Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. В. Михайлов, Инварианты Бэра и нильпотентная аппроксимируемость групп, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2007, том 71, выпуск 2, 151–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/im742>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 18:13:52

УДК 512.544.7+512.664.4

Р. В. Михайлов

Инварианты Бэра и нильпотентная аппроксимируемость групп

Исследуются убывающие цепочки подгрупп в инвариантах Бэра, являющиеся естественным обобщением фильтрации Дваера мультипликатора группы. Установлена связь рассматриваемых структур с нильпотентной аппроксимируемостью групп и, как приложение представляемых методов, построена конечно представленная нильпотентно аппроксимируемая группа F/R такая, что для любого $k \geq 1$ ее свободное k -центральное расширение $F/[R, {}_k F]$ не является нильпотентно аппроксимируемым. Показано, что при $k = 1, 2$ любая группа G , являющаяся свободным произведением групп с одним определяющим соотношением, нильпотентно аппроксимируема тогда и только тогда, когда нильпотентно аппроксимируемо любое ее k -центральное расширение.

Библиография: 14 наименований.

§ 1. Введение

Для группы G обозначим через $\{\gamma_\tau(G)\}$ трансфинитный нижний центральный ряд в G , определяемый индуктивно:

$$\gamma_1(G) = G, \quad \gamma_{\tau+1}(G) = [\gamma_\tau(G), G] = \langle [x, y] := x^{-1}y^{-1}xy \mid x \in \gamma_\tau(G), y \in G \rangle^G$$

и $\gamma_\tau(G) = \bigcap_{\alpha < \tau} \gamma_\alpha(G)$ для предельного ординала τ . Для подгруппы H группы G обозначаем $[H, {}_0 G] = H$, $[H, {}_{m+1} G] = [[H, {}_m G], G]$. Для $k \geq 1$ расширение группы G

$$1 \rightarrow N \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G \rightarrow 1 \tag{1}$$

называется *k-центральным*, если $[N, {}_k \tilde{G}] = 1$.

Пусть группа G представлена в виде свободного фактора:

$$1 \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 1. \tag{2}$$

Теория точных модулей над групповыми кольцами и обобщенное вложение Магнуса (см., например, [8]) позволяют связывать аппроксимационные свойства группы G с аппроксимационными свойствами некоторых расширений G , например свободных нильпотентных расширений $F/\gamma_k(R)$, $k \geq 1$. Однако при рассмотрении свободных центральных расширений $F/[R, F]$ и более общих свободных k -центральных расширений $F/[R, {}_k F]$, $k \geq 1$, вышеуказанные теории не могут быть применимы. В работе [13] при использовании гомологических методов построен пример конечно представленной нильпотентно

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-01-00993).

аппроксимируемой группы G такой, что для любого ее свободного копредставления (2) группа $F/[R, F]$ не является нильпотентно аппроксимируемой. В случае k -центральных расширений при $k > 1$ обычная гомологическая техника оказывается малоэффективной и приходится использовать так называемые “нильпотентные мультипликаторы”, или инварианты Бэра, являющиеся левыми производными факторов по элементам нижнего центрального ряда.

Для группы G , заданной копредставлением (2), абелева группа

$$M^{(k)}(G) = (R \cap \gamma_{k+1}(F))/[R, {}_k F] \quad (3)$$

не зависит от выбора свободного копредставления (2) для группы G и называется k -м инвариантом Бэра. В случае $k = 1$ группа $M^{(k)}(G)$ представляет собой мультипликатор группы G , т. е. $M^{(1)}(G) = H_2(G)$, и именно поэтому инварианты Бэра часто называют обобщенными (или нильпотентными) мультипликаторами.

Как основной аппарат работы с k -центральными расширениями в § 2 мы вводим обобщенную фильтрацию Дваера для инвариантов Бэра

$$M_k(G) = \varphi_{k+1}^{(k)}(G) \supseteq \varphi_{k+2}^{(k)}(G) \supseteq \dots,$$

где

$$\varphi_m^{(k)}(G) := \ker\{M^{(k)}(G) \rightarrow M^{(k)}(G/\gamma_{m-k}(G))\}, \quad k \geq 1, \quad m \geq k+1.$$

Эта фильтрация является естественным обобщением гомологической фильтрации, введенной в работе [7]. Простейшие свойства этой фильтрации позволяют сформулировать некоторые условия сохранения свойств нильпотентной аппроксимируемости при переходе к k -центральным расширениям: пусть G – группа и $\varphi_m^{(k)}(G) = 0$ для некоторых $k \geq 1$ и $m \geq k+1$, тогда для любого k -центрального расширения (1) группа $\tilde{G}$ нильпотентно аппроксимируема, если и только если группа G является нильпотентно аппроксимируемой (предложение 4). Также несложно привести гомологические условия, обеспечивающие одностороннюю наследственность нильпотентной аппроксимируемости: пусть конечно представленная группа G имеет конечный мультипликатор $H_2(G)$, тогда для любого k -центрального расширения (1) из нильпотентной аппроксимируемости группы $\tilde{G}$ следует нильпотентная аппроксимируемость группы G (предложение 5). Обратное утверждение неверно.

Для нильпотентно аппроксимируемой группы G , являющейся HNN-расширением абелевой группы $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_3$:

$$G = \langle a, b, c \mid aba^{-1}b = c^3 = [b, c] = 1 \rangle,$$

мы показываем, что для любого ее свободного копредставления (2) группа $F/[R, {}_k F]$ не является нильпотентно аппроксимируемой при $k \geq 1$ (теорема 4). Заметим, что построенные примеры групп $F/[R, {}_k F]$ являются трансфинитно нильпотентными, поэтому данная конструкция представляет интерес с точки зрения теории трансфинитных нижних центральных рядов конечно представленных групп (см. [4], [12]).

В работе [11] показано, что для любого центрального расширения (1) группы G с одним соотношением группа $\tilde{G}$ нильпотентно аппроксимируема тогда

и только тогда, когда нильпотентно аппроксимируема группа G . Переходя от гомологических методов, применяемых в работе [11], к их обобщенным аналогам, в которых используются инварианты Бэра, мы показываем следующее: пусть группа G является свободным произведением n групп с одним определяющим соотношением ($n \geq 1$) и (1) – некоторое k -центральное расширение группы G ($k = 1, 2$), тогда группа G нильпотентно аппроксимируема, если и только если нильпотентно аппроксимируема группа $\tilde{G}$ (следствие 3). Ключевую роль в доказательстве этого утверждения играет исследование обобщенной фильтрации Дваера в инвариантах Бэра для групп с одним определяющим соотношением. Мы показываем, что для любого свободного произведения конечного числа групп с одним определяющим соотношением обобщенная фильтрация Дваера (для $k = 1, 2$) становится тривиальной на некотором конечном шаге (теорема 7). Требуемое утверждение о сохранении свойств нильпотентной аппроксимируемости для свободных произведений групп с одним соотношением следует из упомянутого предложения 4.

Будем использовать левонормированную запись коммутаторов:

$$[g_1, g_2, \dots, g_n] = [\dots [g_1, g_2], \dots, g_n], \quad [g, h] = [g, h], \quad [g,_{n+1} h] = [[g,_{n+1} h], h].$$

§ 2. Инварианты Бэра и обобщенная фильтрация Дваера

Как уже отмечалось во введении, при изучении k -центральных расширений весьма эффективным оказывается использование инвариантов Бэра, определяемых для группы G , заданной свободным копредставлением (2) как серия абелевых групп

$$M^{(k)}(G) = (R \cap \gamma_{k+1}(F)) / [R,_{k+1} F].$$

Инварианты $M^{(k)}(G)$ задают ковариантные функторы (см. [3])

$$M^{(k)}: \mathcal{G}r \rightarrow \mathcal{A}b, \quad M^{(k)}: G \mapsto M^{(k)}(G),$$

из категории $\mathcal{G}r$ групп в категорию $\mathcal{A}b$ абелевых групп. В работе [3] показано, что для $k \geq 1$ функторы $M^{(k)}$ являются первыми левыми производными функторами следующих функторов:

$$Z_k: \mathcal{G}r \rightarrow \mathcal{N}il_{k-1}, \quad Z_k: G \mapsto G / \gamma_k(G),$$

из категории групп в категорию $\mathcal{N}il_{k-1}$ нильпотентных групп степени $k - 1$. Это проще увидеть, выписав для данного свободного копредставления (2) группы G либо резольвенту Чеха, либо нерв соответствующего скрещенного модуля и применив к ним функтор Z_k (см. [3], [5]). В целом, вычисление инвариантов $M^{(k)}(G)$ для заданной группы G представляет собой нетривиальную задачу, значительно более сложную, чем вычисление мультипликатора. В отличие от классической гомологической теории в случае групп с одним определяющим соотношением описание их инвариантов Бэра оказывается непростой задачей. Так, например, для фундаментальной группы бутылки Клейна оказывается нетривиальным второй инвариант Бэра (см. замечание 6) несмотря на то, что мультипликатор этой группы тривиален.

