим функционал $l' \in Y$, для которого $\operatorname{Re} l'(y) \leq p_\tau(y)$ при всех $y \in Y$, $\operatorname{Re} l'(f(\tau) - l(\tau)) = p_\tau(f(\tau) - l(\tau))$, $\operatorname{Re} l'(l(\tau) - g(\tau)) > 0$. Полученное противоречие показывает, что для всех $l \in A$ выполнено неравенство (17) и по теореме 2 g является элементом наименьшего P -уклонения функции f в A .

Точно так же устанавливается и достаточность в следствии 8. Следствия доказаны.

СЛЕДСТВИЕ 9. Пусть Y – комплексное банахово пространство, $f \in C(T, Y) \setminus A$, $g \in A$. Тогда для того, чтобы g был элементом наименьшего равномерного уклонения функции f в A , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие: каковы бы ни были $l \in A$, точка $\tau \in R(f-l, \|\cdot\|_{C(T, Y)}, T)$ и функционал $l^* \in S^*(f(\tau) - l(\tau))$, справедливо неравенство $\operatorname{Re} l^*(l(\tau) - g(\tau)) \leq 0$.

СЛЕДСТВИЕ 10. Пусть Y – комплексное банахово пространство, $f \in C(T, Y) \setminus A$, $g \in A$. Тогда для того, чтобы g был единственным элементом наименьшего равномерного уклонения функции f в A , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие: каковы бы ни были элемент $l \in A \setminus g$, точка $\tau \in R(f-l, \|\cdot\|_{C(T, Y)}, T)$ и функционал $l^* \in S^*(f(\tau) - l(\tau))$, справедливо неравенство $\operatorname{Re} l^*(l(\tau) - g(\tau)) < 0$.

Следствия 9 и 10 являются частными случаями соответственно следствий 7 и 8 (см. комментариев после формулировки следствия 4).

СЛЕДСТВИЕ 11. Пусть Y – комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, $f \in C(T, Y) \setminus A$. Тогда для того, чтобы элемент $g \in A$ был элементом наименьшего равномерного уклонения функции f в A , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\max_{t \in R(f-l, \|\cdot\|_{C(T, Y)}, T)} \operatorname{Re}(f(t) - l(t), l(t) - g(t)) \leq 0 \quad \forall l \in A.$$

СЛЕДСТВИЕ 12. Пусть Y – комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, $f \in C(T, Y) \setminus A$. Тогда для того, чтобы элемент $g \in A$ был единственным элементом наименьшего равномерного уклонения функции f в A , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\max_{t \in R(f-l, \|\cdot\|_{C(T,Y)}, T)} \operatorname{Re}(f(t) - l(t), l(t) - g(t)) < 0 \quad \forall l \in A \setminus \{g\}.$$

Следствия 11 и 12 сразу же вытекают соответственно из теорем 2 и 3, если учесть приведенную выше формулу для производной по направлению в комплексном гильбертовом пространстве.

Следующие два результата относятся к случаю аппроксимаций со знакочувствительным весом p на T ($Y = \mathbb{R}$).

СЛЕДСТВИЕ 13. Пусть p – полунепрерывный сверху знакочувствительный вес на T , $f \in C(T)$, $g \in A$, $|f - g|_{p,T} > 0$. Тогда для того, чтобы g был элементом наименьшего уклонения функции f в A с весом p , необходимо и достаточно, чтобы для каждого $l \in A$ имели место неравенства

$$|f - l|_{p,T} > 0, \quad \max_{t \in R(f-l, |\cdot|_{p,T}, T)} (f(t) - l(t))(l(t) - g(t)) \leq 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 14. Пусть p – полунепрерывный сверху знакочувствительный вес на T , $f \in C(T)$, $g \in A$. Тогда для того, чтобы g был единственным элементом наименьшего уклонения функции f в A с весом p , необходимо и достаточно, чтобы для каждого $l \in A \setminus \{g\}$ имели место неравенства

$$|f - l|_{p,T} > 0, \quad \max_{t \in R(f-l, |\cdot|_{p,T}, T)} (f(t) - l(t))(l(t) - g(t)) < 0.$$

Следствия 13 и 14 выводятся соответственно из теорем 2 и 3 точно такими же рассуждениями, при помощи которых следствие 6 было получено из теоремы 1.

§ 2. Сильная единственность элемента наименьшего уклонения

Если не оговорено противное, то всюду ниже предполагается, что Y – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_Y$ (в этом случае пространство $C(T, Y)$ с равномерной нормой $\|\cdot\|_{C(T,Y)}$ также банахово) и множество A (подпространство L) состоит более чем из одного элемента: $\dim_{\mathbb{R}} A \geq 1$ ($\dim_{\mathbb{R}} L \geq 1$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Элемент $g \in A$ называется *сильно единственным элементом наименьшего P -уклонения* функции f в A , если существует такая положительная величина $C = C(P, A, f)$, что

$$C\|l - g\|_{C(T,Y)} \leq P(f - l) - P(f - g) \quad \forall l \in A. \quad (21)$$

Очевидно, что сильно единственный элемент наименьшего P -уклонения функции f в A является ее единственным элементом наименьшего P -уклонения в A . Обратное, вообще говоря, неверно (см. пример 1). Если g – единственный элемент наименьшего P -уклонения функции f в A , то наибольшее C , при котором выполнено (21), назовем *постоянной сильной единственности* функции f для ее приближения элементами подпространства A относительно функционала P и обозначим $K(P, A, f)$. Как и выше, в случае $P(\cdot) = \|\cdot\|_{C(T,Y)}$ сильно

единственный элемент наименьшего P -уклонения функции f в A назовем ее сильно единственным элементом наименьшего равномерного уклонения в A .

Следующая теорема вытекает из леммы 1 и неравенств (2), (3).

ТЕОРЕМА 4. Пусть $f \in C(T, Y)$, $g \in A$. Тогда для того, чтобы g был сильно единственным элементом наименьшего P -уклонения функции f в A , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\inf_{l \in A \setminus \{g\}} \frac{\sup_{t \in R(f-g, P, T)} Dp_t(f(t) - g(t); g(t) - l(t))}{\|g - l\|_{C(T, Y)}} > 0.$$

Формулировке следствий теоремы 4 предпошлим одну простую лемму.

ЛЕММА 2. Пусть F – непустое замкнутое подмножество пространства T , L – конечномерное подпространство в $C(T, Y)$. Тогда сублинейный функционал

$$P_F(l) := \sup_{t \in F} p_t(l(t))$$

непрерывен на L относительно нормы $\|\cdot\|_{C(F, Y)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду сублинейности функционала P_F достаточно проверить его непрерывность только в нуле. Пусть $n = \dim_{\mathbb{R}} L$. Выберем в L базис $\{e_1, \dots, e_n\}$. Тогда для каждого элемента $l \in L$ имеет место разложение $l = l_1 e_1 + \dots + l_n e_n$, $l_1, \dots, l_n \in \mathbb{R}$, и нормы $\|l\|_{C(F, Y)}$ и $\|l\|_1 := |l_1| + \dots + |l_n|$ эквивалентны на L . Следовательно,

$$\begin{aligned} P(l) &\leq |l_1|(P(e_1) + P(-e_1)) + \dots + |l_n|(P(e_n) + P(-e_n)) \\ &\leq \max\{P(e_1), P(-e_1), \dots, P(e_n), P(-e_n)\}(|l_1| + \dots + |l_n|) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $\|l\|_{C(F, Y)} \rightarrow 0$. Лемма доказана.

