Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Танкеев, Об алгебраических циклах на комплексных абелевых схемах над гладкими проективными кривыми, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2008, том 72, выпуск 4, 197–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im753>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 03:55:16

УДК 512.6

С. Г. Танкеев

Об алгебраических циклах на комплексных абелевых схемах над гладкими проективными кривыми

Если гипотеза Ходжа верна для некоторого общего (в смысле А. Вейля) геометрического слоя X_s абелевой схемы $\pi: X \rightarrow C$ над гладкой проективной кривой C , то численная эквивалентность алгебраических циклов на X совпадает с гомологической эквивалентностью. Гипотеза Ходжа для всех комплексных абелевых многообразий эквивалентна стандартной гипотезе $B(X)$ типа Лефшеца об алгебраичности оператора Ходжа $*$ для всех абелевых схем $\pi: X \rightarrow C$ над гладкими проективными кривыми. Исследуются некоторые свойства связности Гаусса–Манина и расслоений Ходжа, ассоциированных с абелевыми схемами над гладкими проективными кривыми, с приложениями к гипотезам Ходжа и Тэйта.

Библиография: 45 наименований.

Введение

Для комплексного гладкого проективного многообразия X и для целого числа $r \geq 0$ обозначим через $H_{\text{alg}}^{2r}(X, \mathbb{Q})$ $\mathbb{Q}$ -подпространство в $H^{2r}(X, \mathbb{Q})$, порожденное классами когомологий $\text{cl}_X(Z) \in H^{2r}(X, \mathbb{Q})$ алгебраических циклов Z коразмерности r на X . Гипотеза Ходжа $\text{Hodge}(X)$ утверждает, что

$$\forall r \geq 0 \quad H_{\text{alg}}^{2r}(X, \mathbb{Q}) = H^{2r}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}(X, \mathbb{C}),$$

где $H^{r,r}(X, \mathbb{C})$ – компонента Ходжа типа (r, r) в разложении Ходжа $H^{2r}(X, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=2r} H^{p,q}(X, \mathbb{C})$ [1]. Более того, из гипотезы $\text{Hodge}(X \times X)$ следуют стандартная гипотеза Гротендика $B(X)$ типа Лефшеца об алгебраичности оператора Ходжа $*$ и гипотеза $C(X)$ об алгебраичности компонент Кюннета диагонали; с другой стороны, из гипотезы $\text{Hodge}(X)$ следует гипотеза $D(X)$ о совпадении численной и гомологической эквивалентностей алгебраических циклов на X .

Пусть $\pi: X \rightarrow C$ – комплексная абелева схема относительной размерности d над гладкой проективной кривой C рода g . Существует такое конечнопорожденное расширение k поля $\mathbb{Q}$, что X, C, π определены над $k \hookrightarrow \mathbb{C}$:

$$X = X' \otimes_k \mathbb{C}, \quad C = C' \otimes_k \mathbb{C}, \quad \pi = \pi' \otimes_k \mathbb{C}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 06-01-00181) и частичной поддержке университета Торонто (июль–август 2001, 2002, 2003 гг.), Корейского института перспективных исследований (Сеул, февраль 2003 г., апрель–май 2004 г.) и университета Регенсбурга (апрель–май 2005 г.). Автор благодарен этим институтам за теплое гостеприимство и превосходные условия для работы.

Пусть $s' \in C'$ – общая точка k -схемы C' , $X'_{s'}$ – общий схемный слой абелевой k -схемы $\pi': X' \rightarrow C'$ и $X_s = X'_{s'} \otimes_{\kappa(s')} \mathbb{C}$ для некоторого вложения $s: \kappa(s') = k(C') \hookrightarrow \mathbb{C}$, являющегося продолжением вложения $k \hookrightarrow \mathbb{C}$.

По определению имеем, что X_s – общий геометрический слой абелевой схемы $\pi': X' \rightarrow C'$ в смысле теории схем, и мы называем X_s *общим геометрическим слоем абелевой схемы* $\pi: X \rightarrow C$ в смысле А. Вейля [2].

Если гипотеза Ходжа верна для некоторого общего (в смысле А. Вейля) геометрического слоя X_s абелевой схемы $\pi: X \rightarrow C$ над гладкой проективной кривой C , то мы доказываем, что численная эквивалентность алгебраических циклов на X совпадает с гомологической эквивалентностью (теорема 1.1).

Хорошо известно, что гипотеза Ходжа для абелевых многообразий является следствием гипотетической алгебраичности подходящего оператора $*$ для L_2 когомологий семейств Куги абелевых многообразий над (обычно некомпактными) базами [3]. По теореме И. Андре гипотеза Ходжа для всех комплексных абелевых многообразий следует из стандартной гипотезы $B(X)$ типа Лефшеца для всех абелевых схем $\pi: X \rightarrow C$ над гладкими проективными кривыми [4, теорема 0.6.2].

В настоящей статье мы доказываем обратное утверждение: гипотеза Ходжа для всех комплексных абелевых многообразий эквивалентна стандартной гипотезе $B(X)$ типа Лефшеца для всех абелевых схем $\pi: X \rightarrow C$ над гладкими проективными кривыми (теорема 2.1).

Наконец, мы исследуем некоторые свойства связности Гаусса–Манина и расщеплений Ходжа, ассоциированных с абелевыми схемами над гладкими проективными кривыми.

Пусть $\mathcal{H}^{q,p} = R^p \pi_* \Omega_{X/C}^q$ – голоморфный пучок Ходжа. Мы доказываем (теорема 3.1), что имеется равенство

$$\dim H^0(C, \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{H}^{q,p}) = \dim H^0(C, \wedge^q R^1 \pi_* \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_C} \wedge^p [R^1 \pi_* \mathcal{O}_X]^\vee) + \binom{d}{q} \binom{d}{p} \left(g - 1 - \frac{q-p}{d} \deg c_1(R^1 \pi_* \mathcal{O}_X) \right).$$

Если $\pi: X \rightarrow C$ не имеет нетривиальной постоянной абелевой подсхемы, то по теореме Море-Байи–Шпиро [5, добавление 2, теорема 2.1] имеется соотношение

$$0 \leq -\deg c_1(R^1 \pi_* \mathcal{O}_X) \leq d(g-1).$$

Мы называем $\pi: X \rightarrow C$ *абелевой схемой экстремального типа*, если

$$-\deg c_1(R^1 \pi_* \mathcal{O}_X) = d(g-1).$$

Например, семейство типа Куги–Шимуры, ассоциированное с неопределенной кватернионной алгеброй с делением над $\mathbb{Q}$, удовлетворяет этому условию (теорема 4.5).

Фиксируем целое число $j \in \{1, 2, \dots, d\}$ и предположим, что общий геометрический слой X_s удовлетворяет одному из следующих условий:

- (i) $d \geq 2$, группа Ходжа $\mathrm{Hg}(X_s)$ является простой $\mathbb{Q}$ -группой типа C_d ;
- (ii) $d \geq 3$, $\mathrm{End}(X_s) \otimes \mathbb{Q}$ – мнимое квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$, коммутант $\mathrm{Hg}(X_s)^{\mathrm{ss}} = [\mathrm{Hg}(X_s), \mathrm{Hg}(X_s)]$ является простой алгебраической $\mathbb{Q}$ -группой типа A_{d-1} , $d \notin \{2j-2, 2j\}$.

Если $-\deg c_1(R^1\pi_*\mathcal{O}_X) = d(g-1)$ и

$$H^0(C, \wedge^{j-1} R^1\pi_*\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_C} \wedge^j [R^1\pi_*\mathcal{O}_X]^\vee) = 0,$$

то доказано, что $H^{2j}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{j,j}(X, \mathbb{C})$ порождается классами алгебраических циклов (следствие 4.2).

Пусть теперь $\tau: X \rightarrow C$ – такой гладкий проективный морфизм с сечением, что все слои τ являются гладкими неприводимыми кривыми рода $d \geq 2$. Если $-\deg c_1(R^1\tau_*\mathcal{O}_X) = d(g-1)$, то $\text{rank NS}(X) = 2$ (теорема 4.2) и трансцендентная часть $[\text{NS}(X) \otimes \mathbb{Q}]^\perp$ $\mathbb{Q}$ -структуры Ходжа $H^2(X, \mathbb{Q})$ является $[4d(g-1)]$ -мерной $\mathbb{Q}$ -структурой Ходжа типа $(2, 0) + (0, 2)$ (следствие 4.1). Если эти многообразия и морфизмы определены над числовым полем $k \hookrightarrow \mathbb{C}$, $[k: \mathbb{Q}] < \infty$, то гипотеза Тэйта [6] верна для дивизоров на X (теорема 4.3).

Автор благодарит рецензента, предложившего существенные улучшения первоначального текста.

§ 1. О совпадении численной и гомологической эквивалентностей алгебраических циклов на абелевых схемах

1.1. Пусть $V_{\mathbb{Q}}$ – рациональная структура Ходжа веса r . Из общей теории групп мультипликативного типа известно, что задание разложения Ходжа

$$V_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=r} V_{\mathbb{C}}^{p,q}$$

эквивалентно заданию морфизма $h: \text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G_m) \rightarrow \text{GL}(V_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R})$ вещественных алгебраических групп, где $\text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G_m)$ – вещественная алгебраическая группа, полученная из мультипликативной группы G_m над $\mathbb{C}$ ограничением поля скаляров до $\mathbb{R}$ [7, определение В.42]. Элемент $z \in \mathbb{C}^\times = \text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G_m)(\mathbb{R})$ действует на $V_{\mathbb{C}}^{p,q}$ по правилу

$$z \cdot v = z^p \bar{z}^q v.$$

Пусть $U^1 = \{z \in \mathbb{C}^\times = \text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G_m)(\mathbb{R}) \mid |z| = 1\}$. Наименьшая $\mathbb{Q}$ -подгруппа в $\text{GL}(V_{\mathbb{Q}})$, группа $\mathbb{R}$ -точек которой содержит $h(U^1)$, называется *группой Ходжа* структуры Ходжа $V_{\mathbb{Q}}$ и обозначается через $\text{Hg}(V_{\mathbb{Q}})$ [7, определение В.51].

Если $V_{\mathbb{Q}}$ – поляризуемая рациональная структура Ходжа, то $\text{Hg}(V_{\mathbb{Q}})$ является редуктивной $\mathbb{Q}$ -группой, канонически действующей в пространстве $V_{\mathbb{Q}}$ [7, предложение В.57]. Если $V_{\mathbb{Q}}$ – рациональная структура Ходжа четного веса $2i$, то

$$V_{\mathbb{Q}}^{\text{Hg}(V_{\mathbb{Q}})} = V_{\mathbb{Q}} \cap V_{\mathbb{C}}^{i,i} \quad (1.1)$$

(см. [7, следствие В.55]).

Хорошо известно, что на любом гладком комплексном многообразии оператор $\Pi_{p,q}$ -проектирования не зависит от выбора локальных координат (см. [8, § 3]). Поэтому можно определить действие группы U^1 на дифференциальных формах следующим образом: элемент $e^{i\theta} \in U^1$, $\theta \in \mathbb{R}$, действует на формах типа (p, q) как умножение на число $e^{i\theta(p-q)}$. В частности, каноническое действие U^1 в когомологиях $H^*(X, \mathbb{C})$ гладкого проективного многообразия X определено действием U^1 на гармонических формах.

Для комплексного абелева многообразия J обозначим через $\text{Hg}(J) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hg}(H^1(J, \mathbb{Q}))$ группу Ходжа J . Это редуктивная связная алгебраическая $\mathbb{Q}$ -группа с каноническим действием на $H^*(J, \mathbb{Q}) = \bigwedge^* H^1(J, \mathbb{Q})$, и в силу (1.1) имеем

$$H^{2i}(J, \mathbb{Q})^{\text{Hg}(J)} = H^{2i}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{i,i}(J, \mathbb{C}).$$

1.2. Пусть $\mu: Y \rightarrow S$ – комплексная абелева схема над гладким проективным многообразием S . Спектральная последовательность Лере $E_2^{p,q} = H^p(S, R^q \mu_* \mathbb{Q}) \Rightarrow H^*(Y, \mathbb{Q})$ вырождается в члене E_2 (см. [9], [10, гл. 3, § 5]), и мы имеем каноническое разложение

$$H^i(Y, \mathbb{Q}) = \bigoplus_q H^q(S, R^{i-q} \mu_* \mathbb{Q}). \quad (1.2)$$

Напомним, что $H^q(S, R^{i-q} \mu_* \mathbb{Q})$ естественным образом отождествляется с собственным n^{i-q} -подпространством оператора

$$\Theta_{nY}^*: H^i(Y, \mathbb{Q}) \rightarrow H^i(Y, \mathbb{Q}),$$

где $\Theta_{nY}: Y \rightarrow Y$ – эндоморфизм абелевой схемы $\mu: Y \rightarrow S$, индуцированный умножением на n в слоях, для любого целого числа $n > 1$ (см. [11, лемма 2A3]). Поскольку Θ_{nY}^* сохраняет алгебраические циклы, то (1.1) индуцирует разложение

$$H_{\text{alg}}^{2i}(Y, \mathbb{Q}) = \bigoplus_q H_{\text{alg}}^q(S, R^{2i-q} \mu_* \mathbb{Q}), \quad (1.3)$$

где $H_{\text{alg}}^q(S, R^{2i-q} \mu_* \mathbb{Q}) \stackrel{\text{def}}{=} H_{\text{alg}}^{2i}(Y, \mathbb{Q}) \cap H^q(S, R^{2i-q} \mu_* \mathbb{Q})$.

ЛЕММА 1.1. *Если гипотеза Ходжа верна для некоторого общего (в смысле А. Вейля) геометрического слоя Y_s абелевой схемы $\mu: Y \rightarrow S$ над гладким проективным многообразием S , то*

$$H^0(S, R^{2i} \mu_* \mathbb{Q})^{\text{Hg}(H^0(S, R^{2i} \mu_* \mathbb{Q}))} = H_{\text{alg}}^0(S, R^{2i} \mu_* \mathbb{Q}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению имеем, что Y_s – общий геометрический слой абелевой схемы $\mu': Y' \rightarrow S'$ над гладкой проективной k -схемой S' , где k – конечнопорожденное расширение поля $\mathbb{Q}$. Более того, если $Y_{s'}$ – общий схемный слой абелевой k -схемы $\mu': Y' \rightarrow S'$, то $Y_s = Y_{s'} \otimes_{\kappa(s')} \mathbb{C}$ для некоторого вложения $s: \kappa(s') = k(S') \hookrightarrow \mathbb{C}$, продолжающего вложение $k \hookrightarrow \mathbb{C}$.