Аналогом пятиичленной последовательности Столлинга–Стаммбаха для инвариантов Бэра является последовательность, данная в следующей теореме, которая доказывается непосредственным применением представления (3).

ТЕОРЕМА 1 (см., например, [3]). Пусть $k \geq 1$, G – группа и N – нормальная подгруппа в G . Тогда существует следующая точная последовательность групп:

$$M^{(k)}(G) \rightarrow M^{(k)}(G/N) \rightarrow N/[N, {}_k G] \rightarrow Z_{k+1}(G) \rightarrow Z_{k+1}(G/N) \rightarrow 1.$$

В частности, при $k \geq 1$, $n \geq k + 1$ имеем точную последовательность абелевых групп

$$M^{(k)}(G) \rightarrow M^{(k)}(G/\gamma_n(G)) \rightarrow \gamma_n(G)/\gamma_{n+k}(G) \rightarrow 1. \quad (4)$$

Для каждого $k \geq 1$ и $m \geq k + 1$ определим убывающую обобщенную фильтрацию Дваера

$$M_k(G) = \varphi_{k+1}^{(k)}(G) \supseteq \varphi_{k+2}^{(k)}(G) \supseteq \dots,$$

где

$$\varphi_m^{(k)}(G) := \ker\{M^{(k)}(G) \rightarrow M^{(k)}(G/\gamma_{m-k}(G))\}.$$

При $k = 1$ это обычная фильтрация Дваера вторых гомологий группы [7]. Используя представления функторов Бэра (3), несложно показать, что члены обобщенной фильтрации Дваера могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \varphi_m^{(k)}(G) &= ((R \cap \gamma_m(F))[R, {}_k F])/[R, {}_k F] \\ &= (R \cap \gamma_m(F))/([R, {}_k F] \cap \gamma_m(F)), \quad k \geq 1, \quad m \geq k + 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Из представления (5) элементарно следует

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть $m \geq k + 1 \geq l + 2$. Тогда для любой нормальной подгруппы R свободной группы F существует короткая точная последовательность абелевых групп

$$0 \rightarrow \varphi_m^{(l)}(F/[R, {}_{k-l} F]) \rightarrow \varphi_m^{(k)}(F/R) \rightarrow \varphi_m^{(k-l)}(F/R) \rightarrow 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $f: G \rightarrow H$ – гомоморфизм групп, индуцирующий изоморфизм $G/\gamma_k(G) \rightarrow H/\gamma_k(H)$ для некоторого $k \geq 1$. Тогда для любого $m \geq 2k$ следующие утверждения эквивалентны:

- (i) f индуцирует изоморфизм $M^{(k)}(G)/\varphi_m^{(k)}(G) \rightarrow M^{(k)}(H)/\varphi_m^{(k)}(H)$;
- (ii) f индуцирует изоморфизм $f_m: G/\gamma_m(G) \rightarrow H/\gamma_m(H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 1 следует, что для любого $m \geq k + 1$ существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & M^{(k)}(G)/\varphi_m^{(k)}(G) & \rightarrow & M^{(k)}(G/\gamma_{m-k}(G)) & \rightarrow & \gamma_{m-k}(G)/\gamma_m(G) \rightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & M^{(k)}(H)/\varphi_m^{(k)}(H) & \rightarrow & M^{(k)}(H/\gamma_{m-k}(H)) & \rightarrow & \gamma_{m-k}(H)/\gamma_m(H) \rightarrow 1 \end{array} \quad (6)$$

индуцированная гомоморфизмом f . Утверждение предложения непосредственно доказывается индукцией по $m \geq k + 1$ последовательным применением диаграммы (6).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $G/\gamma_{c+1}(G)$ – свободная нильпотентная группа для некоторого $c \geq 1$ и $M^{(c)}(G) = 0$. Тогда $M^{(k)}(G) = 0$, $k \leq c$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{g_i\}_{i \in I}$ – элементы из G такие, что $\{g_i \gamma_{c+1}(G)\}_{i \in I}$ является базисом свободной нильпотентной группы $G/\gamma_{c+1}(G)$. Рассмотрим гомоморфизм $f: F \rightarrow G$, где F – свободная группа с базисом $\{f_i\}_{i \in I}$, заданным $f_i \mapsto g_i$, $i \in I$. Тогда f индуцирует изоморфизм $F/\gamma_{c+1}(F) \simeq G/\gamma_{c+1}(G)$ и эпиморфизм (нулевой)

$$M^{(c)}(F)/\varphi_k^{(c)}(F) \rightarrow M^{(c)}(G)/\varphi_k^{(c)}(G), \quad k \geq c+1.$$

По предложению 1 получаем, что f индуцирует изоморфизм $F/\gamma_n(F) \simeq G/\gamma_n(G)$ для всех $n \geq 1$. Учитывая, что $M^{(c-1)}(F) = 0$, и снова применяя предложение 1, получаем, что $M^{(c-1)}(G) = \varphi_k^{(c-1)}(G)$, $k \geq c$. Теперь требуемое утверждение следует из эпиморфизма $M^{(c)}(G) \rightarrow \varphi_c^{(c-1)}(G)$ (см. замечание 1).

Следующая теорема дает метод изучения k -центральных расширений с помощью обобщенной фильтрации Дваера.

ТЕОРЕМА 2. Пусть

$$1 \rightarrow N \rightarrow \tilde{G} \xrightarrow{p} G \rightarrow 1 \quad (7)$$

– k -центральное расширение групп для некоторого $k \geq 1$. Тогда для каждого $m \geq k+1$ существует точная последовательность абелевых групп

$$\varphi_m^{(k)}(\tilde{G}) \xrightarrow{p^*} \varphi_m^{(k)}(G) \xrightarrow{\beta} N \cap \gamma_m(\tilde{G}) \rightarrow 1,$$

где гомоморфизм p^* индуцирован эпиморфизмом p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим свободные копредставления групп из (7):

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & N & \rightarrow & \tilde{G} & \xrightarrow{p} & G \rightarrow 1 \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 1 & \rightarrow & R/S & \rightarrow & F/S & \xrightarrow{p} & F/R \rightarrow 1 \end{array}$$

где F – свободная группа и

$$[F, {}_k R] \subseteq S. \quad (8)$$

Из представления (5) обобщенной фильтрации Дваера получаем, что гомоморфизм p^* можно представить как индуцированное вложением $S \rightarrow R$ отображение

$$p^*: ((S \cap \gamma_m(F))[F, {}_k S])/[F, {}_k S] \rightarrow ((R \cap \gamma_m(F))[F, {}_k R])/[F, {}_k R].$$

Коядро p^* естественно представимо как

$$\text{coker}(p^*) \simeq ((R \cap \gamma_m(F))[F, {}_k R])/((S \cap \gamma_m(F))[F, {}_k R]).$$

Определим гомоморфизм

$$\begin{aligned} f: ((R \cap \gamma_m(F))[F, {}_k R])/((S \cap \gamma_m(F))[F, {}_k R]) &\rightarrow \\ \rightarrow R/S \cap \gamma_m(F/S) = (R \cap \gamma_m(F)S)/S &\simeq N \cap \gamma_m(\tilde{G}) \end{aligned}$$

следующим образом:

$$f: r(S \cap \gamma_i(F))[F, {}_k R] \mapsto rS, \quad r \in R \cap \gamma_m(F).$$

Из условия k -центральности (8) непосредственно следует, что f является естественным изоморфизмом.

§ 3. Нильпотентная аппроксимируемость k -центральных расширений

Возникает естественный вопрос о том, сохраняются ли аппроксимационные свойства при переходе от группы к ее k -центральному расширению. Этот вопрос оказывается нетривиальным уже при $k = 1$ – в случае центральных расширений. Так, при $k = 1$ несложно построить нильпотентно аппроксимируемую группу $\tilde{G}$ такую, что группа G не является нильпотентно аппроксимируемой, и наоборот.