Приведем теперь некоторые следствия теоремы 4. Для этого введем обозначения: если A – выпуклое подмножество $C(T, Y)$, $g \in A$, то $S_{A, g}$ обозначает замыкание множества всех векторов вида $\frac{g-l}{\|g-l\|_{C(T, Y)}}$, $l \in A \setminus \{g\}$; если L – линейное подпространство в $C(T, Y)$, то $S_L := \{l \in L: \|l\|_{C(T, Y)} = 1\}$.

СЛЕДСТВИЕ 15. Пусть A – конечномерное выпуклое подмножество в пространстве $C(T, Y)$, $f \in C(T, Y)$, $g \in A$. Тогда для того, чтобы g был сильно единственным элементом наименьшего P -уклонения функции f в A , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sup_{t \in R(f-g, P, T)} Dp_t(f(t) - g(t); l(t)) > 0 \quad \forall l \in S_{A, g}.$$

Следствие 15 вытекает из теоремы 4, при этом нужно принять во внимание, что $\sup_{t \in R(f-g, P, T)} Dp_t(f(t) - g(t); l(t))$ как непрерывный (это доказывается точно так же, как и в лемме 2) сублинейный функционал, определенный на линейной оболочке множества A , достигает своего минимума на компакте $S_{A, g}$.

СЛЕДСТВИЕ 16. Пусть L – конечномерное линейное подпространство в $C(T, Y)$, $f \in C(T, Y)$, $g \in L$. Тогда для того, чтобы g был сильно единственным элементом наименьшего P -уклонения функции f в L , необходимо

и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sup_{t \in R(f-g, P, T)} Dp_t(f(t) - g(t); l(t)) > 0 \quad \forall l \in L \setminus \{0\}. \quad (22)$$

Следствие 16 вытекает из следствия 15.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если пространство Y локально выпуклое, то условие (22) естественно принять за определение сильной единственности элемента наименьшего P -уклонения функции f в конечномерном пространстве L . Это согласуется с тем, что каждая локально выпуклая топология на конечномерном вещественном пространстве L эквивалентна его стандартной топологии, и поэтому может быть задана с помощью любой нормы на L .

СЛЕДСТВИЕ 17. Пусть L – конечномерное линейное подпространство в $C(T, Y)$, $f \in C(T, Y)$, $E(P, L, f) > 0$, $g \in L$. Тогда для того, чтобы g был сильно единственным элементом наименьшего P -уклонения функции f в L , необходимо и достаточно, чтобы для каждого $l \in L$ нашлись точка $\tau \in R(f - g, P, T)$ и функционал $l' \in Y'$ такие, что:

- а) $\text{Re } l'(y) \leq p_\tau(y)$ для всех $y \in Y$;
- б) $\text{Re } l'(f(\tau) - g(\tau)) = p_\tau(f(\tau) - g(\tau))$;
- в) $\text{Re } l'(l(\tau)) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО совпадает с доказательством следствия 1, при этом вместо теоремы 1 используем следствие 16.

СЛЕДСТВИЕ 18. Пусть L – n -мерное линейное подпространство в $C(T, Y)$, $f \in C(T, Y)$, $E(P, L, f) > 0$, $g \in L$. Тогда для того, чтобы g был сильно единственным элементом наименьшего P -уклонения функции f в L , необходимо и достаточно, чтобы нашлись точки $t_1, \dots, t_{n+1} \in R(f - g, P, T)$ и элементы $l'_1, \dots, l'_{n+1} \in Y'$ такие, что:

- а) $\text{Re } l'_j(y) \leq p_{t_j}(y)$ для всех $y \in Y$, $j = \overline{1, n+1}$;
- б) $\text{Re } l'_j(f(t_j) - g(t_j)) = p_{t_j}(f(t_j) - g(t_j))$, $j = \overline{1, n+1}$;
- в) для любого $l \in L$ найдется номер $j \in \{1, \dots, n+1\}$, при котором выполнено неравенство $\text{Re } l'_j(l(t_j)) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость выводится из следствия 17 точно так же, как и необходимость в следствии 2 выводится из следствия 1. А именно, в обозначениях, введенных при доказательстве следствия 2, выполнение условий а)–в) следствия 17 означает, что $(a(l), b(l)) > 0$ для всех $l \in L$. Отсюда вытекает, что выпуклая оболочка множества B имеет линейную размерность n (над $\mathbb{R}$) и содержит внутри себя нуль, поэтому количество точек в теореме Каратеодори не может быть меньше, чем $n+1$, и мы приходим к условиям а)–в) доказываемого следствия.

Достаточность. Если для функций $f \in C(T, Y)$ и $g \in L$ существуют точки $t_1, \dots, t_{n+1} \in T$ и элементы $l'_1, \dots, l'_{n+1} \in Y'$, удовлетворяющие условиям а)–в), то, фиксируя произвольным образом элемент $l \in L$ и номер $j \in \{1, \dots, n+1\}$

так, чтобы выполнялось условие в), имеем цепочку соотношений

$$\begin{aligned}
 & Dp_{t_j}(f(t_j) - g(t_j), l(t_j)) \\
 &= \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \frac{p_{t_j}(f(t_j) - g(t_j) + \alpha l(t_j)) - p_{t_j}(f(t_j) - g(t_j))}{\alpha} \\
 &\geq \frac{\operatorname{Re} l'_j(f(t_j) - g(t_j) + \alpha l(t_j)) - \operatorname{Re} l'_j(f(t_j) - g(t_j))}{\alpha} \\
 &= \operatorname{Re} l'_j(l(t_j)) > 0.
 \end{aligned}$$

Применяя следствие 16, заключаем, что g – сильно единственный элемент наименьшего P -уклонения функции f в L .