Очевидно, что $\mathbb{Q}$ -пространство $H_{\text{alg}}^{2i}(Y_s, \mathbb{Q})$ порождается классами алгебраических циклов, неприводимые компоненты которых определены над некоторым конечным алгебраическим расширением K поля $\kappa(s') = k(S')$ и имеют рациональные K -точки. Можно считать, что

$$k \hookrightarrow k(S') \hookrightarrow K \hookrightarrow \mathbb{C}.$$

Пусть k' – алгебраическое замыкание поля k в K . Тогда $K = k'(T')$ для некоторого гладкого проективного многообразия T' над k' . Можно считать, что $k' = k$. Более того, можно считать, что вложение полей $k(S') \hookrightarrow K =$

$k(T')$ определено k -морфизмом гладких проективных многообразий $f': T' \rightarrow S'$ конечной степени. Тогда коммутативная диаграмма k -морфизмов

$$\begin{array}{ccc} Z' = Y' \times_{S'} T' & \xrightarrow{\Phi'} & Y' \\ \downarrow \tau' & & \downarrow \mu' \\ T' & \xrightarrow{f'} & S' \end{array}$$

расслоенного произведения индуцирует диаграмму расслоенного произведения

$$\begin{array}{ccc} Z = Y \times_S T & \xrightarrow{\Phi} & Y \\ \downarrow \tau & & \downarrow \mu \\ T & \xrightarrow{f} & S \end{array} \quad (1.4)$$

причем выполнены следующие условия:

i) $K = k(T')$;

ii) для общей точки $\xi' \in T'$, лежащей над $s' \in S'$, и для геометрической точки $\xi: \text{Spec } \mathbb{C} \rightarrow \xi' \in T'$, отвечающей вложению $K = \kappa(\xi') \hookrightarrow \mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$ -пространство $H_{\text{alg}}^{2i}(\tau^{-1}(\xi), \mathbb{Q})$ порождается классами алгебраических циклов, неприводимые компоненты которых определены над $K = \kappa(\xi') = k(T')$ и имеют $\kappa(\xi')$ -рациональные точки.

Мы утверждаем, что имеются канонические изоморфизмы

$$\begin{aligned} H_{\text{alg}}^0(T, R^{2i}\tau_*\mathbb{Q}) &\simeq [H^{2i}(\tau^{-1}(\xi), \mathbb{Q})^{\pi_1(T, \xi)}]_{\text{alg}} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} H^{2i}(\tau^{-1}(\xi), \mathbb{Q})^{\pi_1(T, \xi)} \cap H_{\text{alg}}^{2i}(\tau^{-1}(\xi), \mathbb{Q}) = H_{\text{alg}}^{2i}(\tau^{-1}(\xi), \mathbb{Q}). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Действительно, по теореме Делиня [12, п. 4.1.2] каноническое отображение ограничения $H^{2i}(Z, \mathbb{Q}) \rightarrow H^{2i}(\tau^{-1}(\xi), \mathbb{Q})$ $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа является композицией сюръективного краевого морфизма $H^{2i}(Z, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(T, R^{2i}\tau_*\mathbb{Q})$ спектральной последовательности Лере $E_2^{p,q} = H^p(T, R^q\tau_*\mathbb{Q}) \Rightarrow H^*(Z, \mathbb{Q})$ и канонических морфизмов $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа

$$H^0(T, R^{2i}\tau_*\mathbb{Q}) \simeq H^{2i}(\tau^{-1}(\xi), \mathbb{Q})^{\pi_1(T, \xi)} \hookrightarrow H^{2i}(\tau^{-1}(\xi), \mathbb{Q}). \quad (1.6)$$

Элемент $\omega \in H_{\text{alg}}^{2i}(\tau^{-1}(\xi), \mathbb{Q})$ представлен алгебраическим циклом $W_\xi = W_{\xi'} \otimes_{\kappa(\xi')} \mathbb{C}$ коразмерности i на $\tau^{-1}(\xi)$ (с коэффициентами из поля $\mathbb{Q}$), где $W_{\xi'}$ – алгебраический цикл на общем схемном слое $Z'_{\xi'}$ k -морфизма $\tau': Z' \rightarrow T'$, все неприводимые компоненты $W_{\xi'}$ определены над $\kappa(\xi')$ и имеют $\kappa(\xi')$ -рациональные точки. С другой стороны, алгебраический цикл $W_{\xi'}$ на $Z'_{\xi'}$ может быть продолжен до алгебраического цикла W' на Z' посредством замыкания в топологии Зариского схемы Z' . В силу valuативного критерия собственности [13, гл. II, § 4, теоремы 4.7, 4.9] замыкание рациональной $\kappa(\xi')$ -точки на $Z_{\xi'}$ определяет сечение проективного морфизма $\tau': Z' \rightarrow T'$ вне некоторого замкнутого подмногообразия коразмерности не меньше двух в T' . С другой стороны, ограничение τ' на замыкание неприводимой компоненты $W_{\xi'}$ сюръективно, так как ограничение τ' на замыкание $\kappa(\xi')$ -рациональной точки сюръективно.

Следовательно, $W' \otimes_k \mathbb{C} = W$ определяет алгебраический класс $\omega' \in H_{\text{alg}}^{2i}(Z, \mathbb{Q})$, который, в свою очередь, канонически определяет элемент $\omega_0 \in H_{\text{alg}}^0(T, R^{2i}\tau_*\mathbb{Q})$ в силу (1.3). По построению образ ω_0 в $H^{2i}(\tau^{-1}(\xi), \mathbb{Q})$ равен ω , и он принадлежит $H^{2i}(\tau^{-1}(\xi), \mathbb{Q})^{\pi_1(T, \xi)}$ в силу (1.6). Существование канонических изоморфизмов (1.5) доказано.

Поскольку $H^0(T, R^{2i}\tau_*\mathbb{Q})$ можно отождествить с $\mathbb{Q}$ -подструктурой Ходжа поляризуемой $\mathbb{Q}$ -структуры Ходжа $H^{2i}(\tau^{-1}(\xi), \mathbb{Q})$, то имеется точная последовательность алгебраических $\mathbb{Q}$ -групп

$$\text{Hg}(H^{2i}(\tau^{-1}(\xi), \mathbb{Q})) \rightarrow \text{Hg}(H^0(T, R^{2i}\tau_*\mathbb{Q})) \rightarrow 1, \quad (1.7)$$

потому что для любой $\mathbb{Q}$ -структуры Ходжа $V_{\mathbb{Q}}$ рациональные $\text{Hg}(V_{\mathbb{Q}})$ -подпредставления в $V_{\mathbb{Q}}^{\otimes r} \otimes (V_{\mathbb{Q}}^{\vee})^{\otimes t}$ являются рациональными подструктурами Ходжа в $V_{\mathbb{Q}}^{\otimes r} \otimes (V_{\mathbb{Q}}^{\vee})^{\otimes t}$ [7, предложение B.54].

По условию леммы гипотеза Ходжа верна для $\tau^{-1}(\xi)$, поэтому из соотношений (1.7), (1.6) и (1.1) следует, что

$$\begin{aligned} H_{\text{alg}}^0(T, R^{2i}\tau_*\mathbb{Q}) &\hookrightarrow H^0(T, R^{2i}\tau_*\mathbb{Q})^{\text{Hg}(H^0(T, R^{2i}\tau_*\mathbb{Q}))} \\ &\hookrightarrow H^{2i}(\tau^{-1}(\xi), \mathbb{Q})^{\text{Hg}(H^{2i}(\tau^{-1}(\xi), \mathbb{Q}))} \\ &= H^{2i}(\tau^{-1}(\xi), \mathbb{Q}) \cap H^{i,i}(\tau^{-1}(\xi), \mathbb{C}) = H_{\text{alg}}^{2i}(\tau^{-1}(\xi), \mathbb{Q}). \end{aligned} \quad (1.8)$$

В силу (1.5) и (1.8) имеем

$$H^0(T, R^{2i}\tau_*\mathbb{Q})^{\text{Hg}(H^0(T, R^{2i}\tau_*\mathbb{Q}))} = H_{\text{alg}}^0(T, R^{2i}\tau_*\mathbb{Q}). \quad (1.9)$$

С другой стороны, каноническая проекция

$$\Phi : Z = Y \times_S T \rightarrow Y$$

в диаграмме расслоенного произведения (1.4) определяет вложение $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа $\Phi^* : H^{2i}(Y, \mathbb{Q}) \hookrightarrow H^{2i}(Z, \mathbb{Q})$, потому что $\Phi_*\Phi^* = \deg \Phi$ в силу формулы проекции.

Поскольку Θ_{nZ} определяется коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\Phi} & Y \\ \downarrow \Theta_{nZ} & & \downarrow \Theta_{nY} \\ Z & \xrightarrow{\Phi} & Y \\ \downarrow \tau & & \downarrow \mu \\ T & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

в которой каждый прямоугольник является диаграммой расслоенного произведения, то мы имеем соотношение $\Phi \circ \Theta_{nZ} = \Theta_{nY} \circ \Phi$. Поэтому Φ^* определяет вложение $\mathbb{Q}$ -подструктур Ходжа

$$\Phi^* : H^0(S, R^{2i}\mu_*\mathbb{Q}) \hookrightarrow H^0(T, R^{2i}\tau_*\mathbb{Q}).$$

Действительно, если $y \in H^0(S, R^{2i}\mu_*\mathbb{Q})$, то $\Theta_{nY}^*(y) = n^{2i}y$, $\Theta_{nZ}^*\Phi^*(y) = \Phi^*\Theta_{nY}^*(y) = \Phi^*(n^{2i}y) = n^{2i}\Phi^*(y)$ и $\Phi^*(y) \in H^0(T, R^{2i}\tau_*\mathbb{Q})$.

В частности, Φ^* определяет вложение соответствующих подпространств циклов Ходжа

$$\Phi^*: H^0(S, R^{2i}\mu_*\mathbb{Q})^{\text{Hg}(H^0(S, R^{2i}\mu_*\mathbb{Q}))} \hookrightarrow H^0(T, R^{2i}\tau_*\mathbb{Q})^{\text{Hg}(H^0(T, R^{2i}\tau_*\mathbb{Q}))}. \quad (1.10)$$

В силу (1.9), (1.10) для любого $\alpha \in H^0(S, R^{2i}\mu_*\mathbb{Q})^{\text{Hg}(H^0(S, R^{2i}\mu_*\mathbb{Q}))}$ класс $\Phi^*(\alpha)$ алгебраический. Следовательно, класс $\Phi_*\Phi^*(\alpha) = \deg \Phi \cdot \alpha$ алгебраичен. Поэтому α – алгебраический класс. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1.1. *Если гипотеза Ходжа верна для некоторого общего (в смысле А. Вейля) геометрического слоя X_s абелевой схемы $\pi: X \rightarrow C$ над гладкой проективной кривой C , то численная эквивалентность алгебраических циклов на X совпадает с гомологической эквивалентностью.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу [14, теорема 1] гипотеза $D(X)$ о совпадении численной и гомологической эквивалентностей алгебраических циклов на X эквивалентна следующей гипотезе $A^p(X)$ для любого $p \leq (d+1)/2$:

$$\dim H_{\text{alg}}^{2p}(X, \mathbb{Q}) = \dim H_{\text{alg}}^{2d+2-2p}(X, \mathbb{Q}). \quad (1.11)$$

Пусть $\check{\pi}: \check{X} \rightarrow C$ – двойственная абелева схема и $\mathcal{P}$ – расслоение Пуанкаре на расслоенном произведении $X \times_C \check{X}$, нормализованное вдоль нулевых сечений. Известно, что $v = c_1(\mathcal{P}) \in H^0(C, R^1\pi_*\mathbb{Q} \otimes R^1\check{\pi}_*\mathbb{Q})$ [15, (2.33)] и для всех $i \leq d$ алгебраический класс $j_*c_1(\mathcal{P})^{\cup i} \in H_{\text{alg}}^{2i+2}(X \times \check{X}, \mathbb{Q})$ определяет алгебраический изоморфизм

$$H^k(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^k(C, R^i\check{\pi}_*\mathbb{Q})$$

(см. [16, (6.2)]). В частности,

$$\forall i \leq d \quad \dim H_{\text{alg}}^k(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q}) \leq \dim H_{\text{alg}}^k(C, R^i\check{\pi}_*\mathbb{Q}) = \dim H_{\text{alg}}^k(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}), \quad (1.12)$$

потому что X и $\check{X}$ изогенны над C .

