Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Чахкиев, Оценки осциллирующих интегралов с выпуклой фазой, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2006, том 70, выпуск 1, 183–220

DOI: <https://doi.org/10.4213/im754>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 11:46:58

УДК 511

М. А. Чахкиев

Оценки осциллирующих интегралов с выпуклой фазой

Рассмотрены методы оценки одномерных осциллирующих интегралов с выпуклой фазой и амплитудами ограниченной вариации или амплитудами из классов Липшица. В частности, улучшена оценка интеграла Пирси для значений параметров, близких к каустике. Кроме того, рассмотрены методы оценки n -мерных осциллирующих интегралов.

Библиография: 23 наименования.

Введение

Осциллирующим интегралом называется интеграл вида

$$I_s = \int_M u(x) \exp\{i\lambda f(x)\} dx, \quad (0.1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^s$, $M \subset \mathbb{R}^s$; функция $u = u(x)$ называется *амплитудой*, вещественная функция $f(x)$ называется *фазой*, $\lambda \geq 1$ – *большим параметром*. Амплитуда и фаза могут зависеть от m -мерного параметра t .

Как отмечено в работе [5], различают две общие задачи об оценке осциллирующего интеграла:

- 1) задача об асимптотической оценке осциллирующего интеграла при $\lambda \rightarrow \infty$ и фиксированном значении параметра t (индивидуальные оценки);
- 2) задача о равномерной оценке при $t \in T \subset \mathbb{R}^m$.

В настоящей статье исследуется задача 2). Первые равномерные оценки осциллирующих интегралов были получены в работах И. М. Виноградова и И. Г. Ван дер Корпута в связи с решением задачи о числе целых точек в плоских областях [13], [14]. Методы, использованные в [13], [14], были развиты Г. И. Архиповым, А. А. Карацубой и В. Н. Чубариковым в работах [1]–[4], [8], [9], что, в частности, позволило получить полное решение проблемы Хуа Ло-Кена о показателе сходимости особого интеграла проблемы Терри в одномерном случае [1]. Используя методы, разработанные этими авторами в теории чисел для оценки одномерных осциллирующих интегралов, и некоторые модификации метода стационарной фазы, Д. А. Попов [6], [7] исследовал задачу о поточечной сходимости алгоритмов восстановления в двумерной радоновской томографии и задачу о поточечной сходимости сферических методов суммирования интегралов и рядов Фурье характеристических функций областей в $\mathbb{R}^n$.

Известные методы оценки осциллирующих интегралов (см. также [15], [12]) не применимы для недифференцируемых функций $f(x)$. Однако выпуклости

функции $f(x)$ достаточно для существования эффекта интерференции положительных и отрицательных значений осциллирующего интеграла. В статье получены оценки одномерных осциллирующих интегралов с фазами, имеющими конечное число интервалов выпуклости и вогнутости. Получены также оценки кратных осциллирующих интегралов с фазой, имеющей вырожденные и неизолированные особые точки.

§ 1. Некоторые основные результаты и определения

Согласно принципу стационарной фазы основной вклад в величину осциллирующего интеграла дает окрестность стационарной точки. Если фаза зависит от параметров, то для некоторых значений параметров, “близких” к каустическим, основной вклад в интеграл могут давать и нестационарные точки. Для того чтобы выделить такие точки, введем определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Точка $x_0 \in [a, b]$ называется *правильной особой точкой функции* $f(x)$, *непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если в некоторой окрестности этой точки функция $|f(x) - f(x_0)|$ выпуклая. (При $x_0 = a$ или $x_0 = b$ рассматривается соответственно правосторонняя или левосторонняя окрестность точки x_0 .)

Правильная особая точка может не быть стационарной. Например, для функции $f(x) = x^3 + tx$, $t > 0$, точка $x_0 = 0$ не является стационарной, но является правильной особой точкой, и при малых значениях параметра t вклад в осциллирующий интеграл определяется окрестностью именно этой точки.