СЛЕДСТВИЕ 19. Пусть Y – комплексное банахово пространство, $f \in C(T, Y) \setminus A$, $g \in A$. Тогда для того, чтобы g был сильно единственным элементом наименьшего равномерного уклонения функции f в A , необходимо и достаточно, чтобы существовало такое $C > 0$, что для каждого $l \in A$ найдутся точка $\tau \in R(f - g, \|\cdot\|_{C(T, Y)}, T)$ и функционал $l^* \in S^*(f(\tau) - g(\tau))$, удовлетворяющие неравенству

$$\operatorname{Re} l^*(g(\tau) - l(\tau)) \geq C\|g - l\|_{C(T, Y)}.$$

Следствие 19 выводится из теоремы 4 точно так же, как и следствие 4 из теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ 20. Пусть Y – комплексное банахово пространство, L – конечномерное подпространство в $C(T, Y)$, $f \in C(T, Y) \setminus L$, $g \in L$. Тогда для того, чтобы g был сильно единственным элементом наименьшего равномерного уклонения функции f в L , необходимо и достаточно, чтобы для каждого $l \in L$ нашлись точка $\tau \in R(f - g, \|\cdot\|_{C(T, Y)}, T)$ и функционал $l^* \in S^*(f(\tau) - g(\tau))$, удовлетворяющие неравенству $\operatorname{Re} l^*(l(\tau)) > 0$.

Следствие 20 является частным случаем следствия 17 (см. комментарий после формулировки следствия 4).

СЛЕДСТВИЕ 21. Пусть Y – комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, L – конечномерное подпространство в $C(T, Y)$, $f \in C(T, Y) \setminus L$, $g \in L$. Тогда для того, чтобы g был сильно единственным элементом наименьшего равномерного уклонения функции f в L , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\max_{t \in R(f - g, \|\cdot\|_{C(T, Y)}, T)} \operatorname{Re}(f(t) - g(t), l(t)) > 0 \quad \forall l \in L.$$

Следствие 21 вытекает из следствия 16 и формулы для производной по направлению в комплексном гильбертовом пространстве.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Следствия 1–5, 7–12 и 17–21 справедливы и для случая вещественного пространства Y , при этом, конечно же, в их формулировках можно убрать знак Re , а приведенные доказательства соответствующих утверждений только упрощаются.

Следующий результат относится к случаю аппроксимаций со знакочувствительным весом.

СЛЕДСТВИЕ 22. Пусть p – полунепрерывный сверху знакочувствительный вес на T , L – конечномерное подпространство в $C(T)$, $f \in C(T)$, $g \in L$, $|f - g|_{p,T} > 0$. Следующие утверждения эквивалентны:

(i) g является сильно единственным элементом наименьшего уклонения функции f в L с весом p ;

(ii) $\max_{t \in R(f-g; \|\cdot\|_{p,T}, T)} (f - g)(t)l(t) > 0$ для всех $l \in L \setminus \{0\}$;

(iii) $\sup_{t \in R(f-g; \|\cdot\|_{p,T}, T)} (f - g, p)(t)l(t) > 0$ для всех $l \in L \setminus \{0\}$;

(iv) существует такое $K > 0$, что

$$\sup_{t \in R(f-g; \|\cdot\|_{p,T}, T)} (f - g, p)(t)l(t) \geq K|f - g|_{p,T}\|l\|_{C(T)} \quad \forall l \in L.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность условий (ii) и (iii) очевидна, а эквивалентность условий (i) и (ii) выводится из следствия 16 рассуждениями, проведенными при доказательстве следствия 6. Импликация (iv) $\implies$ (iii) очевидна, поэтому нужно лишь установить справедливость импликации (iii) $\implies$ (iv). Для этого определим функцию $F: S_L \rightarrow \mathbb{R}$ равенством

$$F(l) := \sup_{t \in R(f-g; \|\cdot\|_{p,T}, T)} \frac{(f - g, p)(t)l(t)}{|f - g|_{p,T}}.$$

Из конечномерности L вытекает компактность S_L , а из (iii) – что $F(l) > 0$ для всех $l \in S_L$. Поскольку функция F непрерывна на S_L , то существует такое $K > 0$, что $F(l/\|l\|_{C(T)}) \geq K$ для всех $l \in L \setminus \{0\}$, откуда получаем (iv).

Для случая равномерной метрики ($p \equiv (1, 1)$) следствие 22 установлено в работе [29] (см. также [9, с. 184–186] и [10, с. 38–40]), для случая произвольного полунепрерывного веса p – в работе [13].

Чтобы сформулировать следующий результат, потребуются некоторые определения.

Пусть L – линейное подпространство в $C(T, Y)$, F – непустое замкнутое подмножество пространства T , $f \in C(T, Y)$, $P_F(f) := \sup_{t \in F} p_t(f(t))$. Следуя работам Е. П. Долженко и Е. А. Севастьянова (см., например, [19]) назовем величину

$$W(P, L, F) := \sup_{l \in L \setminus \{0\}} \frac{\|l\|_{C(F, Y)}}{P_F(l)}$$

свободой системы “функционал P –подпространство L ” на множестве F , а величину

$$S(p, L, F) := \inf_{l \in L \setminus \{0\}} \frac{P_F(l)}{\|l\|_{C(F, Y)}} = \frac{1}{W(P, L, F)}$$

– жесткостью этой системы на F , $W(P, L, T) =: W(P, L)$, $S(P, L, T) =: S(P, L)$. Если элемент $g \in L$ является сильно единственным элементом наименьшего P -уклонения в L функции f , то из определений вытекает следующая оценка для постоянной сильной единственности:

$$K(p, L, f) \|l - g\|_{C(T, Y)} \leq P(f - l) - P(f - g) \leq P(g - l) \quad \forall l \in L,$$

откуда $K(p, L, f) \|l\|_{C(T, Y)} \leq P(l)$ для всех $l \in L$ и, следовательно, $K(p, L, f) \times W(p, L) \leq 1$, $K(p, L, f) \leq S(p, L)$. Множеством единственности для подпространства L (в пространстве $C(T)$) мы называем любое непустое замкнутое

подмножество $E \subset T$ такое, что для каждой функции $l \in L \setminus \{0\}$ из равенства ее нулю на E вытекает, что $l \equiv 0$ на T . Напомним также, что если для сублинейной функции $p: Y \rightarrow \mathbb{R}$ и для точки $x \in Y$ выполняется условие

$$Dp(x, y) = Dp(x, -y) \quad \forall y \in Y \setminus \{0\},$$

то говорят, что функция p имеет в точке x *вариацию по Лагранжу*. Пусть $Z(f) = \{t \in T: f(t) = 0\}$. В принятых обозначениях имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 5. Пусть L – конечномерное подпространство в $C(T, Y)$, $f \in C(T, Y)$, $g \in L$, $P(f - g) = 0$. Тогда для того, чтобы g был сильно единственным элементом наименьшего P -уклонения функции f в L , достаточно, а если при всех $t \in T$ функция p_t имеет вариацию по Лагранжу в каждой точке $y \in Y \setminus \{0\}$, то и необходимо, чтобы $Z(f - g)$ было множеством единственности для L и выполнялось неравенство $W(P, L, Z(f - g)) < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Достаточность.* Пусть $Z(f - g)$ – множество единственности для L . Тогда $\|\cdot\|_{C(Z(f-g), Y)}$ является нормой в L , эквивалентной норме $\|\cdot\|_{C(T, Y)}$: существует такое $c(P, L, Z(f - g)) > 0$, что

$$\|l\|_{C(T, Y)} \leq c(P, L, Z(f - g)) \|l\|_{C(Z(f-g), Y)} \quad \forall l \in L.$$