Пусть H – гиперплоское сечение X и $h \in H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q})$ – компонента класса

$$\text{cl}_X(H) \in H^2(X, \mathbb{Q}) = H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) \oplus H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{Q}) \oplus H^2(C, \mathbb{Q}).$$

Поскольку каноническое сюръективное отображение ограничения

$$H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q})$$

является морфизмом $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа [12, пп. 4.1.1, 4.1.2], то h – алгебраический класс (по теореме Лефшеца), индуцирующий поляризацию на слое X_s . Согласно сильной теореме Лефшеца, примененной к слоям $\pi: X \rightarrow C$, имеется изоморфизм локальных систем

$$R^i\pi_*\mathbb{Q} \xrightarrow[\sim]{\cup h^{\cup d-i}} R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q},$$

который, в свою очередь, определяет алгебраический изоморфизм

$$H^k(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^k(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q}),$$

$$x \mapsto x \cup h^{\cup d-i},$$

задаваемый алгебраическим классом когомологий $\Delta_*(h^{\cup d-i})$, где $\Delta: X \hookrightarrow X \times X$ – диагональное вложение [11, предложение 1.3.5]. Поэтому

$$\dim H_{\text{alg}}^k(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}) \leq \dim H_{\text{alg}}^k(C, R^{2d-i} \pi_* \mathbb{Q}) \quad \forall i \leq d.$$

Следовательно, (1.12) дает соотношение

$$\dim H_{\text{alg}}^k(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}) = \dim H_{\text{alg}}^k(C, R^{2d-i} \pi_* \mathbb{Q}) \quad \forall i \leq d. \quad (1.13)$$

Мы утверждаем, что

$$\dim H_{\text{alg}}^2(C, R^{2i} \pi_* \mathbb{Q}) = \dim H_{\text{alg}}^0(C, R^{2i} \pi_* \mathbb{Q}) \quad \forall i. \quad (1.14)$$

Действительно, для любого целого $i \geq 0$ имеется канонический алгебраический изоморфизм (см. [15, (2.22), (2.24)])

$$H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}) \xrightarrow[\sim]{\cup \text{cl}_X(X_s)} H^2(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}). \quad (1.15)$$

Заметим, что $H^2(C, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \text{cl}_X(X_s)$ – это одномерная $\mathbb{Q}$ -структура Ходжа типа $(1, 1)$. Следовательно, $\text{Hg}(H^2(C, \mathbb{Q})) = 1$. Согласно (1.15) имеется канонический изоморфизм $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа

$$\begin{aligned} H^2(C, \mathbb{Q}) \otimes H^0(C, R^{2i} \pi_* \mathbb{Q}) &\xrightarrow{\sim} H^2(C, R^{2i} \pi_* \mathbb{Q}), \\ \lambda \text{cl}_X(X_s) \otimes \omega &\mapsto \lambda \text{cl}_X(X_s) \cup \omega, \quad \lambda \in \mathbb{Q}, \quad \omega \in H^0(C, R^{2i} \pi_* \mathbb{Q}). \end{aligned}$$

Поэтому (1.1) дает соотношения

$$\begin{aligned} H_{\text{alg}}^2(C, R^{2i} \pi_* \mathbb{Q}) &\hookrightarrow H^2(C, R^{2i} \pi_* \mathbb{Q})^{\text{Hg}(H^2(C, R^{2i} \pi_* \mathbb{Q}))} \\ &\xrightarrow{\sim} [H^2(C, \mathbb{Q}) \otimes H^0(C, R^{2i} \pi_* \mathbb{Q})]^{\text{Hg}(H^2(C, \mathbb{Q}) \otimes H^0(C, R^{2i} \pi_* \mathbb{Q}))} \\ &= H^2(C, \mathbb{Q}) \otimes H^0(C, R^{2i} \pi_* \mathbb{Q})^{\text{Hg}(H^0(C, R^{2i} \pi_* \mathbb{Q}))} \\ &\xrightarrow{\sim} \mathbb{Q} \text{cl}_X(X_s) \cup H^0(C, R^{2i} \pi_* \mathbb{Q})^{\text{Hg}(H^0(C, R^{2i} \pi_* \mathbb{Q}))}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

В итоге (1.16) и лемма 1.1, примененная к абелевой схеме $\pi: X \rightarrow C$, дают соотношения

$$\begin{aligned} H_{\text{alg}}^2(C, R^{2i} \pi_* \mathbb{Q}) &\hookrightarrow \mathbb{Q} \text{cl}_X(X_s) \cup H^0(C, R^{2i} \pi_* \mathbb{Q})^{\text{Hg}(H^0(C, R^{2i} \pi_* \mathbb{Q}))} \\ &= \mathbb{Q} \text{cl}_X(X_s) \cup H_{\text{alg}}^0(C, R^{2i} \pi_* \mathbb{Q}) \hookrightarrow H_{\text{alg}}^2(C, R^{2i} \pi_* \mathbb{Q}), \end{aligned}$$

и (1.14) следует из (1.15).

Из соотношений (1.13), (1.14) следует, что

$$\begin{aligned} \dim H_{\text{alg}}^2(C, R^{2d-2p} \pi_* \mathbb{Q}) &= \dim H_{\text{alg}}^2(C, R^{2p} \pi_* \mathbb{Q}) \\ &= \dim H_{\text{alg}}^0(C, R^{2p} \pi_* \mathbb{Q}), \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\dim H_{\text{alg}}^1(C, R^{2d-(2p-1)} \pi_* \mathbb{Q}) = \dim H_{\text{alg}}^1(C, R^{2p-1} \pi_* \mathbb{Q}), \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \dim H_{\text{alg}}^0(C, R^{2d-(2p-2)} \pi_* \mathbb{Q}) &= \dim H_{\text{alg}}^0(C, R^{2p-2} \pi_* \mathbb{Q}) \\ &= \dim H_{\text{alg}}^2(C, R^{2p-2} \pi_* \mathbb{Q}). \end{aligned} \quad (1.19)$$

В силу (1.3), (1.17)–(1.19) гипотеза (1.11) выполняется, и гипотеза $D(X)$ верна. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1.1 [15, теорема 2.5]. Пусть $\pi: X \rightarrow C$ – комплексная абелева схема простой относительной размерности d над гладкой проективной кривой C . Предположим, что общий схемный слой морфизма π является абсолютно простым абелевым многообразием. Тогда численная эквивалентность алгебраических циклов на X совпадает с гомологической эквивалентностью.

Действительно, гипотеза Ходжа верна для всех простых абелевых многообразий простой размерности [17].

§ 2. Гипотеза Ходжа для абелевых многообразий и стандартная гипотеза типа Лефшеца для абелевых схем над гладкими проективными кривыми

ТЕОРЕМА 2.1. Гипотеза Ходжа для всех комплексных абелевых многообразий эквивалентна стандартной гипотезе $B(X)$ типа Лефшеца для всех абелевых схем $\pi: X \rightarrow C$ над гладкими проективными кривыми.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме И. Андре гипотеза Ходжа для всех комплексных абелевых многообразий следует из стандартной гипотезы $B(X)$ типа Лефшеца для всех абелевых схем $\pi: X \rightarrow C$ над гладкими проективными кривыми [4, теорема 0.6.2].

Осталось доказать обратное утверждение. Будем предполагать в дальнейшем, что гипотеза Ходжа верна для всех абелевых многообразий. Пусть $\pi: X \rightarrow C$ – абелева схема над гладкой проективной кривой C и $\check{\pi}: \check{X} \rightarrow C$ – двойственная абелева схема. Обозначим через $\mathcal{P}$ расслоение Пуанкаре на расслоенном произведении $X \times_C \check{X}$, нормализованное вдоль нулевых сечений. Известно, что $v = c_1(\mathcal{P}) \in H^0(C, R^1\pi_*\mathbb{Q} \otimes R^1\check{\pi}_*\mathbb{Q})$ (см. [15, (2.33)]) и для всех $i \leq d$ имеются такие однозначно определенные циклы Ходжа $\alpha_i, \beta_i \in [H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^0(C, R^i\check{\pi}_*\mathbb{Q})] \cap H^{i,i}(X \times \check{X}, \mathbb{C})$, $\delta_i \in H^1(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^1(C, R^i\check{\pi}_*\mathbb{Q})$, что

$$j_*c_1(\mathcal{P})^{\cup i} = \alpha_i \cup \text{cl}_{X \times \check{X}}(X \times \check{X}_s) + \beta_i \cup \text{cl}_{X \times \check{X}}(X_s \times \check{X}) + \delta_i \in H_{\text{alg}}^{2i+2}(X \times \check{X}, \mathbb{Q}),$$

и $j_*c_1(\mathcal{P})^{\cup i}$ определяет алгебраический изоморфизм

$$H^k(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^k(C, R^i\check{\pi}_*\mathbb{Q})$$

(см. [16, (6.2), теорема 10.1]). Если цикл Ходжа α_i алгебраический для всех $i \leq d$, то гипотеза $B(X)$ верна [16, теорема 10.1]. Поэтому достаточно доказать алгебраичность α_i .

Из формулы Кюннета и (1.1) следует, что

$$\alpha_i \in H^0(C \times C, R^{2i}(\pi \times \check{\pi})_*\mathbb{Q})^{\text{Hg}(H^0(C \times C, R^{2i}(\pi \times \check{\pi})_*\mathbb{Q}))}.$$

Поскольку гипотеза Ходжа верна для общего геометрического слоя абелевой схемы $\pi \times \check{\pi}: X \times \check{X} \rightarrow C \times C$, то лемма 1.1 обеспечивает алгебраичность α_i . Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Если гипотеза Ходжа верна для всех комплексных абелевых многообразий, то гипотезы $B(X)$, $C(X)$ и $D(X)$ верны для всех абелевых схем $\pi: X \rightarrow C$ над гладкими проективными кривыми.

Действительно, $C(X) \Leftarrow B(X) \Rightarrow D(X)$ (см. [11, лемма 2.4], [14, теорема 1]).

§ 3. О связности Гаусса–Манина и расслоениях Ходжа, ассоциированных с абелевыми схемами над гладкими проективными кривыми

3.1. Пусть $\pi: X \rightarrow C$ – абелева схема относительной размерности d над гладкой проективной кривой C и $e: C \rightarrow X$ – нулевое сечение. По определению голоморфное векторное расслоение $\wedge^n E$ является векторным расслоением с постоянными матрицами перехода, ассоциированным с естественным представлением $\pi_1(C, s)$ в $H^n(X_s, \mathbb{C}) = \wedge^n H^1(X_s, \mathbb{C})$. Пучок $\mathcal{O}_C(\wedge^n E) = \mathcal{O}_C \otimes R^n \pi_* \mathbb{C}$ голоморфных сечений $\wedge^n E$ содержит подпучок $R^n \pi_* \mathbb{C} = \{\varphi \in \mathcal{O}_C(\wedge^n E) \mid \nabla \varphi = 0\}$ локально постоянных (горизонтальных) сечений $\wedge^n E$ по отношению к связности Гаусса–Манина

$$\nabla = d \otimes 1: \mathcal{O}_C \otimes R^n \pi_* \mathbb{C} \rightarrow \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} [\mathcal{O}_C \otimes R^n \pi_* \mathbb{C}] = \Omega_C^1 \otimes R^n \pi_* \mathbb{C}$$

(см. [18, § 2]).

Обозначим через $F^p H^n(X_s, \mathbb{C}) = \bigoplus_{q \geq p} H^{q, n-q}(X_s, \mathbb{C})$ фильтрацию Ходжа на $H^n(X_s, \mathbb{C})$. Тогда включения $F^p H^n(X_s, \mathbb{C}) \hookrightarrow H^n(X_s, \mathbb{C})$ определяют C^∞ -подрасслоение $F^p \mathcal{H}_\infty^n \hookrightarrow \mathcal{H}_\infty^n$ в C^∞ -расслоении $\mathcal{H}_\infty^n$ со слоем $H^n(X_s, \mathbb{C})$. Расслоение $\mathcal{H}_\infty^n$ является плоским по отношению к связности Гаусса–Манина ∇ и имеет естественную голоморфную структуру. Будем обозначать через $\mathcal{H}^n$ пучок его голоморфных сечений.

Согласно результатам Гриффитса (см. [19], [20, теорема 0.7]) $F^p \mathcal{H}_\infty^n$ является голоморфным подрасслоением в $\mathcal{H}_\infty^n$; если $F^p \mathcal{H}^n \hookrightarrow \mathcal{H}^n$ – пучок его голоморфных сечений, то имеется фильтрация Ходжа пучка $\mathcal{O}_C(\wedge^n E) = \mathcal{H}^n = \mathcal{O}_C \otimes R^n \pi_* \mathbb{C}$ голоморфными подпучками

$$F^n \mathcal{H}^n \subset F^{n-1} \mathcal{H}^n \subset \dots \subset F^1 \mathcal{H}^n \subset F^0 \mathcal{H}^n = \mathcal{H}^n. \quad (3.1)$$

3.2. Пусть

$$U^1 = \{z \in \mathbb{C}^\times = \text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G_m)(\mathbb{R}) \mid |z| = 1\}.$$

Тогда согласно классической теории Ходжа для любого гладкого проективного многообразия Y над полем комплексных чисел пространство $H^n(Y, \mathbb{Q})$ имеет естественную $\mathbb{Q}$ -структуру Ходжа веса n . Компонента Ходжа типа (p, q) определяется равенством

$$[H^n(Y, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C}]^{p, q} = \{y \in H^n(Y, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C} \mid e^{i\theta} \cdot y = e^{i\theta(p-q)} y \quad \forall e^{i\theta} \in U^1, \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Для любого геометрического слоя X_s абелевой схемы $\pi: X \rightarrow C$ имеется каноническое разложение U^1 -модулей (см. [21, § 1, замечание 2])

$$H^1(X_s, \mathbb{C}) \simeq H^0(X_s, \Omega_{X_s}^1) \oplus H^1(X_s, \mathcal{O}_{X_s}), \quad (3.2)$$

где $H^0(X_s, \Omega_{X_s}^1)$ является U^1 -модулем типа $(1, 0)$ и $H^1(X_s, \mathcal{O}_{X_s})$ является U^1 -модулем типа $(0, 1)$. Глобализацией (3.2) является точная последовательность локально свободных когерентных пучков U^1 -модулей (фильтрация Ходжа)

$$0 \rightarrow e^* \Omega_{X/C}^1 \rightarrow \mathcal{O}_C \otimes R^1 \pi_* \mathbb{C} \rightarrow R^1 \pi_* \mathcal{O}_X \rightarrow 0, \quad (3.3)$$

где $\mathcal{H}^1 = \mathcal{O}_C(E) = \mathcal{O}_C \otimes R^1 \pi_* \mathbb{C}$, $F^1 \mathcal{H}^1 = e^* \Omega_{X/C}^1$ (см. [22, § 2], [12, § 4.4]). В частности, $\mathcal{H}^n = \wedge^n \mathcal{H}^1$ является локально свободным пучком U^1 -модулей.

Более того,

$$[R^1 \pi_* \mathcal{O}_X]^\vee \xrightarrow{\sim} e^* \Omega_{X/C}^1 \quad (3.4)$$

(см. [22, § 2], [5, добавление 2, доказательство теоремы 2.1]). С другой стороны, $\Omega_{X/C}^1 = \pi^* e^* \Omega_{X/C}^1$ [5, добавление 2, п. 1.3], $\pi_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_C$, и для любого когерентного пучка $\mathcal{F}$ на C имеется канонический изоморфизм $\pi_* \pi^* \mathcal{F} = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_C} \pi_* \mathcal{O}_X$ [23, п. 5.1]. Поэтому $\Omega_{X/C}^q = \pi^* e^* \Omega_{X/C}^q$ и

$$\pi_* \Omega_{X/C}^q = \pi_* \pi^* e^* \Omega_{X/C}^q = e^* \Omega_{X/C}^q \otimes_{\mathcal{O}_C} \pi_* \mathcal{O}_X = e^* \Omega_{X/C}^q. \quad (3.5)$$

Положим $\mathcal{H}^{p,n-p} = F^p \mathcal{H}^n / F^{p+1} \mathcal{H}^n$. Хорошо известно, что

$$\mathcal{H}^{p,q} = R^q \pi_* \Omega_{X/C}^p \quad (3.6)$$

(см. [18, § 2], [24, лекция 14, замечание 14.8, (iii)]).