Аналогично определим понятие правильной особой точки для функции нескольких переменных. Пусть $D \in \mathbb{R}^n$ – выпуклая область, ∂D – граница области D , функция $f(x)$ непрерывна в области D и $x_0 \in \partial D \cup D$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Точка x_0 называется *правильной особой точкой функции* $f(x)$ *в области* D , если функция $|f(x) - f(x_0)|$ выпукла на любом отрезке $[x_0, x]$, где $x \in \partial D$.

Нетрудно видеть, что невырожденная стационарная точка является правильной особой точкой. В то же время правильной особой точкой может быть и вырожденная, и неизолированная особая точка. В частности, для функции двух переменных $f(x, y) = x^2 y^3$ вырожденная и неизолированная особая точка $(0, 0)$ является правильной особой точкой.

Для оценки осциллирующих интегралов введем следующую величину, характеризующую колебания функции $f(x)$. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Для любого отрезка $[\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, обозначим через $\omega(f, [\alpha, \beta])$ колебание функции $f(x)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, т. е.

$$\omega(f, [\alpha, \beta]) = \max_{\alpha \leq x \leq \beta} f(x) - \min_{\alpha \leq x \leq \beta} f(x).$$

Для любого положительного числа ε положим

$$\delta(\varepsilon) = \delta_{[a, b]}(\varepsilon, f) = \max\{\beta - \alpha \mid [\alpha, \beta] \subset [a, b], \omega(f, [\alpha, \beta]) \leq \varepsilon\}. \quad (1.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Величина $\delta(\varepsilon) = \delta_{[a,b]}(\varepsilon, f)$, $\varepsilon > 0$, называется *модулем осцилляции функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$* .

В п. 2.1 приводятся простые свойства модуля осцилляции. В п. 2.2 доказывается следующая теорема, позволяющая получить оценку сверху осциллирующего интеграла с амплитудой ограниченной вариации.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть отрезок $[a, b]$ можно разбить на n отрезков, на каждом из которых функция $f(x)$ выпукла (вверх или вниз) и монотонна, и пусть функция $u(x)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$. Тогда

$$\left| \int_a^b u(x) \exp\{i\lambda f(x)\} dx \right| \leq 4n \left(\max_{a \leq x \leq b} |u(x)| + \text{var}(u, [a, b]) \right) \delta\left(\frac{\pi}{\lambda}\right).$$

Теорема 1.1 сводит оценку сверху модуля осциллирующего интеграла к оценке модуля осцилляции, т. е. к решению некоторой экстремальной задачи теории приближения на заданном классе фаз. Таким образом можно получить многие известные результаты и их обобщения. В п. 2.3 вычислены модули осцилляции для некоторых классов фаз. Так, для фаз, определяемых ограничением $|f^{(n)}(x)| \geq A$, $a < x < b$, вычисление модуля осцилляции сводится к решению известной задачи о наилучшем приближении в среднем на отрезке фазы $f(x)$ многочленами. Из теоремы 1.1 в этом случае имеем

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию

$$|f^{(n)}(x)| \geq A, \quad a < x < b,$$

а функция $u(x)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$. Тогда

$$\left| \int_a^b u(x) \exp\{if(x)\} dx \right| \leq Cn^2 \left(\max_{a \leq x \leq b} |u(x)| + \text{var}(u, [a, b]) \right) A^{-1/n}.$$

Это утверждение обобщает результат, доказанный в [1, с. 16], для функций $u(x)$, непрерывных на отрезке $[a, b]$ и имеющих конечное число интервалов монотонности. В п. 2.3, 3) вычисляется модуль осцилляции фазы $f(x)$, определяемой ограничением на действие линейного дифференциального оператора с вещественными коэффициентами. Из теоремы 1.1 в этом случае следует