Пусть также выполнено неравенство $W(P, L, Z(f - g)) < \infty$. Тогда для каждого $l \in L$ имеем цепочку соотношений

$$\begin{aligned} \|l\|_{C(T, Y)} &\leq c(P, L, Z(f - g)) \|l\|_{C(Z(f-g), Y)} \\ &\leq c(P, L, Z(f - g)) W(P, L, Z(f - g)) P_{Z(f-g)}(l) \\ &\leq c(P, L, Z(f - g)) W(P, L, Z(f - g)) P_{Z(f-g)}(f - g + l) \\ &\leq c(P, L, Z(f - g)) W(P, L, Z(f - g)) P(f - g + l), \end{aligned}$$

откуда при всех $l \in L$ получаем неравенство

$$\|l - g\|_{C(T, Y)} \leq c(P, L, Z(f - g)) W(P, L, Z(f - g)) (P(f - l) - P(f - g)),$$

которое и означает, что g – сильно единственный элемент наименьшего P -уклонения функции f в L .

Необходимость. Пусть g – сильно единственный элемент наименьшего P -уклонения функции f в L и при всех $t \in T$ функция p_t имеет вариацию по Лагранжу в каждой точке $y \in Y \setminus \{0\}$. Поскольку $p_t(f(t) - g(t)) = 0$ для всех $t \in T$, то отсюда вытекает, что при всех $l \in L$ и $t \in T \setminus Z(f - g)$ выполняется равенство $Dp_t(f(t) - g(t); l(t)) = 0$. Применяя следствие 16, заключаем, что

$$\sup_{t \in Z(f-g)} Dp_t(f(t) - g(t); l(t)) > 0 \quad \forall l \in L \setminus \{0\}. \quad (23)$$

Если $Z(f - g)$ не является множеством единственности для L , то существует такая нетривиальная функция $l \in L$, что $l \equiv 0$ на множестве $Z(f - g)$, поэтому для любого $t \in Z(f - g)$ выполняются равенства $p_t(l(t)) = 0$ и, следовательно,

$$Dp_t(f(t) - g(t); l(t)) \leq 0$$

(см. (2) и (3)), что противоречит (23). Если же $Z(f - g)$ – множество единственности для L , но $W(P, L, Z(f - g)) = \infty$, то из конечномерности L вытекает компактность единичной сферы S_L , откуда (см. лемму 2 и [19, теорема 2.1]) вытекает существование элемента $l \in S_L$, для которого $P_{Z(f-g)}(l) = 0$. Как и выше, отсюда следует неравенство $Dp_t(f(t) - g(t); l(t)) \leq 0$, противоречащее (23). Таким образом, $Z(f - g)$ – множество единственности для L , $W(P, L, Z(f - g)) < \infty$. Теорема доказана.

Если p – полунепрерывный сверху знакочувствительный вес на T и $P(\cdot) = |\cdot|_{p,T}$, то вместо $W(P, L, F)$, $W(P, L)$, $P_F(f)$, $\|f\|_{C(F,Y)}$ мы будем записывать соответственно $W(p, L, F)$, $W(p, L)$, $|f|_{p,F}$, $\|f\|_F$ (F – непустое замкнутое подмножество T), а величину $W(p, L, F)$ мы называем свободой системы “знакочувствительный вес p – подпространство L ” на множестве F . Поскольку в части необходимости теорема 5 применима к аппроксимациям со знакочувствительным весом, то имеем следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 23. Пусть p – полунепрерывный сверху знакочувствительный вес на T , L – конечномерное подпространство в $C(T)$, $f \in C(T)$, $g \in L$, $|f - g|_{p,T} = 0$. Тогда для того, чтобы g был сильно единственным элементом наименьшего уклонения функции f в L с весом p , необходимо и достаточно, чтобы $Z(f - g)$ было множеством единственности для L и выполнялось неравенство $W(p, L, Z(f - g)) < \infty$.

§ 3. Сильная единственность элемента наименьшего уклонения для знакочувствительных аппроксимаций на метрическом компакте

Рассмотрим более подробно случай, когда пространство T является метрическим компактом Q и $Y = \mathbb{R}$. В этом случае функционал P имеет вид

$$P(h) = \max_{x \in Q} |(h, p)(x)| =: |h|_{p,Q}, \quad h \in C(Q),$$

где $p = (p_-, p_+)$ – полунепрерывный сверху знакочувствительный вес на Q . Пусть $\text{card } Q$ обозначает количество точек компакта Q . Как обычно, под n -мерным чебышевским пространством на Q мы понимаем конечномерное линейное подпространство $L \subset C(Q)$ такое, что $1 \leq n = \dim_{\mathbb{R}} L \leq \text{card } Q - 1$, и каждая не тождественная нулю функция $l \in L$ имеет на Q не более чем $n - 1$ нулей. Как уже упоминалось выше, теорема Мерхьюбера налагает жесткое ограничение на компакт Q , для которого существует чебышевское пространство $L \subset C(Q)$ размерности не меньше 2: Q гомеоморфно вкладывается в единичную окружность $\mathbb{T}^1$. Приведенный в [19] пример отрезка $\Delta = [0, 1]$, знакочувствительного веса $p(x) = (p_-(x), p_+(x)) = (0, 1)$ для любого $x \in (0, 1]$, $p(0) = (p_-(0), p_+(0)) = (1, 1)$, функции $f(x) \equiv x^{1/2}$ и пространства L , состоящего из всех линейных функций, показывает, что элемент наименьшего уклонения с весом p может не существовать даже в случае чебышевности пространства L (в этом примере $\inf_{l \in L} |f - l|_{p,\Delta} = 0$, но $|f - l|_{p,\Delta} > 0$ для всех $l \in L$) и, в отличие от классических аппроксимаций, изучение условий существования и единственности элемента наименьшего уклонения в чебышевском пространстве для аппроксимаций со знакочувствительным весом является нетривиальной задачей (см. [19]).

Введем еще несколько обозначений (см. [19]): если $f \in C(Q)$, то $E(p, L, f) := \inf_{l \in L} |f - l|_{p, Q}$ – величина наименьшего уклонения функции f в L с весом p , $\text{supp}(p_-)$ – замыкание множества $\{x \in Q: p_-(x) > 0\}$, $\text{supp}(p_+)$ – замыкание множества $\{x \in Q: p_+(x) > 0\}$, $\text{supp}(p) := \text{supp}(p_-) \cup \text{supp}(p_+)$, $\Pi(p) := \text{supp}(p_-) \cap \text{supp}(p_+)$.

Следующий результат легко вытекает из теоремы 5. Для его формулировки обозначим $C_0(p, Q) := \{f \in C(Q): |f|_{p, Q} = 0\}$.

