Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Г. Лысёнок, Бернсайдовы структуры конечных под-
групп, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2007, том 71, вы-
пуск 5, 81–110

DOI: <https://doi.org/10.4213/im747>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 10:10:10

УДК 519.41

И. Г. Лысёнок

Бернсайдовы структуры конечных подгрупп

Доказано, что при выполнении определенных условий группа B обладает свойством продолжаемости цепей сопряженных элементов в конечных подгруппах: существует такое число ℓ , что если элементы $w, x^{-1}wx, \dots, x^{-\ell+1}wx^{\ell-1}$ группы B порождают конечную подгруппу G группы B , то x лежит в нормализаторе G . При этом условия, накладываемые на группу G , имеют весьма специальный вид и им удовлетворяют группы с определяющими соотношениями вида $x^n = 1$, возникающие в качестве аппроксимирующих групп для свободных бернсайдовых групп $B(m, n)$ достаточно большой четной экспоненты n . Фактически, выделяется некоторое алгебраическое утверждение, играющее важную роль во всех известных подходах к содержательным результатам о группах $B(m, n)$ большой четной экспоненты, в частности к доказательству их бесконечности. Основная теорема утверждает, что при n , делящемся на 16, группа B обладает указанным свойством при $\ell = 6$.

Библиография: 6 наименований.

§ 1. Введение

Настоящая статья является первой в серии статей, конечная цель которых – доказательство того, что бернсайдовы группы экспонент вида $n = 4k + 2$ и $n = 8k + 4$ при достаточно больших значениях n являются особыми.

Напомним, что бернсайдова группа $B(m, n)$ (более формально, *свободная m -порожденная бернсайдова группа экспоненты n*) по определению есть группа

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_m \mid x^n = 1 \text{ для всех } x \rangle.$$

Известно, что при достаточно больших значениях экспоненты n группа $B(m, n)$ представляется в виде прямого предела бесконечной аппроксимирующей последовательности

$$B_0 \rightarrow B_1 \rightarrow \dots \rightarrow B_k \rightarrow \dots, \quad (1)$$

где B_0 – свободная группа ранга m , а каждая последующая группа B_k есть факторгруппа группы B_{k-1} по нормальному замыканию некоторого множества $D_k \subset B_{k-1}$ элементов вида x^n . При этом множество D_k удовлетворяет определенным условиям, которые можно охарактеризовать как некоторое обобщение условий малого сокращения, формулируемое в терминах группы B_{k-1} .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-01-00506), программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-1545.2003.1), а также Швейцарского национального научного фонда (Swiss National Science Foundation), грант № PP002-68627.

Тот факт, что бернсайдова группа $B(m, n)$ является пределом аппроксимирующей последовательности вида (1), был впервые доказан в работах П. С. Новикова и С. И. Адяна [1], [2]. По существу это послужило основой созданного в этих работах специального метода для изучения бернсайдовых групп нечетной экспоненты $n \geq 665$. Все последующие подходы к изучению бесконечных бернсайдовых групп [3]–[6], в частности для четных значений экспоненты [4], [5], также опирались на построение аппроксимирующей последовательности указанного вида. Различия проявлялись лишь на более техническом уровне формулировки условий на последовательность (1). В то же время не известно никакого общего подхода, позволяющего сформулировать какие-либо универсальные условия на аппроксимирующую последовательность, позволяющие доказывать содержательные утверждения о группах $B(m, n)$, так что само понятие такой последовательности не является формальным.

Таким образом, из всего семейства бернсайдовых групп можно неформально выделить серию групп достаточно большой экспоненты, представимых в виде предела последовательности (1), где каждая последующая группа B_i удовлетворяет некоторому специальному условию малого сокращения по отношению к предыдущей группе B_{i-1} . С учетом наших сегодняшних знаний к этой серии относятся группы $B(m, n)$ с $m \geq 2$ порождающими нечетной экспоненты $n \geq 665$ [2] и экспоненты $n \geq 8000$, делящейся на 16 [5].

В этой и последующих статьях будет предпринята попытка сформулировать и доказать некоторый *отрицательный* результат, дающий основания утверждать, что группы достаточно больших экспонент вида $4k + 2$ и $8k + 4$ не принадлежат указанной серии и в этом смысле являются исключительными.

В настоящей статье рассматривается некоторая общая ситуация, когда в абстрактной группе B выполняется ряд предположений о конечных подгруппах. Эти предположения (сформулированные ниже в § 2) выполняются в группах B_i аппроксимирующей последовательности (1) для всех известных подходов [4]–[6], где рассматриваются бернсайдовы группы достаточно большой четной экспоненты n . Основной результат состоит в том, что при выполнении указанных предположений группа B обладает особым свойством продолжаемости цепей сопряженных элементов в конечных подгруппах.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что группа B обладает бернсайдовой структурой конечных подгрупп экспоненты n , делящейся на 16 (см. определение 2.2). Пусть элементы $x, w \in B$ таковы, что $w, x^{-1}wx, x^{-2}wx^2, \dots, x^{-5}wx^5$ порождают конечную подгруппу G . Тогда x лежит в нормализаторе G .*

Доказательство этого результата преследует две цели. Во-первых, в теореме сформулировано некоторое чисто алгебраическое утверждение, которое существенно используется и, более того, по существу является одним из ключевых при построении аппроксимирующих последовательностей для бернсайдовых групп достаточно большой четной экспоненты. Например, после минимальной технической работы теорема может быть использована в любом из подходов работ [4], [6], что позволяет легко перенести соответствующие результаты на группы экспонент вида $16k$. Во-вторых, утверждение теоремы дает

возможность изучать не только сами бернсайдовы группы, но и группы, заданные произвольным множеством определяющих соотношений вида $x^n = 1$, при некоторых естественных ограничениях на это множество. В частности, в дальнейшем мы будем применять утверждение теоремы именно таким образом.

Изложенное ниже доказательство теоремы является значительно модифицированным вариантом доказательства аналогичного утверждения в [5, § 16]. Модификация связана с тем, что соответствующее доказательство в [5] использовало некоторые специфические “геометрические” свойства групп B_i из аппроксимирующей последовательности. А именно, использовался тот факт, что все в некотором геометрическом смысле “достаточно малые” элементы группы B имеют конечный порядок, делящий n . Это обстоятельство, с одной стороны, не позволяло сформулировать утверждение, аналогичное результату данной статьи, на чисто алгебраическом языке, а с другой стороны, доказательство из [5] было на самом деле применимо для групп B_i , аппроксимирующих только саму бернсайдову группу, а не группу, заданную некоторым множеством соотношений вида $x^n = 1$.

Результат настоящей статьи относится только к четным значениям экспоненты n . Случай нечетного n является более простым, и в этом случае все конечные подгруппы групп B_i , возникающих в последовательности (1), а также все конечные подгруппы самой бернсайдовой группы $B(m, n)$ являются циклическими. Как следствие, аналогичное теореме утверждение становится тривиальным.

§ 2. Предположения о бернсайдовой структуре конечных подгрупп

Начиная с этого момента мы зафиксируем некоторую группу B и четное число $n \geq 4$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ (А). *Каждая конечная подгруппа группы B есть группа экспоненты n .*

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ (В). *На множестве B_{fin} элементов конечного порядка группы B задана инвариантная относительно сопряжения функция*

$$\text{ранг} : B_{\text{fin}} \rightarrow \mathbb{N}.$$

При этом равенство $\text{ранг } g = 0$ выполнено тогда и только тогда, когда $g = 1$.

Если G – конечная подгруппа группы B (или даже просто конечное множество элементов конечного порядка группы B), то по определению положим

$$\text{ранг } G = \max\{\text{ранг } g \mid g \in G\}.$$

Конечную подгруппу G группы B будем называть *полной*, если G является максимальной по включению среди всех конечных подгрупп группы B данного ранга.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ (С). *Каждая конечная подгруппа группы B содержится в некоторой полной конечной подгруппе того же ранга.*

Если G и H – полные конечные подгруппы и $\text{ранг } G \cap H = \text{ранг } G = \text{ранг } H$, то G и H сопряжены некоторым элементом $x \in B$, коммутирующим поэлементно с $G \cap H$.

Если подгруппа F содержится в полной конечной подгруппе G и $\text{ранг } F = \text{ранг } G$, то G будем называть *пополнением* F . Первая часть предположения (C) говорит о том, что каждая конечная подгруппа группы B обладает некоторым пополнением. Вторую часть можно переформулировать следующим образом: любые два пополнения одной подгруппы F сопряжены некоторым элементом x , коммутирующим поэлементно с F .

Пусть G – неединичная полная конечная подгруппа группы B . Обозначим через G^+ подгруппу, порожденную всеми элементами максимального ранга в G . Подгруппа G^+ содержит некоторое (в силу неравенства $\text{ранг } 1 < \text{ранг } G$ непустое) подмножество G^* элементов не максимального ранга.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ (D). G^* – нормальная подгруппа в G и G^+/G^* – циклическая группа порядка n .

Подгруппа G^+ имеет индекс не больше 2 в G . В случае $|G : G^+| = 2$ факторгруппа G/G^* является диэдральной группой порядка $2n$.

Элемент c , для которого

$$G^+/G^* = \langle cG^* \rangle,$$

будем называть *базисным элементом* G . Очевидно, что c – элемент максимального ранга в G .

Обозначим также

$$G^- = G \setminus G^+.$$

Заметим, что при $n > 2$ в диэдральной группе D_n порядка $2n$ есть только одна циклическая подгруппа $C_n = \langle c \rangle$ порядка n . При этом D_n есть расширение C_n с помощью автоморфизма $c \mapsto c^{-1}$ порядка 2. Таким образом, предположение (D) однозначно определяет структуру группы G по модулю G^* .

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть c – базисный элемент G . Если $G^- \neq \emptyset$, то для любого $a \in G^-$

$$G/G^* = \langle a, c \mid c^n = a^2 = 1, aca = c^{-1} \rangle,$$

где роль порождающих a и c играют aG^* и cG^* соответственно.

В частности, для любого $g \in G^-$ выполнено $g^2 \in G^*$.

В предположениях (A)–(D), за исключением второй части предположения (C), сформулированы утверждения только о внутренней структуре конечных подгрупп группы B . Вторая часть предположения (C) говорит о том, что при определенных условиях конечные подгруппы группы B сопряжены специальным образом. Наше последнее предположение будет состоять из двух частей. Первая дает некоторое описание действия элементов группы B сопряжением на ее конечных подгруппах, а второе утверждает существование определенных гомоморфизмов между конечными подгруппами.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ (E). Пусть H – конечная подгруппа группы B и G – пополнение H . Если $g^{-1}Hg \subseteq G$ для некоторого $g \in B$, то существует элемент $g_1 \in G$ такой, что $g^{-1}hg = g_1^{-1}hg_1$ для любого $h \in H$. Если при этом $g^{-1}Hg = H$ и $g^2 \in H$, то элемент g_1 можно выбрать удовлетворяющим условию $g_1^2 = g^2$ (или, другими словами, в этом случае найдется $g_1 \in G$ такой, что отображение $g \mapsto g_1$ продолжается до гомоморфизма $\langle H, g \rangle \rightarrow G$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. В случае если выполнены предположения (A)–(E), будем говорить, что группа B обладает бернсайдовой структурой конечных подгрупп экспоненты n .

Сформулируем теперь ряд следствий из предположений (A)–(E), которые будут постоянно (и часто без явного упоминания) использоваться в дальнейшем. Следующее утверждение представляет собой просто переформулировку определений G^+ , G^- и G^* .

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Для любой полной конечной подгруппы G группы B и любого $g \in G$

$$\begin{aligned} \text{ранг } g = \text{ранг } G &\Leftrightarrow g \in G^+ \setminus G^*, \\ \text{ранг } g < \text{ранг } G &\Leftrightarrow g \in G^- \cup G^*. \end{aligned}$$

Доказательство следующего факта – легкое упражнение с использованием следствия 2.1.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Пусть G – полная конечная подгруппа группы B , H – подгруппа G и $\text{ранг } H < \text{ранг } G$. Тогда верны следующие утверждения:

- (i) $\text{ранг } HG^* < \text{ранг } G$;
- (ii) если $h \in H \cap G^-$, то $H \subseteq \langle h \rangle G^*$;
- (iii) $|HG^* : G^*| \leq 2$ и $|H : H \cap G^*| \leq 2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Каждая конечная подгруппа группы B вкладывается в прямое произведение конечного числа диэдральных групп D_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать утверждение для случая полной конечной подгруппы G . Пусть H – пополнение подгруппы G^* . Поскольку $\text{ранг } H < \text{ранг } G$, то по индукции можно предполагать, что H уже вкладывается в конечную прямую степень P групп D_n .

Пусть сначала $G^- = \emptyset$. Выберем базисный элемент c подгруппы G и согласно предположению (E) найдем $c_1 \in H$ такой, что $c^{-1}gc = c_1^{-1}gc_1$ для любого $g \in G^*$. Рассмотрим прямое произведение $\langle d \rangle \times H$, где $\langle d \rangle$ – циклическая группа порядка n . Тогда, учитывая предположение (A), легко видеть, что отображение $c \mapsto (d, c_1)$, $g \mapsto (1, g)$ для $g \in G^*$ задает вложение $G \rightarrow \langle d \rangle \times H$. Тем самым доказано, что G вкладывается в $D_n \times P$.

Пусть $G^- \neq \emptyset$. Выберем произвольный $a \in G^-$ и положим $c = ab$, так что факторгруппа G/G^* в порождающих aG^* и bG^* имеет вид

$$G/G^* = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^n = 1 \rangle.$$

Согласно предположению (Е) найдутся $a_1, b_1 \in H$ такие, что $a_1^2 = a^2$, $b_1^2 = b^2$ и действие элементов a_1, b_1 сопряжением на G^* совпадает с действием элементов a и b . Рассмотрим теперь прямое произведение $D_n \times G^*$, где D_n порождается двумя инволюциями d, e . Тогда G вкладывается в $D_n \times G^*$ посредством $a \mapsto (d, a_1)$, $b \mapsto (e, b_1)$ и $g \mapsto (1, g)$ для $g \in G^*$.