Для любого геометрического слоя X_s пусть T_s – касательное пространство в нулевой точке $e(s) \in X_s$, $T_s^\vee$ – кокасательное пространство в $e(s)$ и $\overline{T_s^\vee} = \text{Hom}_{\mathbb{C}}\text{-anti}(T_s, \mathbb{C})$ – пространство антилинейных форм. Тогда мы имеем канонические изоморфизмы (см. [21, § 1, теорема])

$$\begin{aligned} H^0(X_s, \Omega_{X_s}^1) &\xrightarrow{\sim} T_s^\vee, & H^1(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) &\xrightarrow{\sim} \overline{T_s^\vee}, \\ H^q(X_s, \Omega_{X_s}^p) &\xrightarrow{\sim} \wedge^p T_s^\vee \otimes \wedge^q \overline{T_s^\vee} = \wedge^p H^0(X_s, \Omega_{X_s}^1) \otimes \wedge^q H^1(X_s, \mathcal{O}_{X_s}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Глобализация соотношений (3.7) дает канонический изоморфизм

$$R^q \pi_* \Omega_{X/C}^p \xrightarrow{\sim} \wedge^p \pi_* \Omega_{X/C}^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} \wedge^q R^1 \pi_* \mathcal{O}_X. \quad (3.8)$$

Поэтому $\mathcal{H}^{p,q} = R^q \pi_* \Omega_{X/C}^p$ имеет каноническую структуру пучка U^1 -модулей типа (p, q) . С другой стороны, канонический морфизм

$$F^p H^n(X_s, \mathbb{C}) \rightarrow F^p H^n(X_s, \mathbb{C}) / F^{p+1} H^n(X_s, \mathbb{C}) = H^{p,n-p}(X_s, \mathbb{C})$$

является морфизмом U^1 -модулей. Поскольку $\mathcal{H}^{p,n-p}$ и $F^0 \mathcal{H}^n = \mathcal{H}^n$ – пучки U^1 -модулей, то каноническое отображение

$$F^0 \mathcal{H}^n \rightarrow F^0 \mathcal{H}^n / F^1 \mathcal{H}^n = \mathcal{H}^{0,n}$$

является морфизмом пучков U^1 -модулей. Поэтому его ядро $F^1 \mathcal{H}^n$ – пучок U^1 -модулей. Аналогично,

$$F^1 \mathcal{H}^n \rightarrow F^1 \mathcal{H}^n / F^2 \mathcal{H}^n = \mathcal{H}^{1,n-1}$$

– морфизм пучков U^1 -модулей. Поэтому его ядро $F^2 \mathcal{H}^n$ является пучком U^1 -модулей. Легко видеть по индукции, что фильтрация (3.1) является фильтрацией пучками U^1 -модулей.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\pi: X \rightarrow C$ – абелева схема относительной размерности $d \geq 2$ над гладкой проективной кривой C рода g . Тогда имеем

$$\dim H^0(C, \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{H}^{q,p}) = \dim H^0(C, \wedge^q R^1 \pi_* \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_C} \wedge^p [R^1 \pi_* \mathcal{O}_X]^\vee) + \binom{d}{q} \binom{d}{p} \left(g - 1 - \frac{q-p}{d} \cdot \deg c_1(R^1 \pi_* \mathcal{O}_X) \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (3.4)–(3.8), теоремы Римана–Роха (см. [25, гл. IV, § 21, теорема 21.1.2]) и двойственности Серра [25, гл. IV, § 15, теорема 15.4.3] имеем соотношение

$$\dim H^0(C, \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{H}^{q,p}) = \dim H^0(C, \wedge^q R^1 \pi_* \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_C} \wedge^p [R^1 \pi_* \mathcal{O}_X]^\vee) + \deg c_1(\Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} \wedge^q [R^1 \pi_* \mathcal{O}_X]^\vee \otimes_{\mathcal{O}_C} \wedge^p R^1 \pi_* \mathcal{O}_X) + \binom{d}{q} \binom{d}{p} (1 - g). \quad (3.9)$$

С другой стороны, для локально свободных когерентных пучков $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ на кривой C имеем (см. [26, гл. 3, пример 3.2.3])

$$\text{ch}(\mathcal{E}_1 \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{E}_2) = \text{ch}(\mathcal{E}_1) \cup \text{ch}(\mathcal{E}_2),$$

где

$$\text{ch}(\mathcal{E}_i) = \text{rank } \mathcal{E}_i + c_1(\mathcal{E}_i) + \frac{1}{2}(c_1^2(\mathcal{E}_i) - 2c_2(\mathcal{E}_i)) + \dots = \text{rank } \mathcal{E}_i + c_1(\mathcal{E}_i)$$

– характер Черна (см. [26, гл. 3, пример 3.2.3]). Поэтому

$$c_1(\mathcal{E}_1 \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{E}_2) = \text{rank } \mathcal{E}_2 \cdot c_1(\mathcal{E}_1) + \text{rank } \mathcal{E}_1 \cdot c_1(\mathcal{E}_2). \quad (3.10)$$

Для локально свободного когерентного пучка $\mathcal{E}$ на C имеем

$$c_t(\mathcal{E}) = \prod_{i=1}^{\text{rank } \mathcal{E}} (1 + \alpha_i t) = 1 + c_1(\mathcal{E})t,$$

где α_i – корни Черна пучка $\mathcal{E}$ (см. [26, гл. 3, замечание 3.2.3]). Поэтому $c_1(\mathcal{E}) = \alpha_1 + \dots + \alpha_{\text{rank } \mathcal{E}}$. С другой стороны,

$$c_t(\wedge^p \mathcal{E}) = \prod_{i_1 < \dots < i_p} (1 + (\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_p})t)$$

(см. [26, гл. 3, замечание 3.2.3(c)]). Легко видеть, что

$$c_t(\wedge^p \mathcal{E}) = 1 + \binom{\text{rank } \mathcal{E} - 1}{p - 1} (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{\text{rank } \mathcal{E}})t = 1 + \binom{\text{rank } \mathcal{E} - 1}{p - 1} c_1(\mathcal{E})t.$$

Следовательно,

$$c_1(\wedge^p \mathcal{E}) = \binom{\text{rank } \mathcal{E} - 1}{p - 1} c_1(\mathcal{E}), \quad (3.11)$$

$$c_1(\det \mathcal{E}) = c_1(\wedge^{\text{rank } \mathcal{E}} \mathcal{E}) = c_1(\mathcal{E}), \quad (3.12)$$

$$c_1([R^1 \pi_* \mathcal{O}_X]^\vee) = -c_1(R^1 \pi_* \mathcal{O}_X). \quad (3.13)$$

Поэтому утверждение теоремы легко следует из соотношений (3.9)–(3.13), равенства $\deg c_1(\Omega_C^1) = 2g - 2$ и биномиального соотношения

$$\binom{d}{q} \binom{d-1}{p-1} - \binom{d}{p} \binom{d-1}{q-1} = \binom{d}{q} \binom{d}{p} \cdot \frac{p-q}{d}.$$

3.3. По теореме Море-Байи–Шпиро [5, добавление 2, теорема 2.1] имеем

$$0 \leq -\deg c_1(R^1\pi_*\mathcal{O}_X) \leq d(g-1). \quad (3.14)$$

По определению $\pi: X \rightarrow C$ – абелева схема *экстремального типа*, если $-\deg c_1(R^1\pi_*\mathcal{O}_X) = d(g-1)$.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть $\pi: X \rightarrow C$ – абелева схема *экстремального типа*. Тогда для любого натурального числа $p \leq j$ имеем

$$\begin{aligned} \dim H^0(C, \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{H}^{2j-p-1,p}) &= \dim H^0(C, \wedge^{2j-p-1} R^1\pi_*\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_C} \wedge^p [R^1\pi_*\mathcal{O}_X]^\vee) \\ &+ \binom{d}{2j-p-1} \binom{d}{p} (g-1)(2j-2p). \end{aligned}$$

В частности,

$$\begin{aligned} \dim H^0(C, \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{H}^{2j-p-1,p}) &> 0 \quad \text{для } p < j, \\ \dim H^0(C, \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{H}^{j-1,j}) &= \dim H^0(C, \wedge^{j-1} R^1\pi_*\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_C} \wedge^j [R^1\pi_*\mathcal{O}_X]^\vee) \\ &= \dim H^0(C, [e^* \wedge^{j-1} \Omega_{X/C}^1]^\vee \otimes_{\mathcal{O}_C} e^* \wedge^j \Omega_{X/C}^1), \\ \dim H^0(C, \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{H}^{0,1}) &= \dim H^0(C, [R^1\pi_*\mathcal{O}_X]^\vee) = \dim H^0(C, e^* \Omega_{X/C}^1). \end{aligned}$$

3.4. Гриффитс [19, с. 861–862] исследовал когомологии кривой C с коэффициентами в векторном расслоении, ассоциированном с произвольным представлением $\rho_0: \pi_1(C, s) \rightarrow \mathbb{C}^\times$. Следуя Гриффитсу, рассмотрим представление монодромии $\rho: \pi_1(C, s) \rightarrow \mathrm{GL}(H^1(X_s, \mathbb{C}))$, ассоциированное с абелевой схемой $\pi: X \rightarrow C$, и пусть $E = \tilde{C} \times_{\pi_1(C, s)} H^1(X_s, \mathbb{C})$ – ассоциированное векторное расслоение, где $\tilde{C} \rightarrow C$ – универсальное накрытие кривой C . Определены пучок $R^n\pi_*\mathbb{C}$ локально постоянных сечений расслоения $\wedge^n E$ по отношению к связности Гаусса–Манина и пространство $\mathcal{A}^q(\wedge^n E)$ q -форм класса C^∞ со значениями в $\wedge^n E$. Поскольку $\wedge^n E$ имеет постоянные матрицы перехода, оператор внешнего дифференцирования d действует на $\mathcal{A}^q(\wedge^n E)$, и если $H_{\mathrm{DR}}^q(C, \wedge^n E)$ – соответствующие группы когомологий, то мы имеем теорему де Рама:

$$H^q(C, R^n\pi_*\mathbb{C}) \simeq H_{\mathrm{DR}}^q(C, \wedge^n E). \quad (3.15)$$

С другой стороны, рассмотрим пучок $\Omega_C^p(\wedge^n E)$ голоморфных p -форм со значениями в $\wedge^n E$ и пространство $\mathcal{A}^{p,q}(\wedge^n E)$ (p, q) -форм класса C^∞ со значениями в $\wedge^n E$. Имеется оператор $\bar{\partial}: \mathcal{A}^{p,q}(\wedge^n E) \rightarrow \mathcal{A}^{p,q+1}(\wedge^n E)$, и если $H_{\bar{\partial}}^{p,q}(C, \wedge^n E)$ – соответствующие группы когомологий, то мы имеем теорему Дольбо (см. [27, гл. II, § 3, теорема 3.20], [10, гл. I, § 2], [8, п. 14.1]):

$$H^q\left(C, \Omega_C^p(\wedge^n E)\right) \simeq H_{\bar{\partial}}^{p,q}(C, \wedge^n E). \quad (3.16)$$

Соотношение между (3.15) и (3.16) возникает, если рассмотреть кэлерову метрику на C и локально постоянную метрику на $\wedge^n E$. Тогда теория гармонических форм на кэлеровых многообразиях переносится дословно (см. [27, гл. IV, § 5]). Таким образом, мы имеем

$$H_{\mathrm{DR}}^q(C, \wedge^n E) \simeq \bigoplus_{r+t=q} H_{\bar{\partial}}^{r,t}(C, \wedge^n E). \quad (3.17)$$

В частности, (3.15) и (3.17) дают соотношение

$$H^1(C, R^n \pi_* \mathbb{C}) \simeq H_{\bar{\partial}}^{1,0}(C, \wedge^n E) \oplus H_{\bar{\partial}}^{0,1}(C, \wedge^n E). \quad (3.18)$$

Из (3.16) следует, что имеется канонический изоморфизм

$$\begin{aligned} H_{\bar{\partial}}^{1,0}(C, \wedge^n E) &\simeq H^0(C, \Omega_C^1(\wedge^n E)) \\ &= H^0(C, \Omega_C^1 \otimes R^n \pi_* \mathbb{C}) = H^0(C, \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{H}^n). \end{aligned} \quad (3.19)$$

С другой стороны, на пространстве $H^r(X, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C} = [H^r(X, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{R}] \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ определено естественное комплексное сопряжение, причем разложение Ходжа

$$H^r(X, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=r} H^{p,q}(X, \mathbb{C})$$

обладает свойством

$$H^{p,q}(X, \mathbb{C}) = \overline{H^{q,p}(X, \mathbb{C})} \quad (3.20)$$

(см. [8, § 4, (4.5)], [28, § 1]). Из (1.2) следует существование естественного вложения $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа $H^1(C, R^n \pi_* \mathbb{Q}) \hookrightarrow H^{n+1}(X, \mathbb{Q})$, поэтому (3.18)–(3.20) дают разложение в прямую сумму U^1 -модулей

$$H^1(C, R^n \pi_* \mathbb{C}) = H^0(C, \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{H}^n) \oplus \overline{H^0(C, \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{H}^n)}, \quad (3.21)$$

где структура пучка U^1 -модулей на $\Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{H}^n$ является тензорным произведением структур пучков U^1 -модулей на Ω_C^1 (типа $(1, 0)$) и на $\mathcal{H}^n$.

Заметим, что разложение (3.21) при $n = 1$ является аналогом изоморфизма Шимуры в теории параболических автоморфных форм одной переменной (см. [22, § 2, теорема 2.10]).

ЛЕММА 3.1. *Имеем*

$$\dim H^1(C, R^n \pi_* \mathbb{C})^{U^1} = 2 \dim H^0(C, \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{H}^n)^{U^1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\bigoplus_{\chi} V_{\chi}^{n_{\chi}}$ каноническое разложение U^1 -модуля $H^0(C, \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{H}^n)$ на изотипные компоненты, где V_{χ} – неприводимое одномерное представление, отвечающее характеру $\chi: U^1 \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$. Поскольку для любого $\theta \in \mathbb{R}$ выполняется соотношение

$$\overline{\chi(e^{i\theta})} = (\chi(e^{i\theta}))^{-1},$$

то U^1 -модуль $\overline{H^0(C, \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{H}^n)}$ имеет разложение $\bigoplus_{\chi} V_{\chi^{-1}}^{n_{\chi}}$. Поэтому

$$\dim H^0(C, \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{H}^n)^{U^1} = n_1 = \dim \overline{H^0(C, \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{H}^n)}^{U^1},$$

и утверждение леммы следует из (3.21).