СЛЕДСТВИЕ 24. Пусть L – конечномерное подпространство в $C(Q)$. Тогда для того, чтобы элемент $g \equiv 0$ был сильно единственным элементом наименьшего уклонения в L с весом p для каждой функции $f \in C_0(p, Q)$, необходимо и достаточно, чтобы $\Pi(p)$ было множеством единственности для L и выполнялось неравенство $W(p, L, \Pi(p)) < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть d обозначает метрику на Q , $\text{dist}_d(x, E) := \inf_{y \in E} d(x, y)$ – расстояние от точки x до множества E относительно метрики d ($x \in Q$, $E \subset Q$, $E \neq \emptyset$). Предположим, что для каждой функции $f \in C_0(p, Q)$ элемент $g \equiv 0$ является сильно единственным элементом наименьшего уклонения функции f в L с весом p . Тогда $\text{supp}(p)$ – множество единственности для L (в противном случае существовал бы элемент $l \in L \setminus \{0\}$, для которого $|l|_{p, Q} = 0$, и, значит, $|f + l|_{p, Q} = 0$ для всех $f \in C_0(p, Q)$, что противоречит единственности элемента g). Определим функцию $f \in C(Q)$ следующим образом: если $\Pi(p) = \emptyset$, то $f(x) = 1$ при $x \in \text{supp}(p_-)$, $f(x) = -1$ при $x \in \text{supp}(p_+)$; если же $\Pi(p) \neq \emptyset$, то $f(x) = \text{dist}_d(x, \Pi(p))$ при $x \in \text{supp}(p_-)$, $f(x) = -\text{dist}_d(x, \Pi(p))$ при $x \in \text{supp}(p_+)$, и по теореме Брауэра–Титце–Урысона (см., например, [30]) продолжим f с $\text{supp}(p)$ до непрерывной функции на Q , которую по-прежнему будем обозначать через f (эта конструкция заимствована из работы [16]). Тогда $|f|_{p, Q} = 0$, $Z(f) \cap \text{supp}(p) = \Pi(p)$ и g – сильно единственный элемент наименьшего уклонения функции f в L с весом p в пространствах $C(\text{supp}(p))$ и $C(Q)$. По теореме 5 отсюда следует, что $\Pi(p)$ – множество единственности для L в пространстве $C(\text{supp}(p))$ и, следовательно, в пространстве $C(Q)$, $W(p, L, \Pi(p)) < \infty$.

Достаточность. Пусть $\Pi(p)$ – множество единственности для пространства L , $W(p, L, \Pi(p)) < \infty$, $f \in C_0(p, Q)$, $g \equiv 0$. Из определения множества $\Pi(p)$ следует, что $\Pi(p) \subset Z(f)$, поэтому $Z(f)$ также является множеством единственности для L и, следовательно, нормы $\|\cdot\|_Q$, $\|\cdot\|_{Z(f)}$ и $\|\cdot\|_{\Pi(p)}$ эквивалентны на L . Отсюда вытекает, что $W(p, L, Z(f)) < \infty$ (в противном случае нашелся бы элемент $l \in S_L$, для которого выполнено $|l|_{p, \Pi(p)} \leq |l|_{p, Z(f)} = 0$). По теореме 5 g – сильно единственный элемент наименьшего уклонения функции f в L с весом p . Следствие доказано.

Пусть Δ обозначает отрезок на действительной прямой: $\Delta = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. В работах [19], [22] (случай $Q = \Delta$) и [16] установлено, что каждая функция $f \in C(Q)$ при $E(p, L, f) > 0$ имеет единственный элемент наименьшего уклонения с весом p в чебышевском пространстве $L \subset C(Q)$. Следующая теорема, доказанная для случая $Q = \Delta$ в работе [13], уточняет этот результат.

ТЕОРЕМА 6. Пусть L – n -мерное чебышевское пространство на Q . Тогда каждая функция $f \in C(Q)$ при $E(p, L, f) > 0$ имеет сильно единственный элемент наименьшего уклонения в L с весом p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду только что сказанного и следствий 2 и 18 необходимо доказать следующее: если для элемента g из n -мерного чебышевского подпространства $L \subset C(Q)$, функции $f \in C(Q)$ при $E(p, L, f) > 0$ и для сублинейного функционала $P(\cdot) = |\cdot|_{p,Q}$ на $C(Q)$ существуют натуральное число $r \leq n + 1$, точки $t_1, \dots, t_r \in Q$, попарно различные между собой, элементы $l'_1, \dots, l'_r \in \mathbb{R}'$ и неотрицательные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, $\sum_{j=1}^r \alpha_j = 1$, удовлетворяющие условиям а)–в) следствия 2 ($Y = \mathbb{R}$), то $r = n + 1$ и для $t_1, \dots, t_{n+1}$ и $l'_1, \dots, l'_{n+1}$ выполнено условие в) следствия 18. Из условия б) следствия 2 вытекает, что

$$\text{Rel}_j(y) = y p_{f-g}(t_j) \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{1, n+1}$$

(функция p_{f-g} определена в доказательстве следствия 6). Поэтому условие в) следствия 2 равносильно следующему:

$$\sum_{j=1}^r (\alpha_j p_{f-g}(t_j)) l(t_j) = 0 \quad \forall l \in L, \quad (24)$$

при этом $p_{f-g}(t_j) \neq 0$, $j = \overline{1, r}$. Если $r \leq n$, то ввиду известного интерполяционного свойства чебышевских подпространств (см., например, [15, с. 21–22]) существует функция $l \in L$, для которой $l(t_j) = p_{f-g}(t_j)$, $j = \overline{1, r}$. Но тогда

$$\sum_{j=1}^r (\alpha_j p_{f-g}(t_j)) l(t_j) = \sum_{j=1}^r \alpha_j (p_{f-g}(t_j))^2 > 0,$$

что противоречит (24). Следовательно, r не может быть меньше $n + 1$, что (см. доказательства следствий 2 и 18) и означает выполнение условия в) следствия 18.

В работах [19], [22] (случай $Q = \Delta$) и [16] (лемма 2) показано, что для того, чтобы каждая функция $f \in C(Q)$ при $E(p, L, f) = 0$ имела единственный элемент наименьшего уклонения с весом p в n -мерном чебышевском пространстве $L \subset C(Q)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\text{card } \Pi(p) \geq n$. Сопоставляя этот факт со следствием 24 и теоремой 6 и учитывая то, что множества единственности для n -мерного чебышевского пространства являются подмножества Q , состоящие не менее чем из n точек, приходим к следующему результату.

ТЕОРЕМА 7. Пусть L – n -мерное чебышевское пространство на Q . Тогда для того, чтобы каждая функция $f \in C(Q)$ имела сильно единственный элемент наименьшего уклонения в L с весом p , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $\text{card } \Pi(p) \geq n$ и $W(p, L, \Pi(p)) < \infty$.