СЛЕДСТВИЕ 2.6. В любой конечной подгруппе группы B выполнены тождества:

- (i) $[x^{n/2}, y] = 1$;
- (ii) $x^{-3}wx^3 = x^{-1}wx \cdot w^{-1} \cdot x^{-2}wx^2$;
- (iii) $x^{-4}wx^4 = x^{-2}wx^2 \cdot w^{-1} \cdot x^{-2}wx^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Конечные подгруппы групп B_i , возникающих в аппроксимирующих последовательностях для бернсайдовых групп $B(m, n)$, имеют несколько более специальный вид, чем указано в предложении 2.5. А именно, можно показать, что любая конечная подгруппа группы B_i вкладывается в конечное прямое произведение вида $D_n \times D_t \times \cdots \times D_t$, где t – наибольший делитель числа n имеющий вид 2^k . Это связано с тем, что для таких групп B_i оказывается выполненным еще одно специфичное условие: если G – полная конечная подгруппа группы B_i , то G^* содержится в некоторой конечной подгруппе H , для которой $\text{rang } G^* < \text{rang } H < \text{rang } G$. Отсюда несложно вывести по индукции, что если конечная подгруппа группы B_i содержится в другой конечной подгруппе большего ранга, то она является 2-группой. Именно этот факт и обуславливает наличие в произведении $D_n \times D_t \times \cdots \times D_t$ только одного множителя D_n , не являющегося 2-группой (см. [5, предложение 15.9]).

§ 3. Цепи сопряженных элементов

Параграфы 3–5 целиком посвящены доказательству теоремы 1. Обозначим

$$w_i = x^{-(i-1)}wx^{i-1}.$$

Как видно из условий теоремы, мы имеем дело с последовательностью $\bar{w} = (w_1, w_2, \dots, w_\ell)$, $w_i \in B$, удовлетворяющей двум условиям. Во-первых, подгруппа $\langle \bar{w} \rangle$, порожденная всеми элементами последовательности, конечна. Во-вторых, элементы w_i последовательно сопряжены одним и тем же элементом x . Мы начнем с изучения конечных последовательностей $\bar{w}$ такого вида, немного ослабив требование конечности подгруппы $\langle \bar{w} \rangle$, а именно заменив его требованием конечности некоторой меньшей подгруппы $M(\bar{w})$. Это делается для того, чтобы иметь возможность изменять последовательность $\bar{w}$, не заботясь формально о конечности подгруппы $\langle \bar{w} \rangle$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть $\bar{w} = (w_1, w_2, \dots, w_\ell)$ – конечная последовательность элементов группы B . Обозначим через $M(\bar{w})$ нормальное замыкание элементов $w_1^2, w_2, w_3, \dots, w_{\ell-1}, w_\ell^2$ в подгруппе $\langle \bar{w} \rangle$, порожденной всеми w_i .

Последовательность $\bar{w}$ назовем *цепью*, если подгруппа $M(\bar{w})$ конечна и для некоторого $x \in G$ выполнено равенство

$$x^{-1}w_i x = w_{i+1} \quad \text{для всех } i = 1, 2, \dots, \ell - 1.$$

Элемент x назовем *сопрягающим элементом* цепи $\bar{w}$.

Из определения подгруппы $M(\bar{w})$ непосредственно вытекает, что факторгруппа $\langle \bar{w} \rangle / M(\bar{w})$ порождена двумя инволюциями $w_1 M(\bar{w})$ и $w_\ell M(\bar{w})$ и, следовательно, является гомоморфным образом бесконечной диэдральной группы. Введем обозначения

$$L(\bar{w}) = \langle w_1, M(\bar{w}) \rangle \quad \text{и} \quad R(\bar{w}) = \langle w_\ell, M(\bar{w}) \rangle.$$

Очевидно, что

$$|L(\bar{w}) : M(\bar{w})| \leq 2, \quad |R(\bar{w}) : M(\bar{w})| \leq 2$$

и

$$\langle \bar{w} \rangle = \langle L(\bar{w}), R(\bar{w}) \rangle = \langle M(\bar{w}), w_1, w_\ell \rangle.$$

Еще одна идея, заключенная в определении 3.1, состоит в “забывании”, в некотором смысле, о сопрягающем элементе x . Это поясняется следующей леммой, в которой заключение теоремы сводится к выполнению определенного соотношения между элементами последовательности $\bar{w}$, где x уже формально не участвует.

ЛЕММА 3.2. Пусть $\bar{w} = (w_1, w_2, \dots, w_\ell)$ — цепь длины $\ell \geq 4$ и x — сопрягающий элемент этой цепи. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) подгруппа $\langle \bar{w} \rangle$ конечна и x лежит в нормализаторе $\langle \bar{w} \rangle$;
- (ii) $w_{i+3} = w_{i+1}w_i^{-1}w_{i+2}$ для некоторого (а значит, и для любого) i при $1 \leq i \leq \ell - 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) $\implies$ (ii). Выберем пополнение G подгруппы $\langle \bar{w} \rangle$. Поскольку $x^{-1}\langle \bar{w} \rangle x = \langle \bar{w} \rangle$, то согласно предположению (E) найдется элемент $y \in G$ такой, что $x^{-1}gx = y^{-1}gy$ для любого $g \in \langle \bar{w} \rangle$. Тогда в силу следствия 2.6, (ii)

$$y^{-3}w_1y^3 = y^{-1}w_1y \cdot w_1^{-1} \cdot y^{-2}w_1y^2,$$

т.е. $w_4 = w_2w_1^{-1}w_3$.

(ii) $\implies$ (i). Из равенства $w_{i+3} = w_{i+1}w_i^{-1}w_{i+2}$, очевидно, следует, что $\langle \bar{w} \rangle = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ и что x лежит в нормализаторе подгруппы $\langle \bar{w} \rangle$. Остается заметить, что подгруппа $\langle w_1, w_2, w_3 \rangle \subseteq L(\bar{w})$ конечна в силу конечности $M(\bar{w})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Цепь $\bar{w} = (w_1, w_2, \dots, w_\ell)$ длины $\ell \geq 4$ назовем *регулярной*, если для некоторого (или, эквивалентно, для любого) $1 \leq i \leq \ell - 3$ выполнено равенство $w_{i+3} = w_{i+1}w_i^{-1}w_{i+2}$.

Ввиду леммы 3.2 утверждение теоремы вытекает из следующего утверждения, которое на самом деле мы и будем доказывать.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Предположим, что n кратно 16. Тогда любая цепь $\bar{w} = (w_1, w_2, \dots, w_\ell)$ длины $\ell \geq 6$ регулярна.

Заметим, что при обосновании импликации (i) $\implies$ (ii) в доказательстве леммы 3.2 доказана следующая лемма.

ЛЕММА 3.5. Если $\bar{w} = (w_1, w_2, \dots, w_\ell)$ — цепь длины $\ell \geq 4$ и для некоторого сопрягающего элемента x цепи $\bar{w}$ подгруппа $\langle \bar{w}, x \rangle$ конечна, то цепь $\bar{w}$ регулярна.

Лемма 3.5 иллюстрирует начальную идею доказательства предложения 3.4: нам даны элементы $w_1, w_2, \dots, w_\ell$, образующие цепь, и мы пытаемся подобрать сопрягающий элемент x таким образом, чтобы подгруппа $\langle \bar{w}, x \rangle$ стала конечной. Подходящий инструмент для этого дается предположением (Е). Однако в общем случае этот подход не работает, и можно построить пример, когда такого сопрягающего элемента x не существует. Это и составляет основную трудность в доказательстве. Мы модифицируем идею, и будем пытаться изменять x подходящим образом, но при этом также будут меняться и сами элементы w_i . Более точно, мы будем использовать индукцию, шаг которой состоит в построении по данной нерегулярной цепи $\bar{w}$ новой цепи $\bar{w}'$, которая отличается от $\bar{w}$ только первым и последним элементами. При этом, как следует непосредственно из определения регулярной цепи, цепь $\bar{w}'$ также будет нерегулярной. В качестве индуктивного параметра будем рассматривать $\text{ранг } L(w)$ (в силу симметрии с равным успехом можно использовать и $\text{ранг } R(w)$).

Наша ближайшая цель – исследовать указанный трудный случай, когда не существует сопрягающего элемента x , для которого подгруппа $\langle \bar{w}, x \rangle$ конечна. Первый шаг на этом пути – более точное описание ситуации, когда имеет место “легкий” случай. Это описание дается следующей леммой.

ЛЕММА 3.6. Пусть $\bar{w} = (w_1, w_2, \dots, w_\ell)$ – цепь длины $\ell \geq 4$ и подгруппа $\langle \bar{w} \rangle$ конечна. Если $\text{ранг} \langle w_1, w_2, \dots, w_{\ell-1} \rangle = \text{ранг} \langle \bar{w} \rangle$, то $\bar{w}$ является регулярной цепью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$H = \langle w_1, w_2, \dots, w_{\ell-1} \rangle \quad \text{и} \quad K = \langle w_2, w_3, \dots, w_\ell \rangle.$$

Предположим, что $\text{ранг } H = \text{ранг} \langle \bar{w} \rangle$. Заметим, что $\text{ранг } H = \text{ранг } K$ ввиду сопряженности подгрупп H и K . Выберем пополнение G подгруппы $\langle \bar{w} \rangle$, и пусть x – сопрягающий элемент цепи $\bar{w}$. Так как $x^{-1}Hx = K$, то по предположению (Е) найдется $y \in G$ такой, что $x^{-1}gx = y^{-1}gy$ для любого $g \in H$. Тогда y также является сопрягающим элементом цепи $\bar{w}$, и нам остается воспользоваться леммой 3.5.

Следующее утверждение играет ключевую роль в нашем дальнейшем изучении нерегулярных цепей. Здесь мы снова рассматриваем случай, когда подгруппа $\langle \bar{w} \rangle$ конечна. На основе предыдущей леммы мы дадим описание всех элементов нерегулярной цепи $\bar{w}$ по модулю подгруппы G^* , где G – пополнение $\langle \bar{w} \rangle$.

ЛЕММА 3.7. Пусть $\bar{w} = (w_1, w_2, \dots, w_\ell)$ – нерегулярная цепь длины $\ell \geq 4$, подгруппа $\langle \bar{w} \rangle$ конечна и G – ее пополнение. Тогда

$$w_1, w_\ell \in G^-, \quad w_1 w_\ell \in G^+ \setminus G^* \quad \text{и} \quad w_2, w_3, \dots, w_{\ell-1} \in G^*.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3.6

$$\text{ранг} \langle w_2, w_3, \dots, w_\ell \rangle = \text{ранг} \langle w_1, w_2, \dots, w_{\ell-1} \rangle < \text{ранг} \langle \bar{w} \rangle. \quad (2)$$

В частности, для любого i имеем $\text{ранг } w_i < \text{ранг} \langle \bar{w} \rangle$ и, в силу следствия 2.3, $w_i \in G^* \cup G^-$. Если $w_1 \in G^*$, то $\langle \bar{w} \rangle \subseteq \langle w_2, w_3, \dots, w_\ell \rangle G^*$ вопреки (2) и следствию 2.4, (i). Следовательно, $w_1 \in G^-$. Аналогично, $w_\ell \in G^-$. Тогда в силу

следствия 2.4, (ii)

$$\langle w_1, w_2, \dots, w_{\ell-1} \rangle \subseteq \langle G^*, w_1 \rangle \quad \text{и} \quad \langle w_2, w_3, \dots, w_{\ell} \rangle \subseteq \langle G^*, w_{\ell} \rangle,$$

и, следовательно, $\langle \bar{w} \rangle \subseteq \langle G^*, w_1, w_{\ell} \rangle$. Поскольку в силу следствия 2.3 подгруппа $\langle \bar{w} \rangle$ содержит элемент из $G^+ \setminus G^*$, то $w_1 w_{\ell} \notin G^*$, т.е. $w_1 w_{\ell} \in G^+ \setminus G^*$. Наконец, если бы при некотором $2 \leq i \leq \ell - 1$ выполнялось $w_i \in G^-$, то один из элементов $w_1 w_i$ или $w_{\ell} w_i$ лежал бы в $G^+ \setminus G^*$ – снова вопреки (2).

До настоящего момента все рассуждения в точности следовали рассуждениям из [5, § 16]. Сейчас мы докажем одно новое утверждение (которое в действительности не играет принципиальной роли в дальнейшем доказательстве, а лишь позволяет избежать рассмотрения некоторых лишних случаев).

ЛЕММА 3.8. Пусть $\bar{w} = (w_1, w_2, \dots, w_{\ell})$ – нерегулярная цепь длины $\ell \geq 4$. Тогда

$$\text{ранг} \langle w_2, w_3, \dots, w_{\ell-1} \rangle = \text{ранг} M(\bar{w}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $w_i \in M(\bar{w})$ при $2 \leq i \leq \ell - 1$, то ранг подгруппы $\langle w_2, w_3, \dots, w_{\ell-1} \rangle$ не превосходит ранга $M(\bar{w})$. Допустим, что

$$\text{ранг} \langle w_2, w_3, \dots, w_{\ell-1} \rangle < \text{ранг} M(\bar{w}).$$

Выберем пополнение H подгруппы $M(\bar{w})$. Так как $|\langle M(\bar{w}), w_1 \rangle : M(\bar{w})| \leq 2$, то по предположению (Е) найдется элемент $\bar{w}_1 \in H$ такой, что $(\bar{w}_1 g)^2 = (w_1 g)^2$ для любого $g \in M(\bar{w})$. Аналогично найдем $\bar{w}_{\ell} \in H$ такой, что $(\bar{w}_{\ell} g)^2 = (w_{\ell} g)^2$ для любого $g \in M(\bar{w})$. Поскольку $w_1^2 = \bar{w}_1^2 \in H^+$ и $\text{ранг} w_1^2 = \text{ранг} w_2^2 < \text{ранг} H$, то $w_1^2 \in H^*$. По той же причине имеем $w_{\ell}^2 \in H^*$.