ПРИМЕР. Обозначим через A свободную абелеву группу бесконечного ранга с базисом $\{a_i\}_{i \geq 1}$, а через G_i – 2-порожденную свободную нильпотентную группу ступени нильпотентности $i + 1$ с порождающими x_i, y_i . Пусть $H = A \oplus \prod_{i \geq 1} G_i$. Обозначим $\beta_i := [x_i, y_i]$, $i \geq 1$, и пусть R – центральная подгруппа в H , порожденная элементами $a_i a_{i+1}^{-1} \beta_i \beta_{i+1}^{-1}$, $i \geq 1$. Пусть $G = H/R$. Покажем сначала, что G является нильпотентно аппроксимируемой группой. Пусть R_1 – подгруппа в G , порожденная центральными элементами β_i , $i \geq 1$. Тогда G/R_1 – прямое произведение нильпотентных групп и, следовательно, G/R_1 нильпотентно аппроксимируема. Таким образом, $\gamma_\omega(G) \subseteq R_1$. Пусть $x \in \gamma_\omega(G)$. Тогда x может быть представлено в виде

$$x = \beta_1^{k_1} \dots \beta_n^{k_n} \quad (9)$$

для некоторого $n \geq 1$ и некоторых целых чисел k_i , $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим группу

$$G(n) = \langle a_i, i = 1, \dots, n \rangle \oplus \prod_{i=1}^n G_i / \{a_i a_{i+1}^{-1} \beta_i \beta_{i+1}^{-1}, i < n\}.$$

Тогда существует естественный эпиморфизм $G \rightarrow G(n)$, ядро которого есть подгруппа в G , порожденная элементами x_i, y_i , $i > n$. Если не все k_i тривиальны в (9), то образ элемента x нетривиален и в группе $G(n)$. Но группа $G(n)$ является нильпотентной ступени $n + 1$. Таким образом, $x \notin \gamma_{n+1}(G)$, и группа G нильпотентно аппроксимируема. Однако, как легко видеть, группа G/A не является нильпотентно аппроксимируемой, а группа G/AR_1 является нильпотентно аппроксимируемой (см., например, [12, пример 1]). Получаем необходимые утверждения для следующих центральных расширений:

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow A \rightarrow G \rightarrow G/A \rightarrow 1, \\ 1 &\rightarrow R_1 A/A \rightarrow G/A \rightarrow G/R_1 A \rightarrow 1, \\ \gamma_\omega(G) &= 1, \quad \gamma_\omega(G/A) \neq 1, \quad \gamma_\omega(G/R_1 A) = 1. \end{aligned}$$

Изучению сохранения нильпотентной аппроксимируемости при переходе к центральному расширению и аналогичной задаче о разрешимой аппроксимируемости и абелевых расширениях посвящена работа [11]. Методы, применяемые в [11], в основном гомологические, опираются на свойства вторых гомологий групп и фильтрации Дваера.

Следующее несложное наблюдение позволяет свести изучение нильпотентной аппроксимируемости свободных k -центральных расширений к изучению обобщенной фильтрации Дваера.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть G – нильпотентно аппроксимируемая группа, заданная копредставлением (2). Тогда для любого $k \geq 1$ имеет место изоморфизм абелевых групп

$$\gamma_\omega(F/[R, {}_k F]) \simeq \bigcap_{m \geq k+1} \varphi_m^{(k)}(G).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим короткую точную последовательность групп

$$1 \rightarrow R/[R, {}_k F] \rightarrow F/[R, {}_k F] \rightarrow F/R \rightarrow 1.$$

Поскольку группа F/R нильпотентно аппроксимируема по условию, имеем

$$\gamma_\omega(F/[R, {}_k F]) \subseteq R/[R, {}_k F].$$

Аналогично, для любого $n \geq 1$ имеем включение

$$\gamma_\omega(F/[R, {}_k F]) \subseteq \gamma_n(F/[R, {}_k F]) = (\gamma_n(F)[R, {}_k F])/[R, {}_k F].$$

Используя представление (5) обобщенной фильтрации Дваера, заключаем, что

$$\gamma_\omega(F/[R, {}_k F]) \subseteq \bigcap_{m \geq k+1} \varphi_m^{(k)}(G).$$

С другой стороны, из представления (5) получаем включение

$$\varphi_m^{(k)}(G) \subseteq \gamma_m(F/[R, {}_k F]), \quad k \geq 1, \quad m \geq k+1,$$

откуда следует, что для любого $k \geq 1$

$$\bigcap_{m \geq k+1} \varphi_m^{(k)}(G) \subseteq \gamma_\omega(F/[R, {}_k F]).$$

Предложение доказано.

Из предложения 3 немедленно следует, что для нильпотентно аппроксимируемой группы G нильпотентная аппроксимируемость группы $F/[R, {}_k F]$, $k \geq 1$, не зависит от выбора копредставления (2). Также несложно показать, что это верно не только для нильпотентно аппроксимируемых групп F/R : для любой группы G нильпотентная аппроксимируемость $F/[R, {}_k F]$ не зависит от выбора свободного копредставления $G = F/R$.

Теорема 2 дает возможность представить простые условия, при которых нильпотентная аппроксимируемость сохраняется при переходе к k -центральному расширению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть G – группа и $\varphi_m^{(k)}(G) = 0$ для некоторых $k \geq 1$ и $m \geq k+1$. Тогда для любого k -центрального расширения

$$1 \rightarrow N \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G \rightarrow 1 \tag{10}$$

группа $\tilde{G}$ нильпотентно аппроксимируема, если и только если группа G нильпотентно аппроксимируема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2, примененной к k -центральному расширению (10), имеем $N \cap \gamma_m(\tilde{G}) = 0$, откуда следует, что для любого $l \geq m$ существует естественный изоморфизм $\gamma_l(\tilde{G}) = \gamma_l(G)$, из которого непосредственно вытекает требуемое утверждение.

Для дальнейших рассуждений нильпотентной аппроксимируемости мы будем использовать следующий результат Г. Эллиса.

ТЕОРЕМА 3 [6]. *Если для некоторой группы G ее мультипликатор $H_2(G)$ состоит из элементов конечного порядка, то для любого $k \geq 1$ абелева группа $M^{(k)}(G)$ также состоит из элементов конечного порядка.*

В частности, если G – конечно представленная группа и ее мультипликатор $H_2(G)$ конечен, то и все инварианты Бэра $M^{(k)}(G)$ тоже конечны. Эта теорема может быть доказана с помощью симплициальных техник, а именно методом спектральной последовательности Кертиса, построенной по нижней центральной фильтрации симплициальной группы. Теперь элементарно доказывается следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Пусть G – конечно представленная группа и мультипликатор $H_2(G)$ конечен. Тогда для любого $k \geq 1$ и k -центрального расширения*

$$1 \rightarrow N \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G \rightarrow 1$$

из нильпотентной аппроксимируемости $\tilde{G}$ следует нильпотентная аппроксимируемость G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим предел последовательностей

$$1 \rightarrow N \cap \gamma_n(\tilde{G}) \rightarrow \gamma_n(\tilde{G}) \rightarrow \gamma_n(G) \rightarrow 1, \quad n \geq 2.$$

Получаем вложение

$$\gamma_\omega(G) \rightarrow \varprojlim^1 (N \cap \gamma_n(\tilde{G})). \quad (11)$$

Однако ввиду того, что группа G конечно представлена и мультипликатор $H_2(G)$ конечен, инварианты $M^{(n)}(G)$ также конечны при всех $n \geq 1$ (по теореме 3). По теореме 2 группы $N \cap \gamma_n(\tilde{G})$, $n \geq k+1$, также конечны, и поэтому $\varprojlim^1$ тривиален в (11) и мы имеем требуемое утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть G – нильпотентно аппроксимируемая группа и*

$$1 \rightarrow N \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G \rightarrow 1 \quad (12)$$

– k -центральное расширение с $\gamma_\omega(\tilde{G}) \neq 1$ и $\varprojlim^1 \varphi_m^{(k)}(\tilde{G}) = 0$. Тогда

$$\bigcap_{m \geq k+1} \varphi_m^{(k)}(G) \neq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2 для любого $m \geq k+1$ существует следующая точная последовательность:

$$\varphi_m^{(k)}(\tilde{G}) \xrightarrow{t_m} \varphi_m^{(k)}(G) \rightarrow N \cap \gamma_m(\tilde{G}) \rightarrow 1. \quad (13)$$

Переходя к обратным пределам, получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow \bigcap_{m \geq k+1} \operatorname{im}(t_m) \rightarrow \bigcap_{m \geq k+1} \varphi_m^{(k)}(G) \rightarrow N \cap \gamma_\omega(\tilde{G}) \rightarrow \varprojlim \operatorname{im}(t_m). \quad (14)$$

Эпиморфизм $\varphi_m^{(k)}(\tilde{G}) \rightarrow \operatorname{im}(t_m)$ индуцирует эпиморфизм производных пределов:

$$\varprojlim \varphi_m^{(k)}(\tilde{G}) \rightarrow \varprojlim \operatorname{im}(t_m),$$

поэтому ввиду условия следствия получаем $\varprojlim^1 \operatorname{im}(t_m) = 0$. Поскольку $N \cap \gamma_\omega(\tilde{G}) \neq 0$, из (14) заключаем, что $\bigcap_{m \geq k+1} \varphi_m^{(k)}(G) \neq 0$. Следствие доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть G – конечно представленная группа с $\gamma_\omega(G) \neq \gamma_{\omega+1}(G)$ и мультипликатор $H_2(G)$ конечен. Тогда для любого $k \geq 1$ и свободного копредставления

$$1 \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow G/\gamma_\omega(G) \rightarrow 1$$