§ 4. Знакочувствительные аппроксимации элементами чебышевского пространства на отрезке

В дальнейшем мы будем рассматривать только случай отрезка на действительной оси: $Q = \Delta$. В этом случае имеет место следующая важная теорема Е. П. Долженко и Е. А. Севастьянова (см. [19]).

ТЕОРЕМА С. Если L – n -мерное чебышевское пространство на Δ , F – замкнутое подмножество Δ , содержащее не менее n точек, то для конечности свободы $W(p, L, F)$ необходимо и достаточно выполнения одного из следующих двух условий:

а) на F имеется возрастающая последовательность из $n + 1$ точек, в которых функции $p_-(x)$ и $p_+(x)$ попеременно положительны (начиная с любой из них);

б) на F имеется ровно n точек, в которых обе функции $p_-(x)$ и $p_+(x)$ положительны, в остальных же точках они равны нулю.

Сравнивая теорему С с теоремой 7 и со следствием 23, приходим к следующим результатам.

ТЕОРЕМА 8. Пусть L – n -мерное чебышевское пространство на Δ . Тогда для того, чтобы каждая функция $f \in C(\Delta)$ имела сильно единственный элемент наименьшего уклонения в L с весом p , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих двух условий:

а) на $\Pi(p)$ имеется возрастающая последовательность из $n + 1$ точек, в которых функции $p_-(x)$ и $p_+(x)$ попеременно положительны (начиная с любой из них);

б) на $\Pi(p)$ имеется ровно n точек, в которых обе функции $p_-(x)$ и $p_+(x)$ положительны, в остальных же точках они равны нулю.

ТЕОРЕМА 9. Пусть L – n -мерное чебышевское пространство на отрезке Δ , $f \in C(\Delta)$, $g \in L$, $|f - g|_{p,\Delta} = 0$. Тогда для того, чтобы g был сильно единственным элементом наименьшего уклонения функции f в L с весом p , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих двух условий:

а) на $Z(f - g)$ имеется возрастающая последовательность из $n + 1$ точек, в которых функции $p_-(x)$ и $p_+(x)$ попеременно положительны (начиная с любой из них);

б) на $Z(f - g)$ имеется ровно n точек, в которых обе функции $p_-(x)$ и $p_+(x)$ положительны, в остальных же точках они равны нулю.

Приведем одно следствие, вытекающее из теоремы 9.

СЛЕДСТВИЕ 25. Пусть L – n -мерное чебышевское пространство на Δ , $\text{card } \Pi(p) < n$ либо $W(p, L, \Pi(p)) = \infty$, $f \in C(\Delta)$, $g \in L$, $|f - g|_{p,\Delta} = 0$. Тогда для того, чтобы g был сильно единственным элементом наименьшего уклонения функции f в L с весом p , необходимо и достаточно, чтобы на Δ нашлась возрастающая последовательность из $n + 1$ точек, в которых функции $p_-(x)$ и $p_+(x)$ попеременно положительны (начиная с любой из них) и $f(x)$ совпадает с $g(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены условия следствия. По теореме 9 для того, чтобы g был сильно единственным элементом наименьшего уклонения функции f в L с весом p , необходимо и достаточно, чтобы множество $Z(f - g)$ содержало не менее n точек и имел место один и только один из случаев а) или б) теоремы 9. Случай б) исключается тем, что $\text{card } \Pi(p) < n$ либо $W(p, L, \Pi(p)) = \infty$, откуда получаем утверждение следствия.

Пусть L – n -мерное чебышевское пространство на Δ , $\Pi(p) = \emptyset$, $f \in C(\Delta)$, $E(p, L, f) = 0$. Тогда, как установлено в [19], для того, чтобы элемент $g \in L$

являлся единственным элементом наименьшего уклонения функции f в L с весом p , необходимо и достаточно, чтобы на Δ нашлась возрастающая последовательность из $n + 1$ точек, в которых функции $p_-(x)$ и $p_+(x)$ попеременно положительны (начиная с любой из них) и $f(x)$ совпадает с $g(x)$. Из следствия 25 вытекает, что на самом деле при этих условиях имеет место сильная единственность элемента g .

В отличие от теоремы 9 критерий того, что функция $g \in L$ при $|f - g|_{p,\Delta} = 0$ является единственным элементом наименьшего уклонения функции f в чебышевском пространстве L с весом p , уже не может быть получен только в терминах p , L и множества $Z(f - g)$. На это указывает следующий пример.

ПРИМЕР 2. Пусть $\Delta = [-1, 1]$, L – множество всех линейных функций ($n = 2$), $f_1(x) \equiv x^2$, $f_2(x) \equiv \sqrt{|x|}$, $g \equiv 0$, $l_0 \equiv x$, $p_-(x) \equiv 1$, $x \in \Delta$, $p_+(0) = 1$, $p_+(x) = 0$ при всех $x \in \Delta \setminus \{0\}$. Тогда

$$\begin{aligned} |f_1 - g|_{p,\Delta} &= |f_2 - g|_{p,\Delta} = |f_2 - \alpha l_0|_{p,\Delta} \\ &= E(p, L, f_1) = E(p, L, f_2) = 0 \quad \forall \alpha \in [-1, 1], \end{aligned}$$

и, очевидно, $|f_1 - l|_{p,\Delta} > 0$ для каждой не тождественной нулю функции $l \in L$. Следовательно, g – единственный элемент наименьшего уклонения функции f_1 в L с весом p , а для функции f_2 этот элемент уже не является единственным элементом наименьшего уклонения с весом p в L . При этом $Z(f_1 - g) = Z(f_2 - g) = \{0\}$.

В этом случае в формулировку критерия единственности элемента g должны входить новые характеристики функций f и g . Чтобы сформулировать такой критерий дадим одно определение. *Характеристическим весом* знакочувствительного веса p мы будем называть полунепрерывный сверху знакочувствительный вес $\chi p = (\chi p_-, \chi p_+)$, который определен на Δ равенствами $\chi p_-(x) = 1$ при $x \in \text{supp}(p_-)$, $\chi p_-(x) = 0$ при $x \in \Delta \setminus \text{supp}(p_-)$, $\chi p_+(x) = 1$ при $x \in \text{supp}(p_+)$ и $\chi p_+(x) = 0$ при $x \in \Delta \setminus \text{supp}(p_+)$. Заметим, что в случае $\text{card supp}(p) < n$ вопрос о единственности элемента наименьшего уклонения с весом p в n -мерном чебышевском пространстве $L \subset C(\Delta)$ всегда решается отрицательно, поскольку в этом случае существует функция $l \in L \setminus \{0\}$, тождественно равная нулю на $\text{supp}(p)$, и, следовательно, если g – элемент наименьшего уклонения функции f в L с весом p , то и любая функция вида $g + \alpha l$, $\alpha \in \mathbb{R}$, является таким элементом. Поэтому в дальнейшем мы исключим этот тривиальный случай из рассмотрения.