Допустим, что $w_2, w_3, \dots, w_{\ell-1} \in H^*$. Тогда $(\bar{w}_1 w_i)^2 \in H^*$ и $(\bar{w}_{\ell} w_i)^2 \in H^*$ при всех $2 \leq i \leq \ell - 1$, откуда в силу определения $M(\bar{w})$ следует $M(\bar{w}) \subseteq H^*$ вопреки выбору H . Следовательно, для некоторого $2 \leq i_0 \leq \ell - 1$ выполнено $w_{i_0} \notin H^*$. Поскольку $\text{ранг} w_{i_0} < \text{ранг} M(\bar{w}) = \text{ранг} H$, то $w_{i_0} \in H^-$. Далее, из допущения $\text{ранг} \langle w_2, w_3, \dots, w_{\ell-1} \rangle < \text{ранг} M(\bar{w})$ в силу следствия 2.4, (ii) вытекает включение $\langle w_2, w_3, \dots, w_{\ell-1} \rangle \subseteq \langle H^*, w_{i_0} \rangle$. Если теперь предположить, что $(\bar{w}_1 w_{i_0})^2 \in H^*$ и $(\bar{w}_{\ell} w_{i_0})^2 \in H^*$, то получим $M(\bar{w}) \subseteq \langle H^*, w_{i_0} \rangle$ вопреки выбору H . Без ограничения общности считаем, что $(\bar{w}_1 w_{i_0})^2 \notin H^*$, т.е. $\text{ранг}(\bar{w}_1 w_{i_0})^2 = \text{ранг} H$. Если $i_0 \leq \ell - 2$, то $\text{ранг}(w_2 w_{i_0+1})^2 = \text{ранг}(w_1 w_{i_0})^2 = \text{ранг} H$ вопреки допущению $\text{ранг} \langle w_2, w_3, \dots, w_{\ell-1} \rangle < \text{ранг} M(\bar{w})$. Следовательно, $i_0 = \ell - 1$ и $w_i \in H^*$ при $2 \leq i \leq \ell - 2$. Тогда выполнены равенства $\text{ранг}(w_2 w_{\ell})^2 = \text{ранг}(w_1 w_{\ell-1})^2 = \text{ранг} H$. Но так как $w_2 \in H^*$, получаем $(w_2 w_{\ell})^2 \in H^* w_{\ell}^2 = H^*$, а значит, $\text{ранг}(w_2 w_{\ell})^2 < \text{ранг} H$. Противоречие.

Из лемм 3.8 и 3.7 непосредственно вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3.9. Если $\bar{w} = (w_1, w_2, \dots, w_{\ell})$ – нерегулярная цепь длины $\ell \geq 6$ и H – пополнение подгруппы $M(\bar{w})$, то $w_2, w_{\ell-1} \in H^-$, $w_i \in H^*$ при $3 \leq i \leq \ell - 2$ и $\text{ранг} w_2 w_{\ell-1} = \text{ранг} H$.

СЛЕДСТВИЕ 3.10. Если цепь $\bar{w} = (w_1, w_2, \dots, w_{\ell})$ длины $\ell \geq 6$ нерегулярна, то

$$\text{ранг} w_1 w_{\ell-1} > \text{ранг} M(\bar{w}). \quad (3)$$

В частности,

$$\text{ранг } L(\bar{w}), \text{ранг } R(\bar{w}) > \text{ранг } M(\bar{w}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – пополнение подгруппы $\langle w_1, w_2, \dots, w_{\ell-1} \rangle$. По лемме 3.7 имеем $\text{ранг } w_1 w_{\ell-1} = \text{ранг } G$ и $w_2 w_{\ell-1} \in G^-$, откуда следует, что $\text{ранг } w_2 w_{\ell-1} < \text{ранг } G$. Для доказательства неравенства (3) остается сослаться на предыдущее следствие. Неравенства $\text{ранг } L(\bar{w}), \text{ранг } R(\bar{w}) > \text{ранг } M(\bar{w})$ непосредственно вытекают из неравенства $\text{ранг } w_1 w_{\ell-1} > \text{ранг } M(\bar{w})$, так как $w_1 w_{\ell-1} \in L(\bar{w})$, $w_2 w_{\ell} \in R(\bar{w})$ и $\text{ранг } w_1 w_{\ell-1} = \text{ранг } w_2 w_{\ell}$ ввиду сопряженности.

Наметим вкратце план дальнейших рассуждений. Для доказательства предложения 3.4 мы рассматриваем последовательность $\bar{w} = (w_1, w_2, \dots, w_{\ell})$, образующую нерегулярную цепь. Мы хотим построить новую цепь $\bar{w}'$, заменяя w_1 и w_{ℓ} на новые элементы w'_1 и w'_{ℓ} таким образом, чтобы уменьшился ранг подгруппы $L(\bar{w})$. В действительности построенная ниже цепь $\bar{w}'$ будет удовлетворять двум (на самом деле довольно естественным) дополнительным предположениям: во-первых, $M(\bar{w}') = M(\bar{w})$, и, во-вторых, отображения $w_1 \mapsto w'_1$ и $w_{\ell} \mapsto w'_{\ell}$ индуцируют гомоморфизмы $L(\bar{w}) \rightarrow L(\bar{w}')$ и $R(\bar{w}) \rightarrow R(\bar{w}')$ соответственно. Мы докажем вначале, что такая замена может быть выполнена при определенных условиях на $\bar{w}$, а затем, существенно используя условие делимости экспоненты n на 16, мы докажем невозможность ситуации, когда $\bar{w}$ не удовлетворяет этим условиям.

Теперь посмотрим на ситуацию с другой стороны. Подгруппа $L(\bar{w})$ получается добавлением элемента w_1 к ее подгруппе $M(\bar{w})$ индекса два (тот факт, что $L(\bar{w})$ не совпадает с $M(\bar{w})$, вытекает из следствия 3.10). Если бы задача состояла в подборе элемента w'_1 такого, чтобы отображение $w_1 \mapsto w'_1$ индуцировало гомоморфизм $L(\bar{w}) \rightarrow \langle M(\bar{w}), w'_1 \rangle$ и при этом выполнялось неравенство $\text{ранг } \langle M(\bar{w}), w'_1 \rangle < \text{ранг } L(\bar{w})$, то можно было бы просто воспользоваться предположением (Е). Трудность состоит в том, что элемент w'_1 должен получаться подходящим сопряжением из w_1 , так как все элементы цепи должны быть сопряжены. Вообще говоря, в указанной ситуации такой элемент w'_1 существует не всегда. Основная цель следующего параграфа состоит, по существу, в нахождении (в некоторой неявной форме) как раз тех условий, при которых сопряжением можно найти подходящий элемент w'_1 . Для этой цели мы выберем пополнение G_0 подгруппы $L(\bar{w})$ и будем рассматривать общую ситуацию, когда дана подгруппа $M = M(\bar{w})$ полной конечной подгруппы G_0 ранга, меньшего, чем $\text{ранг } G_0$.

Предварительно мы докажем одну простую лемму, подсказывающую в некотором смысле, что будет происходить дальше.

ЛЕММА 3.11. Пусть n кратно 4. Предположим, что конечная подгруппа M группы B и элемент $g \in B$ таковы, что

$$|\langle M, g \rangle : M| = 2 \quad \text{и} \quad \text{ранг } g, \text{ранг } M < \text{ранг } \langle M, g \rangle.$$

Пусть G_0 – пополнение подгруппы $\langle M, g \rangle$ и c_0 – базисный элемент G_0 . Тогда

$$c_0^{-n/4} g c_0^{n/4} \in M G_0^* \setminus G_0^*.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию подгруппа $\langle M, g \rangle$ является объединением двух смежных классов M и gM . Отсюда следует, что $M \cap G_0^- \neq \emptyset$, так как из включения $M \subseteq G_0^+$ ввиду неравенства $\text{rang } M < \text{rang } G_0$ следовало бы $M \subseteq G_0^*$, и ввиду неравенства $\text{rang } g < \text{rang } G_0$ мы получили бы, что $\text{rang } gM < \text{rang } G_0$. Но тогда $\text{rang } \langle M, g \rangle < \text{rang } G_0$ – противоречие.

Имеем также $g \in G_0^-$, так как в противном случае из соотношений $g \in G_0^+$ и $\text{rang } g < \text{rang } G_0$ следовало бы, что $g \in G_0^*$ и $\langle M, g \rangle \subseteq MG_0^*$ – снова противоречие с равенством $\text{rang } \langle M, g \rangle = \text{rang } G_0$.

Пусть $f \in M \cap G_0^-$. Имеем $fg \in G_0^+ \setminus G_0^*$, так как в случае $fg \in G_0^*$ мы получили бы $\langle M, g \rangle \subseteq MG_0^*$. Поскольку $(fg)^2 \in M \cap G_0^+ = M \cap G_0^*$, то $g = c_0^{n/2} f \bmod G_0^*$, откуда $c_0^{-n/4} g c_0^{n/4} \in MG_0^* \setminus G_0^*$ в силу следствия 2.1.

Лемма 3.11 утверждает, что при указанных в ней условиях (которые выполнены, если взять пополнение $L(\bar{w})$ в качестве G_0 и w_1 в качестве g) элемент g сопряжением может быть переведен в элемент из M по модулю подгруппы G_0^* . Теперь, после сопряжения, мы находимся внутри подгруппы MG_0^* ранга, строго меньшего, чем $\text{rang } G_0$. Следующий естественный шаг – рассмотреть ситуацию по модулю подгруппы G_1^* , где G_1 – пополнение MG_0^* , и т.д. Эта идея привела в [5] к возникновению понятия *лестницы* над конечной подгруппой M , представляющей собой последовательность полных конечных подгрупп $G_0, G_1, \dots, G_k$ строго убывающего ранга, где G_0 – произвольная полная конечная подгруппа, содержащая M , а каждая последующая подгруппа G_{i+1} есть пополнение MG_i^* . После того, как построен последний элемент G_k последовательности (при выполнении определенного условия завершения), оказывается возможным рассмотреть два случая. В первом случае выполнено равенство $\text{rang } G_k = \text{rang } M$, т.е., неформально говоря, в этом случае лестница “достигает” M и у нас появляется возможность контролировать элементы “внутри” самой подгруппы M . Во втором случае имеем $\text{rang } G_k > \text{rang } M$, т.е. подгруппа M все еще остается “малой” по сравнению с G_k , и элементы внутри M “разглядеть” должным образом не удастся. Однако именно в этом случае можно доказать существование некоторого гомоморфизма $\phi: G_0 \rightarrow G_k$, тождественного на M . Как нетрудно показать, ϕ действует на элемент g из леммы 3.11 сопряжением. Это позволяет достичь описанной выше конечной цели: для данной цепи $\bar{w}$ подобрать элемент w'_1 с помощью сопряжения так, что при замене w_1 на w'_1 подгруппа $L(\bar{w})$ заменяется на ее гомоморфный образ строго меньшего ранга. (Мы не касаемся здесь вопроса о том, как одновременно изменить соответствующий элемент w_ℓ . Это отдельная часть доказательства, которая будет проведена на заключительном шаге в конце § 5.)

Мы будем использовать значительно модифицированный, более тонкий вариант понятия лестницы. Модификация связана с тем, что в [5] при построении гомоморфизма ϕ был применен “недозволенный прием”. Именно, в доказательстве леммы 16.21 в [5] фактически использовалось утверждение о том, что для данного элемента $g \in B$ конечного порядка все элементы, малые в некотором геометрическом смысле по сравнению с g , также имеют конечный порядок. Другими словами, рассуждения из [5] годились для групп B , участвующих в построении аппроксимирующей последовательности только для бернсайдовых групп $B(m, n)$.

Так же как и в [5], при нашем методе построения лестницы над подгруппой M возникает два случая (см. ниже определение 4.14). В первом случае лестница “достигает” M , т.е. имеет место равенство $\text{rang } G_k = \text{rang } M$, где G_k – последний элемент лестницы. Во втором случае подгруппа M “не достигается”, но удается построить гомоморфизм $G_0 \rightarrow G_k$, тождественный на M .

§ 4. Лестничный процесс

В этом параграфе предполагается, что n кратно 4.

Пусть G_0 – полная конечная подгруппа группы B , и пусть M – подгруппа группы G_0 такая, что $\text{rang } M < \text{rang } G_0$. Опишем некоторый пошаговый процесс, начинающийся с пары (G_0, M) . На каждом шаге мы будем иметь дело со следующим набором данных:

- конечная последовательность полных конечных подгрупп

$$G_0, G_1, \dots, G_k \subseteq B,$$

каждая из которых содержит M ;

- последовательность из $s + 1$ индексов

$$0 = t_1 < t_2 < \dots < t_s < t_{s+1} = k;$$

подгруппы G_{t_i} будем называть *главными*;

- набор из s гомоморфизмов

$$\Psi = \{\psi_i: MG_{t_i}^* \rightarrow G_{t_{i+1}}\}.$$

В начальный момент имеем одну подгруппу G_0 , которую будем считать главной, и пустое множество гомоморфизмов Ψ .

Опишем шаг процесса.

На самом первом шаге выбираем произвольное пополнение G_1 подгруппы MG_0^* , добавляем G_1 в список главных подгрупп и в качестве ψ_0 рассматриваем тождественное вложение $MG_0^* \rightarrow G_1$. После первого шага всегда будем иметь по крайней мере две подгруппы G_i , т.е. $k > 0$.

Пусть $k > 0$. Наши действия подразделяются на три случая в зависимости от соотношений между рангами подгрупп G_k , $\psi_s(G_{t_s}^*)$ и $\psi_s(MG_{t_s}^*)$. Заметим, что $\psi_s(MG_{t_s}^*) \subseteq G_k$ по определению. Следовательно, выполнены неравенства

$$\text{rang } \psi_s(G_{t_s}^*) \leq \text{rang } \psi_s(MG_{t_s}^*) \leq \text{rang } G_k.$$

Случай (S1): $\text{rang } \psi_s(G_{t_s}^*) < \text{rang } G_k$ и $\text{rang } \psi_s(MG_{t_s}^*) = \text{rang } G_k$. Если $\text{rang } M = \text{rang } G_k$, то процесс останавливается. При $\text{rang } M < \text{rang } G_k$ выбираем произвольное пополнение G_{k+1} подгруппы MG_k^* , добавляем G_{k+1} к главным подгруппам, а к Ψ добавляем тождественное вложение $\psi_{s+1}: MG_k^* \rightarrow G_{k+1}$.

Случай (S2): $\text{rang } \psi_s(G_{t_s}^*) < \text{rang } G_k$ и $\text{rang } \psi_s(MG_{t_s}^*) < \text{rang } G_k$. Выбираем произвольное пополнение G'_k подгруппы $\psi_s(MG_{t_s}^*)$, заменяем G_k на G'_k , а ψ_s заменяем на композицию ψ_s и тождественного вложения $\psi_s(MG_{t_s}^*) \rightarrow G'_k$.

