Общероссийский математический портал

С. Г. Танкеев, Циклы на абелевых многообразиях и исключительные числа, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1996, том 60, выпуск 2, 159–194

DOI: <https://doi.org/10.4213/im75>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 18:05:46

УДК 512.6

С. Г. Танкеев

Циклы на абелевых многообразиях и исключительные числа

В статье рассматривается техника доказательств гипотез Ходжа, Тэйта и Мамфорда–Тэйта для простого комплексного абелева многообразия J неискл. размерности при условии, что $\text{End}(J) \otimes \mathbb{R} \in \{\mathbb{R}, M_2(\mathbb{R}), \mathbb{K}, \mathbb{C}\}$, где $\mathbb{K}$ – тело классических кватернионов. Подробно изучаются простые $2p$ -мерные абелевы многообразия над числовым полем (p – простое число, $p \geq 17$). Дается приложение теоремы Минковского о неразветвленных расширениях поля $\mathbb{Q}$ к арифметике и геометрии некоторых абелевых многообразий над полем рациональных чисел.

Библиография: 33 наименования.

§ 1. Введение

Пусть $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ – множество натуральных чисел, отличных от нуля. Положим

$$\begin{aligned} \text{Ex}(1) &= \left\{ 4^l, \frac{1}{2} \binom{4l+2}{2l+1}^{2m-1}, 2^{8lm+4l-4m-3}, 4^l \cdot (m+1)^{2l+1} \mid l, m \in \mathbb{N}^+ \right\} \\ &= \{4, 10, 16, 32, 64, 108, 126, 256, 500, 512, 864, 1024, 1372, 1716, 2048, \\ &\quad 2916, 3888, 4000, 4096, 5324, 6912, 8192, 8788, 10976, 13500, 16384, \\ &\quad 19652, 23328, 24310, 27436, 32000, 37044, 42592, 48668, 50000, 55296, \\ &\quad 62500, 65536, 70304, 78732, 87808, 97556, 108000, 119164, 124416, \\ &\quad 131072, 139968, 143748, 157216, 171500, 186624, 202612, 219488, 237276, \\ &\quad 256000, 262144, 268912, 275684, 296352, 318028, 340736, 352716, 364500, \\ &\quad 389344, 415292, 442368, 470596, 500000, 524288, 530604, 562432, 595508, \\ &\quad 629856, 665500, 702464, 740772, 780448, 821516, 864000, 907924, \\ &\quad 944784, 953312, \dots\}, \\ \text{Ex}(3) &= \left\{ 4^{l+1}, 6^{l+1}, \binom{4m+4}{2m+2}^l, \binom{4m+2}{2m+1}^{2l}, 2^{(4m-1)l}, \right. \\ &\quad \left. 4^l \cdot (m+2)^{2l}, 2^{l+1} \cdot (m+4)^{l+1} \mid l, m \in \mathbb{N}^+ \right\} \end{aligned}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-00631).

$$\begin{aligned}
&= \{8, 16, 36, 64, 70, 100, 128, 144, 196, 216, 256, 324, 400, 484, 512, 576, \\
&\quad 676, 784, 900, 924, 1000, 1024, 1156, 1296, 1444, 1600, 1728, 1764, 1936, \\
&\quad 2048, 2116, 2304, 2500, 2704, 2744, 2916, 3136, 3364, 3600, 3844, 4096, \dots\}, \\
\text{Ex}(4) &= \left\{ \binom{l+2}{m} (1 < m < (l+2)/2), \right. \\
&\quad \left. \binom{l+2}{m}^{n+1} (1 \leq m < (l+2)/2) \mid l, m, n \in \mathbb{N}^+ \right\} \\
&= \{9, 10, 15, 16, 21, 25, 27, 28, 35, 36, 45, 49, 55, 56, 64, 66, 78, 81, 84, 91, \\
&\quad 100, 105, 120, 121, 125, 126, 136, 144, 153, 165, 169, 171, 190, 196, 210, \\
&\quad 216, 220, 225, 231, 243, 253, 256, 276, 286, 289, 300, 324, 325, 330, 343, \\
&\quad 351, 361, 364, 378, 400, 406, 435, 441, 455, 462, 465, 484, 495, 496, 512, \\
&\quad 528, 529, 560, 561, 576, 595, 625, 630, 666, 676, 680, 703, 715, 729, 741, \\
&\quad 780, 784, 792, 816, 820, 841, 861, 900, 903, 946, 961, 969, 990, 1000, \\
&\quad 1001, 1024, \dots\}.
\end{aligned}$$

В этой статье мы докажем следующие основные результаты:

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $\text{Hg}(J)$ – группа Ходжа простого q -мерного абелева многообразия J над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, $\text{hg} = \text{Lie Hg}(J) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$, hg^{ss} – полупростая часть редуктивной алгебры Ли hg . Тогда:

1) если $\text{End}(J) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \mathbb{R}$ и q не принадлежит множеству $\text{Ex}(1)$, то $\text{hg} = \text{sp}_{2q}$ и для $J \times \dots \times J$ верна общая гипотеза Ходжа в формулировке Гротендика [9];

2) если $\text{End}(J) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = M_2(\mathbb{R})$ и q не принадлежит множеству $2 \cdot \text{Ex}(1)$, то $\text{hg} = \text{sp}_q$ и для $J \times \dots \times J$ верна общая гипотеза Ходжа в формулировке Гротендика;

3) если $\text{End}(J) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \mathbb{K}$ – тело классических кватернионов и q не принадлежит множеству $\text{Ex}(3)$, то $\text{hg} = \text{so}_q$ и для $0 \leq r \leq q$ имеем

$$\dim_{\mathbb{Q}} H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r} = \begin{cases} 1, & \text{если } r \neq q/2, \\ q+2, & \text{если } r = q/2 \end{cases}$$

(в частности, если $r \neq q/2$, то $\mathbb{Q}$ -пространство $H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}$ порождается классами пересечений дивизоров);

4) если $\text{End}(J) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \mathbb{C}$ и q не принадлежит множеству $\text{Ex}(4)$, то $\text{hg}^{ss} = \text{sl}_q$ и для всех целых чисел $r \neq q/2$ $\mathbb{Q}$ -пространство $H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}$ порождается классами пересечений дивизоров (в частности, если q – нечетное число, то для J верна обычная гипотеза Ходжа), а в случае $r = q/2$ имеем соотношение

$$\dim_{\mathbb{Q}} H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r} = \begin{cases} 1, & \text{если } \text{hg} \neq \text{hg}^{ss}, \\ 3, & \text{если } \text{hg} = \text{hg}^{ss}. \end{cases}$$

Доказательство основано на теореме М.В. Борового о $\mathbb{Q}$ -простоте группы $\mathrm{Hg}(J)^{ss}$ в рассматриваемых случаях [3] и методах работы [33]. Очевидно, плотность множества $\mathrm{Ex}(1) \cup \mathrm{Ex}(3) \cup \mathrm{Ex}(4)$ исключительных чисел во множестве $\mathbb{N}^+$ равна нулю.

Пусть J – абелево многообразие над числовым полем $\mathbb{k} \subset \mathbb{C}$, $[\mathbb{k} : \mathbb{Q}] < \infty$, l – простое число,

$$V_l = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_l}(H_{\mathrm{et}}^1(J \otimes_{\mathbb{k}} \overline{\mathbb{k}}, \mathbb{Q}_l), \mathbb{Q}_l),$$

$\rho_l: \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{k}}/\mathbb{k}) \rightarrow \mathrm{GL}(V_l)$ – естественное l -адическое представление, v – неархимедова точка поля $\mathbb{k}$, $\bar{v}$ – какое-нибудь продолжение нормирования v на поле $\overline{\mathbb{k}}$, $I(\bar{v}) \subset \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{k}}/\mathbb{k})$ – подгруппа инерции.

Классическая теорема Минковского о неразветвленных расширениях поля $\mathbb{Q}$ позволяет доказать следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть J – абсолютно простое абелево многообразие над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, обладающее хорошими редукциями всюду, кроме точки v с полем вычетов характеристики p . Предположим, что выполнены следующие условия:

- 1) алгебраическая оболочка H_{V_p} компактной группы Ли $\rho_p(I(\bar{v})) \subset \mathrm{GL}(V_p)$ является связной алгебраической $\mathbb{Q}_p$ -группой;
- 2) $\mathrm{End}(J \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}) = \mathrm{End}(J)$;
- 3) $\mathrm{Cent}(\mathrm{End}^0(J)) = K$ – вполне вещественное поле алгебраических чисел степени e над $\mathbb{Q}$;
- 4) $\mathbb{Q}_p$ -алгебра $\mathrm{End}^0(J) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ изоморфна $\mathbb{Q}_p \times \cdots \times \mathbb{Q}_p$ или $M_2(\mathbb{Q}_p) \times \cdots \times M_2(\mathbb{Q}_p)$;
- 5) если J – абелево многообразие 1-го типа по классификации Альберта, то $\dim J/e$ не принадлежит множеству $\mathrm{Ex}(1)$; если J – абелево многообразие 2-го типа, то $\dim J/e$ не принадлежит множеству $2 \cdot \mathrm{Ex}(1)$; если J – абелево многообразие 3-го типа, то $\dim J/e$ не принадлежит множеству $\mathrm{Ex}(3) \cup \{4\}$.

Тогда для любого простого числа l существует канонический изоморфизм алгебр Ли

$$\mathrm{Lie} \mathrm{Im}(\rho_l) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie}[\mathrm{MT}(J \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})(\mathbb{Q}_l)]$$

(другими словами, для J верна гипотеза Мамфорда–Тэйта [16]); если J – абелево многообразие 1-го или 2-го типа по классификации Альберта, то для любого целого числа $r \geq 0$ $\mathbb{Q}_l$ -пространство

$$[H_{\mathrm{et}}^{2r}((J \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}) \times \cdots \times (J \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}), \mathbb{Q}_l(r))]^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}$$

порождается классами пересечений дивизоров на $J \times \cdots \times J$ (в частности, для $J \times \cdots \times J$ верна гипотеза Тэйта об алгебраических циклах [25]) и для абелева многообразия $(J \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}) \times \cdots \times (J \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})$ верна общая гипотеза Ходжа в формулировке Гротендика [9].

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть p – простое число, J – абсолютно простое $2p$ -мерное абелево многообразие над числовым полем $\mathbb{k} \subset \mathbb{C}$, $[\mathbb{k} : \mathbb{Q}] < \infty$, причем $\text{Cent}(\text{End}^0(J \otimes_{\mathbb{k}} \bar{\mathbb{k}}))$ – вполне вещественное поле алгебраических чисел (другими словами, $J \otimes_{\mathbb{k}} \bar{\mathbb{k}}$ – абелево многообразие 1-го, 2-го или 3-го типа по классификации Альберта). Тогда

$$\text{Lie Im}(\rho_l) \xrightarrow{\sim} \text{Lie}[\text{MT}(J \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{C})(\mathbb{Q}_l)]$$

(кроме, быть может, случая, когда $\text{End}(J \otimes_{\mathbb{k}} \bar{\mathbb{k}}) = \mathbb{Z}$ и $p \in \{2, 5\}$). Кроме того, $\mathbb{Q}_l$ -пространство $H_{\text{ét}}^{2r}(J \otimes_{\mathbb{k}} \bar{\mathbb{k}}, \mathbb{Q}_l(r))^{\text{Gal}(\bar{\mathbb{k}}/\mathbb{k})}$ порождается классами пересечений дивизоров (кроме случая, когда $\text{End}(J \otimes_{\mathbb{k}} \bar{\mathbb{k}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \mathbb{K}$ – тело классических кватернионов и $r = p$).

Наконец, мы рассмотрим вариант, когда J – абелево многообразие над числовым полем $\mathbb{k} \subset \mathbb{C}$, $[\mathbb{k} : \mathbb{Q}] < \infty$, причем $\text{End}^0(J \otimes_{\mathbb{k}} \bar{\mathbb{k}}) = K$ – мнимое квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$. В этом случае $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ является прямой суммой двух копий поля $\mathbb{C}$, индексированных двумя различными вложениями σ, τ поля K в поле $\mathbb{C}$,

$$\text{Lie}(J \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{C}) = M_{\sigma} \oplus M_{\tau},$$

где

$$M_{\sigma} = \{v \in \text{Lie}(J \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{C}) \mid e \cdot v = \sigma(e)v \text{ для всех } e \in K\},$$

$$M_{\tau} = \{v \in \text{Lie}(J \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{C}) \mid e \cdot v = \tau(e)v \text{ для всех } e \in K\},$$

$$\dim_{\mathbb{k}} J = n_{\sigma} + n_{\tau},$$

где $n_{\sigma} = \dim_{\mathbb{C}} M_{\sigma} \geq 1$, $n_{\tau} = \dim_{\mathbb{C}} M_{\tau} \geq 1$ (см. [24, теорема 5]).

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть J – абелево многообразие над числовым полем $\mathbb{k} \subset \mathbb{C}$, $[\mathbb{k} : \mathbb{Q}] < \infty$, причем $\text{End}^0(J \otimes_{\mathbb{k}} \bar{\mathbb{k}}) = K$ – мнимое квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$. Тогда:

1) если n_{σ} и n_{τ} – взаимно простые целые числа, то для любого простого числа l

$$\text{Lie Im}(\rho_l) \xrightarrow{\sim} \text{Lie}[\text{MT}(J \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{C})(\mathbb{Q}_l)];$$

2) если $\dim_{\mathbb{k}} J = 2p$, где p – простое число, $p \geq 17$, то существует канонический изоморфизм полупростых частей

$$[\text{Lie Im}(\rho_l)]^{ss} \xrightarrow{\sim} \text{Lie}[\text{MT}(J \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{C})(\mathbb{Q}_l)]^{ss},$$

который в случае $n_{\sigma} \neq p$ продолжается до изоморфизма

$$\text{Lie Im}(\rho_l) \xrightarrow{\sim} \text{Lie}[\text{MT}(J \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{C})(\mathbb{Q}_l)].$$

Более того, если выполнено условие 1.4, 1) или условие 1.4, 2) вместе с неравенством $n_{\sigma} \neq p$, то для любого целого числа $r \geq 0$ $\mathbb{Q}_l$ -пространство $H_{\text{ét}}^{2r}(J \otimes_{\mathbb{k}} \bar{\mathbb{k}}, \mathbb{Q}_l(r))^{\text{Gal}(\bar{\mathbb{k}}/\mathbb{k})}$ порождается классами пересечений дивизоров.

§ 2. Циклы на комплексном абелевом многообразии и исключительные числа

2.1. Обозначим через $\mathrm{Hg}(J)^{ss} = [\mathrm{Hg}(J), \mathrm{Hg}(J)]$ коммутант редуктивной $\mathbb{Q}$ -группы Ходжа $\mathrm{Hg}(J)$ простого q -мерного комплексного абелева многообразия J . Пусть

$$\mathrm{End}^0(J) = \mathrm{End}(J) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, \quad K = \mathrm{Cent}(\mathrm{End}^0(J)),$$

K_0 – максимальное вполне вещественное подполе в K , $\mathrm{hg}_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Lie} \mathrm{Hg}(J)$, $\mathrm{hg} = \mathrm{hg}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$.

Хорошо известно, что

$$\mathrm{End}^0(J) = \mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(J)} H^1(J, \mathbb{Q}), \quad (2.1.1)$$

$$\mathrm{NS}(J) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}(-1) = H^2(J, \mathbb{Q})^{\mathrm{Hg}(J)} = [\wedge^2 H^1(J, \mathbb{Q})]^{\mathrm{Hg}(J)} \quad (2.1.2)$$

(теорема Лефшеца о дивизориальных циклах).

По теореме М. В. Борового число множителей в разложении $\mathrm{Hg}(J)^{ss}$ в почти прямое произведение простых $\mathbb{Q}$ -групп не превышает $[K_0 : \mathbb{Q}] = e_0$ [3]. При выполнении условий теоремы 1.1 имеем соотношение $K_0 = \mathbb{Q}$, поэтому группа $\mathrm{Hg}(J)^{ss}$ является простой $\mathbb{Q}$ -группой.

2.2. Мы будем предполагать, что выполнены условия теоремы 1.1.

Если J – абелево многообразие 1-го типа по классификации Альберта, то $\mathrm{End}^0(J) = \mathbb{Q}$, $\mathrm{rank} \mathrm{NS}(J) = 1$ (см. [18, § 21]), поэтому из соотношений (2.1.1), (2.1.2) и леммы Шура легко следует, что $H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = V$ – неприводимый симплектический hg -модуль [28, п. 5.2].

Если J – абелево многообразие 2-го типа по классификации Альберта, то $\mathrm{End}^0(J)$ – кватернионная алгебра с делением над $\mathbb{Q}$, расщепляющаяся в вещественной точке поля $\mathbb{Q}$, $\mathrm{rank} \mathrm{NS}(J) = 3$ [18, § 21], поэтому $H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = V \oplus V$, где V – неприводимый симплектический hg -модуль [28, п. 5.2].

Если J – абелево многообразие 3-го типа по классификации Альберта, то $\mathrm{End}^0(J)$ – кватернионная алгебра с делением над $\mathbb{Q}$, не расщепляющаяся в вещественной точке поля $\mathbb{Q}$, $\mathrm{rank} \mathrm{NS}(J) = 1$ [18, § 21], поэтому из (2.1.1), (2.1.2) и леммы Шура следует, что $H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = V \oplus V$, где V – неприводимый ортогональный hg -модуль.

Во всех перечисленных выше случаях $\mathrm{hg} = \mathrm{hg}^{ss}$ (см. [27, лемма 1.4]).

Если J – абелево многообразие 4-го типа по классификации Альберта, то K – мнимое квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$, $\mathrm{End}^0(J)$ – центральная алгебра с делением ранга d^2 над K , $\mathrm{rank} \mathrm{NS}(J) = d^2$ [18, § 21], поэтому из (2.1.1), (2.1.2) и леммы Шура следует, что

$$H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = V^{\oplus d} \oplus V^{*\oplus d},$$

где V – точный неприводимый hg -модуль, V^* – дуальный hg -модуль, причем hg -модули V и V^* неизоморфны [29, п. 3.3].

