Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Лотов, О среднем значении лестничного момента для случайных блужданий с малым сносом, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2006, том 70, выпуск 6, 153–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/im743>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 11:07:30

УДК 519.21

В. И. Лотов

О среднем значении лестничного момента для случайных блужданий с малым сносом

Получены теоремы об асимптотическом поведении математического ожидания времени первого достижения неотрицательной полуоси для случайного блуждания, у которого снос стремится к нулю. Предполагается, что распределение скачков случайного блуждания принадлежит области притяжения устойчивого закона с показателем $\alpha \in (1, 2)$.

Библиография: 8 наименований.

Пусть $\{\xi_n^0\}$, $n \geq 1$, – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $\mathbf{E} \xi_1^0 = 0$, $F(x) = \mathbf{P}(\xi_1^0 < x)$, и пусть при $x \rightarrow \infty$

$$F(-x) = \frac{a + o(1)}{x^\alpha} L(x), \quad 1 - F(x) = \frac{b + o(1)}{x^\alpha} L(x), \quad (1)$$

где $L(x)$ – медленно меняющаяся функция, $1 < \alpha < 2$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a + b > 0$.

Известно (см., например, [1]), что последнее условие эквивалентно тому, что распределение F принадлежит области притяжения устойчивого распределения F_α , т. е. для последовательности $S_n^0 = \xi_1^0 + \dots + \xi_n^0$, $n \geq 1$, выполняется

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n^0}{B_n} - A_n < x\right) \rightarrow F_\alpha(x), \quad (2)$$

где A_n и B_n – подходящие числовые последовательности. Нетрудно видеть, что при $\mathbf{E} \xi_1^0 = 0$ можно положить $A_n = 0$, и тогда предельный устойчивый закон будет также иметь нулевое математическое ожидание.

Вообще, устойчивые распределения образуют семейство, зависящее от четырех параметров. Пусть $\psi(t)$ – логарифм характеристической функции устойчивого распределения. Известны различные представления для $\psi(t)$; далее будет удобно пользоваться следующим из них (см. [1]): при $\alpha \in (1, 2)$

$$\psi(t) = it\gamma - \lambda|t|^\alpha \exp\left\{-i\frac{\pi t}{2|t|} \beta(2 - \alpha)\right\}. \quad (3)$$

Здесь $-1 \leq \beta \leq 1$, $\lambda > 0$ и γ – любое вещественное число. В рассматриваемом случае $\gamma = 0$, а число λ без ограничения общности можно считать равным

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 05-01-00810), а также программы “Ведущие научные школы” (грант НШ-8980.2006.1).

единице. Число β известным образом определяется из (1). Будем в дальнейшем использовать обозначение $F_\alpha = F_{\alpha,\beta}$.

Пусть $\xi_n = \xi_n^0 + \varepsilon$, $S_n = S_n^0 + n\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – малое число. Введем лестничные моменты

$$\eta_- = \inf\{n \geq 1: S_n < 0\}, \quad \eta_+ = \inf\{n \geq 1: S_n \geq 0\}$$

(здесь полагаем $\eta_+ = \infty$, если $S_n < 0$ при всех n , и $\eta_- = \infty$, если все $S_n \geq 0$) и лестничные высоты $\chi_\pm = S_{\eta_\pm}$. Для события $\{\eta_- = \infty\}$ величину χ_- будем считать неопределенной. Обозначим $q = \mathbf{P}(\eta_- < \infty)$. Известно, что $\mathbf{E}\eta_+ = (1 - q)^{-1}$ (ниже в доказательстве теоремы 1 содержится обоснование этого соотношения). При $\varepsilon \rightarrow 0$ эта величина может неограниченно возрастать: $\mathbf{E}\eta_+ = \infty$, если $\mathbf{E}\xi_1 = 0$ (см. обсуждение этой ситуации в работе [2], где также доказана оценка сверху для $\mathbf{E}\eta_+$ в более общих условиях по сравнению с ограничениями, приведенными в настоящей работе). Для рассматриваемой схемы результат из [2] имеет вид: при любом сколь угодно малом $\delta > 0$ существует постоянная $C = C(\delta)$ такая, что $\mathbf{E}\eta_+ \leq C/\varepsilon^{\theta-1+\delta}$, где для краткости обозначено $\theta = \alpha/(\alpha-1)$. Кроме того, в работе [2] приведена просто получаемая оценка снизу:

$$\mathbf{E}\eta_+ \geq \frac{\mathbf{E}\xi_1^+}{\varepsilon},$$

где $\xi_1^+ = \max(0, \xi_1)$.