Случай (S3): $\text{rang } \psi_s(G_{t_s}^*) = \text{rang } G_k$. Если $s = 0$, то процесс останавливается. Пусть $s > 0$. Предположим, что $\phi: G_{t_s} \rightarrow G_k$ – гомоморфизм такой, что

$\phi|_{MG_{t_s}^*} = \psi_s|_{MG_{t_s}^*}$. Тогда удаляем G_{t_s} из списка главных подгрупп и заменяем ψ_{s-1} на композицию ψ_{s-1} и ϕ . (Существование указанного гомоморфизма ϕ будет доказано ниже, см. следствие 4.11; пока же можно считать, например, что процесс заканчивается, если ϕ не существует.)

Описание процесса завершено.

Заметим, что список подгрупп G_i меняется только в случаях (S1) и (S2). При этом в случае (S1) добавляется новая подгруппа G_{k+1} , для которой в силу неравенства $\text{ранг } M < \text{ранг } G_k$ и следствия 2.4, (i) имеем

$$\text{ранг } G_{k+1} = \text{ранг } MG_k^* < \text{ранг } G_k.$$

В случае (S2) подгруппа G_k заменяется на новую подгруппу G'_k , причем по условию случая имеем $\text{ранг } G'_k < \text{ранг } G_k$. В частности, ранги подгрупп G_i строго убывают.

Отсюда следует также, что описанный процесс заканчивается через конечное число шагов. Действительно, общее число шагов в случаях (S1) и (S2) ограничено сверху рангом подгруппы G_0 , а в случае (S3) за один шаг удаляется один элемент из списка главных подгрупп.

Из построения по индукции вытекает также, что каждый гомоморфизм ψ_i индуцирует тождественное отображение на M .

Наша ближайшая цель – доказательство существования гомоморфизма ϕ в случае (S3). Начиная с этого момента, будем предполагать, что последовательность $G_0, G_1, \dots, G_k$ и наборы $\{G_{t_i}\}_{i=1}^{s+1}$, $\{\psi_i\}_{i=1}^s$ получены на некотором шаге описанного процесса для подгрупп G_0 и M .

ЛЕММА 4.1. Пусть имеет место одна из альтернатив: либо $1 \leq i \leq s-1$; либо $i = s$ и выполнены условия случая (S1), включая неравенство $\text{ранг } M < \text{ранг } G_k$. Тогда верны следующие утверждения:

- (i) $\text{ранг } \psi_i(G_{t_i}^*) < \text{ранг } G_{t_{i+1}}$ и $\text{ранг } \psi_i(MG_{t_i}^*) = \text{ранг } G_{t_{i+1}}$;
- (ii) $M \cap G_{t_{i+1}}^- \neq \emptyset$ и $\psi_i(G_{t_i}^*) \cap G_{t_{i+1}}^- \neq \emptyset$;
- (iii) пусть $f \in M \cap G_{t_{i+1}}^-$ и $h \in \psi_i(G_{t_i}^*) \cap G_{t_{i+1}}^-$ – произвольные элементы, существующие согласно (ii); пусть, кроме того, $c_{t_{i+1}}$ – базисный элемент подгруппы $G_{t_{i+1}}$; тогда

$$fh = c_{t_{i+1}}^{n/2} \bmod G_{t_{i+1}}^*$$

и

$$\psi_i(MG_{t_i}^*)G_{t_{i+1}}^*/G_{t_{i+1}}^* = \{1, f, h, c_{t_{i+1}}^{n/2}\}G_{t_{i+1}}^*;$$

- (iv) справедливо включение

$$c_{t_{i+1}}^{-n/4} \psi_i(G_{t_i}^*) c_{t_{i+1}}^{n/4} \subseteq MG_{t_{i+1}}^*;$$

- (v) выполнено равенство

$$\psi_i(MG_{t_i}^*) \cap G_{t_{i+1}}^* = \psi_i(G_{t_i}^*) \cap G_{t_{i+1}}^*.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что неравенство $\text{ранг } M < \text{ранг } G_{t_{i+1}}$ выполнено и в случае $i \leq s-1$, так как в этом случае $\text{ранг } M \leq \text{ранг } G_k < \text{ранг } G_{t_{i+1}}$.

- (i) При $i = s$ искомые неравенства в точности составляют условия случая (S1). Пусть $i \leq s-1$.

Как уже было замечено выше, на каждом шаге процесса, в соответствии со случаями (S1)–(S3), либо добавляется новая подгруппа G_{k+1} с $\text{ранг } G_{k+1} < \text{ранг } G_k$, либо последняя подгруппа G_k заменяется на другую подгруппу G'_k меньшего ранга, либо набор подгрупп G_j не меняется. Рассмотрим последовательность сразу после того шага r_0 , на котором появляется подгруппа $G_{t_{i+1}}$. Поскольку подгруппа $G_{t_{i+1}}$ – не последняя в нашем наборе, то на некотором шаге $r_1 > r_0$ возникнет случай (S1). Рассмотрим самый первый такой шаг r_1 . Тогда условие случая (S1) при $k := t_{i+1}$ и утверждает в точности выполнение соотношений $\text{ранг } \psi_i(G_{t_i}^*) < \text{ранг } G_{t_{i+1}}$ и $\text{ранг } \psi_i(MG_{t_i}^*) = \text{ранг } G_{t_{i+1}}$. На всех последующих шагах, как видно из определения процесса, индекс t_i и гомоморфизм ψ_i не меняются.

(ii) Если $M \cap G_{t_{i+1}}^- = \emptyset$, то из неравенства $\text{ранг } M < \text{ранг } G_{t_{i+1}}$ в силу следствия 2.3 вытекает включение $M \subseteq G_{t_{i+1}}^*$, откуда выводим

$$\psi_i(MG_{t_i}^*) \subseteq \psi_i(G_{t_i}^*)G_{t_{i+1}}^*.$$

Тогда ввиду следствия 2.4, (i) и первого неравенства в утверждении (i)

$$\text{ранг } \psi_i(MG_{t_i}^*) \leq \text{ранг } \psi_i(G_{t_i}^*)G_{t_{i+1}}^* < \text{ранг } G_{t_{i+1}}.$$

Однако это противоречит второму равенству в утверждении (i). Следовательно, $M \cap G_{t_{i+1}}^- \neq \emptyset$.

Аналогично доказывается второе соотношение. Если предположить, что $\psi_i(G_{t_i}^*) \cap G_{t_{i+1}}^- = \emptyset$, то в силу первого неравенства в утверждении (i) и следствия 2.3 будем иметь $\psi_i(G_{t_i}^*) \subseteq G_{t_{i+1}}^*$, откуда последовательно выводим соотношение $\psi_i(MG_{t_i}^*) \subseteq MG_{t_{i+1}}^*$ и $\text{ранг } \psi_i(MG_{t_i}^*) < \text{ранг } G_{t_{i+1}}^*$ – вновь противоречие со вторым равенством в утверждении (i).

(iii) Пусть $f \in M \cap G_{t_{i+1}}^-$ и $h \in \psi_i(G_{t_i}^*) \cap G_{t_{i+1}}^-$. Тогда из неравенства $\text{ранг } M < \text{ранг } G_{t_{i+1}}$ в силу следствия 2.4, (ii) вытекает $M \subseteq \langle G_{t_{i+1}}^*, f \rangle$ и из первого неравенства в утверждении (i) получаем $\psi_i(G_{t_i}^*) \subseteq \langle G_{t_{i+1}}^*, h \rangle$. Следовательно,

$$\psi_i(MG_{t_i}^*) \subseteq \langle G_{t_{i+1}}^*, f, h \rangle.$$

Очевидно, достаточно доказать, что $fh = c_{t_{i+1}}^{n/2} \bmod G_{t_{i+1}}^*$. Имеем $fh \in G_{t_{i+1}}^+$. Из $fh \in G_{t_{i+1}}^*$ следовало бы включение $\psi_i(MG_{t_i}^*) \subseteq \langle G_{t_{i+1}}^*, f \rangle$ вопреки (i). Следовательно, $fh \in c_{t_{i+1}}^r G_{t_{i+1}}^*$ для некоторого $0 < r \leq n/2$. Поскольку $\text{ранг } M < \text{ранг } G_{t_i}$, то $|MG_{t_i}^* : G_{t_i}^*| \leq 2$. Отсюда последовательно выводим $(fh)^2 \in \psi_i(G_{t_i}^*)$, $\text{ранг}(fh)^2 < \text{ранг } G_{t_{i+1}}$, $(fh)^2 \in G_{t_{i+1}}^*$ и $r = n/2$.

(iv) Так как в диэдральной группе $G_{t_{i+1}}/G_{t_{i+1}}^*$ при $h \in G_{t_{i+1}}^-$ выполнено $c_{t_{i+1}}^{-n/4} h c_{t_{i+1}}^{n/4} = h c_{t_{i+1}}^{n/2} \bmod G_{t_{i+1}}^*$, то, используя утверждение (iii) и введенные там обозначения, получаем

$$c_{t_{i+1}}^{-n/4} \psi_i(G_{t_i}^*) c_{t_{i+1}}^{n/4} \subseteq c_{t_{i+1}}^{-n/4} \langle G_{t_{i+1}}^*, h \rangle c_{t_{i+1}}^{n/4} = \langle G_{t_{i+1}}^*, f \rangle = MG_{t_{i+1}}^*,$$

что и требовалось.

(v) Поскольку $|MG_{t_i}^* : G_{t_i}^*| \leq 2$ и, ввиду (i), $\psi_i(MG_{t_i}^*) \neq \psi_i(G_{t_i}^*)$, то

$$|\psi_i(MG_{t_i}^*) : \psi_i(G_{t_i}^*)| = 2.$$

Ввиду (i) также имеем

$$|\psi_i(MG_{t_i}^*)G_{t_{i+1}}^* : \psi_i(G_{t_i}^*)G_{t_{i+1}}^*| = 2.$$

Заметим, что для произвольной группы G и любых ее подгрупп H, F, N таких, что $H \subseteq F \subseteq G, N \trianglelefteq G$, выполнено

$$|F : H| = |FN : HN| \cdot |F \cap N : H \cap N|.$$

Отсюда следует искомое равенство

$$\psi_i(MG_{t_i}^*) \cap G_{t_{i+1}}^* = \psi_i(G_{t_i}^*) \cap G_{t_{i+1}}^*.$$

Лемма доказана

ЛЕММА 4.2. Пусть $1 \leq i \leq s$ и $g \in MG_{t_i}^* \setminus G_{t_i}^*$. Тогда верны следующие утверждения:

- (i) если $\text{ранг } g \leq \text{ранг } G_{t_{i+1}}$, то $\psi_i(g) = g$;
- (ii) если $i < s$ и $\text{ранг } g < \text{ранг } G_{t_{i+1}}$, то $g \in MG_{t_{i+1}}^* \setminus G_{t_{i+1}}^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по процессу построения. При $k = 1$, т.е. после первого шага процесса, утверждение леммы тривиально. Пусть $k > 1$. В качестве индуктивного предположения будем считать, что утверждение леммы верно для набора $((G_i)_{i=0}^k, \{t_i\}_{i=1}^{s+1}, \{\psi_i\}_{i=1}^s)$ и имеет место один из случаев (S1)–(S3). Докажем утверждение леммы для нового набора, полученного соответствующим преобразованием. При этом новое значение s будет равным $s+1$, s и $s-1$ для случаев (S1), (S2) и (S3) соответственно.

Докажем вначале утверждение (i).

Случай (S1). При $i \leq s$ утверждение вытекает из индуктивного предположения. В случае $i = s+1$, т.е. когда $t_i = k$ и $t_{i+1} = k+1$, гомоморфизм ψ_i является вложением $MG_k \rightarrow G_{k+1}$ и утверждение тривиально.

Случай (S2). Если $i \leq s-1$, то можно сослаться на индуктивное предположение. При $i = s$ новый гомоморфизм $\psi'_s : MG_{t_s}^* \rightarrow G'_k$ является композицией ψ_s и тождественного вложения $\psi_s(MG_{t_s}^*) \rightarrow G'_k$ и снова работает индуктивное предположение.

Случай (S3). Если $i < s-1$, то вновь работает индуктивное предположение. Пусть $i = s-1$. По индуктивному предположению имеем $\psi_{s-1}(g) = g$ и $g \in MG_{t_s}^*$. По индуктивному предположению (i) при $i := s$ получаем $\psi_s(g) = g$, и так как новый гомоморфизм $\psi'_{s-1} : MG_{t_{s-1}}^* \rightarrow G_k$ есть композиция ψ_{s-1} и гомоморфизма $\phi : G_{t_s} \rightarrow G_k$, где $\phi|_{MG_{t_s}^*} = \psi_s|_{MG_{t_s}^*}$, то $\psi'_{s-1}(g) = g$, что и требовалось.

Теперь докажем утверждение (ii). В случаях (S2) и (S3) можно непосредственно сослаться на индуктивное предположение. Пусть имеет место случай (S1). Достаточно доказать, что из соотношений $g \in MG_{t_s}^* \setminus G_{t_s}^*$ и $\text{ранг } g < \text{ранг } G_k$ следует, что $g \in MG_k^* \setminus G_k^*$.

По индуктивному предположению (i) выполнено равенство $\psi_s(g) = g$. Имеем $\ker \psi_s \subseteq G_{t_s}^*$, так как иначе из $|MG_{t_s}^* : G_{t_s}^*| \leq 2$ следовало бы, что $\psi_s(MG_{t_s}^*) = \psi_s(G_{t_s}^*)$ вопреки условию случая (S1). Следовательно, $g \notin \psi_s(G_{t_s}^*)$. Используя лемму 4.1, (iii) и введенные там обозначения, получаем, что g лежит в одном

из четырех смежных классов G_k^* , fG_k^* , hG_k^* или $c_k^{n/2}G_k^*$. Поскольку $\text{ранг } g < \text{ранг } G_k$, то $g \notin c_k^{n/2}G_k^*$. Далее, в силу леммы 4.1, (v) невозможно включение $g \in G_k^*$. Если $g \in hG_k^*$, то $h^{-1}g \in \psi_s(MG_{t_s}^*) \cap G_k^* = \psi_s(G_{t_s}^*) \cap G_k^*$ снова по лемме 4.1, (v), что противоречит включению $g \notin \psi_s(G_{t_s}^*)$. Остается только одна возможность: $g \in fG_k^* = MG_k^* \setminus G_k^*$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Пусть $g \in G_0$, $|\langle M, g \rangle : M| = 2$, $\text{ранг} \langle M, g \rangle = \text{ранг } G_0$ и $\text{ранг } g \leq \text{ранг } M$. Пусть c_0 – базисный элемент G_0 . Тогда

$$c_0^{-n/4} g c_0^{n/4} \in \bigcap_{i=1}^s (MG_{t_i}^* \setminus G_{t_i}^*) \cap G_k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in M \cap G_0^-$. Из соотношений $|\langle M, g \rangle : M| = 2$ и $\text{ранг} \langle M, g \rangle = \text{ранг } G_0$ следует равенство $g = c_0^{n/2} f \bmod G_0^*$, откуда $c_0^{-n/4} g c_0^{n/4} \in MG_0^* \setminus G_0^*$. Применяя утверждение (ii) леммы 4.2, получаем $c_0^{-n/4} g c_0^{n/4} \in \bigcap_{i=1}^s (MG_{t_i}^* \setminus G_{t_i}^*)$, откуда в силу утверждения (i) при $i := t_s$ следует $c_0^{-n/4} g c_0^{n/4} \in G_k^*$.