ЛЕММА 3.2. *Пусть X_s – общий (в смысле А. Вейля) геометрический слой потенциально непостоянной абелевой схемы $\pi: X \rightarrow C$ относительной размерности d над гладкой проективной кривой, $j \geq 1$ – целое число. Предположим, что выполнено одно из следующих условий:*

- (i) $d \geq 2$, группа Ходжа $\mathrm{Hg}(X_s)$ является простой $\mathbb{Q}$ -группой типа C_d ;
- (ii) $d \geq 3$, $\mathrm{End}(X_s) \otimes \mathbb{Q}$ – мнимое квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$, коммутант $\mathrm{Hg}(X_s)^{\mathrm{ss}} = [\mathrm{Hg}(X_s), \mathrm{Hg}(X_s)]$ является простой $\mathbb{Q}$ -группой типа A_{d-1} и $2j - 1 \neq d$.

Тогда $H^0(C, R^{2j-1} \pi_ \mathbb{Q}) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\rho: \pi_1(C, s) \rightarrow \mathrm{GL}(H^1(X_s, \mathbb{Q}))$ – каноническое представление монодромии. Обозначим через G замыкание $\rho(\pi_1(C, s))$ в топологии Зариского группы $\mathrm{GL}(H^1(X_s, \mathbb{Q}))$. По определению имеем

$$H^i(X_s, \mathbb{Q})^G = H^i(X_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C, s)}$$

(см. [29, § 7.0]). Можно рассматривать разветвленное накрытие $C' \rightarrow C$ и абелеву схему $X' = X \times_C C' \rightarrow C'$ вместо $X \rightarrow C$. Поэтому можно считать, что G – связная $\mathbb{Q}$ -группа. Она является полупростой группой [12, следствие 4.2.9].

По теореме Делиня (см. [30, предложение 7.5], [29, теорема 7.3]) для всех t вне счетного подмножества замкнутых точек кривой C группа G является нормальной подгруппой группы Ходжа $\mathrm{Hg}(X_t)$. В частности, существует вложение $G \hookrightarrow \mathrm{Hg}(X_s)$.

Если $G = 1$, то абелева схема $\pi: X \rightarrow C$ постоянна (см. [12, п. 4.1.3.3], [30, § 5.2]), что противоречит условию леммы.

Следовательно, можно считать, что G – нетривиальная нормальная алгебраическая подгруппа простой алгебраической группы $\mathrm{Hg}(X_s)^{\mathrm{ss}}$, и поэтому $\mathrm{Lie} G = \mathrm{Lie} \mathrm{Hg}(X_s)^{\mathrm{ss}}$ – простая алгебра Ли.

В случае (i) имеем

$$\begin{aligned} H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}) &\simeq H^i(X_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C, s)} = H^i(X_s, \mathbb{Q})^G = H^i(X_s, \mathbb{Q})^{\mathrm{Lie} G} \\ &= H^i(X_s, \mathbb{Q})^{\mathrm{sp}(H^1(X_s, \mathbb{Q}))} = [\wedge^i H^1(X_s, \mathbb{Q})]^{\mathrm{sp}(H^1(X_s, \mathbb{Q}))}. \end{aligned}$$

С другой стороны, пусть Γ – образующая одномерного пространства $[\wedge^2 H^1(X_s, \mathbb{Q})]^{\mathrm{sp}(H^1(X_s, \mathbb{Q}))}$. Тогда

$$[\wedge^i H^1(X_s, \mathbb{Q})]^{\mathrm{sp}(H^1(X_s, \mathbb{Q}))} = \begin{cases} 0 & \text{для нечетного } i, \\ \mathbb{Q}\Gamma^{\wedge i/2} & \text{для четного } i \end{cases}$$

(см. [31, лемма 4.8.4]). Следовательно, $H^0(C, R^{2j-1} \pi_* \mathbb{Q}) = 0$.

В случае (ii) имеем соотношение $H^0(C, R^{2j-1} \pi_* \mathbb{Q}) = 0$, потому что $2j-1 \neq d$ (см. [16, доказательство теоремы 11.6]). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $\pi: X \rightarrow C$ – абелева схема относительной размерности d над гладкой проективной кривой C рода g , $\tau: C' \rightarrow C$ – конечный морфизм гладких проективных кривых, $\pi': X' = X \times_C C' \rightarrow C'$ – каноническая проекция расслоенного произведения. Тогда $\pi': X' \rightarrow C'$ – абелева схема экстремального типа, если и только если $\pi: X \rightarrow C$ – абелева схема экстремального типа и τ – этальный морфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (3.4) пучок алгебр Ли $R^1 \pi_* \mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} [e^* \Omega_{X/C}^1]^\vee$ ассоциирован с $\pi: X \rightarrow C$, поэтому он коммутирует с заменой базы:

$$R^1 \pi'_* \mathcal{O}_{X'} = \tau^*(R^1 \pi_* \mathcal{O}_X).$$

Следовательно,

$$-\deg c_1(R^1 \pi'_* \mathcal{O}_{X'}) = \deg \tau \cdot (-\deg c_1(R^1 \pi_* \mathcal{O}_X)). \quad (3.22)$$

С другой стороны, пусть g' – род C' . Тогда по теореме Гурвица (см. [13, гл. IV, § 2, следствие 2.4]) имеем соотношение

$$2g' - 2 = \deg \tau \cdot (2g - 2) + \delta, \quad (3.23)$$

где $\delta \geq 0$ и $\delta = 0$, если и только если τ – этальный морфизм.

Предположим, что $\pi': X' \rightarrow C'$ – абелева схема экстремального типа. Тогда (3.23) дает соотношения

$$-\deg c_1(R^1\pi'_*\mathcal{O}_{X'}) = d(g' - 1) = d \cdot \left[\deg \tau \cdot (g - 1) + \frac{\delta}{2} \right] = \deg \tau \left[d(g - 1) + \frac{d\delta}{2 \deg \tau} \right].$$

Следовательно, в силу (3.22) и (3.14) имеем

$$-\deg c_1(R^1\pi_*\mathcal{O}_X) = d(g - 1) + \frac{d\delta}{2 \deg \tau} \leq d(g - 1).$$

Поэтому

$$\delta = 0, \quad -\deg c_1(R^1\pi_*\mathcal{O}_X) = d(g - 1), \quad (3.24)$$

τ – этальный морфизм и $\pi: X \rightarrow C$ – абелева схема экстремального типа.

Наоборот, если $\pi: X \rightarrow C$ – абелева схема экстремального типа и τ – этальный морфизм, то выполняется (3.24). Следовательно, (3.22), (3.23) дают соотношение $-\deg c_1(R^1\pi'_*\mathcal{O}_{X'}) = d(g' - 1)$, и $\pi': X' \rightarrow C'$ – абелева схема экстремального типа. Теорема доказана.

§ 4. Алгебраические циклы на некоторых абелевых схемах и поверхностях экстремального типа

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть X_s – общий (в смысле А. Вейля) геометрический слой потенциально непостоянной абелевой схемы $\pi: X \rightarrow C$ относительной размерности d над гладкой проективной кривой C рода g . Предположим, что выполнено одно из следующих условий:

- (i) $d \geq 2$, группа Ходжа $\mathrm{Hg}(X_s)$ является простой $\mathbb{Q}$ -группой типа C_d ;
- (ii) $d \geq 3$, $\mathrm{End}(X_s) \otimes \mathbb{Q}$ – мнимое квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$, коммутант $\mathrm{Hg}(X_s)^{\mathrm{ss}} = [\mathrm{Hg}(X_s), \mathrm{Hg}(X_s)]$ – простая $\mathbb{Q}$ -группа типа A_{d-1} .

Тогда

$$\dim[H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{C})]^{1,1} = 2(d(g - 1) + \deg c_1(R^1\pi_*\mathcal{O}_X))$$

и $\pi: X \rightarrow C$ – абелева схема экстремального типа, если и только если выполнено равенство $[H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{C})]^{1,1} = 0$ (в этом случае $h^{1,1}(X) = \mathrm{rank} \mathrm{NS}(X) = 2$; более того, $\mathrm{NS}(X) \otimes \mathbb{Q}$ порождается классом слоя $\mathrm{cl}_X(X_s)$ и классом гиперплоского сечения).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3.1 имеем

$$\dim H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{C})^{U^1} = \dim H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{C})^{1,1} = 2 \dim H^0(C, \Omega_C^1 \otimes R^1\pi_*\mathbb{C})^{1,1}. \quad (4.1)$$

Каноническое экспоненциальное отображение определяет точную последовательность пучков сечений на C^{an} :

$$0 \rightarrow R_1\pi_*\mathbb{Z} \rightarrow \mathrm{Lie}_C(X) \rightarrow X \rightarrow 0,$$

где $R_1\pi_*\mathbb{Z} = [R^1\pi_*\mathbb{Z}]^\vee$ – локальная система, двойственная $R^1\pi_*\mathbb{Z}$, и $\mathcal{L}ie_C(X) = [e^*\Omega_{X/C}^1]^\vee$ – относительная алгебра Ли [12, п. 4.4.2]. Мы приходим к точной последовательности

$$0 \rightarrow H^0(C, R_1\pi_*\mathbb{Z}) \rightarrow H^0(C, [e^*\Omega_{X/C}^1]^\vee) \rightarrow H^0(C, X). \quad (4.2)$$

С другой стороны, поляризация $R^1\pi_*\mathbb{Q}$ определяет изоморфизм вариаций $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа [12, п. 4.2.3]:

$$[R^1\pi_*\mathbb{Q}]^\vee \xrightarrow{\sim} R^1\pi_*\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q}(1), \quad (4.3)$$

где $\mathbb{Q}(1)$ – постоянная структура Тэйта типа $(-1, -1)$. Поскольку $R^1\pi_*\mathbb{Z}$ не имеет кручения, то из (4.3) и леммы 3.2 следуют соотношения

$$H^0(C, R_1\pi_*\mathbb{Z}) \hookrightarrow H^0(C, R^1\pi_*\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q}(1)) \xrightarrow{\sim} H^0(C, R^1\pi_*\mathbb{Q}) = 0. \quad (4.4)$$

Согласно теореме Ленга–Нерона [32, гл. 6, теорема 2] группа $H^0(C, X)$ сечений абелевой схемы $\pi: X \rightarrow C$ является конечнопорожденной абелевой группой (потому что $\pi: X \rightarrow C$ не имеет нетривиальной постоянной абелевой подсхемы). Поскольку $H^0(C, [e^*\Omega_{X/C}^1]^\vee)$ – векторное пространство над $\mathbb{C}$, то из (4.2) и (4.4) следует равенство

$$H^0(C, [e^*\Omega_{X/C}^1]^\vee) = 0. \quad (4.5)$$

Элемент $e^{i\theta} \in U^1$, $\theta \in \mathbb{R}$, действует на $H^0(U, \mathcal{H}^{0,1}) = H^0(U, R^1\pi_*\mathcal{O}_X)$ по правилу $e^{i\theta} \cdot \omega^{0,1} = e^{-i\theta}\omega^{0,1}$, и он действует на $H^0(U, e^*\Omega_{X/C}^1) = H^0(U, [R^1\pi_*\mathcal{O}_X]^\vee)$ по правилу $e^{i\theta} \cdot \omega^{1,0} = e^{i\theta}\omega^{1,0}$.

Тензорно умножая точную последовательность (3.3) на Ω_C^1 , мы получим точную последовательность локально свободных когерентных пучков U^1 -модулей

$$0 \rightarrow \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} e^*\Omega_{X/C}^1 \rightarrow \Omega_C^1 \otimes R^1\pi_*\mathbb{C} \rightarrow \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} R^1\pi_*\mathcal{O}_X \rightarrow 0, \quad (4.6)$$

где $\Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} e^*\Omega_{X/C}^1$ – пучок U^1 -модулей типа $(2, 0)$ и $\Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} R^1\pi_*\mathcal{O}_X$ – пучок U^1 -модулей типа $(1, 1)$. По двойственности Серра и в силу (4.5) мы получаем соотношения

$$H^1(C, \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} e^*\Omega_{X/C}^1) = [H^0(C, [e^*\Omega_{X/C}^1]^\vee)]^\vee = 0. \quad (4.7)$$

Поскольку любое непрерывное представление компактной группы U^1 в конечномерном векторном пространстве над полем $\mathbb{C}$ вполне приводимо (см. [33, ч. I, § 4, 5]), то точная последовательность (4.6) и соотношения (4.7) дают расщепляющуюся точную последовательность U^1 -модулей

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(C, \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} e^*\Omega_{X/C}^1) &\rightarrow H^0(C, \Omega_C^1 \otimes R^1\pi_*\mathbb{C}) \\ &\rightarrow H^0(C, \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} R^1\pi_*\mathcal{O}_X) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

В частности, имеем

$$\dim[H^0(C, \Omega_C^1 \otimes R^1\pi_*\mathbb{C})]^{1,1} = \dim H^0(C, \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} R^1\pi_*\mathcal{O}_X).$$

Следовательно, (4.1) и теорема 3.1 дают соотношения

$$\begin{aligned}
 \dim[H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{C})]^{1,1} &= 2 \dim[H^0(C, \Omega_C^1 \otimes R^1\pi_*\mathbb{C})]^{1,1} \\
 &= 2 \dim H^0(C, \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} R^1\pi_*\mathcal{O}_X) = 2 \dim H^0(C, \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{H}^{0,1}) \\
 &= 2 \dim H^0(C, [R^1\pi_*\mathcal{O}_X]^\vee) + 2 \binom{d}{0} \binom{d}{1} \left(g - 1 + \frac{1}{d} \deg c_1(R^1\pi_*\mathcal{O}_X)\right) \\
 &= 2 \dim H^0(C, [R^1\pi_*\mathcal{O}_X]^\vee) + 2(d(g-1) + \deg c_1(R^1\pi_*\mathcal{O}_X)). \tag{4.8}
 \end{aligned}$$

С другой стороны, из (3.15)–(3.17) следуют соотношения

$$\begin{aligned}
 H^0(C, R^1\pi_*\mathbb{C}) &\simeq H_{\text{DR}}^0(C, E) \simeq H_{\bar{\partial}}^{0,0}(C, E) \simeq H^0(C, \Omega_C^0(E)) \\
 &= H^0(C, \mathcal{O}_C \otimes R^1\pi_*\mathbb{C}). \tag{4.9}
 \end{aligned}$$