Целью настоящей статьи является исследование асимптотического поведения $\mathbf{E}\eta_+$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в условиях, введенных выше. Обозначим $p = F_{\alpha,\beta}(0)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнено условие (1); тогда

$$\mathbf{E}\eta_+ = \varepsilon^{-\theta p(1+o(1))}, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть $\gamma = 0$ и $\lambda = 1$ в представлении (3). Для этого случая в [3] найдено значение величины p :

$$p = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\beta(2-\alpha)}{\alpha} \right).$$

Отсюда сразу же следует, что $\alpha p \leq 1$, поскольку $2(1-\alpha p) = (1+\beta)(2-\alpha) \geq 0$. Таким образом, $\theta p \leq \theta - 1$, и это неравенство указывает на то, что содержащаяся в [2] оценка сверху имеет, вообще говоря, завышенный порядок роста.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть при $|z| \leq 1$, $\operatorname{Re} \mu = 0$

$$R_\pm(z, \mu) = 1 - \mathbf{E}(z^{\eta_\pm} \exp\{\mu \chi_\pm\}; \eta_\pm < \infty).$$

Эти функции являются компонентами известной факторизации (см., например, [4])

$$1 - z\varphi(\mu) = R_+(z, \mu)R_-(z, \mu),$$

где $\varphi(\mu) = \mathbf{E} e^{\mu\xi_1}$. Полагая в данном тождестве $z = 1$, придем к соотношению

$$R_-(1, \mu) = \frac{1 - \varphi(\mu)}{R_+(1, \mu)}.$$

При $\mu \rightarrow 0$ воспользуемся тождеством Вальда; тем самым получим равенства

$$1 - q = \frac{\varepsilon}{\mathbf{E}\chi_+} = (\mathbf{E}\eta_+)^{-1}.$$

Далее, при $|z| < 1$, $\operatorname{Re} \mu = 0$ справедливо известное представление

$$R_-(z, \mu) = \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \mathbf{E}(\exp\{\mu S_n\}; S_n < 0)\right\}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\eta_+ &= (1 - q)^{-1} = R_-^{-1}(1, 0) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \mathbf{P}(S_n < 0)\right\} = \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{P}(S_n^0 < -n\varepsilon)}{n}\right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом, необходимо рассмотреть асимптотику ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{P}(S_n^0 < -n\varepsilon)}{n}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. В работе [5] установлено, что в условиях теоремы 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{P}(|S_n^0| > n\varepsilon)}{n} = \frac{\alpha}{\alpha - 1} |\log \varepsilon| (1 + o(1)), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (5)$$

Переход к рассмотрению односторонних уклонений $\mathbf{P}(S_n^0 < -n\varepsilon)$ вместо двухсторонних несущественно меняет доказательство, приведенное в [5]. По этой причине мы его повторять не будем. Для облегчения чтения отметим только, что в доказательстве используется представление

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathbf{P}(S_n^0 < -n\varepsilon) = I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon), \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} I_1(\varepsilon) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\mathbf{P}(S_n^0 < -n\varepsilon) - F_{\alpha, \beta} \left(-\frac{n\varepsilon}{B_n} \right) \right), \\ I_2(\varepsilon) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} F_{\alpha, \beta} \left(-\frac{n\varepsilon}{B_n} \right). \end{aligned}$$

С помощью ряда оценок устанавливается, что

$$\begin{aligned} I_1(\varepsilon) &= o(|\log \varepsilon|), \\ I_2(\varepsilon) &= \frac{\alpha p}{\alpha - 1} |\log \varepsilon| (1 + o(1)), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Последнее соотношение получается применением формулы Эйлера–Маклорена. Этот же прием используется ниже в доказательстве теоремы 2, которое отличается от доказательства теоремы 1 более простым оцениванием $I_1(\varepsilon)$ (вследствие наложенного в теореме 2 дополнительного условия) и более детальным исследованием асимптотики для $I_2(\varepsilon)$. Теорема доказана.