ЛЕММА 4.4. Пусть $g \in MG_0^* \setminus G_0^*$, и пусть c_i – базисный элемент G_i для каждого i . Тогда либо $\text{ранг } g = \text{ранг } G_r$ и $g \in c_r^{n/2} G_r^*$ для некоторого r при $1 \leq r < k$, либо $\text{ранг } g \leq \text{ранг } G_k$ и $g \in G_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по процессу построения. При $k = 1$ выполнены соотношения $\text{ранг } g \leq \text{ранг } MG_0^* = \text{ранг } G_1$, и, следовательно, имеет место вторая альтернатива. Пусть $k > 1$. Как и в доказательстве предыдущей леммы, предполагаем, что утверждение верно для набора $((G_i)_{i=0}^k, \{t_i\}_{i=1}^{s+1}, \{\psi_i\}_{i=1}^s)$ и имеет место один из случаев (S1)–(S3). Пусть r – индекс, для которого справедливо заключение леммы (в случае $\text{ранг } g \leq \text{ранг } G_k$ будем считать, что $r = k$). Заметим, что в случае (S3) утверждение для нового набора вытекает непосредственно из индуктивного предположения. Рассмотрим оставшиеся случаи (S1) и (S2).

Случай (S1). При $r < k$ работает индуктивное предположение. Пусть $r = k$. Применяя рекурсивно лемму 4.2, получаем $g \in MG_{t_s}^* \setminus G_{t_s}^*$. Как мы видели в доказательстве утверждения (ii) леммы 4.2, элемент g в этом случае лежит в одном из четырех смежных классов G_k^* , fG_k^* , hG_k^* или $c_k^{n/2}G_k^*$, где $f \in M \cap G_k^-$ и $h \in \psi_s(G_{t_s}^*) \cap G_k^-$. Продолжая рассуждения из доказательства леммы 4.2, выводим, что включения $g \in G_k^*$ и $g \in hG_k^*$ невозможны. Если $g \in fG_k^*$, то $g \in MG_k^*$, и тогда для нового набора имеет место вторая альтернатива утверждения леммы. В случае $g \in c_k^{n/2}G_k^*$ имеет место первая альтернатива при $r := k$.

Случай (S2). Если $r < k$, то применимо индуктивное предположение. Пусть $r = k$. Как и в предыдущем случае, имеем $g \in MG_{t_s}^*$. Кроме того, в силу леммы 4.2, (i) выполнено равенство $\psi_s(g) = g$. Тогда $\text{ранг } g \leq \psi_s(MG_{t_s}^*)$, и так как новая подгруппа G'_k есть пополнение подгруппы $\psi_s(MG_{t_s}^*)$, получаем, что $\text{ранг } g \leq \text{ранг } G'_k$ и $g \in G'_k$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.5. Пусть $1 \leq i \leq s$, и пусть H – подгруппа $MG_{t_i}^*$ и $H \not\subseteq G_{t_i}^*$. Тогда:

- (i) если $\text{ранг } H \leq \text{ранг } G_{t_{i+1}}$, то $\psi_i|_H = \text{id}$;
 (ii) если $i < s$ и $\text{ранг } H < \text{ранг } G_{t_{i+1}}$, то $H \subseteq MG_{t_{i+1}}^*$ и $H \not\subseteq G_{t_{i+1}}^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательстве леммы 4.2, используем индукцию по процессу построения. Утверждение (i) доказывается аналогично утверждению (i) леммы 4.2. Утверждение (ii) в случаях (S2) и (S3) непосредственно вытекает из индуктивного предположения. Докажем (ii) в случае (S1). В силу индуктивного предположения (i) имеем $\psi_s|_H = \text{id}$, следовательно, $H \subseteq G_{t_{i+1}}$. Пусть $g \in H \setminus G_{t_i}^*$. По лемме 4.2, (ii) имеем $g \in MG_{t_{i+1}}^* \setminus G_{t_{i+1}}^*$. Поскольку $\text{ранг } H < \text{ранг } G_{t_{i+1}}$, то $H \subseteq \langle G_{t_{i+1}}^*, g \rangle = MG_{t_{i+1}}^*$. Наличие g влечет также $H \not\subseteq G_{t_{i+1}}^*$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.6. Пусть $1 \leq i \leq s$, и пусть H – подгруппа $MG_{t_i}^*$ и $H \not\subseteq G_{t_i}^*$. Тогда либо

- (а) $\text{ранг } H = \text{ранг } G_r$ для некоторого r при $t_i \leq r \leq t_{i+1}$ и имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H & \hookrightarrow & G_r \\ \downarrow & & \downarrow \\ MG_{t_i}^* & \xrightarrow{\psi_i} & G_{t_{i+1}} \end{array}$$

где стрелка $\hookrightarrow$ обозначает тождественное вложение, либо

- (b) $\text{ранг } H < \text{ранг } G_{t_{i+1}}$ и

$$\begin{array}{ccc} H & & \\ \downarrow \searrow & & \\ MG_{t_i}^* & \xrightarrow{\psi_i} & G_{t_{i+1}} \end{array}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по построению. После первого шага построения имеем две подгруппы G_0, G_1 и тождественное вложение $\psi_0: MG_0^* \rightarrow G_1$. Тогда для содержащейся в MG_0^* подгруппы H , в зависимости от выполнения равенства $\text{ранг } H = \text{ранг } G_1$ или неравенства $\text{ранг } H < \text{ранг } G_1$, имеет место соответствующая тривиальная диаграмма (а) или (b).

Остается предположить, что утверждение леммы верно для набора $((G_i)_{i=0}^k, \{t_i\}_{i=1}^{s+1}, \{\psi_i\}_{i=1}^s)$ и имеет место один из случаев (S1)–(S3). Пусть H – подгруппа $MG_{t_i}^*$ и $H \not\subseteq G_{t_i}^*$, где $i \leq s+1$ в случае (S1), $i \leq s$ в случае (S2) и $i \leq s-1$ в случае (S3).

Случай (S1). Если $i \leq s$, то можно воспользоваться непосредственно индуктивным предположением. Если $i = s+1$, т.е. $t_i = k$, то, в зависимости от выполнения равенства $\text{ранг } H = \text{ранг } G_{k+1}$ или неравенства $\text{ранг } H < \text{ранг } G_{k+1}$, имеет место соответствующая тривиальная диаграмма (а) или (b).

Случай (S2). Воспользуемся индуктивным предположением. Если $i < s$, то в утверждении леммы ничего не меняется. Пусть $i = s$. Предположим сначала,

что для индуктивного предположения имеет место случай (а). Обозначив новый гомоморфизм $MG_{t_s}^* \rightarrow G'_k$ через ψ'_s , получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 H & \hookrightarrow & G_r & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 MG_{t_s}^* & \xrightarrow{\psi_s} & \psi_s(MG_{t_s}^*) & \hookrightarrow & G_k \\
 & \searrow \psi'_s & \downarrow & & \\
 & & G'_k & &
 \end{array}$$

которая и дает новую диаграмму вида (а). Аналогично рассматривается случай (б), необходимо лишь заметить, что в случае $\text{rang } H = \text{rang } G'_k$ мы получаем диаграмму вида (а) с $r = k$ и тождественным изоморфизмом $G_r \rightarrow G'_k$.

Случай (S3). Если $i < s - 1$, то снова ничего не меняется. Пусть $i = s - 1$. Обозначим через ψ'_{s-1} новый гомоморфизм $MG_{t_{s-1}}^* \rightarrow G_{k+1}$. Если для индуктивного предположения имеет место случай (а), то утверждение вытекает из следующей коммутативной диаграммы, где $\phi: G_{t_s} \rightarrow G_k$ — гомоморфизм из (S3):

$$\begin{array}{ccccc}
 H & \hookrightarrow & G_r & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 MG_{t_{s-1}}^* & \xrightarrow{\psi_{s-1}} & G_{t_s} & & \\
 & \searrow \psi'_{s-1} & \downarrow \phi & & \\
 & & G_k & &
 \end{array}$$

Пусть имеет место случай (б), т.е. $\text{rang } H < \text{rang } G_{t_s}$ и

$$\begin{array}{ccc}
 H & \hookrightarrow & \\
 \downarrow & \searrow & \\
 MG_{t_{s-1}}^* & \xrightarrow{\psi_{s-1}} & G_{t_s}
 \end{array}$$

Если $\text{rang } H < \text{rang } G_k$, то искомая диаграмма (б) получается аналогично диаграмме из случая (а). Пусть $\text{rang } H \geq \text{rang } G_k$. По лемме 4.5 имеем $H \subseteq MG_{t_s}^*$ и $H \not\subseteq G_{t_s}^*$. Используя индуктивное предположение для $i := s$, получаем, что для некоторого $t_s < r \leq k$ выполнено равенство $\text{rang } H = \text{rang } G_r$ и

$$\begin{array}{ccc}
 H & \hookrightarrow & G_r \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 MG_{t_s}^* & \xrightarrow{\psi_s} & G_k
 \end{array}$$

Тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & \curvearrowright & \\
 H & \hookrightarrow & MG_{t_s}^* & & G_r \\
 \downarrow & & \downarrow & \searrow \psi_s & \downarrow \\
 MG_{t_{s-1}}^* & \xrightarrow{\psi_{s-1}} & G_{t_s} & \xrightarrow{\phi} & G_k \\
 & \searrow \psi'_{s-1} & & &
 \end{array}$$

из которой и получается искомая диаграмма вида (а). Лемма доказана.

ЛЕММА 4.7. Пусть $1 \leq i \leq s$. Тогда либо

(а) $\text{ранг } G_{t_i}^* = \text{ранг } G_r$ и для некоторого $t_i < r \leq t_{i+1}$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 G_{t_i}^* & \hookrightarrow & G_r \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 MG_{t_i}^* & \xrightarrow{\psi_i} & G_{t_{i+1}}
 \end{array}$$

где $\hookrightarrow$ обозначает вложение посредством сопряжения, либо

(б) $\text{ранг } G_{t_i}^* < \text{ранг } G_{t_{i+1}}$ и

$$\begin{array}{ccc}
 G_{t_i}^* & & \\
 \downarrow \quad \searrow & & \\
 MG_{t_i}^* & \xrightarrow{\psi_i} & G_{t_{i+1}}
 \end{array}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем индукцию по построению. Случай первого шага построения и случаи (S1), (S2) рассматриваются точно так же, как в доказательстве леммы 4.6. Рассмотрим случай (S3).

Если $i < s - 1$, то утверждение леммы вытекает из индуктивного предположения. Пусть $i = s - 1$. Предположим сначала, что имеет место случай (а). Сохраняя обозначение ψ'_{s-1} из доказательства леммы 4.6, получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 G_{t_{s-1}}^* & \hookrightarrow & G_r \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 MG_{t_{s-1}}^* & \xrightarrow{\psi_{s-1}} & G_{t_s} \\
 & \searrow \psi'_{s-1} & \downarrow \phi \\
 & & G_k
 \end{array}$$

которая и дает новую диаграмму вида (а).

Пусть имеет место случай (b), т.е. $\text{ранг } \psi_{s-1}(G_{t_{s-1}}^*) < \text{ранг } G_{t_s}$ и

$$\begin{array}{ccc} G_{t_{s-1}}^* & \searrow & \\ \downarrow & & \searrow \psi_{s-1} \\ MG_{t_{s-1}}^* & \xrightarrow{\quad} & G_{t_s} \end{array}$$

Тогда имеем

$$\begin{array}{ccc} G_{t_{s-1}}^* & \xrightarrow{\quad} & G_{t_s} \\ \downarrow & \nearrow \psi_{s-1} & \downarrow \phi \\ MG_{t_{s-1}}^* & \xrightarrow{\psi'_{s-1}} & G_k \end{array}$$

Обозначим

$$H = c_{t_s}^{-n/4} \psi_{s-1}(G_{t_{s-1}}^*) c_{t_s}^{n/4}.$$

По лемме 4.1, (i), (ii)

$$\begin{aligned} MG_{t_s}^* &= \langle f, G_{t_s}^* \rangle \quad \text{для некоторого } f \in M \cap G_{t_s}^-, \\ \psi_{s-1}(G_{t_{s-1}}^*) G_{t_s}^* &= \langle h, G_{t_s}^* \rangle \quad \text{для некоторого } h \in \psi_{s-1}(G_{t_{s-1}}^*) \cap G_{t_s}^-. \end{aligned}$$

По лемме 4.1, (iii)

$$fh = c_{t_s}^{n/2} \pmod{G_{t_s}^*}.$$

Поскольку в диэдральной группе $G_{t_s}/G_{t_s}^*$ из $h \in G_{t_s}^-$ следует

$$c_{t_s}^{-n/4} h c_{t_s}^{n/4} = h c_{t_s}^{n/2} = f \pmod{G_{t_s}^*},$$

то

$$HG_{t_s}^* = c_{t_s}^{-n/4} \langle h, G_{t_s}^* \rangle c_{t_s}^{n/4} = \langle f, G_{t_s}^* \rangle = MG_{t_s}^*.$$

Отсюда выводим

$$H \subseteq MG_{t_s}^* \quad \text{и} \quad H \not\subseteq G_{t_s}^*.$$

Заметим, что $\text{ранг } H = \text{ранг } G_{t_{s-1}}^*$ ввиду сопряженности.

Случай 1: $\text{ранг } G_{t_{s-1}}^* < \text{ранг } G_k$. Тогда по лемме 4.6 гомоморфизм ψ_s , а значит, и ϕ , индуцирует тождественное вложение H в G_k . Поскольку H и $\psi_{s-1}(G_{t_{s-1}}^*)$ сопряжены в G_{t_s} , то ϕ индуцирует также и сопряжение $\psi_{s-1}(G_{t_{s-1}}^*)$ в G_k , т.е. мы приходим к случаю (b).