2.3. В силу теоремы М. В. Борового полупростая алгебра Ли $\text{hg}_{\mathbb{Q}}^{ss}$ не имеет нетривиальных определенных над $\mathbb{Q}$ идеалов. Поэтому

$$\text{hg}^{ss} = \text{hg}_{\mathbb{Q}}^{ss} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \prod_{m=1}^s g_m$$

– произведение простых алгебр Ли над $\mathbb{C}$, причем группа $\text{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ транзитивно переставляет множители в этом произведении. Более того, $g_i \xrightarrow{\sim} g_j$ (см. [33, лемма 1.2]).

С другой стороны, по теореме Делиня [13, теорема 0.5.1.в] g_i является простой классической алгеброй Ли типа A_n , B_n , C_n или D_n , старший вес любого неприводимого g_i -подмодуля $U \subset H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ является микровесом в смысле Н. Бурбаки [1]. Поэтому

$$V = E(\omega_{i_1}^{(1)} + \dots + \omega_{i_s}^{(s)})(\chi),$$

где χ – вес $\text{Cent}(\text{hg})$ -модуля V , $\omega_{i_m}^{(m)}$ – микровес, отвечающий простой алгебре Ли g_m .

2.4. ЛЕММА. Число $\dim E(\omega_{i_m}^{(m)})$ не зависит от m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каноническое представление $\rho: \text{hg}_{\mathbb{Q}}^{ss} \rightarrow \text{End } H^1(J, \mathbb{Q})$ определено над полем $\mathbb{Q}$. Группа $\text{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ транзитивно переставляет $g_1, g_2, \dots, g_s$, поэтому для любого $m \in \{1, \dots, s\}$ существует такой элемент $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$, что $g_m = g_1^{\sigma}$.

Предположим, что J – абелево многообразие 1-го, 2-го или 3-го типа по классификации Альберта. Тогда hg^{ss} -модуль $H^1(J, \mathbb{C})$ является прямой суммой нескольких экземпляров V , и поэтому g_m -модуль $H^1(J, \mathbb{C})$ изоморфен $E(\omega_{i_m}^{(m)})^{\oplus r_m}$,

$$r_m \cdot \dim E(\omega_{i_m}^{(m)}) = \dim H^1(J, \mathbb{C}) = 2 \dim J.$$

В силу леммы Шура

$$\text{End}_{g_1} H^1(J, \mathbb{C}) = \text{End}_{g_1} E(\omega_{i_1}^{(1)})^{\oplus r_1} = M_{r_1}(\mathbb{C}).$$

Если $\varphi \in \text{End}_{g_1} H^1(J, \mathbb{C})$, то $\varphi(\rho(\gamma_1)v) = \rho(\gamma_1)\varphi(v)$ для всех $\gamma_1 \in g_1$, $v \in H^1(J, \mathbb{C})$ и, следовательно,

$$\varphi^{\sigma}(\rho^{\sigma}(\gamma_1^{\sigma})v^{\sigma}) = \rho^{\sigma}(\gamma_1^{\sigma})\varphi^{\sigma}(v^{\sigma}).$$

Очевидно, $\rho^{\sigma} = \rho$ (так как представление ρ определено над $\mathbb{Q}$), $\gamma_1^{\sigma} \in g_1^{\sigma} = g_m$, поэтому $\varphi^{\sigma}(\rho(\gamma_m)v) = \rho(\gamma_m)\varphi^{\sigma}(v)$ для всех $\gamma_m \in g_m$, $v \in H^1(J, \mathbb{C})$. Значит, $\varphi^{\sigma} \in \text{End}_{g_m} H^1(J, \mathbb{C})$. Поэтому

$$\text{End}_{g_1} H^1(J, \mathbb{C}) = M_{r_1}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \text{End}_{g_m} H^1(J, \mathbb{C}) = M_{r_m}(\mathbb{C})$$

и, следовательно, $r_1 = r_m$, $\dim E(\omega_{i_1}^{(1)}) = \dim E(\omega_{i_m}^{(m)})$.

Предположим, что J – абелево многообразие 4-го типа по классификации Альберта. Тогда hg^{ss} -модуль $H^1(J, \mathbb{C})$ имеет вид

$$H^1(J, \mathbb{C}) = V^{\oplus d} \oplus V^{*\oplus d} = \left[E(\omega_{i_1}^{(1)} + \dots + \omega_{i_s}^{(s)}) \oplus E(\omega_{i_1}^{(1)} + \dots + \omega_{i_s}^{(s)})^* \right]^{\oplus d},$$

поэтому g_m -модуль $H^1(J, \mathbb{C})$ имеет вид

$$H^1(J, \mathbb{C}) = \left[E(\omega_{i_m}^{(m)}) \oplus E(\omega_{i_m}^{(m)})^* \right]^{\oplus r_m}$$

и в силу леммы Шура

$$\mathrm{End}_{g_m} H^1(J, \mathbb{C}) = \begin{cases} M_{2r_m}(\mathbb{C}), & \text{если } E(\omega_{i_m}^{(m)}) = E(\omega_{i_m}^{(m)})^*, \\ M_{r_m}(\mathbb{C}) \oplus M_{r_m}(\mathbb{C}), & \text{если } E(\omega_{i_m}^{(m)}) \neq E(\omega_{i_m}^{(m)})^*. \end{cases} \quad (2.4.1)$$

Очевидно,

$$\mathrm{Cent} \mathrm{End}_{g_m} H^1(J, \mathbb{C}) = \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{если } E(\omega_{i_m}^{(m)}) = E(\omega_{i_m}^{(m)})^*, \\ \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}, & \text{если } E(\omega_{i_m}^{(m)}) \neq E(\omega_{i_m}^{(m)})^*. \end{cases}$$

Действуя, как и выше, мы получим соотношение

$$\mathrm{End}_{g_1} H^1(J, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{g_m} H^1(J, \mathbb{C}),$$

поэтому

$$\mathrm{Cent}(\mathrm{End}_{g_1} H^1(J, \mathbb{C})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cent}(\mathrm{End}_{g_m} H^1(J, \mathbb{C}))$$

и, следовательно,

$$E(\omega_{i_m}^{(m)}) = E(\omega_{i_m}^{(m)})^* \Leftrightarrow E(\omega_{i_1}^{(1)}) = E(\omega_{i_1}^{(1)})^*. \quad (2.4.2)$$

Поэтому из соотношения (2.4.1) следует, что $r_m = r_1$. Лемма доказана.

2.5. Предположим, что $\mathrm{End}(J) = \mathbb{Z}$ и $q = \dim_{\mathbb{C}} J$ не принадлежит множеству $\mathrm{Ex}(1)$. Тогда $\mathrm{hg}_{\mathbb{Q}} = \mathrm{sp}(H^1(J, \mathbb{Q}))$. Это доказано в [33, теорема 1] при дополнительном предположении, что $q \neq (8l + 4)^{m-1} \cdot 2^{8ln+2n-4l-2}$ (где $l, m, n \in \mathbb{N}^+$). Это предположение возникло из желания исключить появление алгебры Ли g_1 типа D_r , где $r = 4l + 2$ [33, п. 1.7]. Если g_1 имеет тип D_r , то полуспинорные представления $E(\omega_{r-1}^{(i)})$ и $E(\omega_r^{(i)})$ являются симплектическими представлениями степени 2^{4l+1} , $s_0 = 2n - 1$ ($n \in \mathbb{N}^+$), ортогональное представление $E(\omega_1^{(j)})$ имеет степень $2r = 4l + 2$ и не может появиться вместе с одним из представлений $E(\omega_{r-1}^{(i)})$, $E(\omega_r^{(i)})$ в тензорном произведении $V = E(\omega_{i_1}^{(1)}) \otimes \dots \otimes E(\omega_{i_s}^{(s)})$, так как иначе в силу леммы 2.4

$$2^{4l+1} = \dim E(\omega_{r-1}^{(i)}) = \dim E(\omega_r^{(i)}) = \dim E(\omega_1^{(j)}) = 4l + 2,$$

что невозможно. Значит, $E(\omega_1^{(j)})$ не является множителем в V и, следовательно,

$$\dim V = (2^{4l+1})^{s_0} = 2^{(4l+1)(2n-1)},$$

поэтому $q = \dim_{\mathbb{C}} J = \frac{1}{2} \dim V$ является степенью 4, $q \in \mathrm{Ex}(1)$, что исключено.

Из соотношения $\mathrm{hg}_{\mathbb{Q}} = \mathrm{sp}(H^1(J, \mathbb{Q}))$ следует, что для J верна версия Гротендика общей гипотезы Ходжа [32, п. 1.10]. Более того, общая гипотеза Ходжа–Гротендика верна для $J^n = J \times \dots \times J$ (см. [11, теорема 5.1]).

2.6. ЛЕММА. Пусть J – абелево многообразие, причем $\text{End}(J) = \mathbb{Z}$. Если $\mathbb{Q}$ -пространство $H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}$ не порождается классами пересечений дивизоров (для некоторого целого числа $r \geq 0$), то $\dim_{\mathbb{C}} J \geq 16$ и $\dim_{\mathbb{C}} J \in \text{Ex}(1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\dim_{\mathbb{C}} J = 4$, то hg имеет тип C_4 или $A_1 \times A_1 \times A_1$, причем в любом из этих случаев $H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}$ порождается классами пересечений дивизоров [30, гл. 3, § 3, теорема 3.6]. Если $\dim_{\mathbb{C}} J = 10$, то hg имеет тип C_{10} или A_5 [33, теорема 2], причем в любом из этих случаев $H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}$ порождается классами пересечений дивизоров [10, теорема 4.1]. Лемма доказана.

2.7. Предположим, что J удовлетворяет условию 1.1,2): $\text{End}(J) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = M_2(\mathbb{R})$, $q = \dim_{\mathbb{C}} J$ не принадлежит множеству $2 \cdot \text{Ex}(1)$. В этом случае $H^1(J, \mathbb{C}) = V \oplus V$, где V – неприводимый симплектический hg -модуль степени q , поэтому для доказательства соотношения $\text{hg} = \text{sp}(V)$ достаточно воспользоваться рассуждениями п. 2.5. Из соотношения $\text{hg} = \text{sp}(V)$ следует, что для J^n верна версия Гротендика общей гипотезы Ходжа [11, теорема 5.1].

2.8. Предположим, что $\text{End}(J) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \mathbb{K}$ – тело классических кватернионов и $q = \dim_{\mathbb{C}} J$ не принадлежит множеству $\text{Ex}(3)$. В этом случае $H^1(J, \mathbb{C}) = V \oplus V$, где $V = E(\omega_{i_1}^{(1)} + \dots + \omega_{i_s}^{(s)})$ – неприводимый точный ортогональный hg -модуль степени q , $E(\omega_{i_j}^{(j)})$ – симплектическое или ортогональное представление, $s_0 = \text{Card}\{j \mid E(\omega_{i_j}^{(j)}) \text{ – симплектическое представление}\}$ является четным числом [1, гл. 8, § 7, п. 5, предложение 12]. Докажем, что $\text{hg} \xrightarrow{\sim} \text{so}(V)$.

Если g_j имеет тип A_1 , то $\omega_{i_j}^{(j)} = \omega_1^{(j)}$, $E(\omega_1^{(j)})$ – симплектическое представление степени 2, поэтому $s = s_0$ – четное число. Если $s = 2$, то $\text{hg} = \text{sl}_2 \times \text{sl}_2 = \text{so}_4$, $q = 4$. Если $s \neq 2$, то $s = 2(l+1)$ ($l \in \mathbb{N}^+$) и, следовательно, $q = \dim V = 2^{2(l+1)} = 4^{l+1} \in \text{Ex}(3)$, что исключено.

Если g_j имеет тип A_r ($r \geq 2$), то $i_j = (r+1)/2$ [1, гл. 8, табл. 1], поэтому r – нечетное число, $r \geq 3$. Если $r = 3$, то $i_j = 2$, $E(\omega_2^{(j)})$ – ортогональное представление степени 6; в случае $s = 1$ мы получим соотношение $\text{hg} = \text{sl}_4 \xrightarrow{\sim} \text{so}_6$; если $s \neq 1$, то $s = l+1$ ($l \in \mathbb{N}^+$), $q = \dim V = 6^{l+1} \in \text{Ex}(3)$, что исключено.

Пусть $r \geq 5$. Предположим, что $r = 4m+1$ ($m \in \mathbb{N}^+$). Тогда $i_j = 2m+1$, поэтому $E(\omega_{i_j}^{(j)})$ – симплектическое представление степени $\binom{4m+2}{2m+1}$ [1, гл. 8, табл. 1 и 2] и, следовательно, $s = s_0 = 2l$ ($l \in \mathbb{N}^+$),

$$q = \dim V = \binom{4m+2}{2m+1}^{2l} \in \text{Ex}(3),$$

что исключено.

Предположим, что $r = 4m+3$ ($m \in \mathbb{N}^+$). Тогда $i_j = 2m+2$, поэтому $E(\omega_{i_j}^{(j)})$ – ортогональное представление степени $\binom{4m+4}{2m+2}$ [1, гл. 8, табл. 1 и 2] и, следовательно, $s = l \in \mathbb{N}^+$,

$$q = \dim V = \binom{4m+4}{2m+2}^l \in \text{Ex}(3),$$

что исключено.

Если g_j имеет тип B_r ($r \geq 2$), то $i_j = r$, $\dim E(\omega_{i_j}^{(j)}) = 2^r$, $E(\omega_{i_j}^{(j)})$ является симплектическим g_j -модулем $\Leftrightarrow r(r+1)/2 = 2l+1$ ($l \in \mathbb{N}^+$) $\Leftrightarrow (r \neq 4m, r \neq 4m-1 \text{ } (m \in \mathbb{N}^+)) \Leftrightarrow (r = 4m+1 \text{ или } r = 4m-2 \text{ } (m \in \mathbb{N}^+))$ [1, гл. 8, табл. 1]. Если $r = 4m+1$, то

$$q = (2^{4m+1})^{2l} = 4^{(4m+1)l} \in \text{Ex}(3),$$

что исключено. Если $r = 4m-2$, то

$$q = (2^{4m-2})^{2l} = 4^{(4m-2)l} \in \text{Ex}(3),$$

что исключено. Значит, $E(\omega_{i_j}^{(j)})$ является ортогональным g_j -модулем, поэтому $r(r+1)/2 = 2l$ [1, гл. 8, табл. 1] и, следовательно, $r(r+1) = 4l$.

Если r – четное число, то r делится на 4, поэтому $2^r = \dim E(\omega_{i_j}^{(j)})$ является степенью 16 и, следовательно, $q \in \text{Ex}(3)$, что исключено. Если r – нечетное число, то

$$r = 4m-1 \text{ } (m \in \mathbb{N}^+), \quad s = l \in \mathbb{N}^+, \quad q = (2^r)^l = 2^{(4m-1)l} \in \text{Ex}(3),$$

что исключено.

Если g_j имеет тип C_r ($r \geq 3$), то $i_j = 1$, поэтому $E(\omega_{i_j}^{(j)})$ – симплектическое представление степени $2r$, $r = m+2$ ($m \in \mathbb{N}^+$), $s = s_0 = 2l$ ($l \in \mathbb{N}^+$),

$$q = (2(m+2))^{2l} = 4^l \cdot (m+2)^{2l} \in \text{Ex}(3),$$

что исключено.

Если g_j имеет тип D_r ($r \geq 4$), то $i_j \in \{1, r-1, r\}$, $\dim E(\omega_1^{(j)}) = 2r$, $\dim E(\omega_{r-1}^{(j)}) = \dim E(\omega_r^{(j)}) = 2^{r-1}$.

Если $r = 4$, то $E(\omega_1^{(j)})$, $E(\omega_3^{(j)})$, $E(\omega_4^{(j)})$ – ортогональные представления степени 8, $s = l \in \mathbb{N}^+$,

$$q = 8^l = 2^{3l} \in \text{Ex}(3),$$

что исключено.

Если $r \geq 5$, то $\dim E(\omega_1^{(j)}) \neq \dim E(\omega_{r-1}^{(j)}) = \dim E(\omega_r^{(j)})$. Предположим, что $E(\omega_1^{(j)})$ является множителем в тензорном произведении

$$V = \bigotimes_{j=1}^s E(\omega_{i_j}^{(j)}).$$

Если $s = 1$, то мы получаем стандартное представление $\text{so}(V)$ в V . Если $s \geq 2$, то $s = l+1$ ($l \in \mathbb{N}^+$), $r = m+4$ ($m \in \mathbb{N}^+$), и в силу леммы 2.4

$$q = (2(m+4))^{l+1} = 2^{l+1} \cdot (m+4)^{l+1} \in \text{Ex}(3),$$

что исключено.

Полуспиновые представления $E(\omega_{r-1}^{(j)})$, $E(\omega_r^{(j)})$ являются ортогональными $\Leftrightarrow r = 4(m+1)$ ($m \in \mathbb{N}^+$) [1, гл. 8, табл. 1] и в этом случае $s = l \in \mathbb{N}^+$,

$$q = (2^{4m+3})^l = 2^{(4(m+1)-1)l} \in \text{Ex}(3),$$

что исключено.

Представления $E(\omega_{r-1}^{(j)})$, $E(\omega_r^{(j)})$ являются симплектическими $\Leftrightarrow r = 4m+2$ ($m \in \mathbb{N}^+$) [1, гл. 8, табл. 1], и в этом случае $s = 2l$ ($l \in \mathbb{N}^+$),

$$q = (2^{4m+1})^{2l} = 4^{(4m+1)l} \in \text{Ex}(3),$$

что исключено.