группа $\Pi_k := F/[R, {}_k F]$ не является нильпотентно аппроксимируемой. Если при этом мультипликатор $H_2(F/R)$ конечен, то для любого свободного копредставления

$$1 \rightarrow S \rightarrow E \rightarrow \Pi_k/\gamma_\omega(\Pi_k) \rightarrow 1$$

группа $E/[S, {}_l E]$ не является нильпотентно аппроксимируемой при $1 \leq l \leq k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H = G/\gamma_{\omega+k}(G)$. Эпиморфизм $f: G \rightarrow H$ индуцирует изоморфизмы $f_n: G/\gamma_n(G) \rightarrow H/\gamma_n(H)$. Следовательно, по предложению 1 имеем изоморфизмы

$$M^{(k)}(G)/\varphi_m^{(k)}(G) \simeq M^{(k)}(H)/\varphi_m^{(k)}(H), \quad m \geq 2k. \quad (15)$$

Однако по условию предложения мультипликатор $H_2(G)$ конечен, поэтому по теореме 3 группа $M^{(k)}(G)$ также конечна. Получаем, что для любого $k \geq 1$ фильтрация $\varphi_m^{(k)}(G)$ стабилизируется начиная с некоторого шага:

$$\varphi_{m_k}^{(k)}(G) = \varphi_{m_k+1}^{(k)}(G).$$

Изоморфизм (15) влечет стабилизацию обобщенной фильтрации Дваера группы H :

$$\varphi_{m_k}^{(k)}(H) = \varphi_{m_k+1}^{(k)}(H). \quad (16)$$

Рассмотрим теперь k -центральное расширение

$$1 \rightarrow \gamma_\omega(G)/\gamma_{\omega+k}(G) \rightarrow H \rightarrow G/\gamma_\omega(G) \rightarrow 1, \quad (17)$$

по условию имеющее нетривиальное ядро. Из стабилизации (16) следует условие

$$\varprojlim \varphi_m^{(k)}(H) = \varprojlim \varphi_{m_k}^{(k)}(H) = 0,$$

поэтому к k -центральному расширению (17) применимо следствие 1. Получаем, что

$$\bigcap_{m \geq k+1} \varphi_m^{(k)}(G/\gamma_\omega(G)) \neq 0$$

и Π_k не является нильпотентно аппроксимируемой ввиду предложения 3.

Предположим теперь, что мультипликатор $H_2(G)$ конечен. Рассмотрим эпиморфизмы

$$\pi_l: \Pi_k \rightarrow R_l := \Pi_k / \gamma_{\omega+l}, \quad l = 1, \dots, k.$$

Поскольку π_l индуцирует изоморфизмы факторов по конечным членам нижнего центрального ряда, по предложению 1 имеем изоморфизмы

$$M^{(l)}(\Pi_k) / \varphi_m^{(l)}(\Pi_k) \simeq M^{(l)}(R_l) / \varphi_m^{(l)}(R_l), \quad m \geq l + 1. \quad (18)$$

Из замечания 1 следует вложение

$$\varphi_m^{(l)}(\Pi_k) \subseteq \varphi_m^{(l+k)}(F/R), \quad l \geq 1.$$

Так как по предположению мультипликатор $H_2(F/R)$ конечен, то по теореме 3 группа $M^{(l+k)}(F/R)$, а следовательно, и группа $\varphi_m^{(l)}(\Pi_k)$ конечны для любого $l \geq 1$. Таким образом, для любого $1 \leq l \leq k$ цепочка $\varphi_m^{(l)}(\Pi_k)$ стабилизируется начиная с некоторого конечного шага. Поэтому из (18) следует, что $\varphi_m^{(l)}(R_k)$ тоже стабилизируется начиная с некоторого конечного шага и, следовательно,

$$\varprojlim \varphi_m^{(l)}(R_l) = 0, \quad 1 \leq l \leq k. \quad (19)$$

Рассмотрим теперь l -центральное расширение:

$$1 \rightarrow \gamma_{\omega}(\Pi_k) / \gamma_{\omega+l}(\Pi_k) \rightarrow R_l \rightarrow \Pi_k / \gamma_{\omega}(\Pi_k) \rightarrow 1. \quad (20)$$

Поскольку группа F/R нильпотентно аппроксимируема, имеем $\gamma_{\omega+k}(\Pi_k) = 1$, поэтому из того, что группа Π_k не является нильпотентно аппроксимируемой, следует, что $\gamma_{\omega}(R_l) \neq \gamma_{\omega+1}(R_l)$. Тогда условие (19) влечет

$$\bigcap_{m \geq l+1} \varphi_m^{(l)}(\Pi_k / \gamma_{\omega}(\Pi_k)) \neq 0$$

ввиду следствия 1, примененного к расширению (20). Требуемое утверждение теперь следует из предложения 3.

ТЕОРЕМА 4. *Существует конечно представленная нильпотентно аппроксимируемая группа G такая, что для любого $k \geq 1$ и любого свободного копредставления*

$$1 \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow H \rightarrow 1$$

группа $F/[R_k, F]$ не является нильпотентно аппроксимируемой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим свободное произведение группы бутылки Клейна и циклической группы порядка 3:

$$G = \langle a, b, c \mid aba^{-1}b = c^3 = 1 \rangle.$$

В [4] показано, что $\gamma_{\omega}(G) = \langle [b, c] \rangle^G \neq \gamma_{\omega+1}(G)$. Поскольку гомологии свободного произведения групп равны прямой сумме гомологий слагаемых, имеем $H_2(G) = 0$. Таким образом, к группе G применимо предложение 6, в результате чего получаем требуемое утверждение для группы

$$H := G / \gamma_{\omega}(G) = \langle a, b, c \mid aba^{-1}b = c^3 = [b, c] = 1 \rangle,$$

являющейся HNN-расширением абелевой группы $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_3$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для любого $k \geq 1$ группы $\Pi_k := F/[R_k F]$ из теоремы 4 являются конечно представленными трансфинитно нильпотентными, но не нильпотентно аппроксимируемыми. Из последовательности Майера–Виеториса для HNN-расширений групп непосредственно следует, что $H_2(H) \simeq \mathbb{Z}_3$, таким образом, по предложению 6 для любого $1 \leq l \leq k$ и любого свободного копредставления

$$1 \rightarrow S \rightarrow E \rightarrow \Pi_k / \gamma_\omega(\Pi_k) \rightarrow 1$$

группа $E/[S, l E]$ не является нильпотентно аппроксимируемой.

Напомним, что группа G называется *парасвободной*, если она нильпотентно аппроксимируема и существует гомоморфизм $f: F \rightarrow G$, где F – свободная группа, такой, что индуцированные гомоморфизмы $f_n: F/\gamma_n(F) \rightarrow G/\gamma_n(G)$ являются изоморфизмами. Так как все инварианты Бэра свободных групп тривиальны, получаем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть G – парасвободная группа. Тогда для любого $n \geq 1$ и любого свободного копредставления $G = F/R$ имеет место изоморфизм $M^{(n)}(G) \simeq \gamma_\omega(F/[R_k F])$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично доказательству предложения 2 пусть $\{g_i\}_{i \in I}$ – элементы из G такие, что $\{g_i \gamma_2(G)\}_{i \in I}$ – базис свободной абелевой группы $G/\gamma_{c+1}(G)$. Рассмотрим гомоморфизм $f: F \rightarrow G$, где F – свободная группа с базисом $\{f_i\}_{i \in I}$, заданный $f_i \mapsto g_i$, $i \in I$. Тогда f индуцирует изоморфизм $F/\gamma_n(F) \simeq G/\gamma_n(G)$ для всех $n \geq 1$. По предложению 1 гомоморфизм f индуцирует эпиморфизм (нулевой)

$$M^{(n)}(F)/\varphi_k^{(n)}(F) \rightarrow M^{(n)}(G)/\varphi_k^{(c)}(G), \quad k \geq n+1,$$

т.е. для любого $n \geq 1$ имеет место изоморфизм $M^{(n)}(G) = \bigcap_{k \geq n+1} \varphi_k^{(n)}(G)$, и требуемое утверждение следует из предложения 3.

СЛЕДСТВИЕ 2. Существует парасвободная группа G такая, что для любого ее свободного копредставления $F/R = G$ и любого $k \geq 1$ группа $F/[R_k F]$ не является нильпотентно аппроксимируемой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве G возьмем нильпотентное пополнение свободной группы ранга 2: $G = \varprojlim F/\gamma_n(F)$. Группа G является парасвободной [1], и ее мультипликатор $H_2(\overline{G})$ континуален [2]. Из предложения 2 теперь следует, что $M^{(k)}(G) \neq 0$ для всех $k \geq 1$. Требуемое утверждение следует из предложения 7.