Случай 2: $\text{ранг } \psi_{s-1}(G_{t_{s-1}}^*) \geq \text{ранг } G_k$. Тогда по лемме 4.6 для некоторого $t_s < r \leq k$ имеем $\text{ранг } H = \text{ранг } G_r$ и

$$\begin{array}{ccc} H & \hookrightarrow & G_r \\ \downarrow & & \downarrow \\ MG_{t_s}^* & \xrightarrow{\psi_s} & G_k \\ \downarrow & \nearrow \phi & \\ G_{t_s} & & \end{array}$$

Сопрягая вложение $H \rightarrow G_r$ и гомоморфизм $G_r \rightarrow G_k$ подходящими элементами, получим

$$\begin{array}{ccc} \psi_{s-1}(G_{t_{s-1}}^*) & \hookrightarrow & G_r \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_{t_s} & \xrightarrow{\phi} & G_k \end{array}$$

В итоге имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} G_{t_{s-1}}^* & \hookrightarrow & \psi_{s-1}(G_{t_{s-1}}^*) & \hookrightarrow & G_r \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ MG_{t_{s-1}}^* & \xrightarrow{\psi_{s-1}} & G_{t_s} & \xrightarrow{\phi} & G_k \\ & & \searrow \psi'_{s-1} & & \end{array}$$

из которой и получается искомая диаграмма вида (а).

ЛЕММА 4.8 [5, лемма 15.5]. Пусть G, H – конечные подгруппы группы B такие, что $H \subseteq G$ и $|G : H| \leq 2$. Пусть $\bar{H}$ – пополнение подгруппы H . Тогда существует гомоморфизм $\phi: G \rightarrow \bar{H}$, тождественный на H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\text{ранг } G = \text{ранг } H$, то утверждение леммы следует из предположения (Е). Пусть $\text{ранг } G > \text{ранг } H$. В силу очевидной индукции достаточно указать тождественный на H гомоморфизм $\psi: G \rightarrow B$ такой, что $\text{ранг } \psi(G) < \text{ранг } G$. Выберем пополнение $\bar{G}$ подгруппы G , и пусть c – базисный элемент $\bar{G}$.

Заметим, что $H\bar{G}^* \neq G\bar{G}^*$ ввиду неравенства $\text{ранг } H\bar{G}^* < \text{ранг } G$. Если $H \cap \bar{G}^- = \emptyset$, то $H \subseteq \bar{G}^*$ и тогда $G\bar{G}^*/\bar{G}^*$ состоит из двух смежных классов $\bar{G}^*$ и $c^{n/2}\bar{G}^*$. Если же $g \in H \cap \bar{G}^- \neq \emptyset$, то $H\bar{G}^*/\bar{G}^* = \{\bar{G}^*, g\bar{G}^*\}$ и тогда $G\bar{G}^*/\bar{G}^*$ состоит из четырех смежных классов $\bar{G}^*, g\bar{G}^*, c^{n/2}\bar{G}^*$ и $gc^{n/2}\bar{G}^*$.

Поскольку в силу следствия 2.6, (i) элемент $c^{n/2}$ лежит в центре $\bar{G}$, то отображение $\psi: G \rightarrow B$, задаваемое равенствами

$$\psi(h) = \begin{cases} h, & \text{если } h \in H, \\ c^{n/2}h, & \text{если } h \in G \setminus H, \end{cases}$$

является гомоморфизмом групп. Имеем, очевидно, включение $\psi(G) \subseteq \bar{G}^*$ или $\psi(G) \subseteq \bar{G}^* \cup g\bar{G}^*$ соответственно в случаях $H \cap \bar{G}^- = \emptyset$ и $H \cap \bar{G}^- \neq \emptyset$. В обоих случаях $\text{ранг } \psi(G) < \text{ранг } G$. Лемма доказана.

Доказательство следующей леммы представляет собой легкое упражнение, (см. [5, лемма 15.6]).

ЛЕММА 4.9. Пусть $\bar{G}$ – произвольная группа, K – нормальная подгруппа G и a, b – элементы G . Предположим, что G/K порождается двумя инволюциями aK и bK . Предположим, кроме того, что ab имеет порядок n . Пусть H – некоторая группа экспоненты n , и пусть гомоморфизмы $\phi: \langle K, a \rangle \rightarrow H$ и

$\psi: \langle K, b \rangle \rightarrow H$ таковы, что $\phi|_K = \psi|_K$. Тогда ϕ и ψ продолжаются до гомоморфизма группы G в H .

ЛЕММА 4.10. Пусть $M \cap G_0^- \neq \emptyset$. Тогда если $\text{ранг } \psi_s(G_{t_s}^*) = \text{ранг } G_k$, то существует гомоморфизм $\phi: G_{t_s} \rightarrow G_k$, для которого

$$\phi|_{MG_{t_s}^*} = \psi_s|_{MG_{t_s}^*}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя лемму 4.1, (ii) в случае $s > 0$, найдем $f \in M \cap G_{t_s}^-$, и пусть c_{t_s} – базисный элемент G_{t_s} . Обозначим $g = c_{t_s} f^{-1}$. Тогда

$$G_{t_s} = \langle G_{t_s}^*, g, f \rangle, \quad |\langle G_{t_s}^*, g \rangle : G_{t_s}^*| = 2 \quad \text{и} \quad |\langle G_{t_s}^*, f \rangle : G_{t_s}^*| = 2.$$

Пусть $\text{ранг } \psi_s(G_{t_s}^*) = \text{ранг } G_k$. Применим лемму 4.7 при $i := s$. Заметим, что случай (b) леммы 4.7 невозможен, так как в этом случае выполнялось бы неравенство $\text{ранг } \psi_s(G_{t_s}^*) < \text{ранг } G_k$. Следовательно, для некоторого $t_s < r \leq k$ имеем $\text{ранг } G_{t_s}^* = \text{ранг } G_r$ и

$$\begin{array}{ccc} G_{t_s}^* & \xrightarrow{\sigma} & G_r \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ MG_{t_s}^* & \xrightarrow{\psi_s} & G_k \end{array}$$

По лемме 4.8 существует гомоморфизм $\eta: \langle G_{t_s}^*, g \rangle \rightarrow G_r$, для которого $\eta|_{G_{t_s}^*} = \sigma|_{G_{t_s}^*}$. Мы имеем, таким образом, два гомоморфизма $\psi_s: \langle G_{t_s}^*, f \rangle \rightarrow G_k$ и $\pi\eta: \langle G_{t_s}^*, g \rangle \rightarrow G_k$, для которых $\psi_s|_{G_{t_s}^*} = \pi\eta|_{G_{t_s}^*}$. Тогда по лемме 4.9 ψ_s и $\pi\eta$ продолжаются до гомоморфизма $\phi: G_{t_s} \rightarrow G_k$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.11. Указанный в (S3) гомоморфизм ϕ всегда существует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма 4.10 утверждает существование ϕ в случае $M \cap G_0^- \neq \emptyset$. Если $M \cap G_0^- = \emptyset$, то процесс останавливается сразу после первого шага согласно условию остановки в случае (S3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.12. Набор $((G_i)_{i=0}^k, \{t_i\}_{i=1}^{s+1}, \{\psi_i\}_{i=1}^s)$, полученный после завершения процесса, описанного в начале настоящего параграфа, будем называть *лестницей над M* .

Из следствия 4.11 и условий остановки в (S1) и (S3) непосредственно вытекает следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.13. Если $((G_i)_{i=0}^k, \{t_i\}_{i=1}^{s+1}, \{\psi_i\}_{i=1}^s)$ – лестница над M , то выполнено одно из двух условий:

- (а) $\text{ранг } \psi_s(G_{t_s}^*) < \text{ранг } G_k$, $\text{ранг } \psi_s(MG_{t_s}^*) = \text{ранг } G_k$ и $\text{ранг } M = \text{ранг } G_k$;
- (б) имеются ровно две главные подгруппы G_0 , G_k и $\text{ранг } \psi_0(G_0^*) = \text{ранг } G_k$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.14. Лестнице $((G_i)_{i=0}^k, \{t_i\}_{i=1}^{s+1}, \{\psi_i\}_{i=1}^s)$ над M будем приписывать тип I или тип II в зависимости от выполнения условия (а) или (б) предложения 4.13 соответственно.

ЛЕММА 4.15. Пусть $1 \leq i \leq s$. Тогда:

- (i) если подгруппа H группы G_0 такова, что $M \subseteq H$ и $\text{ранг } H < \text{ранг } G_{t_{i+1}}$, то $MG_{t_i}^* \cap H \subseteq G_{t_{i+1}}$ и, более того, при $i < s$ выполнено $MG_{t_i}^* \cap H \subseteq MG_{t_{i+1}}^*$;
(ii) $\psi_i|_{MG_{t_i}^* \cap G_{t_{i+1}}} = \text{id}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по построению.

При $k = 1$ имеем $MG_0^* \subseteq G_1$ и $\psi_1 = \text{id}$. Пусть $k > 1$. Предположим, что утверждение леммы верно для набора $((G_i)_{i=0}^k, \{t_i\}_{i=1}^{s+1}, \{\psi_i\}_{i=1}^s)$ и имеет место один из случаев (S1)–(S3). Докажем утверждение для нового набора, полученного соответствующим преобразованием.

(i) При $i < s$ имеем $M \cap G_{t_{i+1}}^- \neq \emptyset$ в силу леммы 4.1, (ii). Тогда для любой подгруппы F при $M \subseteq F \subseteq G_{t_{i+1}}$ из неравенства $\text{ранг } F < \text{ранг } G_{t_{i+1}}$ следует, что $F \subseteq MG_{t_{i+1}}^*$, т.е. второе утверждение в (i) вытекает из первого. Остается доказать включение $MG_{t_i}^* \cap H \subseteq G_{t_{i+1}}$.

Случай (S1). При $i \leq s$ можно сослаться непосредственно на индуктивное предположение. При $i = s + 1$ данное включение тривиально, так как $MG_k^* \rightarrow G_{k+1}$ – вложение.

Случай (S2). При $i < s$ работает индуктивное предположение. Поэтому достаточно доказать, что $MG_{t_s}^* \cap H \subseteq G'_k$. По индуктивному предположению $MG_{t_s}^* \cap H \subseteq G_k$. По индуктивному предположению (ii) имеем $\psi_s|_{MG_{t_s}^* \cap G_k} = \text{id}$. Отсюда следует, что $MG_{t_s}^* \cap H \subseteq \psi_s(MG_{t_s}^*) \subseteq G'_k$.

Случай (S3). При $i < s - 1$ работает индуктивное предположение. При $i = s$ искомое включение для нового набора приобретает вид $MG_{t_{s-1}}^* \cap H \subseteq G_k$. Применив два раза индуктивное предположение, получаем $MG_{t_{s-1}}^* \cap H \subseteq MG_{t_s}^*$ и $MG_{t_s}^* \cap H \subseteq G_k$, откуда и вытекает включение $MG_{t_{s-1}}^* \cap H \subseteq G_k$.

(ii) Случай (S1). При $i \leq s$ утверждение вытекает из индуктивного предположения. При $i = s + 1$ утверждение тривиально, так как $MG_k^* \rightarrow G_{k+1}$ – вложение.

Случай (S2). Достаточно рассмотреть случай $i = s$. По индуктивному предположению имеем $\psi_s|_{MG_{t_s}^* \cap G_k} = \text{id}$. По индуктивному предположению (i) $MG_{t_s}^* \cap G'_k \subseteq G_k$. Поскольку новый гомоморфизм $\psi'_s: MG_{t_s}^* \rightarrow G'_k$ есть композиция ψ и тождественного вложения $\psi(MG_{t_s}^*) \rightarrow G'_k$, то $\psi'_s|_{MG_{t_s}^* \cap G'_k} = \text{id}$.

Случай (S3). Достаточно рассмотреть случай $i = s - 1$. По индуктивному предположению (i) имеем $MG_{t_{s-1}}^* \cap G_k \subseteq MG_{t_s}^*$. Так как $\psi'_{s-1} = \phi\psi_{s-1}$, где $\phi|_{MG_{t_s}^*} = \psi_s|_{MG_{t_s}^*}$, остается воспользоваться два раза индуктивным предположением. Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.16. Пусть $((G_i)_{i=0}^k, \{t_i\}_{i=1}^{s+1}, \{\psi_i\}_{i=1}^s)$ – лестница над M типа II. Предположим, что $M \cap G_0^- \neq \emptyset$. Тогда существует гомоморфизм $\phi_0: G_0 \rightarrow G_k$ такой, что $\phi_0|_{G_0 \cap G_k} = \text{id}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно условию (b) предложения 4.13 имеем гомоморфизм $\psi_0: MG_0^* \rightarrow G_k$. По лемме 4.8 существует продолжение $\phi_0: G_0 \rightarrow G_k$. По лемме 4.15, (ii) $\psi_0|_{MG_0^* \cap G_k} = \text{id}$. Остается заметить, что из соотношений $\text{ранг}(G_0 \cap G_k) < \text{ранг } G_0$, $M \subseteq G_0 \cap G_k$ и $M \cap G_0^- \neq \emptyset$ следует включение $G_0 \cap G_k \subseteq MG_0^*$.

ЛЕММА 4.17. Пусть $i \leq s$ и $g \in MG_{t_i}^*$. Тогда $\psi_i(g^2) = g^2$ и при $i < s$ найдется $g' \in MG_{t_{i+1}}^*$ такой, что $g'^2 = g^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по построению.

При $k = 1$ утверждение тривиально, так как $\psi_1 = \text{id}$. Пусть $k > 1$. Предположим, что утверждение леммы верно для набора $((G_i)_{i=0}^k, \{t_i\}_{i=1}^{s+1}, \{\psi_i\}_{i=1}^s)$ и имеет место один из случаев (S1)–(S3). Докажем утверждение для нового набора, полученного соответствующим преобразованием.

Докажем вначале равенство $\psi_i(g^2) = g^2$. В случаях (S1) и (S2) утверждение либо тривиально, либо вытекает из индуктивного предположения. Рассмотрим случай (S3). Если $i < s - 1$, то работает индуктивное предположение. Пусть $i = s - 1$. Тогда по индуктивному предположению $\psi_{s-1}(g^2) = g^2$ и найдется $g' \in MG_{t_s}^*$ такой, что $g'^2 = g^2$. По индуктивному предположению для g' имеем $\psi_s(g'^2) = g'^2 = g^2$, и, следовательно, для нового гомоморфизма ψ'_s выполнено $\psi'_s(g^2) = g^2$.