Теорема 1 устанавливает асимптотическое поведение $\log \mathbf{E} \eta_+$. Далее мы покажем, что при некоторых дополнительных условиях этот результат может быть усилен. Обозначим

$$\Delta_n = \sup_x \left| \mathbf{P} \left(\frac{S_n^0}{B_n} < x \right) - F_{\alpha, \beta}(x) \right|.$$

Для получения оценки $I_1(\varepsilon) = o(|\log \varepsilon|)$ при доказательстве теоремы 1 в работе [5] использовалась сходимость $\Delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Для получения более сильного результата об асимптотике $\mathbf{E} \eta_+$ нам потребуется наложить условие на скорость сходимости Δ_n к нулю. Существует ряд работ, в которых устанавливаются те или иные достаточные условия, обеспечивающие убывание величины Δ_n с нужной скоростью. Например, в [6] предложены условия в терминах свойств регулярности второго порядка для функции F , при выполнении которых Δ_n является правильно меняющейся функцией вида $\Delta_n = L(n)n^\gamma$ с показателем $\gamma \in [-1, 0]$ (здесь $L(n)$ – медленно меняющаяся функция).

ТЕОРЕМА 2. Пусть дополнительно к условиям теоремы 1 сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta_n}{n} < \infty.$$

Тогда существует медленно меняющаяся на бесконечности функция $l(x)$ такая, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\mathbf{E} \eta_+ = \varepsilon^{-\theta p} l(\varepsilon^{-1}) (1 + o(1)).$$

Если же $L(x) \equiv \text{const}$ в формуле (1), то и $l(x) \equiv \text{const}$.

Точное выражение для функции $l(x)$ приведено в конце доказательства теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (4) нам достаточно показать, что для некоторой медленно меняющейся функции $l(x)$ выполнено равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathbf{P}(S_n^0 < -n\varepsilon) = -\theta p \log \varepsilon + \log l(\varepsilon^{-1}) + o(1).$$

Воспользуемся представлением (6). Вследствие условия теоремы ряд

$$I_1(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\mathbf{P}(S_n^0 < -n\varepsilon) - F_{\alpha, \beta} \left(-\frac{n\varepsilon}{B_n} \right) \right)$$

сходится равномерно по ε , поэтому

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1(\varepsilon) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\mathbf{P}(S_n^0 < -n\varepsilon) - F_{\alpha, \beta} \left(-\frac{n\varepsilon}{B_n} \right) \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\mathbf{P}(S_n^0 < 0) - F_{\alpha, \beta}(0)),\end{aligned}$$

т. е. $I_1(\varepsilon) = C_1 + o(1)$. Через $C, C_1, C_2, \dots$ всюду обозначаются константы (возможно, разные в разных выкладках).

Рассмотрим теперь $I_2(\varepsilon)$. При оценивании этой величины мы воспользуемся рассуждениями, приведенными в [5].

Известно, что нормирующие постоянные в (2) имеют вид $B_n = cn^{1/\alpha} L_1(n)$ при соответствующем подборе константы c , $L_1(x)$ – медленно меняющаяся функция, $L_1(1) = 1$. Положим $\delta = 1 - 1/\alpha = 1/\theta$. Сходимость в (2) сохранится, если $L_1(x)$ заменить на любую асимптотически эквивалентную ей медленно меняющуюся функцию $L_0(x)$, $L_1(x)/L_0(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$. Поэтому $L_1(x)$ можно считать дифференцируемой (см. [8, п. 1.3.2]), а функцию $y = x^\delta/L_1(x)$ – монотонной (см. [8, п. 1.5.3]).

Пусть $\Phi(x) = F_{\alpha, \beta}(-x/c)$. Применение формулы Эйлера–Маклорена [7, п. 12.2] приводит к выражению

$$I_2(\varepsilon) = \int_1^\infty \frac{1}{x} \Phi \left(\frac{\varepsilon x^\delta}{L_1(x)} \right) dx + \frac{1}{2} \Phi(\varepsilon) - \int_1^\infty P_1(x) d \left(\frac{1}{x} \Phi \left(\frac{\varepsilon x^\delta}{L_1(x)} \right) \right), \quad (7)$$

где $P_1(x) = [x] - x + 1/2$.