В итоге мы получили соотношения $\text{hg} \xrightarrow{\sim} \text{so}(V)$, $V = E(\omega_1)$ для алгебры Ли $\text{so}(V)$ типа D_n , где $n = q/2$.

Хорошо известно, что $\wedge^r E(\omega_1) = E(\omega_r)$ для $1 \leq r \leq n-2$, представление $\wedge^{n-1} E(\omega_1)$ неприводимо [1, гл. 8, § 13, п. 4],

$$\wedge^n E(\omega_1) = E(2\omega_{n-1}) + E(2\omega_n) \quad (2.8.1)$$

(см. [1, гл. 8, § 13, упр. 10]). Осталось проверить, что для $0 \leq r \leq q = 2n$

$$\dim_{\mathbb{Q}} H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r} = \begin{cases} 1, & \text{если } r \neq n, \\ 2n+2, & \text{если } r = n. \end{cases} \quad (2.8.2)$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} [H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} &= [\wedge^{2r} H^1(J, \mathbb{C})]^{\text{hg}} \\ &= [\wedge^{2r}(V \oplus V)]^{\text{hg}} = \bigoplus_{i=0}^{2r} [\wedge^i V \otimes \wedge^{2r-i} V]^{\text{hg}}. \end{aligned}$$

Пусть $0 \leq i \leq n-1$. Тогда $\wedge^i V$ – неразложимый $\text{so}(V)$ -модуль степени $\binom{2n}{i}$, а из невырожденности канонического спаривания $\text{so}(V)$ -модулей

$$\wedge^i V \times \wedge^{2n-i} V \rightarrow \wedge^{2n} V = \mathbb{C}$$

следует, что $\wedge^{2n-i} V = (\wedge^i V)^* = \wedge^i V^*$, поэтому в силу леммы Шура

$$[\wedge^i V \otimes \wedge^{2n-i} V]^{\text{so}(V)} = [\wedge^i V \otimes \wedge^i V^*]^{\text{so}(V)} = \text{End}_{\text{so}(V)}(\wedge^i V) = \mathbb{C}.$$

Если $i \geq n+1$, то $2n-i \leq n-1$, и поэтому

$$[\wedge^i V \otimes \wedge^{2n-i} V]^{\text{so}(V)} = \mathbb{C}.$$

Наконец, в силу леммы Шура из (2.8.1) следует, что

$$[\wedge^n V \otimes \wedge^n V]^{\text{so}(V)} = \text{End}_{\text{so}(V)}(\wedge^n V) = \text{End}_{\text{so}(V)}(E(2\omega_{n-1}) + E(2\omega_n)) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C},$$

поэтому

$$\dim_{\mathbb{Q}} H^{2n}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{n,n} = \dim \bigoplus_{i=0}^{2n} [\wedge^i V \otimes \wedge^{2n-i} V]^{\text{so}(V)} = 2n + 2.$$

Пусть $r \leq n - 1$. Очевидно,

$$[\wedge^i V \otimes \wedge^{2r-i} V]^{\text{so}(V)} \simeq \text{Hom}_{\text{so}(V)}(\wedge^{2r-i} V, \wedge^i V).$$

Если $0 \leq i \leq n - 1$ и $2r - i \leq n - 1$, то $\wedge^i V, \wedge^{2r-i} V$ — неразложимые $\text{so}(V)$ -модули,

$$\text{Hom}_{\text{so}(V)}(\wedge^{2r-i} V, \wedge^i V) \neq (0) \Leftrightarrow i = 2r - i \Leftrightarrow i = r,$$

причем

$$\dim[\wedge^r V \otimes \wedge^r V]^{\text{so}(V)} = 1.$$

Если $0 \leq i \leq n - 1$ и $2r - i = n + s$ (где $s \geq 0$), то

$$\wedge^{2r-i} V = \wedge^{n+s} V \simeq \wedge^{n-s} V$$

в силу невырожденности канонического спаривания $\text{so}(V)$ -модулей $\wedge^{n+s} V \times \wedge^{n-s} V \rightarrow \wedge^{2n} V = \mathbb{C}$, поэтому из (2.8.1) и леммы Шура следует, что

$$[\wedge^i V \otimes \wedge^{2r-i} V]^{\text{so}(V)} \simeq [\wedge^i V \otimes \wedge^{n-s} V]^{\text{so}(V)} \neq (0) \Leftrightarrow i = n - s$$

и, следовательно, $s \geq 1$, $2r = 2n$, что исключено. Наконец, если $i \geq n + 1$, то $2r - i \leq n - 1$, поэтому в силу доказанного выше

$$[\wedge^i V \otimes \wedge^{2r-i} V]^{\text{so}(V)} \neq (0) \Leftrightarrow 2r = 2n,$$

что исключено.

Предположим, что $2n \geq r \geq n + 1$. Тогда $r = n + s$ ($s \geq 1$). Согласно сильной теореме Лефшеца

$$H^{2r}(J, \mathbb{Q}) = H^{2n+2s}(J, \mathbb{Q}) = H^{2n-2s}(J, \mathbb{Q}) \wedge \text{cl}_J^0(L)^{\wedge s} \simeq H^{2n-2s}(J, \mathbb{Q}(-s)),$$

где $\text{cl}_J^0(L) \in H^2(J, \mathbb{Q}) \cap H^{1,1}$ — класс когомологий гиперплоского сечения J [15], поэтому в силу доказанного выше

$$\dim_{\mathbb{Q}} H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r} = \dim_{\mathbb{Q}} H^{2(n-s)}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{n-s, n-s} = 1.$$

2.9. Предположим, что $\text{End}^0(J)$ – мнимое квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$ и $q = \dim_{\mathbb{C}} J$ не принадлежит множеству $\text{Ex}(4)$. В этом случае

$$H^1(J, \mathbb{C}) = V \oplus V^*,$$

где V – точный неприводимый hg -модуль, V^* – дуальный hg -модуль, причем hg -модули V и V^* неизоморфны. Мы проверим сначала, что $\text{hg}^{ss} \xrightarrow{\sim} \text{sl}(V)$.

Пусть $\pi: X \rightarrow S$ – семейство Ходжа абелевых многообразий, ассоциированное с абелевым многообразием J [17] (в частности, $J \xrightarrow{\sim} X_t$ для некоторой точки $t \in S$, $\text{Hg}(X_s) \subset \text{Hg}(J)$ для всех $s \in S$). Фундаментальная группа $\pi_1(S, s)$ действует на $H^1(X_s, \mathbb{Q})$. Обозначим через $G_{\mathbb{C}}$ замыкание образа группы $\pi_1(S, s)$ в $\text{GL}(H^1(X_s, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})$ относительно топологии Зариского. Ясно, что группа $G_{\mathbb{C}}$ не зависит от выбора точки $s \in S$ и определена над $\mathbb{Q}$, поэтому

$$G_{\mathbb{C}} = G_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$$

для некоторой алгебраической $\mathbb{Q}$ -подгруппы $G_{\mathbb{Q}} \subset \text{GL}(H^1(X_s, \mathbb{Q}))$. По теореме Делиня для всех $s \in S$, не лежащих в счетном объединении некоторых собственных замкнутых аналитических подмногообразий S , группа $G_{\mathbb{Q}}^0$ содержится в группе $\text{Hg}(X_s)$ и является в ней полупростой нормальной подгруппой [13, теорема 7.3]. В семействе Ходжа $\pi: X \rightarrow S$ почти для всех $s \in S$ выполняется равенство $\text{Hg}(X_s) = \text{Hg}(J)$, поэтому из полупростоты $\mathbb{Q}$ -группы $G_{\mathbb{Q}}^0$ и простоты $\mathbb{Q}$ -группы $\text{Hg}(J)^{ss}$ следует равенство $G_{\mathbb{Q}}^0 = [\text{Hg}(J)^{ss}]^0$. Переходя (в случае необходимости) к конечному неразветвленному накрытию $S' \rightarrow S$ и абелевой схеме $X \times_S S' \rightarrow S'$, мы можем считать, что $G_{\mathbb{Q}} = G_{\mathbb{Q}}^0$ [13, лемма 7.2.1].

Пусть X_{η} – общий схемный слой морфизма $\pi: X \rightarrow S$. Очевидно,

$$\text{End}_S^0(X) = \text{End}^0(X_{\eta}) \subset \text{End}^0(X_t) = \text{End}^0(J). \quad (2.9.1)$$

Представление монодромии $\pi_1(S, t) \rightarrow \text{GL}(H^1(X_t, \mathbb{Q}))$ полупросто [7, п. 4.2.6], поэтому $\mathbb{Q}$ -алгебра $H = \text{End}(R^1\pi_*\mathbb{Q})$ изоморфна прямой сумме алгебр вида $M_{n_i}(D_i)$, где D_i – некоторое тело.

С другой стороны, центр Z алгебры H имеет тип Ходжа $(0, 0)$ и поэтому содержится в подалгебре $\text{End}_S^0(X)$ [7, п. 4.4.7]. Из соотношения (2.9.1) следует, что $Z \subset \text{End}^0(J)$, поэтому $H = M_n(D)$, где D – некоторое тело, $Z = \text{Cent}(D)$, $[Z : \mathbb{Q}] \leq 2$.

Если Z – мнимое квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$, то $\text{End}_S^0(X) = \text{End}(R^1\pi_*\mathbb{Q})$ [7, предложение 4.4.11]. Если $Z = \mathbb{Q}$, то D – центральная алгебра с делением над $\mathbb{Q}$, поэтому $D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ является алгеброй матриц над $\mathbb{R}$ или алгеброй матриц над телом $\mathbb{K}$ классических кватернионов. Следовательно, $\text{End}_S^0(X) = \text{End}(R^1\pi_*\mathbb{Q})$ [7, предложение 4.4.11].

В любом из этих случаев

$$\begin{aligned} \text{End}^0(J) \supset \text{End}_S^0(X) &= \text{End}_{\pi_1(S, t)} H^1(X_t, \mathbb{Q}) = \text{End}_{G_{\mathbb{Q}}} H^1(X_t, \mathbb{Q}) \\ &= \text{End}_{\text{Lie } G_{\mathbb{Q}}} H^1(X_t, \mathbb{Q}) = \text{End}_{\text{hg}^{ss}} H^1(J, \mathbb{Q}) \supset \text{End}_{\text{hg}} H^1(J, \mathbb{Q}) = \text{End}^0(J). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\mathrm{End}^0(J) = \mathrm{End}_{\mathrm{hg}^{\mathrm{ss}}_{\mathbb{Q}}} H^1(J, \mathbb{Q})$$

и, в частности,

$$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}^0(J) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \mathrm{End}_{\mathrm{hg}^{\mathrm{ss}}} H^1(J, \mathbb{C}) = \mathrm{End}_{\mathrm{hg}^{\mathrm{ss}}} (V \oplus V^*). \quad (2.9.2)$$

В силу леммы Шура из (2.9.2) следует неизоморфность неприводимых $\mathrm{hg}^{\mathrm{ss}}$ -модулей V и V^* .

С другой стороны, $V = E(\omega_{i_1}^{(1)} + \dots + \omega_{i_s}^{(s)})$ – неприводимый $\mathrm{hg}^{\mathrm{ss}}$ -модуль степени $q = \dim_{\mathbb{C}} J$, а из соотношения $V \neq V^*$ для $\mathrm{hg}^{\mathrm{ss}}$ -модулей V и V^* следует, что для некоторого $j \in \{1, \dots, s\}$ $E(\omega_{i_j}^{(j)}) \neq E(\omega_{i_j}^{(j)})^*$. В силу (2.4.2) для всех $j \in \{1, \dots, s\}$

$$E(\omega_{i_j}^{(j)}) \neq E(\omega_{i_j}^{(j)})^*. \quad (2.9.3)$$

Если g_j имеет тип A_1 , то $E(\omega_{i_j}^{(j)}) = E(\omega_{i_j}^{(j)})^*$ [1, гл. 8, табл. 1], что противоречит соотношению (2.9.3). Пусть g_j имеет тип A_r ($r \geq 2$). Если $r = q - 1$, то $\mathrm{hg}^{\mathrm{ss}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{sl}(V)$. Будем считать в дальнейшем, что $r \neq q - 1$. Тогда $i_j \neq (r + 1)/2$ [1, гл. 8, табл. 1]. Если $s = 1$, то $i_1 \neq 1$, $i_1 \neq r$, $i_1 \neq (r + 1)/2$, поэтому

$$q = \dim V = \binom{r+1}{i_1} = \binom{l+2}{m} \in \mathrm{Ex}(4),$$

где $r = l + 1$ ($l \in \mathbb{N}^+$), $m \in \mathbb{N}^+$, $1 < m < (r + 1)/2 = (l + 2)/2$. Если $s \geq 2$, то $s = n + 1$ ($n \in \mathbb{N}^+$),

$$q = \dim V = \binom{l+2}{m}^{n+1},$$

где $1 \leq m < (l + 2)/2$, что исключено.

Если g_j имеет тип B_r или C_r ($r \geq 2$), то $E(\omega_{i_j}^{(j)}) = E(\omega_{i_j}^{(j)})^*$ [1, гл. 8, табл. 1], что противоречит соотношению (2.9.3). Если g_j имеет тип D_r ($r \geq 4$), то в силу соотношения (2.9.3) $i_j \in \{r, r - 1\}$, причем $r = 2l + 3$ ($l \in \mathbb{N}^+$), $s = n \in \mathbb{N}^+$ [1, гл. 8, табл. 1 и 2],

$$q = \dim V = (2^{r-1})^n = (2^{2l+2})^n = 4^{(l+1)n} = \binom{2+2}{1}^{(l+1)n} \in \mathrm{Ex}(4),$$

что исключено.

В итоге мы доказали соотношение $\mathrm{hg}^{\mathrm{ss}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{sl}(V)$. Можно считать, что $V = E(\omega_1)$, $V^* = E(\omega_{q-1})$ как модули над простой алгеброй Ли $\mathrm{hg}^{\mathrm{ss}}$ типа A_{q-1} .

Предположим сначала, что $2r \neq q$. Пусть $2r \leq q - 1$. Очевидно,

$$\begin{aligned} [H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} &= [\wedge^{2r} H^1(J, \mathbb{C})]^{\mathrm{hg}} \subset [\wedge^{2r} H^1(J, \mathbb{C})]^{\mathrm{hg}^{\mathrm{ss}}} \\ &= [\wedge^{2r}(V \oplus V^*)]^{\mathrm{sl}(V)} = \bigoplus_{i=0}^{2r} [\wedge^i V \otimes \wedge^{2r-i} V^*]^{\mathrm{sl}(V)} \\ &= \bigoplus_{i=0}^{2r} \mathrm{Hom}_{\mathrm{sl}(V)}(\wedge^{2r-i} V, \wedge^i V). \end{aligned}$$

Из неравенств $i \leq 2r \leq q-1$, $2r-i \leq 2r \leq q-1$ следует, что

$$\wedge^i V = \wedge^i E(\omega_1) = E(\omega_i)$$

– неприводимое представление в случае $i \geq 1$,

$$\wedge^{2r-i} V = \wedge^{2r-i} E(\omega_1) = E(\omega_{2r-i})$$

– неприводимое представление в случае $2r-i \geq 1$ [1, гл. 8, § 13, п. 1], поэтому в силу леммы Шура

$$\text{Hom}_{\text{sl}(V)}(\wedge^{2r-i} V, \wedge^i V) \neq (0) \Leftrightarrow 2r-i = i \Leftrightarrow i = r,$$

причем

$$\dim[\wedge^r V \otimes \wedge^r V^*]^{\text{sl}(V)} = 1.$$

Следовательно, в этом случае

$$\dim_{\mathbb{Q}} H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r} \leq 1.$$

Вариант $2r > q$ сводится к предыдущему с помощью сильной теоремы Лефшеца.

Предположим, наконец, что $q = 2r$. Если $\text{hg} \neq \text{hg}^{ss}$, то $\text{Cent}(\text{hg}) \neq (0)$, и поэтому $V = E(\omega_1)(\chi)$, где χ – ненулевой вес $\text{Cent}(\text{hg})$ -модуля V . В этом случае при $1 \leq i \leq r-1$ имеем соотношения

$$\begin{aligned} [\wedge^i V \otimes \wedge^{2r-i} V^*]^{\text{hg}} &\subset [\wedge^i V \otimes \wedge^{2r-i} V^*]^{\text{Cent}(\text{hg})} \\ &= [E(\omega_i)(i\chi) \otimes E(\omega_{2r-i})^*(-(2r-i)\chi)]^{\text{Cent}(\text{hg})} \\ &= [E(\omega_i) \otimes E(\omega_{2r-i})^*((2i-2r)\chi)]^{\text{Cent}(\text{hg})} = (0) \end{aligned}$$

в силу неравенства $(2i-2r)\chi \neq 0$. Если $i = 0$, то

$$[\wedge^0 V \otimes \wedge^{2r} V^*]^{\text{hg}} = [\wedge^{2r} V^*]^{\text{hg}} \subset [E(0)(-2r\chi)]^{\text{Cent}(\text{hg})} = (0)$$

в силу соотношения $-2r\chi \neq 0$. Если $i = r$, то

$$[\wedge^r V \otimes \wedge^r V^*]^{\text{hg}} = [\wedge^r V \otimes \wedge^r V^*]^{\text{hg}} = \text{End}_{\text{hg}}(\wedge^r V) = \mathbb{C}$$

в силу леммы Шура и неприводимости $\text{sl}(V)$ -модуля $\wedge^r V$. Поэтому в случае $\text{hg} \neq \text{hg}^{ss}$

$$\dim_{\mathbb{Q}} H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r} = \dim[\wedge^{2r}(V \oplus V^*)]^{\text{hg}} = \dim \bigoplus_{i=0}^{2r} [\wedge^i V \otimes \wedge^{2r-i} V^*]^{\text{hg}} = 1.$$

Если $\mathrm{hg} = \mathrm{hg}^{ss}$, то при $1 \leq i \leq r-1$ имеем

$$\begin{aligned} [\wedge^i V \otimes \wedge^{2r-i} V^*]^{\mathrm{hg}} &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{sl}(V)}(\wedge^{2r-i} E(\omega_1), \wedge^i E(\omega_1)) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{sl}(V)}(E(\omega_{2r-i}), E(\omega_i)) = (0) \end{aligned}$$

в силу леммы Шура и неравенства $2r-i \neq i$. В случае $i=0$ имеем равенства

$$\dim[\wedge^i V \otimes \wedge^{2r-i} V^*]^{\mathrm{hg}} = \dim[\wedge^q V^*]^{\mathrm{sl}(V)} = 1.$$

Аналогично при $i=2r$ получается равенство

$$\dim[\wedge^i V \otimes \wedge^{2r-i} V^*]^{\mathrm{hg}} = 1.$$

Наконец, если $i=r$, то

$$\dim[\wedge^i V \otimes \wedge^{2r-i} V^*]^{\mathrm{hg}} = \dim \mathrm{End}_{\mathrm{sl}(V)}(\wedge^r V) = 1$$

в силу леммы Шура и неприводимости $\mathrm{sl}(V)$ -модуля $\wedge^r V = E(\omega_r)$. Следовательно, $\dim_{\mathbb{Q}} H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r} = 3$. Теорема 1.1 доказана.