§ 4. Группы с одним определяющим соотношением

4.1. Обобщенное вложение Магнуса. Для анализа обобщенной фильтрации Дваера групп с одним определяющим соотношением будем использовать обобщенное вложение Магнуса, которое опишем далее.

Пусть F – свободная группа с базисом X . Для данного $m \geq 2$ обозначим через Ω_m кольцо полиномов $\mathbb{Z}[\lambda_{i,i+1}(X)]$ от независимых коммутирующих переменных $\lambda_{i,i+1}(x)$, $1 \leq i \leq m-1$, $x \in X$.

Определим отображение целочисленного группового кольца $\mathbb{Z}[F]$ свободной группы F в кольцо $(m \times m)$ -матриц:

$$\mu_m: \mathbb{Z}[F] \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \Omega_m & \dots & \Omega_m \\ 0 & 1 & \dots & \Omega_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

задавая μ_m на базисе X следующим образом:

$$\mu_m: x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \lambda_{12}(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_{23}(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{m-1,m}(x) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad x \in X,$$

отображая единицу в единичную матрицу и распространяя определение отображения на F мультипликативно, т.е. $\mu_m(gh) = \mu_m(g)\mu_m(h)$, $\mu_m(g^{-1}) = (\mu_m(g))^{-1}$, $g, h \in F$, и на групповое кольцо $\mathbb{Z}[F]$ линейно. Заданный таким образом гомоморфизм μ_m является частным случаем обобщенного отображения Магнуса [8] и в рассмотренном нами случае имеет ядро, в точности совпадающее с m -й степенью аугментационного идеала $\Delta(F)$ группового кольца $\mathbb{Z}[F]$, т.е.

$$\ker(\mu_m) = \Delta^m(F), \quad m \geq 1. \quad (21)$$

При $m = 2$ получаем простейший случай классического вложения Магнуса группового кольца свободной абелевой группы в группу унитарных (2×2) -матриц.

Рассмотрим мультипликативную подгруппу в группе вышеописанных $(m \times m)$ -матриц, порожденную элементами $\mu_m(x)$, $x \in X$. Из (21) следует, что эта подгруппа изоморфна $F/\gamma_m(F)$:

$$F/\gamma_m(F) = \langle \mu_m(f), f \in F \rangle.$$

Таким образом, получается матричное представление свободной нильпотентной группы $F/\gamma_m(F)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для $m \geq 3$ подпредставление μ_m в группу $((m-1) \times (m-1))$ -матриц, получаемое из μ_m удалением первой строки и первого столбца (или m -й строки и m -го столбца), совпадает с представлением μ_{m-1} , где в качестве Ω_{m-1} рассмотрено кольцо $\mathbb{Z}[\lambda_{i,i+1}(X)]$, $i = 2, \dots, m-1$ (соответственно, $\mathbb{Z}[\lambda_{i,i+1}(X)]$, $i = 1, \dots, m-2$).

ЛЕММА 1. Пусть $m \geq 3$ и

$$\mu_m(f) = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1,m+2} \\ 0 & 1 & b_{23} & \dots & b_{2,m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

для некоторого $f \in F$. Тогда

$$\mu_m((f-1)^{m-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & b_{12} \dots b_{m,m+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма непосредственно доказывается индукцией по m при использовании замечания 3.

Следующий результат принадлежит В. Магнусу [9]. Мы приводим его с доказательством для демонстрации того, как работает метод вложения Магнуса при решении теоретико-групповых задач.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8 [9]. Пусть для некоторого $m \geq 1$ выполнено

$$u \in \gamma_m(F) \setminus \gamma_{m+1}(F) \quad (22)$$

и $f \in F$ – такой элемент, что

$$[u, f] \in \gamma_{m+2}(F). \quad (23)$$

Тогда:

- (i) если $m \geq 2$, то $f \in \gamma_2(F)$;
- (ii) если $m = 1$, то $u = f^k d$, где $k \in \mathbb{Z}$, $d \in \gamma_2(F)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим образы элементов u и f при обобщенном отображении Магнуса

$$\begin{aligned} \mu_{m+2}: u &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1,m+1} & a_{1,m+2} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{2,m+2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mu_{m+k_0+1}: f_{k_0} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1,m+2} \\ 0 & 1 & b_{23} & \dots & b_{2,m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Из того, что $\ker(\mu_{m+2}) = \gamma_{m+2}(F)$, следует, что условие (23) эквивалентно тому, что

$$\mu_{m+2}(u)\mu_{m+2}(f_{k_0}) = \mu_{m+2}(f_{k_0})\mu_{m+2}(u).$$

Непосредственно перемножая матрицы и сравнивая элементы полученных произведений, стоящих в правом верхнем углу, т. е. элементы с номерами $(1, m+2)$, получаем, что условие (23) эквивалентно следующему:

$$b_{12}a_{2,m+2} = a_{1,m+2}b_{m+1,m+2}. \quad (24)$$

Предположение того, что $u \notin \gamma_{m+1}(F)$, $f \notin \gamma_2(F)$, эквивалентно тому, что

$$b_{12} \neq 0, \quad b_{m+1,2} \neq 0, \quad a_{2,m+2} \neq 0, \quad a_{1,m+1} \neq 0.$$

Для любого $i = 1, \dots, m+1$ имеем $b_{i,i+1} \in \mathbb{Z}[\lambda_{i,i+1}(X)]$. Поскольку элементы $\lambda_{12}(X)$ не входят в разложение $a_{2,m+2}$ и элементы $\lambda_{m+1,m+2}(X)$ не входят в разложение $a_{1,m+1}$ (по замечанию 3), получаем, что существует $z \in \mathbb{Z}[\lambda_{i,i+1}(X)]$, $i = 2, \dots, m$, такое, что

$$a_{2,m+2} = b_{m+1,m+2}z, \quad a_{1,m+1} = b_{12}z. \quad (25)$$

Ввиду замечания 3 имеем, что подпредставления μ_{m+2} , получаемые посредством удаления первых и последних строк и столбцов, изоморфны и изоморфизм определяется отображением $\lambda_{i,i+1}(x) \rightarrow \lambda_{i+1,i+2}(x)$, $x \in X$, $i = 1, \dots, m-2$. Таким образом, если $a_{1,m+1}$ записывается как некоторый полином:

$$a_{1,m+1} = F(\lambda_{1,2}(X), \dots, \lambda_{m,m+1}(X)), \quad i = 1, \dots, m-2,$$

то элемент $a_{2,m+2}$ является полиномом того же самого вида, только от других переменных, т. е.

$$a_{2,m+2} = F(\lambda_{2,3}(X), \dots, \lambda_{m+1,m+2}(X)).$$

Тогда из (25) следует, что

$$z = b_{23}z_1, \quad z_1 \in \mathbb{Z}[\lambda_{i,i+1}], \quad i = 3, \dots, m.$$

Применяя этот же аргумент m раз, получаем

$$a_{1,m+1} = Cb_{12}b_{23} \dots b_{m,m+1}, \quad (26)$$

$$a_{2,m+1} = Cb_{23} \dots b_{m,m+1}b_{m+1,m+2}, \quad C \in \mathbb{Z}. \quad (27)$$

По лемме 1 и замечанию 3 имеем, что элемент $(\mu_{m+2}(f) - 1)^m$ представляется матрицей вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & b_{12} \dots b_{m,m+1} & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{23} \dots b_{m+1,m+2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем, что матрица

$$B := \mu_{m+2}(u) - 1 - C(\mu_{m+2}(f) - 1)^m \quad (28)$$

состоит из нулевых элементов, кроме, возможно, единственного элемента с координатами $(1, m+2)$:

$$B = \mu_{m+2}(u - 1 - C(f - 1)^m) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

для некоторого $\alpha \in \mathbb{Z}[\lambda_{i,i+1}(X)]$. Из (21) следует, что

$$u - 1 - C(f - 1)^m \in \Delta^{m+1}(F). \quad (29)$$

Рассмотрим сначала случай (i): $u \in \gamma_m(F) \setminus \gamma_{m+1}(F)$, $m \geq 2$, и рассмотрим включение (29) по модулю $\gamma_2(F)$. Так как $u \in \gamma_2(F)$, имеем

$$C(f\gamma_2(F) - 1)^m \in \Delta^{m+1}(F/\gamma_2(F)),$$

откуда заключаем, что $f \in \gamma_2(F)$.

Рассмотрим теперь случай (ii): $m = 1$, $u \notin \gamma_2(F)$. Тогда (29) примет вид

$$uf^{-C} - 1 \in \Delta^2(F),$$

но тогда получаем, что $u = f^k d$, $d \in \gamma_2(F)$, $k = C$.