Поэтому (4.4), (4.9) и (3.3), (3.4) дают соотношение $H^0(C, [R^1\pi_*\mathcal{O}_X]^\vee) = 0$, и (4.8) принимает вид

$$\dim[H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{C})]^{1,1} = 2(d(g-1) + \deg c_1(R^1\pi_*\mathcal{O}_X)).$$

Очевидно, что $[H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{C})]^{1,1} = 0$, если и только если $\pi: X \rightarrow C$ – абелева схема экстремального типа (в этом случае $\text{rank NS}(X) = 2$, потому что $\text{NS}(X) \otimes \mathbb{Q} = H^2(X, \mathbb{Q}) \cap H^{1,1}(X, \mathbb{C})$ по теореме Лефшеца, и $H^2(X, \mathbb{Q}) \cap H^{1,1}(X, \mathbb{C}) = [H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) \oplus H^2(C, \mathbb{Q})] \cap H^{1,1}(X, \mathbb{C})$ в силу равенства $[H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{C})]^{1,1} = 0$; с другой стороны, $H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q})$ порождается $[H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q})]$ -компонентой класса гиперплоского сечения (см. [16, доказательства теорем 11.2, 11.6]), и $H^2(C, \mathbb{Q})$ порождается классом слоя $\text{cl}_X(X_s)$). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть C – гладкая проективная кривая рода g над полем комплексных чисел, $\tau: X \rightarrow C$ – такой гладкий проективный морфизм с сечением, что все слои τ являются гладкими неприводимыми кривыми рода $d \geq 2$. Если $-\deg c_1(R^1\tau_*\mathcal{O}_X) = d(g-1)$, то якобиева схема $\pi: \text{Pic}^0(X/C) \rightarrow C$ является абелевой схемой экстремального типа, $\text{NS}(X) \otimes \mathbb{Q}$ порождается классом сечения морфизма $\tau: X \rightarrow C$ и классом слоя τ . В частности, $\text{rank NS}(X) = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Спектральная последовательность Лере

$$E_2^{p,q} = H^p(C, R^q\tau_*\mathbb{Q}) \Rightarrow H^*(X, \mathbb{Q})$$

вырождается в члене E_2 (см. [9], [10, гл. 3, § 5]), и мы имеем

$$H^2(X, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{p+q=2} H^p(C, R^q\tau_*\mathbb{Q}). \tag{4.10}$$

Фиксируем сечение $e: C \rightarrow X$ морфизма $\tau: X \rightarrow C$. Хорошо известно [34, гл. VII, § 4, теорема 9], что канонический морфизм

$$\begin{aligned}
 X_t &\rightarrow \text{Pic}^0(X_t), \\
 x_t &\mapsto \mathcal{O}_{X_t}(x_t - e(t)) \in \text{Pic}^0(X_t), \quad t \in C, \quad x_t \in X_t,
 \end{aligned}$$

определяет канонические изоморфизмы

$$\begin{aligned}
 H^1(\text{Pic}^0(X_t), \mathbb{Q}) &\simeq H^1(X_t, \mathbb{Q}), \\
 H^1(\text{Pic}^0(X_t), \mathcal{O}_{\text{Pic}^0(X_t)}) &\simeq H^1(X_t, \mathcal{O}_{X_t}).
 \end{aligned}$$

Их глобализации определяют канонический изоморфизм вариаций $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа

$$R^1\pi_*\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} R^1\tau_*\mathbb{Q} \quad (4.11)$$

и канонический изоморфизм

$$R^1\pi_*\mathcal{O}_{\mathrm{Pic}^0(X/C)} \xrightarrow{\sim} R^1\tau_*\mathcal{O}_X.$$

В частности,

$$d(g-1) = -\deg c_1(R^1\tau_*\mathcal{O}_X) = -\deg c_1(R^1\pi_*\mathcal{O}_{\mathrm{Pic}^0(X/C)}), \quad (4.12)$$

и $\pi: \mathrm{Pic}^0(X/C) \rightarrow C$ – абелева схема экстремального типа.

По теореме Море-Байи–Шпиро [5, добавление 2, теорема 2.1] имеем

$$0 \leq -\deg c_1(R^1\pi_*\mathcal{O}_{\mathrm{Pic}^0(X/C)}) \leq (d-d_0)(g-1),$$

где d_0 – относительная размерность максимальной постоянной абелевой подсхемы якобиевой схемы $\pi: \mathrm{Pic}^0(X/C) \rightarrow C$. Из (4.12) следует, что $d_0 = 0$. Поэтому $H^0(C, R^1\pi_*\mathbb{Q}) = 0$ в силу [16, лемма 2.6].

По теореме Ленга–Нерона [32, гл. 6, теорема 2] группа $H^0(C, \mathrm{Pic}^0(X/C))$ сечений морфизма $\pi: \mathrm{Pic}^0(X/C) \rightarrow C$ является конечнопорожденной абелевой группой, потому что $d_0 = 0$. Используя (4.12) и алгоритм доказательства теоремы 4.1, получим равенство

$$[H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{C})]^{1,1} = 0. \quad (4.13)$$

Поэтому (4.11) дает соотношение

$$H^1(C, R^1\tau_*\mathbb{Q}) \cap H^{1,1}(X, \mathbb{C}) = 0. \quad (4.14)$$

Очевидно, что $H^0(C, R^2\tau_*\mathbb{Q})$ и $H^2(C, \tau_*\mathbb{Q}) = H^2(C, \mathbb{Q})$ – $\mathbb{Q}$ -структуры Ходжа типа $(1, 1)$. Теорема Лефшеца, (4.10) и (4.14) дают соотношения

$$\begin{aligned} \mathrm{NS}(X) \otimes \mathbb{Q} &\xrightarrow{\sim} H^2(X, \mathbb{Q}) \cap H^{1,1}(X, \mathbb{C}) \\ &= [H^0(C, R^2\tau_*\mathbb{Q}) \oplus H^1(C, R^1\tau_*\mathbb{Q}) \oplus H^2(C, \mathbb{Q})] \cap H^{1,1}(X, \mathbb{C}) \\ &= H^0(C, R^2\tau_*\mathbb{Q}) \oplus H^2(C, \mathbb{Q}). \end{aligned}$$

Остается заметить, что

$$H^0(C, R^2\tau_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(X_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C, s)}$$

– одномерное пространство, порожденное классом сечения морфизма τ и $H^2(C, \mathbb{Q})$ порождается классом слоя τ . Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть $\tau: X \rightarrow C$ – семейство кривых, удовлетворяющее условиям теоремы 4.2. Обозначим через $[\mathrm{NS}(X) \otimes \mathbb{Q}]^\perp$ ортогональное дополнение $\mathrm{NS}(X) \otimes \mathbb{Q} \hookrightarrow H^2(X, \mathbb{Q})$ относительно индекса пересечения

$$\begin{aligned} H^2(X, \mathbb{Q}) \times H^2(X, \mathbb{Q}) &\rightarrow H^4(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Q}, \\ x' \times x'' &\mapsto \deg(x' \cup x''). \end{aligned}$$

Тогда

$$h^{1,1}(X) = 2, \quad h^{2,0}(X) = 2d(g-1)$$

и трансцендентная часть $[\mathrm{NS}(X) \otimes \mathbb{Q}]^\perp$ $\mathbb{Q}$ -структуры Ходжа $H^2(X, \mathbb{Q})$ является $[4d(g-1)]$ -мерной $\mathbb{Q}$ -структурой Ходжа типа $(2, 0) + (0, 2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\chi(V)$ – эйлерова характеристика гладкого проективного многообразия V над полем комплексных чисел. Тогда

$$\chi(X) = \chi(X_s)\chi(C)$$

(см. [35, гл. IV, § 4, теорема 6]). Следовательно,

$$2 - 2b_1(X) + b_2(X) = (2 - 2d)(2 - 2g). \quad (4.15)$$

Поскольку $H^0(C, R^1\pi_*\mathbb{Q}) = 0$, из соотношения (4.11) следует соотношение $H^0(C, R^1\tau_*\mathbb{Q}) = 0$. Следовательно,

$$H^1(X, \mathbb{Q}) = H^0(C, R^1\tau_*\mathbb{Q}) \oplus H^1(C, \mathbb{Q}) = H^1(C, \mathbb{Q})$$

и $b_1(X) = \dim H^1(C, \mathbb{Q}) = 2g$. С другой стороны, $b_2(X) = 2h^{2,0}(X) + h^{1,1}(X)$, и в силу соотношений (4.11) и (4.13) имеем

$$\begin{aligned} h^{1,1}(X) &= \dim H^0(C, R^2\tau_*\mathbb{C}) + \dim[H^1(C, R^1\tau_*\mathbb{C})]^{1,1} + \dim H^2(C, \mathbb{C}) \\ &= \dim H^0(C, R^2\tau_*\mathbb{C}) + \dim H^2(C, \mathbb{C}) = 2, \end{aligned}$$

потому что $H^0(C, R^2\tau_*\mathbb{Q})$ и $H^2(C, \mathbb{Q})$ являются одномерными $\mathbb{Q}$ -структурами Ходжа типа $(1, 1)$. Поэтому (4.15) принимает вид

$$2 - 4g + 2h^{2,0}(X) + 2 = 4dg - 4(d + g) + 4,$$

и мы имеем

$$h^{2,0}(X) = 2d(g - 1).$$

Следствие доказано.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть C – гладкая проективная кривая рода g над числовым полем $k \hookrightarrow \mathbb{C}$, $[k : \mathbb{Q}] < \infty$, $\tau : X \rightarrow C$ – такой гладкий проективный k -морфизм с сечением, что все геометрические слои τ являются гладкими неприводимыми кривыми рода $d \geq 2$. Если $-\deg c_1(R^1\tau_*\mathcal{O}_X) = d(g - 1)$, то для любого простого числа p существует канонический изоморфизм

$$\mathrm{NS}(X) \otimes \mathbb{Q}_p \xrightarrow{\sim} H_{\mathrm{et}}^2(X \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_p(1))^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}.$$

В частности, гипотеза Тэйта [6] об алгебраических циклах верна для X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 4.2 и следствию 4.1 имеем $2 = \mathrm{rank} \mathrm{NS}(X) = h^{1,1}(X \otimes_k \mathbb{C})$, и остается применить следующую лемму.

ЛЕММА 4.1. Пусть V – гладкое проективное многообразие над числовым полем $k \hookrightarrow \mathbb{C}$, $[k : \mathbb{Q}] < \infty$. Если $\mathrm{rank} \mathrm{NS}(V) = h^{1,1}(V \otimes_k \mathbb{C})$, то $\mathbb{Q}_p$ -пространство $H_{\mathrm{et}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_p(1))^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}$ порождается классами дивизоров на V . В частности, гипотеза Тэйта верна для дивизоров на V .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть k_v – пополнение поля k относительно неархимедовой точки v с полем вычетов $\kappa(v)$ характеристики p , $\bar{k}_v^\wedge$ – p -адическое пополнение алгебраического замыкания $\bar{k}_v$ поля k_v . Рассмотрим подгруппу разложения $D(\bar{v}) \hookrightarrow \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$, где $\bar{v}$ – продолжение v до нормирования поля $\bar{k}$. Хорошо известно, что

$$D(\bar{v}) = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \mid \sigma(\bar{v}) = \bar{v}\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\bar{k}_v/k_v)$$

(см. [36, гл. VII, § 1, предложение 1.2]) и имеется каноническое непрерывное действие $D(\bar{v}) \rightrightarrows \text{Gal}(\bar{k}_v/k_v)$ на $\bar{k}_v^\wedge$ (см. [37, гл. III]). Пусть $\mathbb{Z}_p^\times$ – группа единиц поля $\mathbb{Q}_p$,

$$\chi: \text{Gal}(\bar{k}_v/k_v) \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$$

– циклотомический характер группы $\text{Gal}(\bar{k}_v/k_v)$, определенный действием этой группы на модуле Тэйта $T_p(\mu) = \mathbb{Z}_p(1)$ группы μ корней из единицы. По определению имеем

$$\sigma z = z^{\chi(\sigma)}, \quad \sigma \in \text{Gal}(\bar{k}_v/k_v), \quad z \in \mu_{p^n}.$$

Обозначим через $\bar{k}_v^\wedge(q)$ поле $\bar{k}_v^\wedge$ со скрученным действием $\text{Gal}(\bar{k}_v/k_v)$: ${}^\sigma x = \chi(\sigma)^q \sigma x$.

Согласно результатам Тэйта [38, теоремы 1 и 2] имеем соотношение

$$[\bar{k}_v^\wedge(q)]^{\text{Gal}(\bar{k}_v/k_v)} = \begin{cases} k_v, & \text{если } q = 0, \\ 0, & \text{если } q \neq 0. \end{cases} \quad (4.16)$$

Основная теорема p -адической теории Ходжа дает каноническое $\text{Gal}(\bar{k}_v/k_v)$ -эквивариантное разложение [39]:

$$H_{\text{et}}^m \left(V \otimes_k \bar{k}_v, \mathbb{Z}_p \right) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bar{k}_v^\wedge \rightrightarrows \bigoplus_{a+b=m} H^a \left(V \otimes_k k_v, \Omega_{V \otimes_k k_v/k_v}^b \right) \otimes_{k_v} \bar{k}_v^\wedge(-b).$$

В частности, мы получаем изоморфизмы $\text{Gal}(\bar{k}_v/k_v)$ -модулей

$$\begin{aligned} H_{\text{et}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_p(1)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bar{k}_v^\wedge &\rightrightarrows H_{\text{et}}^2(V \otimes_k \bar{k}_v, \mathbb{Z}_p(1)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bar{k}_v^\wedge \\ &\rightrightarrows \bigoplus_{a+b=2} H^a(V \otimes_k k_v, \Omega_{V \otimes_k k_v/k_v}^b) \otimes_{k_v} \bar{k}_v^\wedge(-b+1). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Хорошо известно, что каноническое отображение

$$\text{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_p \rightarrow H_{\text{et}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_p(1))^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$$

инъективно. Поэтому из соотношений (4.16), (4.17) следует, что

$$\begin{aligned} \text{rank NS}(V) &\leq \dim_{\mathbb{Q}_p} H_{\text{et}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_p(1))^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \leq \dim_{\mathbb{Q}_p} H_{\text{et}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_p(1))^{D(\bar{v})} \\ &= \dim_{\mathbb{Q}_p} H_{\text{et}}^2(V \otimes_k \bar{k}_v, \mathbb{Q}_p(1))^{\text{Gal}(\bar{k}_v/k_v)} \\ &\leq \dim_{k_v} [H_{\text{et}}^2(V \otimes_k \bar{k}_v, \mathbb{Z}_p(1)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bar{k}_v^\wedge]^{\text{Gal}(\bar{k}_v/k_v)} \\ &= \dim_{k_v} \left[\bigoplus_{a+b=2} H^a(V \otimes_k k_v, \Omega_{V \otimes_k k_v/k_v}^b) \otimes_{k_v} \bar{k}_v^\wedge(-b+1) \right]^{\text{Gal}(\bar{k}_v/k_v)} \\ &= \dim_{k_v} H^1(V \otimes_k k_v, \Omega_{V \otimes_k k_v/k_v}^1) = \dim_{\mathbb{C}} H^{1,1}(V \otimes_k \mathbb{C}). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Поскольку $\text{rank NS}(V) = \dim_{\mathbb{C}} H^{1,1}(V \otimes_k \mathbb{C})$, то в силу (4.18) имеем

$$\text{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_p \rightrightarrows H_{\text{et}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_p(1))^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}.$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть C – гладкая проективная кривая рода g над числовым полем $k \hookrightarrow \mathbb{C}$, $[k : \mathbb{Q}] < \infty$, $\pi: X \rightarrow C$ – потенциально непостоянная абелева k -схема относительной размерности $d \geq 2$. Предположим, что общий геометрический слой X_s (в смысле А. Вейля) удовлетворяет одному из следующих условий:

- (i) $d \geq 2$, группа Ходжа $\mathrm{Hg}(X_s)$ является простой $\mathbb{Q}$ -группой типа C_d ;
- (ii) $d \geq 3$, $\mathrm{End}(X_s) \otimes \mathbb{Q}$ – мнимое квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$, коммутант $\mathrm{Hg}(X_s)^{\mathrm{ss}} = [\mathrm{Hg}(X_s), \mathrm{Hg}(X_s)]$ является простой $\mathbb{Q}$ -группой типа A_{d-1} .