§ 3. Об арифметике абелева многообразия над полем $\mathbb{Q}$

3.1. Предположим, что абелево многообразие J над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел удовлетворяет условиям теоремы 1.2. Обозначим через G_{V_l} алгебраическую оболочку компактной l -адической группы Ли $\mathrm{Im}(\rho_l)$. Хорошо известно, что G_{V_l} совпадает с замыканием $\mathrm{Im}(\rho_l)$ в топологии Зариского группы $\mathrm{GL}(V_l)$. По условию J обладает хорошими редукциями всюду, кроме точки v с полем вычетов характеристики p .

Пусть $\mathbb{C}_p = \widehat{\mathbb{Q}_p}$ – пополнение алгебраического замыкания поля $\mathbb{Q}_p$. Согласно Тейту и Рейно существует каноническое разложение Ходжа–Тейта

$$V_{\mathbb{C}_p} = V_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p = V_{\mathbb{C}_p}(0) \oplus V_{\mathbb{C}_p}(1),$$

причем $\dim V_{\mathbb{C}_p}(0) = \dim V_{\mathbb{C}_p}(1)$ [6, п. 4.3]. Определим морфизм алгебраических $\mathbb{C}_p$ -групп

$$h_{V_p}: \mathrm{Gm}_{\mathbb{C}_p} \rightarrow \mathrm{GL}(V_{\mathbb{C}_p})$$

формулой

$$h_{V_p}(c)(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in V_{\mathbb{C}_p}(0), \\ cx, & \text{если } x \in V_{\mathbb{C}_p}(1). \end{cases}$$

3.2. ЛЕММА. Пусть $N \subset G_{V_p}^0$ – нормальная алгебраическая подгруппа, для которой $\mathrm{Im}(h_{V_p}) \subset N(\mathbb{C}_p)$. Тогда $N = G_{V_p}^0 = G_{V_p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через H_{V_p} алгебраическую оболочку компактной группы Ли $\rho_p(I(\bar{v})) \subset \mathbb{GL}(V_p)$. По теореме Сена группа $H_{V_p}^0$ является наименьшей алгебраической $\mathbb{Q}_p$ -подгруппой в $\mathbb{GL}(V_p)$, удовлетворяющей условию $\text{Im}(h_{V_p}) \subset H_{V_p}^0(\mathbb{C}_p)$ (см. [20], [22, п. 1.4, теорема 2]). Следовательно, $H_{V_p}^0 \subset N$. В силу условия 1.2, 1) $H_{V_p} = H_{V_p}^0$, поэтому

$$\rho_p(I(\bar{v})) \subset H_{V_p}(\mathbb{Q}_p) \subset N(\mathbb{Q}_p).$$

Очевидно, $N(\mathbb{Q}_p) \cap \text{Im}(\rho_p)$ – нормальная подгруппа Ли в p -адической группе Ли $\text{Im}(\rho_p)$. Кроме того, $N(\mathbb{Q}_p) \cap \text{Im}(\rho_p)$ – замкнутая подгруппа в группе Ли $\text{Im}(\rho_p)$ [1, гл. 3, § 1, предложение 5].

Пусть L – поле, полученное присоединением к полю $\mathbb{Q}$ координат всех точек из множества $\bigcup_{n=1}^{\infty} J(\bar{\mathbb{Q}})_{p^n}$. Ясно, что $\text{Im}(\rho_p) = \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$. По теории Галуа

$$\text{Im}(\rho_p)/(N(\mathbb{Q}_p) \cap \text{Im}(\rho_p)) = \text{Gal}(M/\mathbb{Q}),$$

где $M \subset L$ – некоторое нормальное подрасширение. Поскольку $\rho_p(I(\bar{v})) \subset N(\mathbb{Q}_p) \cap \text{Im}(\rho_p)$, то $I(\bar{v}) \subset \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/M)$ и, следовательно, расширение $M/\mathbb{Q}$ неразветвлено во всех точках $w \mid p$.

Напомним, что J имеет хорошие редукции во всех неархимедовых точках поля $\mathbb{Q}$, простых с (p) . В силу критерия Нерона–Огга–Шафаревича поле L неразветвлено в точках, простых с (p) [23]. Поэтому расширение $M/\mathbb{Q}$ неразветвлено всюду и в силу классической теоремы Минковского $M = \mathbb{Q}$. Следовательно, $N(\mathbb{Q}_p) \cap \text{Im}(\rho_p) = \text{Im}(\rho_p)$, $\text{Im}(\rho_p) \subset N(\mathbb{Q}_p)$, и поэтому $N = G_{V_p}^0 = G_{V_p}$. Лемма доказана.

3.3. В силу результатов Фалтингса [8]

$$\text{End}(J) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p = \text{End}_{\text{Im}(\rho_p)}(V_p) = \text{End}_{G_{V_p}}(V_p),$$

поэтому из условий 1.2, 2)–1.2, 4) и леммы Шура следует, что

$$V_p = U_1 \oplus \cdots \oplus U_e$$

(если J – абелево многообразие 1-го типа по классификации Альберта) или

$$V_p = (U_1 \oplus U_1) \oplus \cdots \oplus (U_e \oplus U_e)$$

(если J – абелево многообразие 2-го или 3-го типа по классификации Альберта) [18, § 21], где U_j ($j = 1, \dots, e$) – попарно неизоморфные абсолютно неприводимые G_{V_p} -модули, $\dim U_j$ не зависит от j .

В силу условия 1.2, 4) простое число p полностью распадается во вполне вещественном поле K , поэтому существует каноническое разложение Ходжа–Тейта

$$U_{j\mathbb{C}_p} = U_j \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p = U_{j\mathbb{C}_p}(0) \oplus U_{j\mathbb{C}_p}(1), \quad (3.3.1)$$

причем $\dim U_{j\mathbb{C}_p}(0) = \dim U_{j\mathbb{C}_p}(1)$ [6, п. 4.3].

Обозначим через $\mathrm{pr}_j: G_{V_p}^0 \rightarrow \mathrm{GL}(U_j)$ канонический морфизм алгебраических $\mathbb{Q}_p$ -групп. Разложение (3.3.1) определяет действие $\mathrm{Gm}_{\mathbb{C}_p}$ на $U_{j\mathbb{C}_p}$ с весами 0 и 1. Легко видеть, что это действие определяется морфизмом $\mathrm{pr}_j h_{V_p}$.

Пусть $N_j \subset \mathrm{pr}_j(G_{V_p}^0)$ – нормальная алгебраическая $\mathbb{Q}_p$ -подгруппа, причем $\mathrm{Im}(\mathrm{pr}_j h_{V_p}) \subset N_j(\mathbb{C}_p)$. Тогда $\mathrm{pr}_j^{-1}(N_j)$ – нормальная алгебраическая $\mathbb{Q}_p$ -подгруппа в $G_{V_p}^0$,

$$\mathrm{pr}_j^{-1}(N_j)(\mathbb{C}_p) \supset \mathrm{Im}(h_{V_p}),$$

поэтому в силу леммы 3.2

$$\mathrm{pr}_j^{-1}(N_j) = G_{V_p}^0$$

и, следовательно, $N_j = \mathrm{pr}_j(G_{V_p}^0)$.

Значит, тройка $(U_j, \mathbb{C}_p, \mathrm{pr}_j h_{V_p})$ и группа $M = \mathrm{pr}_j(G_{V_p}^0)$ удовлетворяют условиям а), b), c), i), ii), iii) в [22, п. 3.2], представление U_j абсолютно неприводимо. Поэтому группа $[\mathrm{pr}_j(G_{V_p}^0)]^{ss}$ получается из некоторой абсолютно простой группы типа A_n, B_n, C_n, D_n над некоторым конечным расширением F поля $\mathbb{Q}_p$ ограничением по Вейлю поля скаляров от F до $\mathbb{Q}_p$,

$$U_{j\mathbb{C}_p} = \bigotimes_{j=1}^{[F:\mathbb{Q}_p]} E(\omega_{i_j}^{(j)}),$$

где $E(\omega_{i_j}^{(j)})$ – неприводимый $[\mathrm{pr}_j(G_{V_p}^0)]^{ss} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p$ -модуль, старший вес которого $\omega_{i_j}^{(j)}$ является микровесом, $\dim E(\omega_{i_j}^{(j)})$ не зависит от j [22, с. 184].

Из условия 1.2, 5) следует, что $\mathrm{Lie}[\mathrm{pr}_j(G_{V_p}^0)]^{ss} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p$ является *простой* алгеброй Ли типа A_n, B_n, C_n, D_n (это получается из рассуждений, аналогичных доказательству теоремы 1.1), причем

$$\mathrm{Lie}[\mathrm{pr}_j(G_{V_p}^0)]^{ss} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}(U_{j\mathbb{C}_p}) \quad (3.3.2)$$

(если J – абелево многообразие 1-го или 2-го типа по классификации Альберта) или

$$\mathrm{Lie}[\mathrm{pr}_j(G_{V_p}^0)]^{ss} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p \xrightarrow{\sim} \mathrm{so}(U_{j\mathbb{C}_p}), \quad (3.3.3)$$

$\dim U_j \neq 4$ (если J – абелево многообразие 3-го типа по классификации Альберта). Поскольку $U_1, \dots, U_e$ – попарно неизоморфные $\mathrm{Lie}[G_{V_p}^0]^{ss}$ -модули, то в ситуации (3.3.2) имеем

$$\mathrm{Lie}[G_{V_p}^0]^{ss} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p \xrightarrow{\sim} \prod_{j=1}^e \mathrm{sp}(U_{j\mathbb{C}_p}), \quad (3.3.4)$$

а в ситуации (3.3.3) имеем

$$\mathrm{Lie}[G_{V_p}^0]^{ss} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p \xrightarrow{\sim} \prod_{j=1}^e \mathrm{so}(U_{j\mathbb{C}_p}).$$

Следовательно, алгебра Ли $\text{Lie}[G_{V_p}^0]^{ss}$ является настолько большой, насколько это возможно. Поэтому из существования включения

$$\text{Lie}[G_{V_p}^0]^{ss} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p \subset \text{Lie}[\text{Hg}(J \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}_p$$

(см. [19], [2]) следует соотношение

$$\text{Lie}[G_{V_p}^0]^{ss} = \text{Lie}[\text{Hg}(J \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})(\mathbb{Q}_p)],$$

эквивалентное соотношению

$$\text{Lie Im}(\rho_p) \xrightarrow{\sim} \text{Lie}[\text{MT}(J \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})(\mathbb{Q}_p)].$$

Ясно, что для доказательства соотношения

$$\text{Lie Im}(\rho_l) \xrightarrow{\sim} \text{Lie}[\text{MT}(J \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})(\mathbb{Q}_l)]$$

достаточно воспользоваться следующим результатом.

3.4. ЛЕММА. Пусть J – некоторое абелево многообразие над числовым полем $\mathbb{k} \subset \mathbb{C}$, $[\mathbb{k} : \mathbb{Q}] < \infty$. Если хотя бы для одного простого числа p

$$\text{Lie Im}(\rho_p) \xrightarrow{\sim} \text{Lie}[\text{MT}(J \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{C})(\mathbb{Q}_p)],$$

то для любого простого числа l существует канонический изоморфизм

$$\text{Lie Im}(\rho_l) \xrightarrow{\sim} \text{Lie}[\text{MT}(J \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{C})(\mathbb{Q}_l)].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Пятацкого–Шапиро–Делиня–Борового [19], [2] существует каноническое вложение редуктивных алгебраических алгебр Ли

$$\text{Lie Im}(\rho_l) \subset \text{Lie}[\text{MT}(J \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{C})(\mathbb{Q}_l)];$$

по теореме Г. Фалтингса [8]

$$\text{End}_{\text{Lie Im}(\rho_l)} V_l = \text{End}(J \otimes_{\mathbb{k}} \bar{\mathbb{k}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_l = \text{End}_{\text{Lie}[\text{MT}(J \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{C})(\mathbb{Q}_l)]} V_l,$$

по теореме Ж.-П. Серра

$$\text{rank}(\text{Lie Im}(\rho_l)) = \text{rank}(\text{Lie Im}(\rho_p))$$

(см. [6, теорема 3.10]) и, следовательно,

$$\text{rank}(\text{Lie Im}(\rho_l)) = \text{rank Lie}[\text{MT}(J \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{C})(\mathbb{Q}_l)],$$

поэтому лемма 3.4 вытекает из следующего результата.

3.5. ЛЕММА [14, п. 5, ключевая лемма]. Пусть V – конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{k}$ характеристики нуль, g_1, g_2 – две редуцированные алгебраические подалгебры $\mathcal{L}$ в $\text{End}(V)$, обладающие следующими свойствами:

1) естественные представления g_1 и g_2 в пространстве V вполне приводимы и

$$\text{End}_{g_1}(V) = \text{End}_{g_2}(V);$$

2) g_1 является подалгеброй $\mathcal{L}$ в g_2 и $\text{rank } g_1 = \text{rank } g_2$.

Тогда $g_1 = g_2$.

3.6. Утверждения теоремы 1.2 о циклах на $J \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}} \times \cdots \times J \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}$ и на $J \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \times \cdots \times J \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ следуют из (3.3.4), из [11, теорема 5.1] и эквивалентности обычных гипотез Ходжа и Тэйта в случае, когда

$$\text{Lie Im}(\rho_l) \xrightarrow{\sim} \text{Lie}[\text{MT}(J \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})(\mathbb{Q}_l)].$$

Теорема 1.2 доказана.

§ 4. Циклы на простом $2p$ -мерном абелевом многообразии над числовым полем

4.1. ТЕОРЕМА. Пусть p – простое число, g – простая алгебра $\mathcal{L}$ над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Если g обладает неприводимым представлением E степени $2p$, причем $E^* \neq E$, то тройка (тип g , E , p) может принимать следующие значения:

$$(A_2, E(2\omega_1), 3), \quad (4.1.1)$$

$$(A_2, E(2\omega_2), 3), \quad (4.1.2)$$

$$(A_2, E(3\omega_1), 5), \quad (4.1.3)$$

$$(A_2, E(3\omega_2), 5), \quad (4.1.4)$$

$$(A_3, E(2\omega_1), 5), \quad (4.1.5)$$

$$(A_3, E(2\omega_3), 5), \quad (4.1.6)$$

$$(A_4, E(\omega_2), 5), \quad (4.1.7)$$

$$(A_4, E(\omega_3), 5), \quad (4.1.8)$$

$$(A_{2p-1}, E(\omega_1), p), \quad (4.1.9)$$

$$(A_{2p-1}, E(\omega_{2p-1}), p). \quad (4.1.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть g – простая алгебра Ли типа A_m ($m \geq 2$). Формула Г. Вейля для степени неприводимого представления алгебры Ли типа A_m имеет вид

$$\begin{aligned} \dim E(n_1\omega_1 + \dots + n_m\omega_m) &= (1 + n_1) \cdots (1 + n_m) \\ &\quad \times \left(\frac{2 + n_1 + n_2}{2} \right) \left(\frac{2 + n_2 + n_3}{2} \right) \cdots \left(\frac{2 + n_{m-1} + n_m}{2} \right) \cdots \\ &\quad \cdots \left(\frac{m - 1 + n_1 + \dots + n_{m-1}}{m - 1} \right) \left(\frac{m - 1 + n_2 + \dots + n_m}{m - 1} \right) \left(\frac{m + n_1 + \dots + n_m}{m} \right) \end{aligned}$$

(см. [1, гл. 8, §9]). Согласно [31, лемма 2]

$$2p = \dim E(n_1\omega_1 + \dots + n_m\omega_m) \geq (n_1 + \dots + n_m)(m + 1).$$

С другой стороны, p делит числитель одного из множителей в формуле Г. Вейля, поэтому $p \leq m + n_1 + \dots + n_m$. Следовательно,

$$\begin{aligned} 2(m + n_1 + \dots + n_m) &\geq (n_1 + \dots + n_m)(m + 1), \\ n_1 + \dots + n_m &\leq 2m/(m - 1) = 2 + 2/(m - 1). \end{aligned}$$