4.2. Обобщенная фильтрация Дваера групп с одним определяющим соотношением. Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5. Пусть r – элемент в свободной группе F . Обозначим через R нормальное замыкание r в F . Тогда для $k = 1, 2$ существует $m \geq 1$ (зависящее от k и r) такое, что $\varphi_{k+m}^{(k)}(F/R) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать теорему индукцией по k . Рассмотрим сначала случай $k = 1$ (см. [11]). В этом случае число m определяется так, чтобы было выполнено включение

$$r \in \gamma_m(F) \setminus \gamma_{m+1}(F).$$

Группа $R/[R, F]$ является бесконечной циклической группой. Для $m = 1$ требуемое утверждение является известным элементарным фактом. Действительно, в этом случае имеем короткую точную последовательность

$$0 \rightarrow H_2(F/R) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow R\gamma_2(F)/\gamma_2(F) \rightarrow 1.$$

Однако группа $F/\gamma_2(F)$ не имеет кручения, откуда из условия $r \notin \gamma_2(F)$ следует, что $R\gamma_2(F)/\gamma_2(F)$ является бесконечной циклической группой, и поэтому $H_2(F/R) = 0$. Для произвольного $m \geq 2$ выполнено $H_2(F/R) = R/[F, R] \simeq \mathbb{Z}$ и мы имеем следующую точную последовательность абелевых групп:

$$0 \rightarrow \varphi_{m+1}^{(1)}(F/R) \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{h} \gamma_m(F)/\gamma_{m+1}(F),$$

где гомоморфизм h индуцирован включением $r \in \gamma_m(F)$. Абелева группа $\gamma_m(F)/\gamma_{m+1}(F)$ не имеет кручения, откуда заключаем, что

$$\varphi_{m+1}^{(1)}(F/R) = 0. \quad (30)$$

Рассмотрим теперь случай $k = 2$. Пусть $r \in \gamma_l(F) \setminus \gamma_{l+1}(F)$, $l \geq 1$. Тогда, по уже доказанному случаю $k = 1$, из (30) заключаем, что $\varphi_{l+1}^{(1)}(F/R) = 0$, т. е.

$$R \cap \gamma_{l+1}(F) = [R, F] \cap \gamma_{l+1}(F). \quad (31)$$

Любой элемент из $[R, F]/[R, F, F]$ может быть представлен в виде $[r, f][R, F, F]$ для некоторого $f \in F$. Поэтому из (31) следует, что для любого $m \geq l$ из того, что $\varphi_{m+2}^{(2)}(F/R) \neq 0$, следует, что существует $f \in F$ такое, что

$$[r, f] \in \gamma_{m+2}(F), \quad [r, f] \notin [R, F, F]. \quad (32)$$

Поскольку для любого $f \in \gamma_2(F)$ имеем $[r, f] \in [R, F, F]$, из (32) следует, что

$$f \notin \gamma_2(F). \quad (33)$$

Если $l \geq 2$, то из случая (i) предложения 8 следует, что при $m > l$ условие (32) влечет $f \in \gamma_2(F)$, поэтому ввиду (33) получаем, что $\varphi_{l+2}^{(2)}(F/R) = 0$.

Пусть теперь $r \notin \gamma_2(F)$. Если существует такое $f \in F \setminus \gamma_2(F)$, что $[r, f] \in \gamma_3(F)$, то по предложению 8, (ii) должно выполняться условие

$$r = f^k d, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad d \in \gamma_2(F). \quad (34)$$

Если $k = \pm 1$, получаем $[r, f] = [r, r^{\pm 1}d] \in [R, F, F]$, что противоречит требованию. Таким образом получаем, что $k \neq -1, 0, 1$ и, следовательно, группа $F/R\gamma_2(F)$ имеет кручение. Кручение в $F/R\gamma_2(F)$ есть циклическая группа порядка, скажем, $N > 1$, образующую которой обозначим $wR\gamma_2(F)$, $w \in F$. Таким образом,

$$r = w^N y, \quad y \in \gamma_2(F).$$

Тогда для любого представления (34) имеем $f = w^{N_0} d_0$ для некоторого $N_0 > 1$, $d_0 \in \gamma_2(F)$. Тогда

$$[r, f] = [r, w^{N_0} d_0] \equiv [r, w^{N_0}] \equiv [w^N y, w^{N_0}] \pmod{[R, F, F]}.$$

Обозначим через $q \geq 2$ такое число, что выполняется

$$y \in \gamma_q(F) \setminus \gamma_{q+1}(F).$$

Но тогда по предложению 8, (i) имеем, что $[y, w^{N_0}] \in \gamma_{q+2}(F)$ влечет $w^{N_0} \in \gamma_2(F)$, что невозможно по построению. Отсюда следует, что (32) влечет $m < q$, и поэтому получаем

$$\varphi_{q+2}^{(2)}(F/R) = 0. \quad (35)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из доказательства теоремы 2 видно, что если элемент $r \in F$ такой, что группа $F/R\gamma_2(F)$ не имеет кручения, то для числа m : $r \in \gamma_m(F) \setminus \gamma_{m+1}(F)$, и $k = 1, 2$ имеем $\varphi_{m+k}^{(k)}(F/R) = 0$.

Следующее предложение показывает, что условие отсутствия кручения в абелианизации является существенным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть $G = \langle a, b \mid aba^{-1}b = 1 \rangle$; тогда $M^{(2)}(G) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем определяющее слово как $r = b^2[b, a]$ и обозначим через F свободную группу с базисом $\{a, b\}$ и через R нормальное замыкание r в F . Тогда, очевидно, имеем $[r, b] \in R \cap \gamma_3(F)$. Предположим, что $[r, b] \in [R, F, F]$. Тогда

$$[b, a, b] \in [R, F, F] \subseteq \langle b^2, \gamma_4(F) \rangle^4.$$

Проводя аналогичное построение с заменой букв a и b , заключаем, что $[a, b, a] \in \langle a^2, \gamma_4(F) \rangle^4$. Но это значит, что в группе $H = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = 1 \rangle$ элементы $[a, b, a]$ и $[b, a, b]$ лежат в четвертом члене нижнего центрального ряда. Однако эти элементы порождают $\gamma_3(H)$, откуда получаем, что $\gamma_3(H) = \gamma_4(H)$. Но это не верно, так как H является нильпотентно аппроксимируемой не нильпотентной группой. Отсюда заключаем, что $[b, a, b] \notin [R, F, F]$ и $M^{(2)}(G) \neq 0$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $k = 1, 2$, G – группа с одним определяющим соотношением и

$$1 \rightarrow N \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G \rightarrow 1 \quad (36)$$

– некоторое k -центральное расширение. Тогда G нильпотентно аппроксимируема, если и только если $\tilde{G}$ нильпотентно аппроксимируема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из теоремы 5 и предложения 4.

4.3. Свободные произведения групп с одним соотношением. Теоремы 5 и 6 могут быть обобщены на свободные произведения групп с одним определяющим соотношением. При этом доказательство требует дополнительного анализа вложения Магнуса.

ТЕОРЕМА 7. Пусть G_i , $i = 1, \dots, n$, – семейство групп с одним определяющим соотношением и $G = G_1 * \dots * G_n$ – их свободное произведение. Тогда для $k = 1, 2$ существует m такое, что $\varphi_m^{(k)}(G) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G_i заданы свободными копредставлениями

$$1 \rightarrow R_i \rightarrow F_i \rightarrow G_i \rightarrow 1,$$

где подгруппы R_i являются нормальными замыканиями элементов $r_i \in F_i$, $i = 1, \dots, n$. Тогда группа G имеет свободное копредставление

$$1 \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 1,$$

где $F = F_1 * \dots * F_n$, $R = \langle r_1, \dots, r_n \rangle^F$.

Сначала докажем данное утверждение для $k = 1$. Пусть l_i – такие числа, что выполнено

$$r_i \in \gamma_{l_i}(F_i) \setminus \gamma_{l_i+1}(F_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (37)$$

Обозначим $l = \max(l_i)$, $i = 1, \dots, n$. Предположим, что $\varphi_{l+1}^{(1)}(G) \neq 0$. Тогда существуют такие $k_1, \dots, k_n$, что

$$r_1^{k_1} \dots r_n^{k_n} \in \gamma_{l+1}(F), \quad r_1^{k_1} \dots r_n^{k_n} \notin [R, F].$$

Поэтому существует $1 \leq j \neq n$ такое, что $r_j^{k_j} \notin [R_j, F_j]$. Рассмотрим образ элемента $r_j^{k_j}$ при естественной проекции $d_i: F \rightarrow F_i$. Имеем $d(r_j^{k_j}) \in \gamma_{l+1}(F_j) \setminus [R_j, F_j]$. Однако по теореме 5 имеем $\varphi_{l+1}^{(1)}(F_j/R_j) = 0$, откуда следует, что $d(r_j^{k_j}) = 1$ в F_j . Это противоречит конструкции свободного произведения, откуда заключаем, что $\varphi_{l+1}^{(1)}(G) = 0$.