Рассмотрим асимптотическое поведение каждого из трех слагаемых в правой части (7). Для первого из них сделаем замену $y = x^\delta/L_1(x)$. Тогда $x = g(y) = y^{1/\delta} L_2(y)$ (см. [8, п. 1.5.7]), где $L_2(y)$ – медленно меняющаяся функция, $L_2(1) = L_1(1) = 1$. Получаем

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x} \Phi \left(\frac{\varepsilon x^\delta}{L_1(x)} \right) dx &= \int_1^\infty \frac{g'(y)}{g(y)} \Phi(\varepsilon y) dy = \int_1^\infty \Phi(\varepsilon y) d \log g(y) \\ &= \int_\varepsilon^\infty \Phi(t) d \log g \left(\frac{t}{\varepsilon} \right) = - \int_\varepsilon^\infty \Phi'(t) \log g \left(\frac{t}{\varepsilon} \right) dt \\ &= -\frac{1}{\delta} \int_\varepsilon^\infty \Phi'(t) \log t dt + \frac{\log \varepsilon}{\delta} \int_\varepsilon^\infty \Phi'(t) dt - \int_\varepsilon^\infty \Phi'(t) \log L_2 \left(\frac{t}{\varepsilon} \right) dt. \quad (8)\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_\varepsilon^\infty \Phi'(t) \log t dt = C_2 + O(\varepsilon), \quad \int_\varepsilon^\infty \Phi'(t) dt = -p + O(\varepsilon).$$

Рассмотрим последнее слагаемое в правой части (8). Если $L(x) \equiv \text{const}$, то $L_1(x) \equiv 1$ и $L_2(x) \equiv 1$, поэтому рассматриваемый интеграл будет равен

нулю. В общем случае имеем

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{\infty} \Phi'(t) \log L_2\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) dt &= \int_{\varepsilon}^{\infty} \left(\log L_2\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - \log L_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \right) \Phi'(t) dt \\ &+ \log L_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \int_{\varepsilon}^{\infty} \Phi'(t) dt = \int_{\varepsilon}^{\infty} \Phi'(t) \log \frac{L_2(t/\varepsilon)}{L_2(1/\varepsilon)} dt \\ &+ \log L_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) (-p + O(\varepsilon)). \end{aligned} \quad (9)$$

Для оценки интеграла в правой части (9) воспользуемся теоремой Поттера [8, п. 1.5.4], в силу которой найдется постоянная $C_3 > 1$ такая, что при всех $x > 0$, $y > 0$

$$\frac{L_2(x)}{L_2(y)} \leq C_3 \max\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \left| \int_{\varepsilon}^{\infty} \Phi'(t) \log \frac{L_2(t/\varepsilon)}{L_2(1/\varepsilon)} dt \right| &\leq \log C_3 + \int_{0+}^1 |\Phi'(t)| \log(t^{-1}) dt \\ &+ \int_1^{\infty} |\Phi'(t)| \log t dt < \infty, \end{aligned}$$

т. е. в силу теоремы о мажорируемой сходимости имеем

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \Phi'(t) \log \frac{L_2(t/\varepsilon)}{L_2(1/\varepsilon)} dt = \int_0^{\infty} \Phi'(t) I_{[\varepsilon, \infty)}(t) \log \frac{L_2(t/\varepsilon)}{L_2(1/\varepsilon)} dt \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Тем самым установлено, что для медленно меняющейся функции $l_1(x) = L_2^p(x)$ выполнено равенство

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \Phi'(t) \log L_2\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) dt = \log l_1\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + o(1).$$

Для второго слагаемого в правой части (7), очевидно, выполняется $\Phi(\varepsilon) = p + O(\varepsilon)$. И наконец, рассмотрим последнее слагаемое в правой части (7):

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} P_1(x) d\left(\frac{1}{x} \Phi\left(\frac{\varepsilon x^{\delta}}{L_1(x)}\right)\right) &= - \int_1^{\infty} P_1(x) \frac{1}{x^2} \Phi\left(\frac{\varepsilon x^{\delta}}{L_1(x)}\right) dx \\ &+ \int_1^{\infty} P_1(x) \frac{1}{x} d\Phi\left(\frac{\varepsilon x^{\delta}}{L_1(x)}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Первый интеграл в правой части (10) равен $C_4 + O(\varepsilon)$ в силу равномерной по ε ограниченности функции $\Phi(\varepsilon x^{\delta}/L_1(x))$ и сходимости интеграла

$$\int_1^{\infty} P_1(x) \frac{1}{x^2} dx.$$

Рассмотрим второй интеграл в правой части (10). После уже использовавшейся замены $y = x^{\delta}/L_1(x)$ получаем