Если $m = 2$, то из соотношения $E^* \neq E$ следует, что $n_1 \neq n_2$ (см. [1, гл. 8, §13, п. 1]), $n_1 + n_2 \leq 4$,

$$\begin{aligned} \dim E(\omega_1) &= 3, \quad \dim E(\omega_2) = 3, \\ \dim E(2\omega_1) &= 2 \cdot 3 \quad (\text{вариант (4.1.1)}), \\ \dim E(2\omega_2) &= 2 \cdot 3 \quad (\text{вариант (4.1.2)}), \\ \dim E(3\omega_1) &= 2 \cdot 5 \quad (\text{вариант (4.1.3)}), \\ \dim E(3\omega_2) &= 2 \cdot 5 \quad (\text{вариант (4.1.4)}), \\ \dim E(2\omega_1 + \omega_2) &= \dim E(\omega_1 + 2\omega_2) = 3 \cdot 5, \\ \dim E(4\omega_1) &= \dim E(4\omega_2) = 3 \cdot 5, \\ \dim E(3\omega_1 + \omega_2) &= \dim E(\omega_1 + 3\omega_2) = 2^3 \cdot 3. \end{aligned}$$

Если $m = 3$, то из соотношения $E^* \neq E$ следует, что $n_1 \neq n_3$ (см. [1, гл. 8, §13, п. 1]), $n_1 + n_2 + n_3 \leq 3$,

$$\begin{aligned} \dim E(\omega_1) &= \dim E(\omega_3) = 2^2 \quad (\text{варианты (4.1.9) и (4.1.10) в случае } p = 2), \\ \dim E(2\omega_1) &= \dim E(2\omega_3) = 2 \cdot 5 \quad (\text{варианты (4.1.5) и (4.1.6)}), \\ \dim E(\omega_1 + \omega_2) &= \dim E(\omega_2 + \omega_3) = 2^2 \cdot 5, \\ \dim E(3\omega_1) &= \dim E(3\omega_3) = 2^2 \cdot 5, \\ \dim E(2\omega_1 + \omega_2) &= \dim E(\omega_2 + 2\omega_3) = 3^2 \cdot 5, \\ \dim E(\omega_1 + 2\omega_2) &= \dim E(2\omega_2 + \omega_3) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5, \\ \dim E(2\omega_1 + \omega_3) &= \dim E(\omega_1 + 2\omega_3) = 2^2 \cdot 3^2. \end{aligned}$$

Если $m \geq 4$, то $n_1 + \dots + n_m \leq 2$, поэтому $p \leq m + n_1 + \dots + n_m \leq m + 2$. Предположим, что $n_1 + \dots + n_m = 1$. Тогда $E = E(\omega_i)$ для некоторого i . Из соотношения $E^* \neq E$ следует, что $i \neq (m+1)/2$ (см. [1, гл. 8, табл. 1]). Если $i = 1$ или $i = m$, то

$$2p = \dim E(\omega_i) = m + 1, \quad m = 2p - 1 \quad (\text{варианты (4.1.9) и (4.1.10)}).$$

Если $i \neq 1$ и $i \neq m$, то

$$2p = \dim E(\omega_i) = \binom{m+1}{i} \geq \binom{m+1}{2} = m(m+1)/2,$$

поэтому

$$m + 2 \geq p \geq m(m+1)/4;$$

легкие вычисления показывают, что эти неравенства выполняются лишь при $m = 4$, $p = 5$, $i \in \{2, 3\}$ (варианты (4.1.7) и (4.1.8)). Предположим, наконец, что $n_1 + \dots + n_m = 2$. Этот вариант разобран в [31, § 1] и не дает ничего нового.

Пусть g – алгебра Ли типа A_1, B_m ($m \geq 2$), C_m ($m \geq 2$), G_2, F_4, E_7, E_8 . В этом случае любое неприводимое представление E алгебры g является ортогональным или симплектическим [1, гл. 8, § 13; гл. 6, § 4], поэтому $E^* = E$, что исключено.

Пусть g – алгебра Ли типа D_m ($m \geq 4$). Вычисления в [33, п. 2.8] показывают, что g обладает единственным неприводимым представлением E степени $2p$ в случае, когда $p = m$, $E = E(\omega_1)$; это представление ортогональное и, следовательно, $E^* = E$, что исключено.

Пусть g – алгебра Ли типа E_6 . Вычисления в [33, п. 2.11] показывают, что g не имеет неприводимых представлений степени $2p$. Теорема доказана.

4.2. Предположим, что J удовлетворяет условиям теоремы 1.3. Если $J \otimes_{\mathbb{K}} \bar{\mathbb{K}}$ – абелево многообразие 1-го типа по классификации Альберта, то $K = \text{End}^0(J \otimes_{\mathbb{K}} \bar{\mathbb{K}})$ – вполне вещественное поле степени e над $\mathbb{Q}$, $e \mid 2p$. Если $e = 1$ и $p \neq 2$, $p \neq 5$, то

$$\text{Lie Im}(\rho_l) \xrightarrow{\sim} \text{Lie}[\text{MT}(J \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{C})(\mathbb{Q}_l)]$$

(см. [33, теорема 2]). Если $p = 2$, то $[\text{Lie Im}(\rho_l)]^{ss} \otimes \bar{\mathbb{Q}}_l$ имеет тип C_4 или $A_1 \times A_1 \times A_1$; если $p = 5$, то $[\text{Lie Im}(\rho_l)]^{ss} \otimes \bar{\mathbb{Q}}_l$ имеет тип C_{10} или A_5 , причем в каждом из этих случаев $\mathbb{Q}_l$ -пространство $H_{\text{ét}}^{2r}(J \otimes_{\mathbb{K}} \bar{\mathbb{K}}, \mathbb{Q}_l(r))^{\text{Gal}(\bar{\mathbb{K}}/\mathbb{K})}$ порождается классами пересечений дивизоров (см. доказательство леммы 2.6).

Если $e = 2$, $p \geq 3$, то для J верна гипотеза Мамфорда–Тэйта, причем $[\text{Lie Im}(\rho_l)]^{ss} \otimes \mathbb{C}_l$ имеет тип $C_p \times C_p$ [6, пп. 8.4, 8.5]. Если $p = 2$, то для простого числа l , распадающегося в поле K , имеем разложение $V_l = U_1 \oplus U_2$ в прямую сумму неизоморфных абсолютно неприводимых симплектических $[\text{Lie Im}(\rho_l)]^{ss}$ -модулей степени 4.

Пусть $\text{pr}_j: G_{V_l}^0 \rightarrow \text{GL}(U_j)$ – канонический морфизм $\mathbb{Q}_l$ -групп; ясно, что $[\text{Lie pr}_j(G_{V_l}^0)]^{ss} \otimes \mathbb{C}_l$ имеет тип C_2 или A_1 (последний вариант исключается, так как тройка $(U_j, \mathbb{C}_l, \text{pr}_j h_{V_l})$ и группа $M = \text{pr}_j(G_{V_l}^0)$ удовлетворяет условиям а),

b), c), i), ii), iii) из [22, п. 3.2], и поэтому $U_{j\mathbb{C}_l}$ задается с помощью микровесов, что автоматически исключает алгебру типа A_1 [22, п. 3.2, предложение 7].

Если $e = p$, то для простого числа l , распадающегося в поле K , имеем разложение $V_l = U_1 \oplus \cdots \oplus U_p$ в прямую сумму неизоморфных абсолютно неприводимых симплектических $[\mathrm{Lie} \mathrm{Im}(\rho_l)]^{ss}$ -модулей степени 4; алгебра Ли типа A_1 исключается, как в предыдущем случае, поэтому $[\mathrm{Lie} \mathrm{pr}_j(G_{V_l}^0)]^{ss} \otimes \mathbb{C}_l$ имеет тип C_2 и, следовательно, $[\mathrm{Lie} G_{V_l}^0]^{ss} \otimes \mathbb{C}_l$ имеет тип $C_2 \times \cdots \times C_2 = C_2^p$, для J верна гипотеза Мамфорда–Тэйта и гипотеза Тэйта о циклах.

Если $e = 2p$, то $V_l = U_1 \oplus \cdots \oplus U_{2p}$ – прямая сумма неизоморфных абсолютно неприводимых симплектических $[\mathrm{Lie} \mathrm{Im}(\rho_l)]^{ss}$ -модулей степени 2, поэтому $[\mathrm{Lie} G_{V_l}^0]^{ss} \otimes \mathbb{C}_l$ имеет тип $A_1 \times \cdots \times A_1 = A_1^{2p}$ и для J выполнены все утверждения теоремы.

Предположим, что $J \otimes_{\mathbb{K}} \bar{\mathbb{K}}$ – абелево многообразие 2-го типа по классификации Альберта. Положим

$$K = \mathrm{Cent}(\mathrm{End}^0(J \otimes_{\mathbb{K}} \bar{\mathbb{K}})), \quad e = [K : \mathbb{Q}].$$

Хорошо известно, что $e \mid p$ [18, § 21]. Если $e = 1$, то для J верна гипотеза Мамфорда–Тэйта, причем $[\mathrm{Lie} \mathrm{Im}(\rho_l)]^{ss} \otimes \mathbb{C}_l$ имеет тип C_p [6, пп. 8.4, 8.5]. Если $e = p$, то можно считать, что $V_l = (U_1 \oplus U_1) \oplus \cdots \oplus (U_p \oplus U_p)$ – прямая сумма неприводимых симплектических $[\mathrm{Lie} \mathrm{Im}(\rho_l)]^{ss}$ -модулей степени 2, $U_1, \dots, U_p$ неизоморфны, поэтому $[\mathrm{Lie} \mathrm{Im}(\rho_l)]^{ss} \otimes \mathbb{C}_l$ имеет тип $A_1 \times \cdots \times A_1 = A_1^p$ и для J выполнены все утверждения теоремы.

Предположим, что $J \otimes_{\mathbb{K}} \bar{\mathbb{K}}$ – абелево многообразие 3-го типа по классификации Альберта. Положим

$$K = \mathrm{Cent}(\mathrm{End}^0(J \otimes_{\mathbb{K}} \bar{\mathbb{K}})), \quad e = [K : \mathbb{Q}].$$

Хорошо известно, что $e \mid p$ [18, § 21]. Пусть $e = 1$. Выберем простое число l так, чтобы

$$\mathrm{End}^0(J \otimes_{\mathbb{K}} \bar{\mathbb{K}}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_l = M_2(\mathbb{Q}_l).$$

В этом случае $V_l \xrightarrow{\sim} U_1 \oplus U_1$, где U_1 – абсолютно неприводимый ортогональный $[G_{V_l}^0]^{ss}$ -модуль степени $2p$. Если $p = 2$, то $[\mathrm{Lie} \mathrm{Im}(\rho_l)]^{ss} \otimes \mathbb{C}_l$ имеет тип D_2 . Если $p \geq 3$, то $[\mathrm{Lie} \mathrm{Im}(\rho_l)]^{ss} \otimes \mathbb{C}_l$ является простой алгеброй Ли, причем существует разложение Ходжа–Тэйта

$$U_{1\mathbb{C}_l} = U_1 \otimes_{\mathbb{Q}_l} \mathbb{C}_l = U_{1\mathbb{C}_l}(0) \oplus U_{1\mathbb{C}_l}(1)$$

и, следовательно, тройка $(U_1, \mathbb{C}_l, \mathrm{pr}_1 h_{V_l})$ и группа $M = \mathrm{pr}_1(G_{V_l}^0)$ удовлетворяют условиям a), b), c), i), ii), iii) из [22, п. 3.2]; поэтому старший вес $[\mathrm{Lie} \mathrm{Im}(\rho_l)]^{ss} \otimes \mathbb{C}_l$ -модуля $U_{1\mathbb{C}_l}$ является микровесом [22, п. 3.2, предложение 7]; значит, $[\mathrm{Lie} \mathrm{Im}(\rho_l)]^{ss} \otimes \mathbb{C}_l$ – алгебра Ли типа D_p [33, теорема 2.2]. Таким образом, тип алгебры Ли $[\mathrm{Lie} \mathrm{Im}(\rho_l)]^{ss} \otimes \mathbb{C}_l$ однозначно определяется числом p , и, следовательно, для J верна гипотеза Мамфорда–Тэйта. Из соотношения (2.8.2) следует,

что для $r \neq p$ $\mathbb{Q}_l$ -пространство $H_{\text{ét}}^{2r}(J \otimes_{\mathbb{k}} \bar{\mathbb{k}}, \mathbb{Q}_l(r))^{\text{Gal}(\bar{\mathbb{k}}/\mathbb{k})}$ порождается классами пересечений дивизоров.

Предположим, наконец, что $e = p$. В этом случае из соотношений

$$\begin{aligned} M_2(\bar{\mathbb{Q}}_l) \times \cdots \times M_2(\bar{\mathbb{Q}}_l) &= M_2(\bar{\mathbb{Q}}_l)^p \\ &\xrightarrow{\sim} \text{End}^0(J \otimes_{\mathbb{k}} \bar{\mathbb{k}}) \otimes_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}_l \xrightarrow{\sim} \text{End}_{[\text{Lie Im}(\rho_l)]^{ss} \otimes \bar{\mathbb{Q}}_l} V_l \otimes \bar{\mathbb{Q}}_l, \\ \text{rank NS}(J \otimes_{\mathbb{k}} \bar{\mathbb{k}}) &= p = \dim_{\bar{\mathbb{Q}}_l} [\wedge^2 V_l \otimes \bar{\mathbb{Q}}_l]^{[\text{Lie Im}(\rho_l)]^{ss} \otimes \bar{\mathbb{Q}}_l} \end{aligned}$$

и леммы Шура следует существование разложения

$$V_l \otimes \bar{\mathbb{Q}}_l = (U_1 \oplus U_1) \oplus \cdots \oplus (U_p \oplus U_p),$$

где U_j – неприводимый ортогональный $[\text{Lie Im}(\rho_l)]^{ss} \otimes \bar{\mathbb{Q}}_l$ -модуль степени 2, что невозможно. Теорема 1.3 доказана.

4.3. Предположим, что J удовлетворяет условиям теоремы 1.4. Мы можем считать, что $K \subset \mathbb{k} \subset \bar{\mathbb{k}}$. Рассмотрим каноническое разложение $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}_l[G_{V_l}]$ -модулей

$$V_l \otimes_{\mathbb{Q}_l} \mathbb{C}_l = X \oplus Y,$$

где

$$\begin{aligned} X &= \{v \in V_l \otimes_{\mathbb{Q}_l} \mathbb{C}_l \mid \forall e \in K \quad e \cdot v = \sigma(e)v\}, \\ Y &= \{v \in V_l \otimes_{\mathbb{Q}_l} \mathbb{C}_l \mid \forall e \in K \quad e \cdot v = \tau(e)v\}, \\ \dim X &= \dim Y = \dim J, \end{aligned}$$

X, Y – неприводимые $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}_l[G_{V_l}]$ -модули [5, п. 3.1, шаг 1, лемма 3.1.1], поэтому если n_{σ} и n_{τ} – взаимно простые целые числа, то по теореме Серра [21, теорема 3] канонический морфизм алгебраических $\mathbb{C}_l$ -групп $[G_{V_l} \otimes \mathbb{C}_l]^{ss} \rightarrow \mathbb{SL}(X)$ сюръективен [5, п. 3.1, шаг 2]. В частности, в этом случае $\text{Lie}[G_{V_l} \otimes \mathbb{C}_l]^{ss}$ имеет тип A_{q-1} , где $q = \dim J$. Поскольку $n_{\sigma} \neq n_{\tau}$, то

$$\dim_{\mathbb{Q}_l} \text{Cent}(G_{V_l}) \geq 2 \tag{4.3.1}$$

(см. [5, п. 3.1, шаг 3]) и, следовательно,

$$\text{Lie } G_{V_l} \xrightarrow{\sim} \text{Lie}[\text{MT}(J \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{C})(\mathbb{Q}_l)].$$

4.4. Мы будем предполагать в дальнейшем, что $\dim_{\mathbb{k}} J = 2p$, где p – простое число, $p \geq 17$. Нашей основной целью является проверка того, что в этом случае $\text{Lie}[G_{V_l} \otimes \mathbb{C}_l]^{ss}$ имеет тип A_{2p-1} при любых значениях n_{σ} и n_{τ} .

4.5. Пусть v – неархимедова точка поля $\mathbb{k}$, в которой J имеет хорошую редукцию, причем простое число l распадается в поле $K = \text{End}^0(J \otimes_{\mathbb{k}} \bar{\mathbb{k}})$ и не совпадает с характеристикой p_v поля вычетов $\mathbb{k}(v)$. Обозначим через $\bar{v}$ какое-нибудь продолжение нормирования v на поле $\bar{\mathbb{k}}$. Пусть $F_{\bar{v}} \in \text{Im}(\rho_l)$ – элемент Фробениуса, $t_v = \text{Tr}(F_{\bar{v}} | V_l)$ – след Фробениуса, Γ_v – мультипликативная подгруппа в $\bar{\mathbb{Q}}^\times$, порожденная собственными числами линейного оператора $F_{\bar{v}} | V_l$, T_v – тор Фробениуса [6, п. (3.в)].

Переходя (в случае необходимости) к конечному алгебраическому расширению поля $\mathbb{k}$, мы можем считать, что для некоторого множества неархимедовых точек v поля $\mathbb{k}$ плотности 1 выполнены следующие дополнительные условия:

- 1) для некоторого фиксированного целого числа $n \geq 2$ $l^n > (2 \dim J)^2$ и все точки порядка l^n из $J(\bar{\mathbb{k}})$ принадлежат $J(\mathbb{k})$;
- 2) $p_v > (2 \dim J)^2$;
- 3) $\text{Norm}_{\mathbb{k}/\mathbb{Q}}(v) = p_v$;
- 4) $t_v = \text{Tr}(F_{\bar{v}} | V_l)$ не делится на p_v ;
- 5) Γ_v не имеет кручения, $F_{\bar{v}} \in T_v(\mathbb{Q}_{p_v}^-)$, группа G_{V_l} связна;
- 6) тор Фробениуса T_v является максимальным тором в группе G_{V_l} и, следовательно,

$$\text{rank } \Gamma_v = \dim T_v = \text{rank } G_{V_l} = \text{rank } \text{Im}(\rho_l)$$

(см. [6, предложения 3.6, 5.2.1, лемма 2.1, следствие 3.8]).