Докажем теперь требуемое утверждение для $k = 2$. Используя элементарные приемы коммутаторного исчисления, легко показать, что если для некоторого $m \geq 3$ выполнено $\varphi_m^{(2)}(G) \neq 0$, то существуют такие $f_j \in F_j$, что

$$[r_1, f_1] \dots [r_n, f_n] \in \gamma_m(F) \setminus ([R, F, F] \cap \gamma_m(F)). \quad (38)$$

Ввиду теоремы 5 можно считать, что $n \geq 2$. Докажем сначала требуемое утверждение для $n = 2$. Пусть

$$w := [r_1, f_1][r_2, f_2] \in \gamma_m(F), \quad [r_1, f_1][r_2, f_2] \notin [R, F, F]. \quad (39)$$

Тогда можем считать, что $f_1, f_2 \notin \gamma_2(F)$, так как в противном случае рассмотрение сводится к случаю $n = 1$, который следует из теоремы 5. Пусть

$$\begin{aligned} f_1 &= g_1 g_2 g_3, & g_1 &\in F_1, & g_2 &\in F_2, & g_3 &\in \gamma_2(F), \\ f_2 &= g_4 g_5 g_6, & g_4 &\in F_1, & g_5 &\in F_2, & g_6 &\in \gamma_2(F). \end{aligned}$$

Тогда если $[r_1, g_1] \notin [R_1, F_1, F_1]$, то проецируя $[r_1, g_1]$ на F_1 при естественной проекции $d_1: F \rightarrow F_1$, получаем, что $d_1(w) \in \gamma_m(F_1)$. Но по теореме 5 имеем,

что существует m_0 , зависящее от r_1 , такое, что $\varphi_{m_0}^{(2)}(F_1/R_1) = 0$. Следовательно, в (39) имеем $m < m_0$. Таким образом, для доказательства требуемого утверждения мы можем считать, что

$$f_1 \in F_2 \setminus (F_2 \cap \gamma_2(F)), \quad f_2 \in F_1 \setminus (F_1 \cap \gamma_2(F)). \quad (40)$$

Предположим, что $l_1 \neq l_2$, где l_i определены включением (37). Для определенности будем считать, что $l_1 > l_2$. Тогда при $m > l_1$ из (39) следует, что $[r_2, f_2] \in \gamma_{l+1}(F)$. Если $l_2 > 1$, то по предложению 8, (i) получаем $f_2 \in \gamma_2(F)$, что противоречит (40). Если $l_1 = 1$, по предложению 8, (ii) получаем $r_2 d = f_2^C$, $d \in \gamma_2(F)$. Но это тоже невозможно, так как $r_2 \in F_2$, $f_2 \in F_1$ ввиду (40).

Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда $l_1 = l_2$. Рассмотрим отображение Магнуса

$$\begin{aligned} \mu_{l_1+1}: r_1 &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & s_{1,l_1+1} & s_{1,l_1+2} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & s_{2,l_1+2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ r_2 &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & t_{1,l_1+1} & t_{1,l_1+2} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & t_{2,l_1+2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ f_1 &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & q_{12} & q_{13} & \dots & q_{1,l_1+2} \\ 0 & 1 & q_{23} & \dots & q_{2,l_1+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad f_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1,l_1+2} \\ 0 & 1 & p_{23} & \dots & p_{2,l_1+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \\ s_{1,l_1+1} &\in \mathbb{Z}[\lambda_{i,i+1}(X_1)], & i = 1, \dots, l_1, \\ s_{2,l_1+2} &\in \mathbb{Z}[\lambda_{i,i+1}(X_1)], & i = 2, \dots, l_1 + 1, \\ t_{1,l_1+1} &\in \mathbb{Z}[\lambda_{i,i+1}(X_2)], & i = 1, \dots, l_1, \\ t_{2,l_1+2} &\in \mathbb{Z}[\lambda_{i,i+1}(X_2)], & i = 2, \dots, l_1 + 1, \\ q_{ij} &\in \mathbb{Z}[\lambda_{i,i+1}(X_2)], & i = 1, \dots, l_1 + 1, \\ p_{ij} &\in \mathbb{Z}[\lambda_{i,i+1}(X_1)], & i = 1, \dots, l_1 + 1, \end{aligned}$$

где X_1 и X_2 – базисы свободных групп F_1 и F_2 соответственно. Тогда

$$\mu_{l_1+2}: w \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$\alpha = q_{12}s_{2,l_1+2} - s_{1,l_1+1}q_{l_1+1,l_1+2} + p_{12}t_{2,l_1+2} - t_{1,l_1+1}p_{l_1+1,l_1+2}.$$

Таким образом, ввиду (21) выполнено $w \in \gamma_{l_1+2}(F)$ тогда и только тогда, когда $\alpha = 0$. Поскольку $q_{12}s_{2,l_1+2} - t_{1,l_1+1}p_{l_1+1,l_1+2}$ не зависит от переменных $\lambda_{12}(X_1)$, $\lambda_{l_1+1,l_1+2}(X_2)$, учитывая условие (40), получаем, что $0 \neq p_{12} \in \mathbb{Z}[\lambda_{12}(X_1)]$,

$0 \neq q_{l_1+1, l_1+2} \in \mathbb{Z}[\lambda_{l_1+1, l_1+2}]$, откуда следует, что $\alpha = 0$ тогда и только тогда, когда

$$q_{12}s_{2, l_1+2} - t_{1, l_1+1}p_{l_1+1, l_1+2} = 0, \quad (41)$$

$$p_{12}t_{2, l_1+2} - s_{1, l_1+1}q_{l_1+1, l_1+2} = 0. \quad (42)$$

Поскольку $q_{12}, t_{1, l_1+1} \in \mathbb{Z}[\lambda_{i, i+1}(X_2)]$, $s_{2, l_1+2}, p_{l_1+1, l_1+2} \in \mathbb{Z}[\lambda_{i, i+1}(X_1)]$, из равенства (41) следует, что $C_1q_{12} = C_2t_{1, l_1+1}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{Z}$. По замечанию 3 имеем $C_1q_{23} = C_2t_{2, l_1+2}$. Тогда из (42) следует, что существуют $C_3, C_4 \in \mathbb{Z}$ такие, что $C_3q_{23} = C_4q_{l_1+1, l_1+2}$. Это возможно лишь в случае $l_1 = 1$. Получаем

$$r_1^{C_1} \equiv f_2^{C_2} \pmod{\gamma_2(F)},$$

$$r_2^{C_1} \equiv f_1^{C_2} \pmod{\gamma_2(F)}.$$

Так как свободная абелева группа не содержит кручения, можем предположить, что C_1 и C_2 взаимно просты. Тогда получаем

$$w^{C_2} \equiv [r_1, f_1^{C_2}][r_2, f_2^{C_2}] \equiv [r_1, r_2^{C_1}][r_2, r_1^{C_1}] \equiv 1 \pmod{[R, F, F]}.$$

Из взаимной простоты C_1 и C_2 следует, что $w \in \gamma_j(F) \setminus (\gamma_j(F) \cap [R, F, F])$ для некоторого $j \geq 3$ тогда и только тогда, когда $w^{C_1} \in \gamma_j(F) \setminus (\gamma_j(F) \cap [R, F, F])$. Значит,

$$e := [f_1^{C_1}, f_2][f_2^{C_1}, f_1] \in \gamma_j(F).$$

Имеем

$$e \equiv [f_1, f_2, f_1]^k [f_2, f_1, f_2]^k \pmod{\gamma_4(F)}$$

для некоторого $k \neq 0$. Тогда

$$e \equiv [[f_1, f_2], f_1^k f_2^{-k} \varphi] \pmod{\gamma_4(F)}. \quad (43)$$

Поскольку $f_1 \in F_2$, $f_2 \in F_1$, то $[f_1, f_2] \notin \gamma_3(F)$. Поэтому из предложения 8, (i) следует, что $f_1^k f_2^{-k} \in \gamma_2(F)$. Но это возможно лишь в случае $f_i \in \gamma_2(F)$. Таким образом, в случае $r_i \notin \gamma_2(F)$, $i = 1, 2$, определение (39) влечет $m \leq 3$. Случай $n = 2$ доказан. Таким образом, получаем утверждение: для любых $r_1 \in F_1$, $r_2 \in F_2$ существует m , зависящее от r_1 и r_2 , такое, что из $[r_1, f_1][r_2, f_2] \in \gamma_m(F)$ для некоторых $f_1, f_2 \in F$ следует $[r_1, f_1][r_2, f_2] \in [R, F, F]$.