Докажем второе утверждение. Здесь единственный нетривиальный случай – это случай (S1) при $i = s$. По индуктивному предположению имеем $\psi_s(g^2) = g^2$. По лемме 4.1, (iii) имеем

$$\psi_s(MG_{t_s}^*) \subseteq \langle c_k^{n/2} \rangle MG_k^*.$$

Тогда, очевидно, можно положить

$$g' = \begin{cases} \psi_s(g), & \text{если } \psi_s(g) \in MG_k^*, \\ c_k^{n/2} \psi_s(g), & \text{если } \psi_s(g) \notin MG_k^*. \end{cases}$$

Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.18. Для любого $r \leq k - 1$ выполнено $(G_0^*)^2 \subseteq G_r^*$ (где X^t обозначает множество $\{x^t \mid x \in X\}$).

Если $((G_i)_{i=0}^k, \{t_i\}_{i=1}^{s+1}, \{\psi_i\}_{i=1}^s)$ – лестница типа I над M , то $(G_0^*)^2 \subseteq G_k^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение докажем индукцией по построению. В случае $k = 1$ утверждение тривиально. Пусть $k > 1$. Будем предполагать, что утверждение верно для набора $\Omega = ((G_i)_{i=0}^k, \{t_i\}_{i=1}^{s+1}, \{\psi_i\}_{i=1}^s)$ и имеет место один из случаев (S1)–(S3). Докажем его для нового набора Ω' , полученного соответствующим преобразованием из Ω . В случае (S3) утверждение непосредственно вытекает из индуктивного предположения. Пусть имеет место случай (S1) или (S2). Тогда, если $r \leq k - 1$, то утверждение вытекает из индуктивного предположения. Пусть $r = k$, т.е. мы должны доказать, что $g^2 \in G_k^*$ для любого $g \in G_0^*$.

Случай (S1). Применяя рекурсивно лемму 4.17 к новому набору Ω' , найдем элемент $h \in MG_k^*$ такой, что $g^2 = h^2$. Поскольку $\text{rang } M < \text{rang } G_k$, то $\text{rang } MG_k^* < \text{rang } G_k$ и, следовательно, $h \in G_k^* \cup G_k^-$. Отсюда вытекает, что $h^2 \in G_k^*$.

Случай (S2). По лемме 4.17 найдется элемент $h \in MG_{t_s}^*$ такой, что $g^2 = h^2$ и $\psi_s(h^2) = h^2$. Поскольку $\text{rang } \psi_s(MG_{t_s}^*) < \text{rang } G_k$ в силу условия в (S2), то $\psi_s(h) \in G_k^* \cup G_k^-$, откуда $g^2 = \psi_s(h^2) \in G_k^*$.

Докажем второе утверждение предложения. Пусть $g \in G_0^*$. По лемме 4.17 найдется $h \in MG_{t_s}^*$ такой, что $h^2 = g^2$ и $\psi_s(h^2) = h^2$. Имеем $\psi_s(h^2) \in G_k^+$. Далее, из неравенства $\text{rang } M < \text{rang } G_{t_s}$ следует, что $\text{rang } MG_{t_s}^* < \text{rang } G_{t_s}$,

откуда выводим $h^2 \in G_{t_s}^*$. Поскольку в силу определения 4.14 выполнено неравенство $\text{ранг } \psi_s(G_{t_s}^*) < \text{ранг } G_k$, то $\text{ранг } \psi_s(h^2) < \text{ранг } G_k$, т.е. $\psi_s(h^2) \in G_k^*$. Предложение доказано.

ЛЕММА 4.19. *Имеет место включение $M \cap G_0^* \subseteq \bigcap_{i=0}^{k-1} G_i^*$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по построению. В случае $k = 1$ утверждение тривиально. Пусть $k > 1$. Будем предполагать, что утверждение верно для набора $\Omega = ((G_i)_{i=0}^k, \{t_i\}_{i=1}^{s+1}, \{\psi_i\}_{i=1}^s)$ и имеет место один из случаев (S1)–(S3). Докажем его для нового набора Ω' , полученного соответствующим преобразованием из Ω .

В случаях (S2) и (S3) утверждения леммы для Ω и Ω' совпадают. Предположим, что имеет место случай (S1). Поскольку $M \cap G_0^* \subseteq \bigcap_{i=0}^{k-1} G_i^*$ по предположению индукции для Ω , то достаточно доказать включение $M \cap G_{t_s}^* \subseteq G_k^*$. Так как $\psi_s|_M = \text{id}$, то

$$M \cap G_{t_s}^* \subseteq M \cap \psi_s(G_{t_s}^*).$$

Согласно лемме 4.1, (ii) найдутся элементы $g \in M \cap G_k^-$ и $h \in \psi_s(G_{t_s}^*) \cap G_k^-$. Тогда в силу леммы 4.1, (i) подгруппа MG_k^* состоит из двух смежных классов G_k^* и gG_k^* , а подгруппа $\psi_s(G_{t_s}^*)G_k^*$ состоит из двух смежных классов G_k^* и hG_k^* . Так как в силу леммы 4.1, (iii) $gh^{-1} \notin G_k^*$, то $MG_k^* \cap \psi_s(G_{t_s}^*)G_k^* = G_k^*$, что и доказывает включение $M \cap \psi_s(G_{t_s}^*) \subseteq G_k^*$.

ЛЕММА 4.20. *Пусть $((G_i)_{i=0}^k, \{t_i\}_{i=1}^{s+1}, \{\psi_i\}_{i=1}^s)$ – лестница над M . Пусть z – некоторый элемент группы B . Обозначим $H_i = z^{-1}G_i z$, и пусть $\omega_i: z^{-1}(MG_i^*)z \rightarrow H_{t_{i+1}}$ – гомоморфизм, сопряженный гомоморфизму ψ_i с помощью z .*

Предположим, что найдется элемент $w \in MG_0^ \setminus G_0^*$ такой, что $\text{ранг } w \leq \text{ранг } M$ и $z^{-1}wz \in MH_0^* \setminus H_0^*$.*

Тогда набор $((H_i)_{i=0}^k, \{t_i\}_{i=1}^{s+1}, \{\omega_i\}_{i=1}^s)$ также является лестницей над M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы рассмотрим процесс построения лестницы $((G_i)_{i=0}^k, \{t_i\}_{i=1}^{s+1}, \{\psi_i\}_{i=1}^s)$ и докажем по индукции, что на каждом шаге этого процесса можно параллельно выполнить шаг соответствующего процесса построения лестницы $((H_i)_{i=0}^k, \{t_i\}_{i=1}^{s+1}, \{\omega_i\}_{i=1}^s)$, на котором все подгруппы и гомоморфизмы сопряжены соответствующим подгруппам и гомоморфизмам с помощью элемента z .

На первом шаге подгруппа G_1 есть пополнение MG_0^* и ψ_1 – тождественное вложение $MG_0^* \rightarrow G_1$. Поскольку $\text{ранг } MG_0^* < \text{ранг } G_0$ ввиду $\text{ранг } M < \text{ранг } G_0$, то $MG_0^* = \langle G_0^*, w \rangle$. Точно так же имеем $MH_0^* = \langle H_0^*, z^{-1}wz \rangle$, следовательно, $MH_0^* = z^{-1}MG_0^*z$. Тогда H_1 есть пополнение MH_0^* и ω_1 – соответствующее сопряженное вложение $MH_0^* \rightarrow H_1$.

Пусть $\Omega = ((G_i)_{i=0}^r, \{t_i\}, \{\psi_i\})$ – набор, полученный на некотором шаге процесса построения. В качестве предположения индукции мы имеем параллельный процесс, на соответствующем шаге которого получен набор $\Omega' = ((H_i)_{i=0}^r, \{t_i\}, \{\omega_i\})$, где подгруппы H_i и гомоморфизмы ω_i сопряжены соответствующим G_i и ψ_i с помощью z .

Заметим прежде всего, что условия остановки процесса, а также условия случаев (S1)–(S3) для Ω и Ω' равносильны, так как в этих условиях участвуют только ранги соответствующих подгрупп. Мы предположим, что для Ω выполняется шаг процесса в соответствии с одним из случаев (S1)–(S3).

В случаях (S2) и (S3) возможность выполнения аналогичного шага для Ω' усматривается непосредственно из конструкции. Например, в случае (S2) подгруппа G'_r выбирается как пополнение $\psi_s(MG_{t_s}^*)$. По нашему индуктивному предположению

$$\omega_s(MH_{t_s}^*) = z^{-1}\psi_s(MG_{t_s}^*)z,$$

следовательно, H'_r есть пополнение $\omega_s(MH_{t_s}^*)$ и т.д.

Остается рассмотреть случай (S1). В силу условия случая (S1) выполнены неравенства $\text{ранг } w \leq \text{ранг } M < \text{ранг } G_{t_s}$. Тогда, применяя рекурсивно лемму 4.2, (ii), получаем $w \in MG_{t_s}^* \setminus G_{t_s}^*$ и $z^{-1}wz \in MH_{t_s}^* \setminus H_{t_s}^*$. Поскольку $\text{ранг } MG_{t_s}^* < \text{ранг } G_{t_s}$, то $MG_{t_s}^* = \langle G_{t_s}^*, w \rangle$. Аналогично, $MH_{t_s}^* = \langle H_{t_s}^*, z^{-1}wz \rangle$, откуда $MH_{t_s}^* = z^{-1}(MG_{t_s}^*)z$. Так как G_{r+1} – пополнение $MG_{t_s}^*$, то H_{r+1} – пополнение $MH_{t_s}^*$, что и требовалось. Лемма доказана.

§ 5. Завершение доказательства теоремы 1

ЛЕММА 5.1. Пусть G, H – две конечные подгруппы группы B такие, что $G \subseteq H$ и $H^2 \subseteq G$. Тогда $(N_B(H))^4 \subseteq N_B(G)$ (где $N_B(X)$ обозначает нормализатор подгруппы X в B).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in N_B(H)$. Докажем, что $x^4 \in N_B(G)$. Выберем пополнение $\bar{H}$ подгруппы H и согласно предположению (E) найдем элемент $y \in \bar{H}$ такой, что $y^{-1}gy = x^{-1}gx$ для любого $g \in H$. Достаточно проверить, что $y^4 \in N_B(G)$. В силу следствия 2.6, (iii) для любого $g \in G$ имеем

$$y^{-4}gy^4 = y^{-2}gy^2 \cdot g^{-1} \cdot y^{-2}gy^2.$$

Поскольку по условию H/G – группа периода 2, то из $g \in G$ следует, что $hgh \in G$ для любого $h \in H$. Следовательно, $y^{-4}gy^4 \in G$.

Из предложения 4.18 и леммы 5.1 непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Если $\Omega = ((G_i)_{i=0}^k, \{t_i\}_{i=1}^{s+1}, \{\psi_i\}_{i=1}^s)$ – лестница над M , то $G_0^4 \subseteq N_B(G_r^*)$ для любого $r \leq k-1$. Если, кроме того, Ω имеет тип I, то $G_0^4 \subseteq N_B(G_k^*)$.

ЛЕММА 5.3. Пусть n кратно 16, и пусть $\bar{w} = (w_1, w_2, \dots, w_\ell)$ – нерегулярная цепь длины $\ell \geq 6$.

(i) Пусть G_0 – пополнение подгруппы $L(\bar{w})$ и $((G_i)_{i=0}^k, \{t_i\}_{i=1}^{s+1}, \{\psi_i\}_{i=1}^s)$ – лестница над $M(\bar{w})$. Тогда либо $\text{ранг } w_1w_{\ell-1} = \text{ранг } G_0$, либо $\text{ранг } w_1w_{\ell-1} \leq \text{ранг } G_k$.

(ii) Пусть H_0 – пополнение подгруппы $R(\bar{w})$ и $((H_i)_{i=0}^k, \{t_i\}_{i=1}^{s+1}, \{\psi_i\}_{i=1}^s)$ – лестница над $M(\bar{w})$. Тогда либо $\text{ранг } w_2w_\ell = \text{ранг } H_0$, либо $\text{ранг } w_2w_\ell \leq \text{ранг } H_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из двух симметричных утверждений (i) и (ii) докажем (i).

Допустим, что $\text{ранг } w_1 w_{\ell-1} \leq \text{ранг } M(\bar{w})$. Пусть H – пополнение подгруппы $\langle w_1, w_2, \dots, w_{\ell-1} \rangle$. Тогда по лемме 3.7 $\text{ранг } H = \text{ранг } w_1 w_{\ell-1}$ и $\text{ранг } w_2 w_{\ell-1} < \text{ранг } H \leq \text{ранг } M(\bar{w})$. Но это противоречит следствию 3.9. Следовательно, $\text{ранг } w_1 w_{\ell-1} > \text{ранг } M(\bar{w})$.

Предположим, что выполнены условия утверждения (i), т.е. G_0 – пополнение подгруппы $L(\bar{w}) = \langle M(\bar{w}), w_1 \rangle$ и $((G_i)_{i=0}^k, \{t_i\}_{i=1}^{s+1}, \{\psi_i\}_{i=1}^s)$ – лестница над $M(\bar{w})$. По доказанному $\text{ранг } G_0 \geq \text{ранг } w_1 w_{\ell-1} > \text{ранг } M(\bar{w})$. Поскольку $\text{ранг } w_1 = \text{ранг } w_2 \leq \text{ранг } M(\bar{w}) < \text{ранг } G_0$, то $w_1 \in G_0^* \cup G_0^-$. Тогда имеем $G_0^- \cap M(\bar{w}) \neq \emptyset$, так как в противном случае, т.е. если $M(\bar{w}) \subseteq G_0^*$, мы получили бы $L(\bar{w}) \subseteq \langle G_0^*, w_1 \rangle$, откуда $\text{ранг } L(\bar{w}) < \text{ранг } G_0 = \text{ранг } L(\bar{w})$. По той же причине невозможно включение $w_1 \in G_0^*$, т.е. имеем $w_1 \in G_0^-$.