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} P_1(x) \frac{1}{x} d\Phi\left(\frac{\varepsilon x^{\delta}}{L_1(x)}\right) &= \int_1^{\infty} P_1(g(y)) \frac{1}{g(y)} d\Phi(\varepsilon y) \\ &= \varepsilon \int_1^{\infty} P_1(g(y)) \frac{1}{g(y)} \Phi'(\varepsilon y) dy = O(\varepsilon), \end{aligned}$$

поскольку функция $P_1(g(y))\Phi'(\varepsilon y)$ ограничена равномерно по ε , $g(y) = y^{1/\delta} \times L_2(y)$ и $\delta = 1 - 1/\alpha < 1$.

Таким образом, при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет место

$$I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon) = -\theta p \log \varepsilon + \log l\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + o(1),$$

где

$$l(x) = CL_2^p(x), \quad C = \exp\left\{C_1 - \theta C_2 + \frac{p}{2} + C_4\right\},$$

$$C_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\mathbf{P}(S_n^0 < 0) - F_{\alpha, \beta}(0)), \quad C_2 = \int_0^{\infty} \Phi'(t) \log t \, dt,$$

$$C_4 = p \int_1^{\infty} P_1(t) \frac{1}{t^2} \, dt.$$

Проводя несложные вычисления, получим

$$C_4 = p\left(C_0 - \frac{1}{2}\right),$$

где $C_0 = 0.5772 \dots$ – постоянная Эйлера, т. е. в итоге имеем

$$C = \exp\{C_1 - \theta C_2 + pC_0\}.$$

Напомним, что медленно меняющаяся функция L_2 определяется из соотношения $x = y^{1/\delta} L_2(y)$, где $y = x^\delta / L_1(x)$; функция L_1 участвует в определении нормирующих констант в (2): $B_n = cn^{1/\alpha} L_1(n)$, $L_1(1) = 1$. Здесь $L_1(x)$ можно считать дифференцируемой, а функцию $y = x^\delta / L_1(x)$ – монотонной. Теорема доказана.

Ясно, что применение тождества Вальда $\mathbf{E} \chi_+ = \varepsilon \mathbf{E} \eta_+$ дает возможность устанавливать асимптотику также для $\mathbf{E} \chi_+$. Более того, мы можем получать асимптотические оценки и для $\mathbf{E} \chi_+^s$. Это следует из установленного в [2] (и используемого там) неравенства

$$\mathbf{E} \chi_+^s \leq C(\mathbf{E} \eta_+)^{s-\alpha_1+1},$$

которое в условиях настоящей работы имеет место при любых α_1 таких, что $1 < \alpha_1 < \alpha$ и $\alpha_1 - 1 < s \leq \alpha_1$.

Автор благодарен А. А. Боровкову, И. С. Борисову и С. В. Нагаеву за полезные обсуждения.

Список литературы

1. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В., *Независимые и стационарно связанные величины*, Наука, М., 1965.
2. Лотов В. И., “О неравенствах для моментов и для распределения лестничной высоты случайного блуждания”, *Сиб. матем. журн.*, **43:4** (2002), 816–822.

3. Золотарев В. М., “О представлении устойчивых законов интегралами”, *Тр. МИАН СССР*, **71**, Наука, М., 1964, 46–50.
4. Боровков А. А., *Теория вероятностей*, Наука, М., 1986.
5. Spatru A., “Precise asymptotics in Spitzer’s law of large numbers”, *J. Theoret. Probab.*, **12**:3 (1999), 811–819.
6. de Haan L., Peng L., “Exact rates of convergence to a stable law”, *J. London Math. Soc.* (2), **59**:3 (1999), 1134–1152.
7. Крамер Г., *Математические методы статистики*, Мир, М., 1975.
8. Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L., *Regular variation*, Encyclopedia of mathematics and its applications, **27**, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

В. И. ЛОТОВ (V. I. LOTOV)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

E-mail: lotov@math.nsc.ru

Поступило в редакцию

21.01.2005