4.6. Пусть S_{V_l} – связная компонента единицы группы $G_{V_l} \cap \text{SL}(V_l)$. Из теоремы Ф. А. Богомолова [6, п. 1.2.2] и условия 4.5, 5) следует, что

$$G_{V_l} = \mathbb{G}_m \cdot S_{V_l}. \quad (4.6.1)$$

Мы можем считать, что $\text{End}(J \otimes_{\mathbb{k}} \bar{\mathbb{k}}) = \text{End}(J)$.

По теореме Г. Фалтингса алгебра Ли $\text{Lie } S_{V_l}$ редуктивна,

$$\text{End}_{S_{V_l}}(V_l) = \text{End}_{G_{V_l}}(V_l) = \text{End}(J) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_l, \quad (4.6.2)$$

$$1 = \text{rank } \text{NS}(J) = \dim_{\mathbb{Q}_l} [\wedge^2 V_l]^{S_{V_l}} \quad (4.6.3)$$

(см. [8]), поэтому из соотношения $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_l = \mathbb{Q}_l \times \mathbb{Q}_l$, леммы Шура и соотношений (4.6.2), (4.6.3) следует, что $V_l = U_1 \oplus U_2$ – прямая сумма неизоморфных абсолютно неприводимых S_{V_l} -модулей степени $2p$, причем существует изоморфизм S_{V_l} -модулей $U_2 \xrightarrow{\sim} U_1^*$. В итоге

$$V_l = U_1 \oplus U_1^*,$$

U_1 – точный S_{V_l} -модуль,

$$\dim_{\mathbb{Q}_l} \text{Cent}(\text{Lie } S_{V_l}) \leq 1. \quad (4.6.4)$$

Очевидно,

$$\text{Lie } S_{V_l} = \text{Cent}(\text{Lie } S_{V_l}) \times [\text{Lie } S_{V_l}]^{ss}.$$

4.7. Предположим, что алгебра Ли $[\mathrm{Lie} S_{V_l}]^{ss} \otimes \mathbb{C}_l$ проста. Из неравенства $p \geq 17$, теоремы 4.1, [33, теорема 2.2], [31, теорема 2] следует, что тройка (тип $[\mathrm{Lie} S_{V_l}]^{ss} \otimes \mathbb{C}_l$, $U_1 \otimes \mathbb{C}_l$, p) может принимать следующие значения:

$$(A_{2p-1}, E(\omega_1), p), \quad (A_{2p-1}, E(\omega_{2p-1}), p), \quad (C_p, E(\omega_1), p), \\ (D_p, E(\omega_1), p), \quad (A_1, E((2p-1)\omega_1), p).$$

4.8. Если $[\mathrm{Lie} S_{V_l}]^{ss} \otimes \mathbb{C}_l$ – алгебра Ли типа A_{2p-1} , то из теоремы Пятацкого–Шапиро–Делиня–Борового о существовании включения

$$\mathrm{Lie} S_{V_l} \subset \mathrm{Lie}[\mathrm{Hg}(J \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{C})(\mathbb{Q}_l)]$$

(см. [19], [2]) и теоремы 1.1 следует существование канонического изоморфизма полупростых алгебр Ли

$$[\mathrm{Lie} \mathrm{Im}(\rho_l)]^{ss} = [\mathrm{Lie} G_{V_l}]^{ss} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie}[\mathrm{MT}(J \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{C})(\mathbb{Q}_l)]^{ss}. \quad (4.8.1)$$

Если, кроме того, $n_\sigma \neq p$, то $n_\sigma \neq n_\tau$ и из (4.3.1) следует, что изоморфизм (4.8.1) продолжается до изоморфизма

$$\mathrm{Lie} \mathrm{Im}(\rho_l) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie}[\mathrm{MT}(J \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{C})(\mathbb{Q}_l)], \\ \dim_{\mathbb{Q}_l} \mathrm{Cent}(S_{V_l}) = 1,$$

поэтому

$$\dim_{\mathbb{Q}_l} \mathrm{Cent}[\mathrm{Hg}(J \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{C})(\mathbb{Q}_l)] = 1$$

и в силу теоремы 1.1

$$\dim_{\mathbb{Q}_l} H_{\mathrm{ét}}^{2r}(J \otimes_{\mathbb{K}} \bar{\mathbb{K}}, \mathbb{Q}_l(r))^{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{K}}/\mathbb{K})} \leq 1.$$

В этом случае все утверждения теоремы 1.4 доказаны.

4.9. Предположим, что $[\mathrm{Lie} S_{V_l}]^{ss} \otimes \mathbb{C}_l$ – алгебра Ли типа C_p или D_p . Поскольку S_{V_l} -модули U_1 и $U_1^* = U_2$ неизоморфны, $E(\omega_1)^* = E(\omega_1)$ для алгебры Ли типа C_p или D_p , то в силу соотношения (4.6.4)

$$\dim_{\mathbb{Q}_l} \mathrm{Cent}(\mathrm{Lie} S_{V_l}) = 1. \quad (4.9.1)$$

Пусть $\bar{S}$ – универсальная накрывающая $\mathbb{C}_l$ -группы $S = [S_{V_l} \otimes \mathbb{C}_l]^{ss}$,

$$f : \mathrm{Gm}_{\mathbb{C}_l} \times [\mathrm{Cent} S_{V_l} \otimes \mathbb{C}_l]^0 \times \bar{S} \rightarrow \mathrm{Gm}_{\mathbb{C}_l} \cdot [\mathrm{Cent} S_{V_l} \otimes \mathbb{C}_l]^0 \cdot S \\ = \mathrm{Gm}_{\mathbb{C}_l} \cdot (S_{V_l} \otimes \mathbb{C}_l) = G_{V_l} \otimes \mathbb{C}_l$$

– каноническая изогения. Рассмотрим канонические проекции

$$\mathrm{pr}_1 : \mathrm{Gm}_{\mathbb{C}_l} \times [\mathrm{Cent} S_{V_l} \otimes \mathbb{C}_l]^0 \times \bar{S} \rightarrow \mathrm{Gm}_{\mathbb{C}_l} \times [\mathrm{Cent} S_{V_l} \otimes \mathbb{C}_l]^0, \\ \mathrm{pr}_2 : \mathrm{Gm}_{\mathbb{C}_l} \times [\mathrm{Cent} S_{V_l} \otimes \mathbb{C}_l]^0 \times \bar{S} \rightarrow \bar{S}.$$

В силу условия 4.5, 6) тор Фробениуса T_v является максимальным тором в группе G_{V_l} . Учитывая соотношение (4.9.1) и действуя по алгоритму, изложенному в [33, п. 3.9], мы получим, что множество Δ собственных чисел оператора $F_{\bar{v}}$ имеет вид $\Phi \cdot \Psi$, где $\Phi = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, $\Psi = \{\beta_1^{\pm 1}, \dots, \beta_p^{\pm 1}\}$, причем числа $\lambda_1, \lambda_2, \beta_1, \dots, \beta_p$ мультипликативно независимы. Действуя без каких-либо изменений по алгоритму, изложенному в [33, пп. 3.10–3.19], мы получим противоречие с предположением, что $[\mathrm{Lie} S_{V_l}]^{ss} \otimes \mathbb{C}_l$ имеет тип C_p или D_p .

4.10. Предположим, что $[\text{Lie } S_{V_l}]^{ss} \otimes \mathbb{C}_l$ – алгебра Ли типа A_1 . Поскольку S_{V_l} -модули U_1 и $U_1^* = U_2$ неизоморфны, $E((2p-1)\omega_1)^* = E((2p-1)\omega_1)$ для алгебры Ли типа A_1 , то в этой новой ситуации имеется соотношение (4.9.1). Рассмотрим каноническую изогению

$$\begin{aligned} f: \mathbb{G}_{m_{\mathbb{C}_l}} \times [\text{Cent } S_{V_l} \otimes \mathbb{C}_l]^0 \times \text{SL}_2(\mathbb{C}_l) \\ \rightarrow \mathbb{G}_{m_{\mathbb{C}_l}} \cdot [\text{Cent } S_{V_l} \otimes \mathbb{C}_l]^0 \cdot [S_{V_l} \otimes \mathbb{C}_l]^{ss} = \mathbb{G}_{m_{\mathbb{C}_l}} \cdot (S_{V_l} \otimes \mathbb{C}_l) = G_{V_l} \otimes \mathbb{C}_l. \end{aligned}$$

Действуя по алгоритму, изложенному в п. 4.9 и в [33, п. 3.9], мы получим, что множество Δ собственных чисел оператора $F_{\overline{v}}$ имеет вид $\Phi \cdot \Psi$, где $\Phi = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, $\Psi = \{\beta_1^{\pm 1}, \beta_1^{\pm 3}, \dots, \beta_1^{\pm(2p-1)}\}$, причем числа $\lambda_1, \lambda_2, \beta_1$ мультипликативно независимы.

Пусть $\gamma \in \Delta \cdot \Delta$. Определим отображение $T_\gamma: \Delta \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}^\times$ формулой

$$T_\gamma(\lambda\beta) = \gamma \cdot (\lambda\beta)^{-1}$$

для $\lambda \in \Phi, \beta \in \Psi$.

4.11. ЛЕММА. *Имеем*

$$\gamma \in \{\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_1\lambda_2\beta_1^{2p}, \lambda_1\lambda_2\beta_1^{-2p}\} \Leftrightarrow \text{Card}(T_\gamma(\Delta) \cap \Delta) = 2p.$$

Кроме того,

$$\gamma = \lambda_1\lambda_2 \Leftrightarrow \text{Card}(T_\gamma(\Delta) \cap \Delta) = 4p.$$

Это легко следует из мультипликативной независимости чисел $\lambda_1, \lambda_2, \beta_1$.

4.12. ЛЕММА. *Множество $\{\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_1\lambda_2\beta_1^{2p}, \lambda_1\lambda_2\beta_1^{-2p}\}$ является $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантным, $\lambda_1\lambda_2 \in \mathbb{Q}$.*

Это следует из леммы 4.11, так как для любого $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ и любого $\gamma \in \Delta \cdot \Delta$

$$\text{Card}(T_{\sigma(\gamma)}(\Delta) \cap \Delta) = \text{Card}(T_{\sigma(\gamma)}(\sigma(\Delta)) \cap \sigma(\Delta)) = \text{Card}(T_\gamma(\Delta) \cap \Delta).$$

4.13. ЛЕММА. *Для любого элемента $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ имеем $\sigma(\beta_1^2) = \beta_1^{\pm 2}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно,

$$\sigma(\lambda_1\beta_1^{\pm 1}) \in \{\lambda_1\beta_1^{\pm(2r-1)}, \lambda_2\beta_1^{\pm(2r-1)} \mid r \in \{1, 2, \dots, p\}\}.$$

Предположим, что

$$\sigma(\lambda_1\beta_1) = \lambda_i\beta_1^{\varepsilon_1(2r-1)}, \quad \sigma(\lambda_1\beta_1^{-1}) = \lambda_i\beta_1^{\varepsilon_2(2s-1)},$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{\pm 1\}$, $r, s \in \{1, 2, \dots, p\}$. Тогда

$$\sigma(\lambda_1^2) = \lambda_i^2 \cdot \beta_1^{\varepsilon_1(2r-1) + \varepsilon_2(2s-1)}, \quad \sigma(\beta_1^2) = \beta_1^{\varepsilon_1(2r-1) - \varepsilon_2(2s-1)},$$

и в силу леммы 4.12

$$\begin{aligned}\sigma(\lambda_1^2) &= \lambda_i^2, \\ \varepsilon_1(2r-1) + \varepsilon_2(2s-1) &= 0, \quad \sigma(\beta_1^2) = \beta_1^{2\varepsilon_1(2r-1)}.\end{aligned}$$

С другой стороны, $\lambda_1\beta_1^{\varepsilon_1(2p-1)} \in \Delta$, поэтому

$$\begin{aligned}\sigma(\lambda_1^2\beta_1^{2\varepsilon_1(2p-1)}) &= \sigma(\lambda_1^2) \cdot \sigma(\beta_1^2)^{\varepsilon_1(2p-1)} \\ &= \lambda_i^2 \cdot \beta_1^{2(2r-1)(2p-1)} \in \Delta^2 = \{\delta^2 \mid \delta \in \Delta\}\end{aligned}$$

и, следовательно, $2r-1=1$, $r=1$, $\sigma(\beta_1^2) = \beta_1^{2\varepsilon_1} = \beta_1^{\pm 2}$.

Предположим, что

$$\sigma(\lambda_1\beta_1) = \lambda_i\beta_1^{\varepsilon_1(2r-1)}, \quad \sigma(\lambda_1\beta_1^{-1}) = \lambda_j\beta_1^{\varepsilon_2(2s-1)},$$

где $\lambda_i \neq \lambda_j$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{\pm 1\}$, $r, s \in \{1, 2, \dots, p\}$. Тогда

$$\sigma(\lambda_1^2) = \lambda_1\lambda_2\beta_1^{\varepsilon_1(2r-1)+\varepsilon_2(2s-1)}, \quad \sigma(\beta_1^2) = \lambda_i\lambda_j^{-1}\beta_1^{\varepsilon_1(2r-1)-\varepsilon_2(2s-1)}.$$

С другой стороны, $\lambda_1\beta_1^{2p-1} \in \Delta$, поэтому

$$\begin{aligned}\sigma(\lambda_1^2\beta_1^{2(2p-1)}) &= \sigma(\lambda_1^2)\sigma(\beta_1^2)^{2p-1} \\ &= \lambda_1\lambda_2\beta_1^{\varepsilon_1(2r-1)+\varepsilon_2(2s-1)} \cdot \lambda_i^{2p-1} \cdot \lambda_j^{-2p+1} \cdot \beta_1^{(\varepsilon_1(2r-1)-\varepsilon_2(2s-1))(2p-1)} \\ &= \lambda_1\lambda_2\lambda_i^{2p-1} \cdot \lambda_j^{-2p+1} \cdot \beta_1^n \in \Delta^2\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_i^{2p-1}\lambda_j^{-2p+1} \in \{\lambda_1^2, \lambda_2^2\}.$$

Если, например, $\lambda_i = \lambda_1$, то $\lambda_j = \lambda_2$ и $\lambda_1^{2p}\lambda_2^{-2p+2} \in \{\lambda_1^2, \lambda_2^2\}$, что противоречит мультипликативной независимости чисел $\lambda_1, \lambda_2, \beta_1$. Лемма доказана.

4.14. Известно, что $\lambda_1\lambda_2 \in \mathbb{Q}$ (лемма 4.12), поэтому для любого $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ имеем в силу леммы 4.13

$$\sigma(\lambda_1\lambda_2\beta_1^{\pm 2p}) = \lambda_1\lambda_2\sigma(\beta_1^2)^{\pm p} \in \{\lambda_1\lambda_2\beta_1^{\pm 2p}\}.$$

Поэтому в силу леммы 4.12 множество $\{\lambda_1^2, \lambda_2^2\}$ является $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантным. Действуя по алгоритму, изложенному в [33, пп. 3.13–3.19] с учетом условия 4.5, 3) и мультипликативной независимости чисел $\lambda_1, \lambda_2, \beta_1$, мы получим противоречие с предположением, что $[\text{Lie } S_{V_l}]^{ss} \otimes \mathbb{C}_l$ – алгебра Ли типа A_1 .

4.15. Мы можем считать, что алгебра Ли $[\text{Lie } S_{V_l}]^{ss} \otimes \mathbb{C}_l$ не является простой. Из неравенства $p \geq 17$ следует, что тройка (тип $[\text{Lie } S_{V_l}]^{ss} \otimes \mathbb{C}_l$, $U_1 \otimes \mathbb{C}_l$, p) может принимать следующие значения:

$$\begin{aligned} & \left(A_1 \times A_1, E(\omega_1^{(1)} + (p-1)\omega_1^{(2)}), p \right), \quad \left(A_1 \times B_{(p-1)/2}, E(\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)}), p \right), \\ & \left(A_1 \times A_{p-1}, E(\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)}), p \right), \quad \left(A_1 \times A_{p-1}, E(\omega_1^{(1)} + \omega_{p-1}^{(2)}), p \right) \end{aligned}$$

(см. [31, теорема 2]).

Предположим, что $[\text{Lie } S_{V_l}]^{ss} \otimes \mathbb{C}_l$ – алгебра Ли типа $A_1 \times A_1$. Поскольку S_{V_l} -модули U_1 и $U_1^* = U_2$ неизоморфны, $E(\omega_1^{(1)} + (p-1)\omega_1^{(2)})^* = E(\omega_1^{(1)} + (p-1)\omega_1^{(2)})$ для алгебры Ли типа $A_1 \times A_1$, то в этой ситуации

$$\dim_{\mathbb{Q}_l} \text{Cent}(\text{Lie } S_{V_l}) = 1.$$

Рассмотрим каноническую изогению

$$\begin{aligned} f: \mathbb{G}m_{\mathbb{C}_l} \times [\text{Cent } S_{V_l} \otimes \mathbb{C}_l]^0 \times \text{SL}_2(\mathbb{C}_l) \times \text{SL}_2(\mathbb{C}_l) \\ \rightarrow \mathbb{G}m_{\mathbb{C}_l} \cdot [\text{Cent } S_{V_l} \otimes \mathbb{C}_l]^0 \cdot [S_{V_l} \otimes \mathbb{C}_l]^{ss} = \mathbb{G}m_{\mathbb{C}_l} \cdot (S_{V_l} \otimes \mathbb{C}_l) = G_{V_l} \otimes \mathbb{C}_l. \end{aligned}$$

Действуя по алгоритму, изложенному в п. 4.9 и в [33, п. 3.9], мы получим, что множество Δ собственных чисел оператора $F_{\bar{v}}$ имеет вид $\Phi \cdot \Psi$, где $\Phi = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, $\Psi = \{\beta_1^{\pm 1} \cdot \beta_2^{\pm r} \mid r = 0, 1, \dots, (p-1)/2\}$ (см. [1, гл. 8, § 9, п. 1, пример]), причем числа $\lambda_1, \lambda_2, \beta_1, \beta_2$ мультипликативно независимы.