Мы должны доказать невозможность случая, когда $\text{ранг } G_k < \text{ранг } w_1 w_{\ell-1} < \text{ранг } G_0$. Допустим, что этот случай имеет место. Пусть c_i – базисный элемент G_i . По лемме 3.11 при $g := w_1 w_{\ell-1}$ и лемме 4.4 для некоторого $1 \leq r \leq k-1$ выполнено

$$c_0^{-n/4} w_1 w_{\ell-1} c_0^{n/4} \in c_r^{n/2} G_r^*.$$

Докажем, что из предположения $\text{ранг } w_1 w_{\ell-1} < \text{ранг } G_0$ следует $w_{\ell-1} \in G_0^*$. Допустим, что $w_{\ell-1} \in G_0^-$. Тогда, так как $w_1 w_{\ell-1} \in G_0^+$, имеем $w_1 w_{\ell-1} \in G_0^*$. Следовательно, $w_1 \in M(\bar{w}) G_0^*$ и мы получили бы $L(\bar{w}) = \langle M(\bar{w}), w_1 \rangle \subseteq M(\bar{w}) G_0^*$ вопреки $\text{ранг } L(\bar{w}) = \text{ранг } G_0$.

Теперь по лемме 4.19 $w_{\ell-1} \in G_r^*$. Применяя следствие 5.2, получаем

$$c_0^{-n/4} w_{\ell-1} c_0^{n/4} \in G_r^*,$$

откуда

$$c_0^{-n/4} w_1 c_0^{n/4} \in c_r^{n/2} G_r^*.$$

Но $\text{ранг } w_1 \leq \text{ранг } M(\bar{w}) < \text{ранг } G_r$ – противоречие. Лемма доказана.

ЛЕММА 5.4. *Предположим, что n кратно 16. Пусть $\bar{w} = (w_1, w_2, \dots, w_\ell)$ – нерегулярная цепь длины $\ell \geq 6$. Пусть G_0 – пополнение подгруппы $L(\bar{w})$ и $\Omega = ((G_i)_{i=0}^k, \{t_i\}_{i=1}^{s+1}, \{\psi_i\}_{i=1}^s)$ – лестница над $M(\bar{w})$. Тогда Ω не может иметь тип I.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что Ω имеет тип I, в частности $\text{ранг } M(\bar{w}) = \text{ранг } G_k$ согласно определению 4.14. Тогда в силу следствия 3.9 имеем $w_{\ell-2} \in G_k^*$ и

$$\text{ранг } w_2 w_{\ell-1} = \text{ранг } G_k.$$

В силу леммы 5.3 и следствия 3.10 имеем $\text{ранг } w_1 w_{\ell-1} = \text{ранг } G_0$. Поскольку $\langle w_1, w_2, \dots, w_{\ell-1} \rangle \subseteq L(\bar{w})$, то G_0 – пополнение подгруппы $\langle w_1, w_2, \dots, w_{\ell-1} \rangle$. По лемме 3.7 $w_{\ell-2} \in G_0^*$. Обозначив через c_0 базисный элемент подгруппы G_0 , в силу следствия 5.2 получим

$$c_0^{-n/4} w_{\ell-2} c_0^{n/4} \in G_k^*.$$

В силу следствия 4.3

$$c_0^{-n/4} w_1 c_0^{n/4} \in G_k.$$

Поскольку $\text{ранг } c_0^{-n/4} w_1 c_0^{n/4} = \text{ранг } w_{\ell-2} < \text{ранг } G_k$, то $c_0^{-n/4} w_1 c_0^{n/4} \in G_k^* \cup G_k^-$. Следовательно, $c_0^{-n/4} w_1 w_{\ell-2} c_0^{n/4} \in G_k^* \cup G_k^-$, и поэтому $\text{ранг } c_0^{-n/4} w_1 w_{\ell-2} c_0^{n/4} < \text{ранг } G_k$. Противоречие, так как

$$\text{ранг } c_0^{-n/4} w_1 w_{\ell-2} c_0^{n/4} = \text{ранг } w_2 w_{\ell-1}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 5.5. Пусть n кратно 16. Пусть $\bar{w} = (w_1, w_2, \dots, w_\ell)$ – нерегулярная цепь длины $\ell \geq 6$. Пусть G_0 – пополнение подгруппы $L(\bar{w})$ и $\Omega = ((G_i)_{i=0}^k, \{t_i\}_{i=1}^{s+1}, \{\psi_i\}_{i=1}^s)$ – лестница над $M(\bar{w})$. Предположим, что Ω имеет тип II. Тогда существует цепь

$$\bar{w}' = (w'_1, w_2, w_3, \dots, w_{\ell-1}, w'_\ell),$$

для которой $\text{ранг } L(\bar{w}') < \text{ранг } L(\bar{w})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим вначале, что $M(\bar{w}) \cap G_0^- \neq \emptyset$. Действительно, допустим, что $M(\bar{w}) \cap G_0^- = \emptyset$. Тогда $M(\bar{w}) \subseteq G_0^*$ ввиду неравенства $\text{ранг } M(\bar{w}) < \text{ранг } G_0$. Поскольку $\text{ранг } w_1 \leq \text{ранг } M < \text{ранг } G_0$, то $w_1 \in G_0^* \cup G_0^-$, следовательно, $\text{ранг} \langle M(\bar{w}), w_1 \rangle < \text{ранг } G_0$ – противоречие с равенством $\text{ранг } L(\bar{w}) = \text{ранг } G_0$.

В силу предложения 4.16 существует гомоморфизм $\phi_0: G_0 \rightarrow G_k$ такой, что $\phi_0|_{G_0 \cap G_k} = \text{id}$. В силу следствия 4.3

$$c_0^{-n/4} w_1 c_0^{n/4} \in G_k.$$

При любом $2 \leq i \leq \ell-1$ имеем $L(\bar{w}) = \langle M(\bar{w}), w_1 w_i \rangle$, и так как при $2 \leq i \leq \ell-2$

$$\text{ранг } w_1 w_i = \text{ранг } w_2 w_{i+1} \leq \text{ранг } M(\bar{w}) \leq \text{ранг } G_k,$$

то снова в силу следствия 4.3

$$c_0^{-n/4} w_1 w_i c_0^{n/4} \in G_k \quad (i = 2, 3, \dots, \ell-2).$$

Следовательно,

$$c_0^{-n/4} w_i c_0^{n/4} \in G_k \quad (i = 2, 3, \dots, \ell-2).$$

Тогда

$$\phi_0(c_0^{-n/4} w_i c_0^{n/4}) = c_0^{-n/4} w_i c_0^{n/4} \quad (i = 1, 2, \dots, \ell-2),$$

т.е.

$$\phi_0(w_i) = y^{-1} w_i y, \text{ где } y = c_0^{n/4} \phi_0(c_0^{-n/4}) \quad (i = 1, 2, \dots, \ell-2).$$

С другой стороны, $w_2, w_3, \dots, w_{\ell-2} \in M(\bar{w}) \subseteq G_k$, поэтому

$$\phi_0(w_i) = w_i \quad (i = 2, 3, \dots, \ell-2).$$

Таким образом, y коммутирует с w_i при $i = 2, 3, \dots, \ell-2$.

Пусть x – сопрягающий элемент цепи $\bar{w}$. Имеем

$$\begin{aligned} x^{-1}y\phi_0(w_1)y^{-1}x &= w_2, \\ x^{-1}yw_iy^{-1}x &= w_{i+1} \quad (i = 2, 3, \dots, \ell - 2). \end{aligned}$$

Положим

$$w'_1 = \phi_0(w_1) \quad \text{и} \quad w'_\ell = x^{-1}yw_{\ell-1}y^{-1}x.$$

Мы докажем, что последовательность $\bar{w}' = (w'_1, w_2, w_3, \dots, w_{\ell-1}, w'_\ell)$ является искомой цепью. Элементы $\bar{w}'$ последовательно сопряжены с помощью $y^{-1}x$. Достаточно проверить, что $M(\bar{w}') = M(\bar{w})$. Тогда будем иметь

$$L(\bar{w}') = \langle M(\bar{w}'), w'_1 \rangle = \langle \phi_0(M(\bar{w})), \phi_0(w_1) \rangle = \phi_0(L(\bar{w})),$$

откуда вытекает искомое неравенство $\text{ранг } L(\bar{w}') < \text{ранг } L(\bar{w})$.

По лемме 5.3 имеем либо $\text{ранг } w_1w_{\ell-1} \leq \text{ранг } G_k$, либо $\text{ранг } w_1w_{\ell-1} = \text{ранг } G_0$. Рассмотрим эти два случая отдельно.

Случай 1: $\text{ранг } w_1w_{\ell-1} \leq \text{ранг } G_k$. Тогда, как в начале доказательства, выводим $c_0^{-n/4}w_1w_{\ell-1}c_0^{n/4} \in G_k$, откуда следует, что y коммутирует с $w_{\ell-1}$. Следовательно, $w'_\ell = w_\ell$. Поскольку

$$(w'_1)^2 = \phi_0(w_1^2) = w_1^2$$

и для любого $g \in M(\bar{w})$

$$(w'_1)^{-1}gw'_1 = \phi_0(w_1^{-1}gw_1) = w_1^{-1}gw_1,$$

то из определения подгруппы $M(\bar{w})$ следует равенство $M(\bar{w}') = M(\bar{w})$, что и требовалось.

Случай 2: $\text{ранг } w_1w_{\ell-1} = \text{ранг } G_0$. В этом случае G_0 есть пополнение подгруппы $\langle w_1, w_2, \dots, w_{\ell-1} \rangle$. Имеем

$$x^{-1}\langle w_1, w_2, \dots, w_{\ell-1} \rangle x = \langle w_2, w_3, \dots, w_\ell \rangle,$$

и, следовательно, $H_0 = x^{-1}G_0x$ есть пополнение подгруппы $\langle w_2, w_3, \dots, w_\ell \rangle$. По лемме 3.11

$$c_0^{-n/4}w_1c_0^{n/4} \in M(\bar{w})G_0^* \setminus G_0^*.$$

Поскольку H_0 – пополнение $R(\bar{w})$, то в силу леммы 3.7 имеем $w_2 \in H_0^-$, т.е. $w_2 \in M(\bar{w})H_0^* \setminus H_0^*$. Тогда, применяя лемму 4.20 для $w := c_0^{-n/4}w_1c_0^{n/4}$ и $z := c_0^{-n/4}x$, получаем, что набор $((H_i)_{i=0}^k, \{t_i\}_{i=1}^{s+1}, \{\omega_i\}_{i=1}^s)$, где

$$H_i = x^{-1}c_0^{n/4}G_ic_0^{-n/4}x$$

и

$$\omega_i: M(\bar{w})H_{t_i}^* \rightarrow H_{t_{i+1}}$$

– гомоморфизм, сопряженный гомоморфизму ψ_i с помощью $c_0^{-n/4}x$, является лестницей над $M(\bar{w})$. Отсюда следует, в частности, что $M \subseteq H_k$ и отображение

$$\chi: g \mapsto x^{-1}c_0^{n/4}\phi_0(c_0^{-n/4}xgx^{-1}c_0^{n/4})c_0^{-n/4}x$$

является гомоморфизмом $H_0 \rightarrow H_k$, тождественным на M . Имеем

$$\chi(w_\ell) = x^{-1}c_0^{n/4}\phi_0(c_0^{-n/4}w_{\ell-1}c_0^{n/4})c_0^{-n/4}x = x^{-1}y\phi_0(w_{\ell-1})y^{-1}x = w'_\ell.$$

Теперь

$$(w'_1)^2 = \phi_0(w_1^2) = w_1^2, \quad (w'_\ell)^2 = \chi(w_\ell^2) = w_\ell^2,$$

и для любого $g \in M(\bar{w})$

$$\begin{aligned}(w'_1)^{-1}gw'_1 &= \phi_0(w_1^{-1}gw_1) = w_1^{-1}gw_1, \\ (w'_\ell)^{-1}gw'_\ell &= \chi(w_\ell^{-1}gw_\ell) = w_\ell^{-1}gw_\ell.\end{aligned}$$

Отсюда ввиду определения подгруппы $M(\bar{w})$ следует $M(\bar{w}') = M(\bar{w})$, что и требовалось. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.4. Допустим, что $\bar{w} = (w_1, w_2, \dots, w_\ell)$ – нерегулярная цепь длины $\ell \geq 6$. Выберем цепь $\bar{w}$ с наименьшим значением $\text{ранг } L(\bar{w})$. В силу следствия 3.10 $\text{ранг } L(\bar{w}) > \text{ранг } M(\bar{w})$. Выберем пополнение G_0 подгруппы $L(\bar{w})$ и построим лестницу $\Omega = ((G_i)_{i=0}^k, \{t_i\}_{i=1}^{s+1}, \{\psi_i\}_{i=1}^s)$ над $M(\bar{w})$. По лемме 5.4 лестница Ω имеет тип II. Тогда по лемме 5.5 должна существовать нерегулярная цепь $\bar{w}'$ с меньшим значением $\text{ранг } L(\bar{w}')$. Противоречие.

Доказательство теоремы 1 завершено.

Список литературы

1. П. С. Новиков, С. И. Адян, “Бесконечные периодические группы, I–III”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **32**:1 (1968), 212–244; **32**:2, 251–524; **32**:3, 709–731; англ. пер.: P. S. Novikov, S. I. Adjan, “Infinite periodic groups, I–III”, *Math. USSR-Izv.*, **2**:1 (1968), 209–236; **2**:2, 241–479; **2**:3, 665–685.
2. С. И. Адян, *Проблема Бернсайда и тождества в группах*, Наука, М., 1975; англ. пер.: S. I. Adjan, *The Burnside problem and identities in groups*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.*, **95**, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1979.
3. А. Ю. Ольшанский, *Геометрия определяющих соотношений в группах*, Современ. алгебра, Наука, М., 1989; англ. пер.: A. Yu. Ol’shanskii, *Geometry of defining relations in groups*, *Math. Appl. (Soviet Ser.)*, **70**, Kluwer, Dordrecht, 1991.
4. S. V. Ivanov, “The free Burnside groups of sufficiently large exponents”, *Internat. J. Algebra Comput.*, **4**:1–2 (1994), 1–308.
5. И. Г. Лысенко, “Бесконечные бернсайдовы группы четного периода”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **60**:3 (1996), 3–224; англ. пер.: I. G. Lysenok, “Infinite Burnside groups of even exponent”, *Izv. Math.*, **60**:3 (1996), 453–654.
6. T. Delzant, M. Gromov, *Groupes de Burnside et géométrie hyperbolique*, Preprint, 2003; <http://www-irma.u-strasbg.fr/~delzant>.

И. Г. ЛЫСЁНОК (I. G. LYSENOK)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступило в редакцию
12.01.2006