ТЕОРЕМА 10. Пусть L – n -мерное чебышевское пространство на отрезке Δ , $\text{card } \Pi(p) < n \leq \text{card supp}(p)$, $f \in C(\Delta)$, $g \in L$, $|f - g|_{p,\Delta} = 0$. Тогда для того, чтобы g был единственным элементом наименьшего уклонения функции f в L с весом p , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось только одно из следующих двух условий:

а) на Δ существует возрастающая последовательность из $n + 1$ точек, поочередно принадлежащих множествам $\text{supp}(p_-)$ и $\text{supp}(p_+)$ (начиная с любого из них), в которых $f(x)$ совпадает с $g(x)$;

б) $\text{supp}(p) \setminus Z(f - g) \neq \emptyset$, существует не тождественная нулю функция $l \in L$ при $| - l|_{\chi p, Z(f - g)} = 0$ и для каждой такой функции l выполняется

равенство

$$\sup_{x \in \text{supp}(p) \setminus Z(f-g)} \frac{l(x)}{(f-g)(x)} = +\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения веса χp следует, что для любых $f \in C(\Delta)$ и $g \in L$ равенство $|f - g|_{p,\Delta} = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $|f - g|_{\chi p,\Delta} = 0$, и, следовательно, элемент $g \in L$ является единственным элементом наименьшего уклонения в L с весом p функции f при $E(p, L, f) = 0$ в том и только в том случае, когда он является ее единственным элементом наименьшего уклонения в L с весом χp . Поэтому в дальнейшем мы будем изучать единственность элемента наименьшего уклонения с весом χp .

Пусть L – n -мерное чебышевское пространство на Δ , $\text{card } \Pi(p) < n \leq \text{card } \text{supp}(p)$, $f \in C(\Delta)$, $g \in L$, $|f - g|_{\chi p,\Delta} = 0$. Как и выше, не меняя общности, будем считать, что

$$|f|_{p,\Delta} = |f|_{\chi p,\Delta} = 0, \quad g \equiv 0.$$

Необходимость. Пусть g – единственный элемент наименьшего уклонения функции f в L с весом χp . Если f не имеет нулей на Δ , то любая функция $l \in L \setminus \{0\}$, которая также не имеет нулей на Δ и имеет знак, противоположный знаку функции f (существование такой функции l установлено, например, в [15, с. 26]), является элементом наименьшего уклонения функции f в L с весом χp , что противоречит единственности элемента $g \equiv 0$. Поэтому $Z(f) \neq \emptyset$ и имеет место один из следующих двух случаев:

- 1) $\text{card } Z(f) \geq n$ и $W(\chi p, L, Z(f)) < \infty$;
- 2) $\text{card } Z(f) < n$ либо $W(\chi p, L, Z(f)) = \infty$.

Если имеет место случай 1), то для множества $F = Z(f)$ справедливо одно из условий а) или б) теоремы C с заменой p на χp , последнее из которых исключается тем, что $\text{card } \Pi(p) < n$. Следовательно, выполнено условие а), которое, очевидно, эквивалентно условию а) доказываемой теоремы. Если же имеет место случай 2), то существует функция $l \in L$, для которой $\|l\|_{\Delta} = 1$ и $|-l|_{\chi p, Z(f)} = 0$. Допустим, что $\text{supp}(p) \subset Z(f)$. Тогда

$$|-l|_{\chi p,\Delta} = |-l|_{\chi p, \text{supp}(p)} = |-l|_{\chi p, Z(f)} = 0,$$

$$|f - l|_{\chi p,\Delta} \leq |f|_{\chi p,\Delta} + |-l|_{\chi p,\Delta} = 0,$$

что противоречит единственности элемента $g \equiv 0$. Это означает, что $\text{supp}(p) \setminus Z(f) \neq \emptyset$. Установим равенство

$$\sup_{x \in \text{supp}(p) \setminus Z(f)} \frac{l(x)}{f(x)} = +\infty. \quad (25)$$

Предполагая противное, получаем существование $\alpha > 0$ такого, что

$$\sup_{x \in \text{supp}(p) \setminus Z(f)} \frac{l(x)}{f(x)} \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Для каждой точки $x \in \text{supp}(p) \setminus Z(f)$ имеются следующие возможности:

- (i) $f(x)$ и $l(x)$ имеют разные знаки, тогда $f(x) - \alpha l(x)$ имеет тот же знак, что и $f(x)$, и, следовательно, $(f - \alpha l, p)(x) = 0$;

(ii) $f(x) > 0$, $l(x) \geq 0$, тогда $f(x) - \alpha l(x) \geq 0$ и $(f - \alpha l, p)(x) = 0$;

(iii) $f(x) < 0$, $l(x) \leq 0$, тогда $f(x) - \alpha l(x) \leq 0$ и $(f - \alpha l, p)(x) = 0$.

Отсюда получаем равенство $|f - \alpha l|_{p, \Delta} = 0$, противоречащее единственности элемента $g \equiv 0$. Этим самым доказана необходимость условий доказываемой теоремы.

Достаточность. Если выполнено условие а), то, применяя следствие 25, заключаем, что элемент g является сильно единственным элементом наименьшего уклонения функции f в L с весом χp и, следовательно, ее единственным элементом наименьшего уклонения в L с весом p .

Пусть теперь выполнено условие б). Если функция $l \in L$ такова, что $|-l|_{\chi p, Z(f)} > 0$, то

$$|f - l|_{\chi p, \Delta} \geq |f - l|_{\chi p, Z(f)} = |-l|_{\chi p, Z(f)} > 0.$$

Пусть теперь функция $l \in L \setminus \{0\}$ такова, что $|-l|_{\chi p, Z(f)} = 0$, и для нее выполнено равенство (25). Покажем, что тогда справедливо неравенство $|f - l|_{\chi p, \Delta} > 0$. Предполагая противное, получаем, что $(f - l, p)(x) = 0$ при всех $x \in \text{supp}(p) \setminus Z(f)$. Отсюда следует, что в тех точках $x \in \text{supp}(p) \setminus Z(f)$, в которых $\frac{l(x)}{f(x)} \geq 0$, выполняется неравенство $|l(x)| \leq |f(x)|$. Однако это означает

$$\sup_{x \in \text{supp}(p) \setminus Z(f)} \frac{l(x)}{f(x)} \leq 1,$$

что противоречит (25). Поэтому для каждой нетривиальной функции $l \in L$ имеет место неравенство $|f - l|_{\chi p, \Delta} > 0$, откуда вытекает, что g — единственный элемент наименьшего уклонения функции f в L с весом p . Теорема доказана.

Приведем одно следствие, немедленно вытекающее из теоремы 10.