Пусть $\gamma \in \Delta$. Следуя [6, п. 5.2.2], определим отображение $T_\gamma^0: \Delta \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}^\times$ формулой

$$T_\gamma^0(\lambda\beta) = \gamma^2(\lambda\beta)^{-1} \quad (4.15.1)$$

для $\lambda \in \Phi$, $\beta \in \Psi$. Очевидно, T_γ^0 отличается от T_γ , определенного в п. 4.10.

4.16. ЛЕММА. *Множество $\{\lambda_1\beta_1^{\pm 1}, \lambda_2\beta_1^{\pm 1}\}$ является $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантным.*

Достаточно проверить, что

$$\{\lambda_1\beta_1^{\pm 1}, \lambda_2\beta_1^{\pm 1}\} = \{\gamma \in \Delta \mid \text{Card}(T_\gamma^0(\Delta) \cap \Delta) = p\},$$

так как для любого $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$

$$\text{Card}(T_{\sigma(\gamma)}^0(\Delta) \cap \Delta) = \text{Card}(T_{\sigma(\gamma)}^0(\sigma(\Delta)) \cap \sigma(\Delta)) = \text{Card}(T_\gamma^0(\Delta) \cap \Delta).$$

Если, например, $\gamma = \lambda_1\beta_1$, то

$$\begin{aligned} T_\gamma^0(\lambda\beta) &= \lambda_1^2\beta_1^2(\lambda\beta)^{-1} \in \Delta \Leftrightarrow (\lambda_1^2\lambda^{-1} \in \Phi \text{ и } \beta_1^2\beta^{-1} \in \Psi) \\ &\Leftrightarrow (\lambda = \lambda_1 \text{ и } \beta \in \{\beta_1\beta_2^{\pm r} \mid r = 0, 1, 2, \dots, (p-1)/2\}), \end{aligned}$$

поэтому $\text{Card}(T_{\lambda_1\beta_1}^0(\Delta) \cap \Delta) = p$.

С другой стороны, пусть $\gamma \in \Delta$ и $\text{Card}(T_\gamma^0(\Delta) \cap \Delta) = p$. Можно считать, что $\gamma = \lambda_1\beta_1\beta_2^r$, где $r \geq 0$. Если $T_\gamma^0(\lambda\beta) \in \Delta$, то $\gamma^2(\lambda\beta)^{-1} = \lambda_1^2\beta_1^2\beta_2^{2r}\lambda^{-1}\beta^{-1} \in \Delta$, поэтому $\lambda = \lambda_1$, $\beta_1^2\beta_2^{2r}\beta^{-1} \in \Psi$ в силу мультипликативной независимости чисел $\lambda_1, \lambda_2, \beta_1, \beta_2$.

Очевидно, $\beta = \beta_1\beta_2^s$, где $s \in \{0, \pm 1, \dots, \pm(p-1)/2\}$, $2r - s \in \{0, \pm 1, \dots, \pm(p-1)/2\}$, поэтому в случае $r > 0$ имеем неравенства $s \neq -(p-1)/2$, $\text{Card}\{s \mid \beta = \beta_1\beta_2^s\} \leq p-1$ и, следовательно, $\text{Card}(T_\gamma^0(\Delta) \cap \Delta) \leq p-1$. Лемма доказана.

4.17. ЛЕММА. Число $\lambda_1\beta_1 + \lambda_1\beta_1^{-1} + \lambda_2\beta_1 + \lambda_2\beta_1^{-1} \in \mathbb{Z}$ не делится на p_v , если $p_v \gg 0$. Для любой точки w поля $\overline{\mathbb{Q}}$, лежащей над p_v , существует такой элемент $\lambda_i\beta_1^\varepsilon$ (где $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, $i \in \{1, 2\}$), что $w(\lambda_i\beta_1^\varepsilon) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательствам лемм 4.8 и 4.9 в [4]. Число $\lambda_i\beta_1^{\pm 1} \in \Delta$ является целым алгебраическим числом. В силу леммы 4.16

$$\lambda_1\beta_1 + \lambda_1\beta_1^{-1} + \lambda_2\beta_1 + \lambda_2\beta_1^{-1} = (\lambda_1 + \lambda_2)(\beta_1 + \beta_1^{-1}) \in \mathbb{Z}.$$

Если $(\lambda_1 + \lambda_2)(\beta_1 + \beta_1^{-1}) = 0$, то

$$\text{Tr}(F_{\overline{v}} \mid V_l) = \sum_{\beta \in B} (\lambda_1 + \lambda_2)(\beta_1 + \beta_1^{-1})\beta = 0,$$

где $B = \{1, \beta_2^{\pm 1}, \beta_2^{\pm 2}, \dots, \beta_2^{\pm(p-1)/2}\}$, что противоречит условию 4.5, 4). Значит, $(\lambda_1 + \lambda_2)(\beta_1 + \beta_1^{-1}) \neq 0$. Согласно теореме А. Вейля [18, § 21, теорема 4] и условию 4.5, 3)

$$|(\lambda_1 + \lambda_2)(\beta_1 + \beta_1^{-1})|_\infty \leq 4\sqrt{p_v},$$

поэтому при $p_v \gg 0$ целое число $(\lambda_1 + \lambda_2)(\beta_1 + \beta_1^{-1})$ не делится на p_v .

Пусть $w \mid p_v$ и $w(\lambda_i\beta_1^{\pm 1}) > 0$ при любом $i \in \{1, 2\}$ и любом выборе чисел ± 1 . Тогда $w((\lambda_1 + \lambda_2)(\beta_1 + \beta_1^{-1})) > 0$ и, следовательно, целое число $(\lambda_1 + \lambda_2)(\beta_1 + \beta_1^{-1})$ делится на p_v , что исключено. Лемма доказана.

4.18. Пусть w – любая точка поля $\overline{\mathbb{Q}}$, лежащая над $p_v \gg 0$. Согласно лемме 4.17 можно найти $\lambda_i\beta_1^\varepsilon$ ($\varepsilon \in \{\pm 1\}$) такое, что $w(\lambda_i\beta_1^\varepsilon) = 0$. Поэтому из соотношения

$$w(\lambda_i\beta_1^\varepsilon) = \frac{1}{2}(w(\lambda_i\beta_1^\varepsilon\beta_2) + w(\lambda_i\beta_1^\varepsilon\beta_2^{-1})) = 0$$

и неравенства $w(\lambda_i\beta_1^\varepsilon\beta_2^{\pm 1}) \geq 0$ следует, что $w(\lambda_i\beta_1^\varepsilon\beta_2^{\pm 1}) = 0$. Значит, $w(\beta_2^2) = 0$ для всех $w \mid p_v$, поэтому β_2 – корень из 1 [12, лемма 1.0.5.2], что противоречит мультипликативной независимости чисел $\lambda_1, \lambda_2, \beta_1, \beta_2$. Следовательно, $[\text{Lie } S_{V_l}]^{ss} \otimes \mathbb{C}_l$ не может быть алгеброй Ли типа $A_1 \times A_1$.

4.19. Предположим, что $[\text{Lie } S_{V_l}]^{ss} \otimes \mathbb{C}_l$ – алгебра Ли типа $A_1 \times B_{(p-1)/2}$. Поскольку S_{V_l} -модули U_1 и $U_1^* = U_2$ неизоморфны, $E(\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)})^* = E(\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)})$ для алгебры Ли типа $A_1 \times B_{(p-1)/2}$, то в этой ситуации

$$\dim_{\mathbb{Q}_l} \text{Cent}(\text{Lie } S_{V_l}) = 1.$$

Рассмотрим каноническую изогению

$$\begin{aligned} f: \mathbb{G}m_{\mathbb{C}_l} \times [\text{Cent } S_{V_l} \otimes \mathbb{C}_l]^0 \times \text{SL}_2(\mathbb{C}_l) \times \text{Spin}_p(\mathbb{C}_l) \\ \rightarrow \mathbb{G}m_{\mathbb{C}_l} \cdot [\text{Cent } S_{V_l} \otimes \mathbb{C}_l]^0 \cdot [S_{V_l} \otimes \mathbb{C}_l]^{ss} = \mathbb{G}m_{\mathbb{C}_l} \cdot (S_{V_l} \otimes \mathbb{C}_l) = G_{V_l} \otimes \mathbb{C}_l. \end{aligned}$$

Действуя по алгоритму, изложенному в п. 4.9 и в [33, п. 3.9], мы получим, что множество Δ собственных чисел оператора $F_{\bar{v}}$ имеет вид $\Phi \cdot \Psi$, где $\Phi = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, $\Psi = \beta_1^{\pm 1} \{\delta_1^{\pm 1}, \delta_2^{\pm 1}, \dots, \delta_{(p-1)/2}^{\pm 1}, 1\}$, причем числа $\lambda_1, \lambda_2, \beta_1, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{(p-1)/2}$ мультипликативно независимы. Определим T_{γ}^0 формулой (4.15.1) и проверим, что

$$\{\lambda_1 \beta_1^{\pm 1}, \lambda_2 \beta_1^{\pm 1}\} = \{\gamma \in \Delta \mid \text{Card}(T_{\gamma}^0(\Delta) \cap \Delta) = p\}.$$

Действительно, если $\gamma = \lambda_1 \beta_1$, то

$$T_{\gamma}^0(\lambda \beta) = \lambda_1^2 \beta_1^2 (\lambda \beta)^{-1} \in \Delta \Leftrightarrow (\lambda = \lambda_1 \text{ и } \beta \in \beta_1 \{\delta_1^{\pm 1}, \delta_2^{\pm 1}, \dots, \delta_{(p-1)/2}^{\pm 1}, 1\}),$$

поэтому $\text{Card}(T_{\lambda_1 \beta_1}^0(\Delta) \cap \Delta) = p$.

С другой стороны, пусть $\gamma \in \Delta$ и $\text{Card}(T_{\gamma}^0(\Delta) \cap \Delta) = p$; можно считать, что $\gamma = \lambda_1 \beta_1 \delta_1^r$, где $r \in \{0, 1\}$; если $r = 1$ и $T_{\gamma}^0(\lambda \beta) \in \Delta$, то

$$\gamma^2(\lambda \beta)^{-1} = \lambda_1^2 \beta_1^2 \delta_1^2 \lambda^{-1} \beta^{-1} \in \Delta,$$

поэтому $\lambda = \lambda_1$, $\beta = \beta_1 \delta_1$ и, следовательно, $\text{Card}(T_{\gamma}^0(\Delta) \cap \Delta) = 1$, что невозможно.

В итоге мы доказали $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантность множества $\{\lambda_1 \beta_1^{\pm 1}, \lambda_2 \beta_1^{\pm 1}\}$. Действуя по алгоритму, изложенному в пп. 4.17, 4.18, мы сможем исключить алгебру типа $A_1 \times B_{(p-1)/2}$.

4.20. Предположим, наконец, что $[\text{Lie } S_{V_l}]^{ss} \otimes \mathbb{C}_l$ – алгебра Ли типа $A_1 \times A_{p-1}$. Можно считать, что над этой алгеброй $U_1 \otimes \mathbb{C}_l = E(\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)})$.

Предположим сначала, что $\dim_{\mathbb{Q}_l} \text{Cent}(\text{Lie } S_{V_l}) = 1$. В этом случае рассмотрим каноническую изогению

$$\begin{aligned} f: \mathbb{G}m_{\mathbb{C}_l} \times [\text{Cent } S_{V_l} \otimes \mathbb{C}_l]^0 \times \text{SL}_2(\mathbb{C}_l) \times \text{SL}_p(\mathbb{C}_l) \\ \rightarrow \mathbb{G}m_{\mathbb{C}_l} \cdot [\text{Cent } S_{V_l} \otimes \mathbb{C}_l]^0 \cdot [S_{V_l} \otimes \mathbb{C}_l]^{ss} = \mathbb{G}m_{\mathbb{C}_l} \cdot (S_{V_l} \otimes \mathbb{C}_l) = G_{V_l} \otimes \mathbb{C}_l. \end{aligned}$$

Действуя по алгоритму, изложенному в п. 4.9 и в [33, п. 3.9], мы получим, что множество Δ собственных чисел оператора $F_{\bar{v}}$ имеет вид

$$\Delta = \lambda_1 \beta_1^{\pm 1} \{\delta_1, \dots, \delta_{p-1}, (\delta_1 \delta_2 \dots \delta_{p-1})^{-1}\} \cup \lambda_2 \beta_1^{\pm 1} \{\delta_1^{-1}, \dots, \delta_{p-1}^{-1}, \delta_1 \delta_2 \dots \delta_{p-1}\},$$

причем числа $\lambda_1, \lambda_2, \beta_1, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{p-1}$ мультипликативно независимы. Для любого $\gamma \in \Delta \cdot \Delta$ определим $T_{\gamma}: \Delta \rightarrow \bar{\mathbb{Q}}^{\times}$ формулой $T_{\gamma}(\delta) = \gamma \delta^{-1}$.

4.21. ЛЕММА. Имеем $\gamma \in \{\lambda_1 \lambda_2 \beta_1^2, \lambda_1 \lambda_2 \beta_1^{-2}\} \Leftrightarrow \text{Card}(T_\gamma(\Delta) \cap \Delta) = 2p$,

$$\gamma = \lambda_1 \lambda_2 \Leftrightarrow \text{Card}(T_\gamma(\Delta) \cap \Delta) = 4p.$$

В частности, $\lambda_1 \lambda_2 \in \mathbb{Q}$, множество $\{\lambda_1 \lambda_2 \beta_1^2, \lambda_1 \lambda_2 \beta_1^{-2}\}$ является $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\gamma \in \Delta \cdot \Delta$, то можно считать, что

$$\gamma \in \left\{ \lambda_1^2 \delta_1^2, \lambda_1^2 \delta_1 \delta_2, \lambda_1^2 (\delta_2 \dots \delta_{p-1})^{-1}, \lambda_1^2 \beta_1^2 \delta_1^2, \lambda_1^2 \beta_1^2 \delta_1 \delta_2, \lambda_1^2 \beta_1^2 (\delta_2 \dots \delta_{p-1})^{-1}, \right. \\ \left. \lambda_1 \lambda_2, \lambda_1 \lambda_2 \delta_1 \delta_2^{-1}, \lambda_1 \lambda_2 \delta_1^2 \delta_2 \dots \delta_{p-1}, \lambda_1 \lambda_2 \beta_1^2, \lambda_1 \lambda_2 \beta_1^2 \delta_1 \delta_2^{-1}, \lambda_1 \lambda_2 \beta_1^2 \delta_1^2 \delta_2 \dots \delta_{p-1} \right\}.$$

Очевидно, если $\delta \in \Delta$, то

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 \delta_1^2 \delta^{-1} \in \Delta &\Leftrightarrow \delta \in \{\lambda_1 \beta_1^{\pm 1} \delta_1\}, \\ \lambda_1^2 \delta_1 \delta_2 \delta^{-1} \in \Delta &\Leftrightarrow \delta \in \{\lambda_1 \beta_1^{\pm 1} \delta_1, \lambda_1 \beta_1^{\pm 1} \delta_2\}, \\ \lambda_1^2 (\delta_2 \dots \delta_{p-1})^{-1} \delta^{-1} \in \Delta &\Leftrightarrow \delta \in \{\lambda_1 \beta_1^{\pm 1} \delta_1, \lambda_1 \beta_1^{\pm 1} (\delta_1 \dots \delta_{p-1})^{-1}\}, \\ \lambda_1^2 \beta_1^2 \delta_1^2 \delta^{-1} \in \Delta &\Leftrightarrow \delta \in \{\lambda_1 \beta_1 \delta_1\}, \\ \lambda_1^2 \beta_1^2 \delta_1 \delta_2 \delta^{-1} \in \Delta &\Leftrightarrow \delta \in \{\lambda_1 \beta_1 \delta_1, \lambda_1 \beta_1 \delta_2\}, \\ \lambda_1^2 \beta_1^2 (\delta_2 \dots \delta_{p-1})^{-1} \delta^{-1} \in \Delta &\Leftrightarrow \delta \in \{\lambda_1 \beta_1 \delta_1, \lambda_1 \beta_1 (\delta_1 \dots \delta_{p-1})^{-1}\}, \\ \lambda_1 \lambda_2 \delta^{-1} \in \Delta &\Leftrightarrow \delta \in \Delta, \\ \lambda_1 \lambda_2 \delta_1 \delta_2^{-1} \delta^{-1} \in \Delta &\Leftrightarrow \delta \in \{\lambda_1 \beta_1^{\pm 1} \delta_1, \lambda_2 \beta_1^{\pm 1} \delta_2^{-1}\}, \\ \lambda_1 \lambda_2 \delta_1^2 \delta_2 \dots \delta_{p-1} \delta^{-1} \in \Delta &\Leftrightarrow \delta \in \{\lambda_1 \beta_1^{\pm 1} \delta_1, \lambda_2 \beta_1^{\pm 1} \delta_1 \delta_2 \dots \delta_{p-1}\}, \\ \lambda_1 \lambda_2 \beta_1^2 \delta^{-1} \in \Delta &\Leftrightarrow \delta \in \left\{ \lambda_1 \beta_1 \delta_1, \lambda_1 \beta_1 \delta_2, \dots, \lambda_1 \beta_1 \delta_{p-1}, \right. \\ &\left. \lambda_1 \beta_1 (\delta_1 \dots \delta_{p-1})^{-1}, \lambda_2 \beta_1 \delta_1^{-1}, \lambda_2 \beta_1 \delta_2^{-1}, \dots, \lambda_2 \beta_1 \delta_{p-1}^{-1}, \lambda_2 \beta_1 (\delta_1 \dots \delta_{p-1}) \right\}, \\ \lambda_1 \lambda_2 \beta_1^2 \delta_1 \delta_2^{-1} \delta^{-1} \in \Delta &\Leftrightarrow \delta \in \{\lambda_1 \beta_1 \delta_1, \lambda_2 \beta_1 \delta_2^{-1}\}, \\ \lambda_1 \lambda_2 \beta_1^2 \delta_1^2 \delta_2 \dots \delta_{p-1} \delta^{-1} \in \Delta &\Leftrightarrow \delta \in \{\lambda_1 \beta_1 \delta_1, \lambda_2 \beta_1 \delta_1 \dots \delta_{p-1}\}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \gamma \in \{\lambda_1 \lambda_2 \beta_1^2, \lambda_1 \lambda_2 \beta_1^{-2}\} &\Leftrightarrow \text{Card}(T_\gamma(\Delta) \cap \Delta) = 2p, \\ \gamma = \lambda_1 \lambda_2 &\Leftrightarrow \text{Card}(T_\gamma(\Delta) \cap \Delta) = \text{Card}(\Delta) = 4p. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