Если $\pi: X \rightarrow C$ – абелева схема экстремального типа, то для любого простого числа p существует канонический изоморфизм

$$\mathrm{NS}(X) \otimes \mathbb{Q}_p \xrightarrow{\sim} H_{\mathrm{et}}^2(X \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_p(1))^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}.$$

В частности, гипотеза Тэйта [6] верна для дивизоров на X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 4.1 имеем $2 = \mathrm{rank} \mathrm{NS}(X) = h^{1,1}(X \otimes_k \mathbb{C})$, и остается применить лемму 4.1.

Следуя [40, гл. IV, § 1] и [41, § 1], напомним конструкцию абелевой схемы $\pi: X \rightarrow C$ типа Куги–Шимур.

Пусть B – неопределенная кватернионная алгебра с делением над полем $\mathbb{Q}$, G – группа элементов с нормой 1 в B , $\mathcal{O}$ – максимальный порядок в B , Γ – свободная от кручения нормальная подгруппа конечного индекса в $\mathcal{O} \cap G$, k – фиксированное положительное целое число, $W = B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^k$, $W(\mathbb{R}) = W \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$, $\Lambda = \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^k$ рассматривается как решетка, естественным образом вложенная в W и $W(\mathbb{R})$, $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(W)$ – представление, определенное умножением слева группы G на B , $j: B \hookrightarrow M_2(\mathbb{R})$ – фиксированное вложение $\mathbb{Q}$ -алгебр, $\mathfrak{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ – комплексная верхняя полуплоскость.

Тогда j вкладывает Γ в качестве дискретной подгруппы в $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, так что Γ действует на $\mathfrak{H}$ как группа дробно-линейных преобразований и фактор $C = \Gamma \backslash \mathfrak{H}$ снабжается структурой гладкой комплексной проективной алгебраической кривой. С другой стороны, ρ ограничивается до представления Γ на Λ , так что можно рассмотреть полупрямое произведение $\Gamma \ltimes \Lambda$, действующее на $\mathfrak{H} \times W(\mathbb{R})$ по правилу

$$(\gamma, \lambda) \cdot (\tau, \omega) = (j(\gamma)\tau, \rho(\gamma)\omega + \lambda).$$

При этом фактор $X = \Gamma \ltimes \Lambda \backslash \mathfrak{H} \times W(\mathbb{R})$ снабжен естественной структурой гладкого расслоения на торы над C .

Чтобы описать комплексную структуру на X , заметим прежде всего, что вместе с выбором базиса для $\mathbb{Q}^k$ вложение j задает отождествление $W(\mathbb{R})$ с $M_2(\mathbb{R}) \oplus \dots \oplus M_2(\mathbb{R}) = M_2(\mathbb{R})^{\oplus k}$. Для любого $\tau \in \mathfrak{H}$ положим [40, гл. IV, § 1, (48)]:

$$j_{\tau}: W(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^{2k},$$

$$W(\mathbb{R}) = M_2(\mathbb{R})^{\oplus k} \ni \alpha = \left(\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_3 & \eta_4 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \xi_{2k-1} & \xi_{2k} \\ \eta_{2k-1} & \eta_{2k} \end{pmatrix} \right) \mapsto (-1 \ \tau) \alpha,$$

где $(-1 \ \tau)$ – матрица с одной строкой длиной 2. Таким образом, отождествляя $\tau \times W(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathfrak{H} \times W(\mathbb{R})$ с $j_{\tau}(W(\mathbb{R}))$, мы получим комплексную структуру $J: \mathfrak{H} \times$

$W(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{H} \times \mathbb{C}^{2k}$, по отношению к которой $\Gamma \ltimes \Lambda$ действует как дискретная группа голоморфных автоморфизмов, где

$$(\gamma, \lambda) \cdot (\tau, z) = (j(\gamma)\tau, (c\tau + d)^{-1}z + j_{j(\gamma)\tau}(\lambda)),$$

когда

$$j(\gamma) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Как комплексное многообразие X можно отождествить с $\Gamma \ltimes \Lambda \backslash \mathfrak{H} \times \mathbb{C}^{2k}$.

В действительности М. Куга и Г. Шимура (см. [40], [42], [43]) показали, что X может быть вложено в подходящее проективное пространство как комплексное проективное многообразие со структурой семейства поляризованных абелевых многообразий. Пусть $\pi: X \rightarrow C$ обозначает морфизм, индуцированный естественной проекцией $\mathfrak{H} \times \mathbb{C}^{2k} \rightarrow \mathfrak{H}$; тогда если $\tau_s \in \mathfrak{H}$ спускается до $s \in C$, то слой $X_s = \pi^{-1}(s)$ можно отождествить с абелевым многообразием $X_{\tau_s} = \mathbb{C}^{2k}/j_{\tau_s}(\Lambda)$, кольцо эндоморфизмов которого естественным образом содержит $M_k(\mathcal{O})$. В дополнение к этому, если Γ – главная конгруэнц-подгруппа в $\mathcal{O} \cap G$, то Шимура [44] показал, что C , X и $\pi: X \rightarrow C$ могут быть определены над некоторым конечным абелевым расширением поля $\mathbb{Q}$.

Хорошо известно, что

$$X_s \xrightarrow{\sim} X_s^{(1)} \oplus \cdots \oplus X_s^{(1)},$$

где $X_s^{(1)}$ – абелева поверхность, кольцо эндоморфизмов которой содержит $\mathcal{O}$ (см. [45]). Более того, X удовлетворяет обычной гипотезе Ходжа [45] и общей гипотезе Ходжа [41].

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть $\pi: X \rightarrow C$ – семейство типа Куги–Шимуры, ассоциированное с неопределенной кватернионной алгеброй с делением над $\mathbb{Q}$. Тогда оно является абелевой схемой экстремального типа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X_s – общий геометрический слой морфизма $\pi: X \rightarrow C$ (в смысле А. Вейля). Поскольку топологическое пространство X_s канонически отождествляется с $W(\mathbb{R})/\Lambda$, то естественно отождествить $H_1(X_s, \mathbb{Z})$ с Λ , тем самым индуцируя отождествление $H_1(X_s, \mathbb{Q})$ с $W = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ и $H^i(X_s, \mathbb{Q})$ с $\wedge^i W^\vee$. С другой стороны, Γ можно отождествить с $\pi_1(C, s)$, где $\gamma \in \Gamma$ соответствует классу образа в C пути в $\mathfrak{H}$, соединяющего τ_s с $j(\gamma)\tau_s$. При этих отождествлениях действие монодромии группы $\pi_1(C, s)$ на $H^i(X_s, \mathbb{Q})$ превращается в действие $\wedge^i(\rho^\vee)$ группы Γ на $\wedge^i W^\vee$, индуцированное ρ .

Из этих отождествлений следует, что

$$H^0(C, R^1\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^1(X_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C, s)} = 0. \quad (4.19)$$

Действительно, пространство $H^1(X_s, \mathbb{C})^{\pi_1(C, s)}$ Γ -инвариантных векторов в $H^1(X_s, \mathbb{C})$ совпадает с пространством $H^1(X_s, \mathbb{C})^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ (см. [45, с. 3]). Из (4.3) следует, что

$$\begin{aligned} H^1(X_s, \mathbb{C})^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})} &= H^1(X_s, \mathbb{R})^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} H_1(X_s, \mathbb{R}(-1))^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \\ &\xrightarrow{\sim} W(\mathbb{R})^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}(-1) = [[M_2(\mathbb{R}) \oplus \cdots \oplus M_2(\mathbb{R})]^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}] \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}(-1) = 0, \end{aligned}$$

так как $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ действует на $M_2(\mathbb{R})$ умножением слева и $M_2(\mathbb{R})^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})} = 0$ (действительно, $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, и матрица $T - 1$ обратима, поэтому из соотношения $TA = A$ для некоторой матрицы $A \in M_2(\mathbb{R})$ следует равенство $A = 0$).

Р. Холл и М. Куга доказали, что для абелевой схемы $\pi: X \rightarrow C$ типа Куги–Шимур $H^{j,j}(X, \mathbb{C})$ порождается над $\mathbb{C}$ классами алгебраических циклов коразмерности j на X . Более того,

$$H^{j,j}(X, \mathbb{C}) = H^{\langle 0, 2j \rangle}(X, \mathbb{C}) \oplus H^{\langle 2, 2j-2 \rangle}(X, \mathbb{C}),$$

где $H^{\langle 0, 2j \rangle}(X, \mathbb{C}) = H^0(C, R^{2j}\pi_*\mathbb{C})$, $H^{\langle 2, 2j-2 \rangle}(X, \mathbb{C}) = H^2(C, R^{2j-2}\pi_*\mathbb{C})$ и $H^{\langle 2, 2j-2 \rangle}(X, \mathbb{C})$ порождается классами когомологий алгебраических циклов, содержащихся в X_s (см. [45], [41, теорема В]). В частности,

$$[H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{C})]^{1,1} = 0. \quad (4.20)$$

Используя (4.19) и алгоритм доказательства теоремы 4.1, получим соотношение

$$\dim [H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{C})]^{1,1} = 2(d(g-1) + \deg c_1(R^1\pi_*\mathcal{O}_X)).$$

Следовательно, (4.20) показывает, что $\pi: X \rightarrow C$ – абелева схема экстремального типа. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4.6. Пусть X_s – общий (в смысле А. Вейля) геометрический слой потенциально непостоянной абелевой схемы $\pi: X \rightarrow C$ относительной размерности d над гладкой проективной кривой C рода g . Фиксируем целое число $j \in \{1, 2, \dots, d\}$ и предположим, что выполнено одно из следующих условий:

- (i) $d \geq 2$, группа Ходжа $\mathrm{Hg}(X_s)$ является простой $\mathbb{Q}$ -группой типа C_d ;
- (ii) $d \geq 3$, $\mathrm{End}(X_s) \otimes \mathbb{Q}$ – мнимое квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$, коммутант $\mathrm{Hg}(X_s)^{\mathrm{ss}} = [\mathrm{Hg}(X_s), \mathrm{Hg}(X_s)]$ является простой алгебраической $\mathbb{Q}$ -группой типа A_{d-1} , $d \notin \{2j-2, 2j\}$.

Если $H^0(C, \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{H}^{j-1,j}) = 0$, то $\pi: X \rightarrow C$ – абелева схема экстремального типа и $H^{2j}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{j,j}(X, \mathbb{C})$ порождается классами алгебраических циклов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 3.1 имеем

$$\begin{aligned} \dim H^0(C, \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{H}^{j-1,j}) &= \dim H^0(C, \wedge^{j-1} R^1\pi_*\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_C} \wedge^j [R^1\pi_*\mathcal{O}_X]^\vee) \\ &+ \binom{d}{j-1} \binom{d}{j} \left(g-1 + \frac{1}{d} \deg c_1(R^1\pi_*\mathcal{O}_X) \right). \end{aligned}$$

Поскольку $H^0(C, \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{H}^{j-1,j}) = 0$ по условию теоремы и поскольку $g-1 + \frac{1}{d} \deg c_1(R^1\pi_*\mathcal{O}_X) \geq 0$ согласно (3.14), то мы получаем равенство $-\deg c_1(R^1\pi_*\mathcal{O}_X) = d(g-1)$. Следовательно, $\pi: X \rightarrow C$ – абелева схема экстремального типа.

Рассмотрим точную последовательность пучков U^1 -модулей

$$0 \rightarrow \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} F^p \mathcal{H}^{2j-1} \rightarrow \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} F^{p-1} \mathcal{H}^{2j-1} \rightarrow \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{H}^{p-1, 2j-p} \rightarrow 0. \quad (4.21)$$

Очевидно, что

$$H^0(C, \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} F^{2j-1} \mathcal{H}^{2j-1}) = H^0(C, \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{H}^{2j-1, 0})$$

является U^1 -модулем типа $(2j, 0)$. Поскольку любое непрерывное представление компактной группы U^1 в конечномерном векторном пространстве над $\mathbb{C}$ вполне приводимо (см. [33, ч. I, § 4, 5]), то точная последовательность U^1 -модулей

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(C, \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} F^{2j-1} \mathcal{H}^{2j-1}) &\rightarrow H^0(C, \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} F^{2j-2} \mathcal{H}^{2j-1}) \\ &\rightarrow H^0(C, \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{H}^{2j-2,1}), \end{aligned}$$

ассоциированная с точной последовательностью (4.21) при $p = 2j - 1$, показывает, что $H^0(C, \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} F^{2j-2} \mathcal{H}^{2j-1})$ является U^1 -модулем типа $(2j, 0) + (2j - 1, 1)$; по индукции пространство $H^0(C, \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} F^j \mathcal{H}^{2j-1})$ является U^1 -модулем типа $(2j, 0) + (2j - 1, 1) + \dots + (j + 1, j - 1)$.