СЛЕДСТВИЕ 26. Пусть L — n -мерное чебышевское пространство на Δ , $\text{card } \Pi(p) < n \leq \text{card } \text{supp}(p) < \infty$, $f \in C(\Delta)$, $g \in L$, $|f - g|_{p, \Delta} = 0$. Тогда для того, чтобы g был единственным элементом наименьшего уклонения функции f в L с весом p , необходимо и достаточно, чтобы на Δ нашлась возрастающая последовательность из $n + 1$ точек, в которых функции $p_-(x)$ и $p_+(x)$ попеременно положительны (начиная с любой из них) и $f(x)$ совпадает с $g(x)$.

В заключение, используя понятие сильной единственности элемента наименьшего уклонения, мы уточним одну теорему Е. П. Долженко и Е. А. Севастьянова [19, теорема 3.12].

Напомним (см. [19]), что пара (p, L) , где L — подпространство в $C(\Delta)$ (не обязательно чебышевское), называется *интерполяционной* на $C(\Delta)$, если для любого $f \in C(\Delta)$ выполняется равенство $E(p, L, f) = 0$, при этом существует единственный элемент $g(p, L, f)$ наименьшего уклонения функции f в L с весом p . Пару (p, L) будем называть *сильно интерполяционной* парой на $C(\Delta)$, если она является интерполяционной на $C(\Delta)$ и для каждой функции $f \in C(\Delta)$ ее единственный элемент $g(p, L, f)$ наименьшего уклонения в L с весом p обладает свойством сильной единственности. Напомним также, что вес $p = (p_-, p_+)$ называется *невыврожденным* в точке $x \in \Delta$, если $p_-(x)p_+(x) > 0$, и *вырожденным* в x , если $p_-(x) = p_+(x) = 0$.

Следующая теорема дает описание интерполяционных и сильно интерполяционных пар в $C(\Delta)$ в случае чебышевности подпространства L .

ТЕОРЕМА D. Пусть L – n -мерное чебышевское подпространство в $C(\Delta)$, $n \geq 1$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) пара (p, L) является интерполяционной в $C(\Delta)$;
- (ii) пара (p, L) является сильно интерполяционной в $C(\Delta)$;
- (iii) вес p невырожден в некоторых n точках отрезка Δ и вырожден в остальных его точках.

Эквивалентность условий (i) и (iii) в теореме D – это в точности теорема 3.12 работы [19], импликация (ii) $\Rightarrow$ (i) очевидна, а импликация (iii) $\Rightarrow$ (i) равносильна конечности свободы $W(p, L)$, которая по теореме C имеет место при выполнении условия (iii).

Список литературы

1. Чеботарёв Н. Г., “Об одном общем критерии минимакса”, *Докл. АН СССР*, **39**:1 (1943), 373–376.
2. Чеботарёв Н. Г., “Критерии минимакса и его приложения”, *Собрание сочинений*, **2**, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1949, 396–409.
3. Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н., *Введение в минимакс*, Наука, М., 1972.
4. Newman D. S., Shapiro H. S., “Some theorems on Čebyšev approximation”, *Duke Math. J.*, **30**:4 (1963), 673–681.
5. Mairhuber J. S., “On Haar’s theorem concerning Chebyshev approximation problems having unique solution”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **7**:4 (1956), 609–615.
6. Haar A., “Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen”, *Math. Ann.*, **78** (1917), 294–311.
7. Бердышев В. И., Петрак Л. В., *Аппроксимация функций, сжатие численной информации, приложения*, Изд-во УрО РАН, Екатеринбург, 1999.
8. Коллатц Л., Крабс В., *Теория приближений: чебышевские приближения*, Наука, М., 1978.
9. Lorentz G. G., Golitschek M. von, Makovoz Y., *Constractive approximation: advanced problems*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **304**, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
10. Nürnberger G., *Approximation by spline functions*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
11. Маринов А. В., *Равномерные константы сильной единственности при аппроксимации конечномерным чебышевским подпространством*, Тез. докл. Междунар. конф. “Теория приближений и гармонический анализ”, Россия, Тула, 26–29 мая 1998 г., Тула, 1998, 169–170.
12. Ремез Е. Я., *Основы численных методов чебышевского приближения*, Наукова думка, Киев, 1969.
13. Чумак А. А., “О сильной единственности элемента наименьшего отклонения для аппроксимаций со знакочувствительным весом”, *Збірник праць Інституту математики НАН України*, **1**:3 (2004), 318–327.
14. Колмогоров А. Н., “Замечание по поводу многочленов П. Л. Чебышева, наименее уклоняющихся от заданной функции”, *УМН*, **3**:1 (1948), 216–221.
15. Дзядык В. К., *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами*, Наука, М., 1977.
16. Севастьянов Е. А., “О проблеме Хаара для знакочувствительных аппроксимаций”, *Матем. сб.*, **188**:2 (1997), 95–128.
17. Minkowski H., “Theorie der konvexen Körper, insbesondere Begründung ihres Oberflächenbegriffs”, *Ces. Abh.*, **2** (1911), 131–229.
18. Крейн М. Г., Нудельман А. А., *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи*, Наука, М., 1973.

19. Долженко Е. П., Севастьянов Е. А., “Аппроксимации со знакочувствительным весом (теоремы существования и единственности)”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:6 (1998), 59–102.
20. Долженко Е. П., Севастьянов Е. А., “Аппроксимации со знакочувствительным весом (устойчивость, приложения к теории ужей и хаусдорфовым аппроксимациям)”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **63**:3 (1999), 77–118.
21. Долженко Е. П., Севастьянов Е. А., “Знакочувствительные аппроксимации (пространство знакочувствительных весов, жесткость и свобода системы)”, *Докл. РАН*, **332**:6 (1993), 686–689.
22. Долженко Е. П., Севастьянов Е. А., “Знакочувствительные аппроксимации (вопросы единственности и устойчивости)”, *Докл. РАН*, **333**:1 (1993), 5–7.
23. Тихомиров В. М., “Гармоники и сплайны как оптимальные средства приближения и восстановления”, *УМН*, **50**:2 (1995), 125–174.
24. Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М., *Выпуклый анализ и его приложения*, Эдиториал УРСС, М., 2000.
25. Колмогоров А. Н., Фомин С. В., *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1989.
26. Зуховицкий С. И., Стечкин С. Б., “О приближении абстрактных функций”, *УМН*, **12**:1 (1957), 187–191.
27. Papini P. L., “Approximations and norm derivatives in real normed spaces”, *Resultate Math.*, **5** (1982), 81–94.
28. Yang Wenshan, Li Chong, Watson G. A., “Characterization and uniqueness of nonlinear uniform approximation”, *Proc. Edinburg Math. Soc. Ser. II.*, **40**:3 (1997), 473–482.
29. Wulbert D. E., “Uniqueness and differential characterization of approximations from manifolds of functions”, *Amer. J. Math.*, **18** (1971), 350–366.
30. Федорчук В. В., Филиппов В. В., *Общая топология. Основные конструкции*, Изд-во МГУ, М., 1988.

А. В. Покровский (А. V. Pokrovskii)
Институт математики НАН Украины
E-mail: pokrovsk@imath.kiev.ua

Поступило в редакцию
14.07.2005