4.22. В силу условия 4.5, 3) $\mathbb{k}(v) = \mathbb{F}_{p_v}$ – простое поле, состоящее из p_v элементов. Пусть $\rho \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ – комплексное сопряжение, отвечающее фиксированному вложению $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$. Согласно теореме А. Вейля [18, гл. 4, § 21, теорема 4] для архимедовой точки ∞ поля $\mathbb{C}$

$$|\lambda_1 \beta_1^{\pm 1} \delta_1|_\infty = \sqrt{p_v}, \quad |\lambda_2 \beta_1^{\pm 1} \delta_1^{-1}|_\infty = \sqrt{p_v},$$

поэтому $|\beta_1|_\infty = 1$, $|\lambda_1 \lambda_2 \beta_1^{\pm 2}|_\infty = p_v$ и, следовательно, целое алгебраическое число $\lambda_1 \lambda_2 \beta_1^{\pm 2} \in \Delta \cdot \Delta$ является p_v^2 -числом Вейля в терминологии [26]. Согласно теории Хонды–Тэйт p_v^2 -число Вейля $\lambda_1 \lambda_2 \beta_1^2$ определяет класс изогений некоторого простого абелева многообразия A над конечным полем $\mathbb{F}_{p_v^2}$, центр тела $E = \text{End}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ равен $F = \mathbb{Q}(\lambda_1 \lambda_2 \beta_1^2)$, тело E не расщепляется ни в одной вещественной точке поля F , расщепляется во всех неархимедовых точках, простых с p_v , а инвариант E в точке w , лежащей над p_v , дается соотношением

$$\text{inv}_w(E) = \frac{w(\lambda_1 \lambda_2 \beta_1^2)}{w(p_v^2)} [F_w : \mathbb{Q}_{p_v}] = w(\lambda_1 \lambda_2 \beta_1^2) \frac{f_w}{2} \pmod{1},$$

где F_w обозначает пополнение поля F относительно w , а f_w – абсолютную степень поля вычетов точки w [26, теорема 1]. В частности,

$$\text{inv}_w(E) \in \frac{1}{2} \mathbb{Z} / \mathbb{Z}. \quad (4.22.1)$$

4.23. ЛЕММА. $F = \mathbb{Q}(\lambda_1 \lambda_2 \beta_1^2)$ – мнимое квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$, $\lambda_1 \lambda_2 \beta_1^2 = p_v \beta_1^2$, $\rho(\beta_1^2) = \beta_1^{-2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, $\det F_{\bar{v}} \in \mathbb{Q}^\times$, поэтому $0 < (\det F_{\bar{v}})^2 = (\lambda_1^{2p} \times \lambda_2^{2p})^2 = \lambda_1^{4p} \lambda_2^{4p}$. С другой стороны, $|\lambda_1 \lambda_2 \beta_1^{\pm 2}|_\infty = p_v$ и, следовательно, $|\lambda_1 \lambda_2|_\infty = p_v$, поэтому из соотношения $\lambda_1 \lambda_2 \in \mathbb{Q}$ (лемма 4.21) следует, что

$$\lambda_1^{4p} \lambda_2^{4p} = p_v^{4p}. \quad (4.23.1)$$

Очевидно, $\rho(\lambda_1 \beta_1 \delta_1) \in \Delta$. Предположим сначала, что $\rho(\lambda_1 \beta_1 \delta_1) = \lambda_1 \beta_1^\varepsilon \delta_i$ (где $\varepsilon \in \{\pm 1\}$). В этом случае теорема А. Вейля дает соотношение

$$\lambda_1 \beta_1 \delta_1 \cdot \rho(\lambda_1 \beta_1 \delta_1) = p_v, \quad (4.23.2)$$

из которого следует равенство $\lambda_1^2 \beta_1^{1+\varepsilon} \delta_i = p_v$. Поэтому в силу соотношения (4.23.1) имеем равенства

$$(\lambda_1^2 \beta_1^{1+\varepsilon} \delta_i)^{4p} = p_v^{4p} = \lambda_1^{4p} \lambda_2^{4p},$$

что противоречит мультипликативной независимости чисел $\lambda_1, \lambda_2, \beta_1, \delta_1, \delta_2, \dots, \dots, \delta_{p-1}$. Аналогичным образом доказывается, что

$$\begin{aligned} \rho(\lambda_1 \beta_1 \delta_1) &\neq \lambda_1 \beta_1^\varepsilon (\delta_1 \delta_2 \dots \delta_{p-1})^{-1}, \\ \rho(\lambda_1 \beta_1 \delta_1) &\neq \lambda_2 \beta_1^\varepsilon \delta_1 \delta_2 \dots \delta_{p-1}. \end{aligned}$$

Значит, $\rho(\lambda_1 \beta_1 \delta_1) = \lambda_2 \beta_1^\varepsilon \delta_i^{-1}$, соотношение (4.23.2) принимает вид

$$\lambda_1 \lambda_2 \beta_1^{1+\varepsilon} \delta_i^{-1} = p_v, \quad (4.23.3)$$

поэтому в силу (4.23.1)

$$(\lambda_1 \lambda_2 \beta_1^{1+\varepsilon} \delta_1 \delta_i^{-1})^{4p} = p_v^{4p} = \lambda_1^{4p} \lambda_2^{4p}.$$

Из мультипликативной независимости чисел $\lambda_1, \lambda_2, \beta_1, \delta_1, \dots, \delta_{p-1}$ следует, что $\varepsilon = -1$, $\delta_1 = \delta_i$, поэтому $\rho(\lambda_1 \beta_1 \delta_1) = \lambda_2 \beta_1^{-1} \delta_1^{-1}$, а соотношение (4.23.3) принимает вид

$$\lambda_1 \lambda_2 = p_v. \quad (4.23.4)$$

Аналогичным образом доказывается, что

$$\rho(\lambda_2 \beta_1 \delta_1^{-1}) = \lambda_1 \beta_1^{-1} \delta_1.$$

Поэтому

$$\rho(\lambda_1 \lambda_2 \beta_1^2) = \rho(\lambda_1 \beta_1 \delta_1 \cdot \lambda_2 \beta_1 \delta_1^{-1}) = \lambda_2 \beta_1^{-1} \delta_1^{-1} \cdot \lambda_1 \beta_1^{-1} \delta_1 = \lambda_1 \lambda_2 \beta_1^{-2}$$

и, следовательно, F – мнимое квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$ (так как $[F : \mathbb{Q}] \leq 2$ в силу леммы 4.21), а из (4.23.4) следуют соотношения $\lambda_1 \lambda_2 \beta_1^2 = p_v \beta_1^2$, $\rho(\beta_1^2) = \beta_1^{-2}$. Лемма доказана.

4.24. ЛЕММА. *Для любой точки w поля F , лежащей над p_v ,*

$$\frac{w(p_v \beta_1^2)}{w(p_v^2)} \neq 0, \frac{1}{2}, 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если для некоторой точки $w \mid p_v$

$$\frac{w(p_v \beta_1^2)}{w(p_v^2)} = \frac{1}{2},$$

то $w(\beta_1^2) = 0$, поэтому

$$0 = (\rho w)(\rho \beta_1^2) = (\rho w)(\beta_1^{-2}) = -(\rho w)(\beta_1^2)$$

и, следовательно, $w(\beta_1^2) = 0$ для *всех* точек $w \mid p_v$. Поэтому β_1^2 – корень из 1 [12, лемма 1.0.5.2], что противоречит мультипликативной независимости чисел $\lambda_1, \lambda_2, \beta_1, \delta_1, \dots, \delta_{p-1}$.

Предположим, наконец, что $\frac{w(p_v \beta_1^2)}{w(p_v^2)} \in \{0, 1\}$ для некоторой точки w поля F , лежащей над p_v . Тогда из хорошо известного соотношения

$$\frac{w(p_v \beta_1^2)}{w(p_v^2)} + \frac{(\rho w)(p_v \beta_1^2)}{(\rho w)(p_v^2)} = 1$$

(см. [33, (3.16.2)]) следует, что

$$\frac{w(p_v \beta_1^2)}{w(p_v^2)} \in \{0, 1\} \quad (4.24.1)$$

для *всех* точек w поля F , лежащих над p_v .

Пусть w_0 – точка поля $\overline{\mathbb{Q}}$, лежащая над p_v . Тогда из (4.24.1) следует, что

$$\frac{w_0(p_v \beta_1^2)}{w_0(p_v^2)} \in \{0, 1\}$$

(см. [33, (3.16.1)]).

Рассмотрим целое алгебраическое число

$$p_v \beta_1^2 \delta_1 \delta_2^{-1} = \lambda_1 \beta_1 \delta_1 \cdot \lambda_2 \beta_1 \delta_2^{-1} \in \Delta \cdot \Delta.$$

Согласно теореме А. Вейля

$$p_v \beta_1^2 \delta_1 \delta_2^{-1} \cdot \rho(p_v \beta_1^2 \delta_1 \delta_2^{-1}) = p_v^2,$$

поэтому

$$\frac{w_0(p_v \beta_1^2 \delta_1 \delta_2^{-1})}{w_0(p_v^2)} + \frac{(\rho w_0)(p_v \beta_1^2 \delta_1 \delta_2^{-1})}{(\rho w_0)(p_v^2)} = 1$$

(с неотрицательными слагаемыми в левой части этого равенства). Следовательно,

$$0 \leq \frac{w_0(p_v \beta_1^2 \delta_1 \delta_2^{-1})}{w_0(p_v^2)} \leq 1.$$

Аналогично доказывается, что

$$0 \leq \frac{w_0(p_v \beta_1^2 \delta_1^{-1} \delta_2)}{w_0(p_v^2)} \leq 1.$$

Поэтому из соотношения

$$\frac{1}{2} \left[\frac{w_0(p_v \beta_1^2 \delta_1 \delta_2^{-1})}{w_0(p_v^2)} + \frac{w_0(p_v \beta_1^2 \delta_1^{-1} \delta_2)}{w_0(p_v^2)} \right] = \frac{w_0(p_v \beta_1^2)}{w_0(p_v^2)} = \frac{w(p_v \beta_1^2)}{w(p_v^2)} \in \{0, 1\}$$

следует, что

$$\frac{w_0(p_v \beta_1^2 \delta_1 \delta_2^{-1})}{w_0(p_v^2)} = \frac{w_0(p_v \beta_1^2 \delta_1^{-1} \delta_2)}{w_0(p_v^2)} \in \{0, 1\}$$

для *всех* точек w_0 поля $\overline{\mathbb{Q}}$, лежащих над p_v . Значит, $\delta_1^2 \delta_2^{-2}$ – корень из 1 [12, лемма 1.0.5.2], что противоречит мультипликативной независимости чисел δ_1, δ_2 . Лемма доказана.

4.25. Полагая $\alpha = \beta_1^2$ и учитывая соотношение (4.22.1), мы получим противоречие с леммой 4.24 точно так же, как это сделано в [33, шп. 3.18, 3.19].

4.26. Значит,

$$\text{Cent}(\text{Lie } S_{V_l}) = (0). \quad (4.26.1)$$

В этом случае рассмотрим каноническую изогению

$$f: \text{Gm}_{\mathbb{C}_l} \times \text{SL}_2(\mathbb{C}_l) \times \text{SL}_p(\mathbb{C}_l) \rightarrow \text{Gm}_{\mathbb{C}_l} \cdot (S_{V_l} \otimes \mathbb{C}_l) = G_{V_l} \otimes \mathbb{C}_l.$$

Действуя по алгоритму, изложенному в [33, п. 3.9], мы получим, что множество Δ собственных чисел оператора $F_{\overline{v}}$ имеет вид

$$\Delta = \lambda_1 \beta_1^{\pm 1} \{ \delta_1^{\pm 1}, \delta_2^{\pm 1}, \dots, \delta_{p-1}^{\pm 1}, (\delta_1 \delta_2 \dots \delta_{p-1})^{\pm 1} \},$$

причем числа $\lambda_1, \beta_1, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{p-1}$ мультипликативно независимы. Полагая $\lambda_2 = \lambda_1$ и действуя по алгоритму, изложенному в шп. 4.21–4.25, мы сможем исключить вариант (4.26.1). Теорема 1.4 доказана.

Список литературы

1. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1976 (гл. 1–3) ; 1972 (гл. 4–6) ; 1978 (гл. 7–8); 1986 (гл. 9).
2. Боровой М. В. Схемы Шимур-Делиня $M_{\mathbb{C}}(G, h)$ и рациональные классы когомологий типа (p, p) абелевых многообразий // Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 1977. С. 3–53.
3. Боровой М. В. Группа Ходжа и алгебра эндоморфизмов абелева многообразия // Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 1981. С. 124–126.
4. Chi W. On the l -adic representations attached to some absolutely simple abelian varieties of type II // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. 1A. Math. 1990. V. 37. P. 467–484.
5. Chi W. On the l -adic representations attached to simple abelian varieties of type IV // Bull. Austral. Math. Soc. 1991. V. 44. P. 71–78.
6. Chi W. l -adic and λ -adic representations associated to abelian varieties defined over number fields // Amer. J. Math. 1992. V. 114. P. 315–353.
7. Делинь П. Теория Ходжа. II // Математика. 1973. Т. 17. №5. С. 3–56.
8. Faltings G. Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern // Invent. Math. 1983. V. 73. P. 349–366.
9. Grothendieck A. Hodge's general conjecture is false for trivial reasons // Topology. 1969. V. 8. P. 299–303.
10. Hazama F. Branching rules and Hodge cycles on certain abelian varieties // Amer. J. Math. 1988. V. 110. P. 235–252.
11. Hazama F. The generalized Hodge conjecture for stably nondegenerate abelian varieties // Compos. Math. 1994. V. 93. P. 129–137.
12. Зархин Ю. Г. Абелевы многообразия, l -адические представления и SL_2 // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. №2. С. 294–308.
13. Зархин Ю. Г. Веса простых алгебр Ли в когомологиях алгебраических многообразий // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. №2. С. 264–304.
14. Zarhin Yu. G. Abelian varieties having a reduction of K3 type // Duke Math. J. 1992. V. 65. №3. P. 511–527.

15. *Kleiman S. L.* Algebraic cycles and the Weil conjectures // Dix exposés sur la cohomologie des schémas. Amsterdam: North-Holland, 1968. P. 359–386.
16. *Mumford D.* Families of abelian varieties. Algebraic groups and discontinuous subgroups // Proc. Symp. in Pure Math. 1966. V. 9. P. 347–352.
17. *Mumford D.* A note on Shimura's paper "Discontinuous groups and abelian varieties" // Math. Ann. 1969. V. 181. P. 345–351.
18. *Мамфорд Д.* Абелевы многообразия. М.: Мир, 1971.
19. *Пятенцкий-Шапиро И. И.* Взаимоотношения между гипотезами Тейта и Ходжа для абелевых многообразий // Матем. сб. 1971. Т. 85(127). №4(8). С. 610–620.
20. *Sen S.* Lie algebras of Galois groups arising from Hodge–Tate modules // Ann. Math. 1973. V. 97. P. 160–170.
21. *Serre J.-P.* Sur les groupes de Galois attachés aux groupes p -divisibles // Proceedings of a conference on local fields. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1967. P. 118–131.
22. *Serre J.-P.* Groupes algébriques associés aux modules de Hodge–Tate // Astérisque. 1979. V. 65. P. 155–188.
23. *Serre J.-P., Tate J.* Good reduction of abelian varieties and applications // Ann. Math. 1968. V. 88. №3. P. 492–517.
24. *Shimura G.* On analytic families of polarized abelian varieties and automorphic functions // Ann. Math. 1963. V. 78. P. 149–192.
25. *Tate J.* Algebraic cycles and poles of zeta functions // Arithmetical Algebraic Geometry. New York, 1965. P. 93–110.
26. *Tate J.* Classes d'isogénie des variétés abéliennes sur un corps fini (d'après T. Honda): Séminaire Bourbaki 1968/69, Exposé 352 // Lecture Notes in Math. 1971. V. 179. P. 95–110.
27. *Танкеев С. Г.* Об алгебраических циклах на абелевых многообразиях. II // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. №2. С. 418–429.
28. *Танкеев С. Г.* Об алгебраических циклах на поверхностях и абелевых многообразиях // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45. №2. С. 398–434.
29. *Танкеев С. Г.* Циклы на простых абелевых многообразиях простой размерности // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. №1. С. 155–170.
30. *Танкеев С. Г.* Об алгебраических циклах на поверхностях и абелевых многообразиях: Дис. . . . докт. физ.-матем. наук / МГУ. М.: Изд-во МГУ, 1985.
31. *Танкеев С. Г.* Циклы на простых абелевых многообразиях простой размерности над числовыми полями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. №6. С. 1214–1227.
32. *Танкеев С. Г.* Абелевы многообразия и общая гипотеза Ходжа // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. №4. С. 192–205.
33. *Танкеев С. Г.* Алгебраические циклы на абелевом многообразии без комплексного умножения // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. №3. С. 103–126.