Пусть теперь $n \geq 3$. Будем использовать индукцию по n , считая, что для $n - 1$ утверждение доказано. Предположим, что для данного m существуют $f_1, \dots, f_n$, удовлетворяющие (38). Можем считать, что $f_i \notin \gamma_2(F)$. Тогда $f_1 \notin \langle F_j \rangle^F$ для почти всех $j = 1, \dots, n$, кроме, быть может, одного из них, т. е. для любых $j_1 \neq j_2$ имеем

$$f_1 \notin \langle F_{j_1} \rangle^F \cap \langle F_{j_2} \rangle^F.$$

Это следует из того, что $\langle F_{j_1} \rangle^F \cap \langle F_{j_2} \rangle^F \subseteq \gamma_2(F)$. Тогда существует $j \neq 1$ такое, что $f_i \notin \langle F_j \rangle^F$. Рассматривая проекцию

$$\hat{d}_j: F \rightarrow F_1 * \dots * F_{j-1} * F_{j+1} * \dots * F_n,$$

получаем, что $\hat{d}_j([r_1, f_1] \cdots [r_n, f_n])$ представляет собой элемент из $\hat{d}_j(R)$, где $\hat{d}_j(R)$ – нормальное замыкание элементов $r_1, \dots, r_{j-1}, r_{j+1}, \dots, r_n$ в $\hat{d}_j(F)$. Легко видеть, что из (38) следует

$$d_j([r_1, f_1] \cdots [r_n, f_n]) \in \gamma_m(\hat{d}_j(F)) \setminus (\gamma_m(\hat{d}_j(F)) \cap [\hat{d}_j(R), \hat{d}_j(F), \hat{d}_j(F)]). \quad (44)$$

Это сводит задачу к случаю $n-1$, который доказан по индуктивному предположению, т. е. существует m , зависящее от $r_1, \dots, r_n$, такое, что (44) невозможно. Индукция завершена, утверждение доказано.

Теперь можем сформулировать утверждение, обобщающее теорему 6.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть G – свободное произведение групп с одним определяющим соотношением и

$$1 \rightarrow N \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G \rightarrow 1$$

– некоторое k -центральное расширение, $k = 1, 2$. Тогда G нильпотентно аппроксимируема, если и только если $\tilde{G}$ нильпотентно аппроксимируема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай одного свободного сомножителя представляет собой в точности теорему 6. Пусть теперь G является свободным произведением n групп с одним определяющим соотношением и $n \geq 1$. Если G нильпотентно аппроксимируема, то требуемое утверждение, т. е. нильпотентная аппроксимируемость $\tilde{G}$, следует из теоремы 7 и теоремы 2. Пусть теперь $\tilde{G}$ нильпотентно аппроксимируема, а $xN \in \gamma_\omega(G)$, $x \in \tilde{G}$. Тогда x лежит в k -м центре $\tilde{G}$, т. е. $[\langle x \rangle, {}_k \tilde{G}] = 1$. Отсюда следует $[xN, {}_k G, G] = 1$. Но нетривиальное свободное произведение имеет тривиальный центр, откуда следует, что $x \in N$ в случае $n \geq 2$. Утверждение доказано.

В заключение отметим, что естественно возникает вопрос о возможности обобщения приведенных результатов об обобщенной фильтрации Дваера групп с одним определяющим соотношением и нильпотентной аппроксимируемости их k -центральных расширений для $k \geq 3$. В этом случае исследование обобщенного вложения Магнуса сильно усложняется и мы оставляем вопрос о возможности естественного обобщения приведенных результатов открытым.

Завершив работу постановкой некоторых вопросов, ответы на которые весьма существенно дополнили бы изложенные конструкции.

ВОПРОС 1. Пусть G – конечно порожденная парасвободная группа. Верно ли, что $M^{(k)}(G) = 0$ для всех $k \geq 1$?

Предложение 2 показывает, что из тривиальности инвариантов Бэра $M^{(k)}(G)$ для парасвободной группы G при некотором $k \geq 1$ вытекает тривиальность $M^{(c)}(G)$ для всех $c \leq k$.

ВОПРОС 2. Пусть G – конечно представленная группа с $\Delta^\omega(G) = 0$ (например, группа, аппроксимируемая нильпотентными группами без кручения). Верно ли, что для любого свободного копредставления $F/R = G$ и любого $k \geq 1$ группа $F/[R, {}_k F]$ является нильпотентно аппроксимируемой?

Заметим, что для любой группы F/R с $\Delta^\omega(F/R) = 0$ группа $F/\gamma_2(R)$ является нильпотентно аппроксимируемой (см. [14]). Рассматривая обратный предел

точных последовательностей абелевых групп

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow (([R, {}_k F] \cap \gamma_n(F))\gamma_2(R))/\gamma_2(R) \\ &\rightarrow ((R \cap \gamma_n(F))\gamma_2(R))/\gamma_2(R) \rightarrow \varphi_n^{(k)}(F/R) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

получаем, что $\bigcap_n \varphi_n^{(k)}(F/R) = \gamma_\omega(F/[R, {}_k F])$, $k \geq 1$, является подгруппой производного предела свободных абелевых групп:

$$\gamma_\omega(F/[R, {}_k F]) \subseteq \varprojlim^1 (([R, {}_k F] \cap \gamma_n(F))\gamma_2(R))/\gamma_2(R).$$

ВОПРОС 3. Верно ли, что для каждого $k \geq 1$ существует конечно представленная нильпотентно аппроксимируемая группа F/R такая, что $F/[R, {}_j F]$ нильпотентно аппроксимируемы при $j < k$ и не нильпотентно аппроксимируемы при $j \geq k$?

ВОПРОС 4. Существует ли конечно представленная нильпотентно аппроксимируемая группа F/R такая, что $\gamma_\omega(F/[R, F])$ нетривиальна и не содержит кручения?

Автор благодарит И. Б. С. Пасси и А. Л. Шмелькина за стимулирующие обсуждения и ценные замечания.

Список литературы

1. G. Baumslag, U. Stammenbach, "On the inverse limit of free nilpotent groups", *Comment. Math. Helv.*, **52**:2 (1977), 219–233.
2. A. K. Bousfield, "Homological localization towers for groups and Π -modules", *Mem. Amer. Math. Soc.*, **186** (1977).
3. J. Burns, G. Ellis, "On the nilpotent multipliers of a group", *Math. Z.*, **226**:3 (1997), 405–428.
4. T. D. Cochran, K. E. Orr, "Stability of lower central series of compact 3-manifold groups", *Topology*, **37**:3 (1998), 497–526.
5. G. Donadze, N. Inassaridze, T. Porter, "N-fold Čech derived functors and generalised Hopf type formulas", *K-Theory*, **35**:3-4 (2006), 341–373; [arXiv:math/0303050](https://arxiv.org/abs/math/0303050).
6. G. Ellis, "A Magnus–Witt type isomorphism for non-free groups", *Georgian Math. J.*, **9**:4 (2002), 703–708.
7. W. G. Dwyer, "Homology, Massey products and maps between groups", *J. Pure Appl. Algebra*, **6**:2 (1975), 177–190.
8. N. Gupta, *Free group rings*, Contemp. Math., **66**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.
9. W. Magnus, "Über Beziehungen zwischen höheren Kommutatoren", *J. Reine Angew. Math.*, **177** (1937), 105–115.
10. J. McCarron, "Residually nilpotent one-relator groups with nontrivial centre", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **124**:1 (1996), 1–5.
11. Р. В. Михайлов, "О нильпотентной и разрешимой аппроксимируемости групп", *Матем. сб.*, **196**:11 (2005), 109–126; англ. пер.: R. V. Mikhailov, "Residual nilpotence and residual solvability of groups", *Sb. Math.*, **196**:11 (2005), 1659–1675.

12. Р. В. Михайлов, “Трансфинитные центральные ряды в группах: парасвободные свойства и топологические приложения”, *Дискретная геометрия и геометрия чисел*, Сб. статей, посвященный 70-летию со дня рождения профессора С. С. Рышкова, Тр. МИАН, **239**, Наука, МАИК “Наука-Интерпериодика”, М., 2002, 251–267; англ. пер.: R. V. Mikhailov, “Transfinite lower central series of groups: parafree properties and topological applications”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **239**:4 (2002), 236–252.
13. R. Mikhailov, I. B. S. Passi, “Faithfulness of certain modules and residual nilpotence of groups”, *Internat. J. Algebra Comput.*, **16**:3 (2006), 525–539.
14. I. B. S. Passi, “Annihilators of relation modules – II”, *J. Pure Appl. Algebra*, **6**:3 (1975), 235–237.

Р. В. Михайлов (R. V. Mikhailov)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: rmikhailov@mail.ru

Поступило в редакцию

02.08.2005