Поскольку $H^0(C, \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{H}^{j-1,j}) = 0$ по условию теоремы, то точная последовательность (4.21) при $p = j$ дает равенство

$$H^0(C, \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} F^{j-1} \mathcal{H}^{2j-1}) = H^0(C, \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} F^j \mathcal{H}^{2j-1}).$$

Следовательно, $H^0(C, \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} F^{j-1} \mathcal{H}^{2j-1})$ является U^1 -модулем типа $(2j, 0) + (2j - 1, 1) + \dots + (j + 1, j - 1)$.

Для $p < j$ легко показать, используя индукцию, что $H^0(C, \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} F^{p-1} \mathcal{H}^{2j-1})$ является U^1 -модулем типа $(2j, 0) + (2j - 1, 1) + \dots + (j + 1, j - 1) + (j - 1, j + 1) + \dots + (p, 2j - p)$. В частности, имеем

$$[H^0(C, \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{H}^{2j-1})]^{j,j} = [H^0(C, \Omega_C^1 \otimes R^{2j-1} \pi_* \mathbb{C})]^{j,j} = 0.$$

Следовательно, выполняется

$$[H^1(C, R^{2j-1} \pi_* \mathbb{C})]^{j,j} = [H^1(C, R^{2j-1} \pi_* \mathbb{C})]^{U^1} = 0 \quad (4.22)$$

согласно лемме 3.1. В силу (1.1) и (4.22) имеем

$$\begin{aligned} H^{2j}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{j,j}(X, \mathbb{C}) \\ = [H^0(C, R^{2j} \pi_* \mathbb{Q}) \cap H^{j,j}(X, \mathbb{C})] \oplus [H^2(C, R^{2j-2} \pi_* \mathbb{Q}) \cap H^{j,j}(X, \mathbb{C})]. \end{aligned}$$

Остается заметить, что в случае (i) пространства $H^0(C, R^{2j} \pi_* \mathbb{Q})$ и $H^0(C, R^{2j-2} \pi_* \mathbb{Q})$ порождаются алгебраическими классами (см. [16, доказательство теоремы 11.2]); в случае (ii) пространства $H^0(C, R^{2j} \pi_* \mathbb{Q})$ и $H^0(C, R^{2j-2} \pi_* \mathbb{Q})$ также порождаются алгебраическими классами, потому что $d \notin \{2j - 2, 2j\}$ (см. [16, доказательство теоремы 11.6]). Из (1.15) следует, что $H^2(C, R^{2j-2} \pi_* \mathbb{Q}) = \text{cl}_X(X_s) \cup H^0(C, R^{2j-2} \pi_* \mathbb{Q})$ порождается алгебраическими классами. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть C – гладкая проективная кривая рода g , X_s – общий (в смысле А. Вейля) геометрический слой потенциально непостоянной абелевой схемы $\pi: X \rightarrow C$ относительной размерности d . Фиксируем целое число $j \in \{1, 2, \dots, d\}$ и предположим, что выполнено одно из следующих условий:

- (i) $d \geq 2$, группа Ходжа $\text{Hg}(X_s)$ является простой $\mathbb{Q}$ -группой типа C_d ;
- (ii) $d \geq 3$, $\text{End}(X_s) \otimes \mathbb{Q}$ – мнимое квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$, коммутант $\text{Hg}(X_s)^{\text{ss}} = [\text{Hg}(X_s), \text{Hg}(X_s)]$ является простой алгебраической $\mathbb{Q}$ -группой типа A_{d-1} , $d \notin \{2j - 2, 2j\}$.

$$E_{\text{сму}} - \deg c_1(R^1\pi_*\mathcal{O}_X) = d(g-1) \text{ и}$$

$$H^0(C, \wedge^{j-1} R^1\pi_*\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_C} \wedge^j [R^1\pi_*\mathcal{O}_X]^\vee) = 0,$$

то $H^{2j}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{j,j}(X, \mathbb{C})$ порождается классами алгебраических циклов.

Действительно, $\pi: X \rightarrow C$ – абелева схема экстремального типа. Поэтому согласно следствию 3.1 в рассматриваемом случае имеем

$$\dim H^0(C, \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{H}^{j-1,j}) = \dim H^0(C, \wedge^{j-1} R^1\pi_*\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_C} \wedge^j [R^1\pi_*\mathcal{O}_X]^\vee) = 0.$$

Остается применить теорему 4.6.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. В силу (3.4)–(3.6) и (3.8) имеем

$$[H^0(C, \wedge^{j-1} R^1\pi_*\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_C} \wedge^j [R^1\pi_*\mathcal{O}_X]^\vee) = 0] \Leftrightarrow [H^0(C, \mathcal{H}^{j,j-1}) = 0].$$

Список литературы

1. W. V. D. Hodge, “The topological invariants of algebraic varieties”, *Proc. Int. Congr. Math.* (Cambridge, MA, 1950), **1**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1952, 182–192.
2. A. Weil, *Foundations of algebraic geometry*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., **29**, Amer. Math. Soc., New York, 1946.
3. S. Abdulali, “Algebraic cycles in families of abelian varieties”, *Canad. J. Math.*, **46**:6 (1994), 1121–1134.
4. Y. André, “Pour une théorie inconditionnelle des motifs”, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, **83** (1996), 5–49.
5. L. Moret-Bailly, *Pinceaux de variétés abéliennes*, Astérisque, **129**, Société Mathématique de France, Paris, 1985.
6. J. T. Tate, “Algebraic cycles and poles of zeta functions”, *Proc. Conf. Purdue Univ.* (Lafayette, IN, 1963), *Arithmetical Algebraic Geometry*, Harper, New York, 1965, 93–110.
7. B. B. Gordon, “A survey of the Hodge conjecture for abelian varieties”, Appendix in: J. D. Lewis, *A survey of the Hodge conjecture*, Second edition, CRM Monograph Series, **10**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 297–356.
8. Шэн-Шэнь Чжэнь, *Комплексные многообразия*, ИЛ, М., 1961; пер. с англ.: Shiing-shen Chern, *Complex manifolds*, Textos de Matemática, **5**, Instituto de Física e Matemática, Recife, 1959.
9. P. Deligne, “Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence des suites spectrales”, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, **35** (1968), 259–278.
10. Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии*, Мир, М., 1982; пер. с англ.: Ph. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Pure and Applied Mathematics, Wiley, New York, 1978.
11. S. L. Kleiman, “Algebraic cycles and the Weil conjectures”, *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North-Holland, Amsterdam; Masson, Paris, 1968, 359–386.
12. П. Делинь, “Теория Ходжа. II”, *Математика. Сб. пер.*, **17**:5 (1973), 3–56; пер. с франц.: P. Deligne, “Théorie de Hodge. II”, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, **40** (1971), 5–57.
13. Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия*, Мир, М., 1981; пер. с англ.: R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, **52**, Springer, New York–Heidelberg, 1977.

14. D. I. Lieberman, "Numerical and homological equivalence of algebraic cycles on Hodge manifolds", *Amer. J. Math.*, **90**:2 (1968), 366–374.
15. С. Г. Танкеев, "О численной эквивалентности алгебраических циклов на потенциально простых абелевых схемах простой относительной размерности", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:1 (2005), 145–164; англ. пер.: S. G. Tankeev, "On the numerical equivalence of algebraic cycles on potentially simple Abelian schemes of prime relative dimension", *Izv. Math.*, **69**:1 (2005), 143–162.
16. С. Г. Танкеев, "О стандартной гипотезе для комплексных абелевых схем над гладкими проективными кривыми", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:3 (2003), 183–224; англ. пер.: S. G. Tankeev, "On the standard conjecture for complex Abelian schemes over smooth projective curves", *Izv. Math.*, **67**:3 (2003), 597–635.
17. С. Г. Танкеев, "Циклы на простых абелевых многообразиях простой размерности", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **46**:1 (1982), 155–170; англ. пер.: S. G. Tankeev, "Cycles on simple abelian varieties of prime dimension", *Math. USSR-Izv.*, **20**:1 (1983), 157–171.
18. Ф. А. Гриффитс, "Доклад о вариации структуры Ходжа (обзор основных результатов и обсуждение открытых проблем и гипотез)", *УМН*, **25**:3 (1970), 175–228; пер. с англ.: P. A. Griffiths, "Periods of integrals on algebraic manifolds: summary of main results and discussion of open problems", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **76**:2 (1970), 228–296.
19. Ph. A. Griffiths, "Periods of integrals on algebraic manifolds. I: Construction and properties of the modular varieties", *Amer. J. Math.*, **90** (1968), 568–626; Ph. A. Griffiths, "Periods of integrals on algebraic manifolds II: Local study of the period mapping", *Amer. J. Math.*, **90** (1968), 805–865.
20. C. Voisin, "Variations of Hodge structure and algebraic cycles", *Proc. Intern. Congr. Math.*, vol. 1 (Zürich, 1994), Birkhäuser, Basel, 1995, 706–715.
21. Д. Мамфорд, *Абелевы многообразия*, Мир, М., 1971; пер. с англ.: D. Mumford, *Abelian varieties*, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, **5**, Oxford University Press, London, 1970.
22. П. Делинь, "Модулярные формы и l -адические представления", В кн.: Серр Ж.-П., *Абелевы l -адические представления и эллиптические кривые*, Мир, М., 1973, 154–186.
23. Ю. И. Манин, "Лекции о K -функторе в алгебраической геометрии", *УМН*, **24**:5 (1969), 3–86; англ. пер.: Yu. I. Manin, "Lectures on the K -functor in algebraic geometry", *Russian Math. Surveys*, **24**:5 (1969), 1–89.
24. J. D. Lewis, *A survey of the Hodge conjecture*, Second edition, CRM Monograph Series, **10**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
25. Ф. Хирцебрух, *Топологические методы в алгебраической геометрии*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: F. Hirzebruch, *Topological methods in algebraic geometry*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1966.
26. У. Фултон, *Теория пересечений*, Мир, М., 1989; пер. с англ.: W. Fulton, *Intersection theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), **2**, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
27. Р. Уэллс, *Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях*, Мир, М., 1976; пер. с англ.: R. O. Jr. Wells, *Differential analysis on complex manifolds*, Prentice-Hall Series in Modern Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.
28. Ph. Griffiths, "Hodge theory and geometry", *Bull. London Math. Soc.*, **36**:6 (2004), 721–757.
29. Ю. Г. Зархин, "Веса простых алгебр Ли в когомологиях алгебраических многообразий", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48**:2 (1984), 264–304; англ. пер.: Yu. G. Zarhin, "Weights of simple Lie algebras in the cohomology of algebraic varieties", *Math. USSR-Izv.*, **24**:2 (1985), 245–281.

30. P. Deligne, “La conjecture de Weil pour les surfaces $K3$ ”, *Invent. Math.*, **15**:3 (1971), 206–226.
31. С. Г. Танкеев, “Об алгебраических циклах на поверхностях и абелевых многообразиях”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **45**:2 (1981), 398–434; англ. пер.: S. G. Tankeev, “On algebraic cycles on surfaces and abelian varieties”, *Math. USSR-Izv.*, **18**:2 (1982), 349–380.
32. С. Ленг, *Основы диофантовой геометрии*, Мир, М., 1986; пер. с англ.: S. Lang, *Fundamentals of Diophantine geometry*, Springer-Verlag, New York, 1983.
33. Ж.-П. Серр, *Линейные представления конечных групп*, Мир, М., 1970; пер. с франц.: J.-P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*. I: *Représentations et caractères*. II: *Complements*. III: *Introduction à la théorie de Brauer*, Collection Methodes, Hermann, Paris, 1967.
34. Ж.-П. Серр, *Алгебраические группы и поля классов*, Мир, М., 1968; пер. с франц.: J.-P. Serre, *Groupes algébriques et corps de classes*, Publications de l’institut de mathématique de l’université de Nancago, **VII**, Hermann, Paris, 1959.
35. И. Р. Шафаревич, *Алгебраические поверхности*, Тр. МИАН, **75**, Наука, М., 1965.
36. Дж. Касселс, А. Фрелих, *Алгебраическая теория чисел*, Мир, М., 1969; пер. с англ.: J. W. S. Cassels, A. Frohlich, *Algebraic number theory*, Proceedings of an instructional conference organized by the London Mathematical Society (a NATO Advanced Study Institute) with the support of the International Mathematical Union, Academic Press, London–New York, 1967.
37. Ж.-П. Серр, *Абелевы l -адические представления и эллиптические кривые*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: J.-P. Serre, *Abelian l -adic representations and elliptic curves*, Benjamin, New York–Amsterdam, 1968.
38. Дж. Тэйт, “ p -делимые группы”, *Математика. Сб. пер.*, **13**:2 (1969), 3–25; пер. с англ.: J. Tate, “ p -divisible groups”, *Proc. conf. on local fields (Dreibergen 1966)*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1967, 158–183.
39. G. Faltings, “ p -adic Hodge theory”, *J. Amer. Math. Soc.*, **1**:1 (1988), 255–299.
40. M. Kuga, *Fibre varieties over a symmetric space whose fibres are abelian varieties*, Lecture Notes. Univ. Chicago, **1–2**, Univ. Chicago, Chicago, 1964.
41. В. В. Гордон, “Topological and algebraic cycles in Kuga–Shimura varieties”, *Math. Ann.*, **279**:3 (1988), 395–402.
42. M. Kuga, G. Shimura, “On the zeta function of a fibre variety whose fibres are Abelian varieties”, *Ann. of Math. (2)*, **82** (1965), 478–539.
43. G. Shimura, “On analytic families of polarized abelian varieties and automorphic functions”, *Ann. of Math. (2)*, **78** (1963), 149–192.
44. G. Shimura, “On the field of definition for a field of automorphic functions, I”, *Ann. of Math. (2)*, **80** (1964), 160–189; G. Shimura, “On the field of definition for a field of automorphic functions, II”, **81** (1965), 124–165.
45. R. Hall, M. Kuga, “Algebraic cycles in a fiber variety”, *Sci. Papers College Gen. Ed. Univ. Tokyo*, **25**:1 (1975), 1–6.

С. Г. ТАНКЕЕВ (S. G. TANKEEV)
 Владимирский государственный университет
 E-mail: tankeev@vpti.vladimir.ru

Поступило в редакцию
 23.01.2006
 27.12.2006