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $P_n(z) = a_1 z + \dots + a_n z^n$ — многочлен степени n с вещественными коэффициентами, функция $f(x)$ удовлетворяет условию

$$\left| P_n\left(\frac{d}{dx}\right) f(x) \right| \geq A > 0, \quad a < x < b,$$

число интервалов монотонности производной $f'(x)$ не превосходит K , а функция $u(x)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$. Тогда

$$\left| \int_a^b u(x) \exp\{if(x)\} dx \right| \leq C(n, K, u) \left(\frac{\omega(b-a)}{\pi} + 1 \right) A^{-1/n}, \quad (1.2)$$

где ω — максимальная мнимая часть корней многочлена $P_n(z)$.

При $\omega = 0$, т. е. когда все корни многочлена $P_n(z)$ вещественные, теорема 1.2 доказана в [1, с. 24].

В п. 2.3, 4) приведена оценка осциллирующего интеграла с фазой, производная которой имеет разрывы в любой окрестности стационарной точки. Для фазы $f(x) = e^{-1/x^2}$ стационарная точка $x_0 = 0$ имеет вырождение бесконечного порядка. В п. 2.3, 5) для этой фазы приводится точная оценка

$$\left| \int_{-1/2}^{1/2} u(x) e^{i\lambda f(x)} dx \right| \leq C(n, u) (\ln \lambda)^{-1/2}.$$

В п. 2.3, 2) вычисляется модуль осцилляции полиномиальной фазы. Тогда из теоремы 1.2 получим

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Пусть функция $u(x)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$, $f(x)$ – многочлен с вещественными коэффициентами. Тогда

$$|I| = \left| \int_a^b u(x) \exp\{i\lambda f(x)\} dx \right| \leq C_n(u) \left(\sum_{x_c} \frac{1}{|\lambda f''(x_c)|^{1/2} + \dots + |\lambda f^{(n)}(x_c)|^{1/n}} + \sum_{x_p} \frac{1}{|\lambda f'(x_p)| + |\lambda f'''(x_p)|^{1/3} + \dots + |\lambda f^{(n)}(x_p)|^{1/n}} \right), \quad (1.3)$$

где первая сумма берется по всем точкам x_c таким, что $f'(x_c) = 0$, а вторая – по всем точкам x_p таким, что $f''(x_p) = 0$, $C_n(u)$ – постоянная, зависящая только от n и $u(x)$.

В частности, для произвольного многочлена степени $n \geq 2$ с простыми корнями производной имеем

$$|I| = \left| \int_a^b u(x) \exp\{i\lambda f(x)\} dx \right| \leq C_n(u) \left(\sum_{x_c} |\lambda f''(x_c)|^{-1/2} + \sum_{x_p} |\lambda f'(x_p)|^{-1} \right). \quad (1.4)$$

Сравним эту оценку с оценкой из работы [17], полученной для произвольной фазы с простыми особенностями:

$$|I| = \left| \int_a^b u(x) \exp\{i\lambda f(x)\} dx \right| \leq C(u, f) \sum_{x_c} |\lambda f''(x_c)|^{-1/2}. \quad (1.5)$$

Как отмечалось В. П. Паламоновым и Д. А. Поповым, оценка (1.5) не верна в предположении ограниченности константы $C(u, f)$. Из оценки (1.4) следует, что, возможно, это связано с отсутствием в (1.5) второй суммы из соотношения (1.4).

В § 2 следствие 1.2 применяется к задаче об оценке интеграла Пирси, т. е. одномерного интеграла с фазой $f(x) = x^4/4 + \alpha x^2/2 + \beta x$. Интеграл Пирси рассматривался в работах [17], [11], [5]. Однако оставался открытым вопрос об истинных границах областей, близких к каустике $A = \alpha^3/27 + \beta^2/4 = 0$, в которых вклад в интеграл не определяется стационарной точкой. В работе [5] показано (это следует также из следствия 1.2), что для значений параметров

$$(\alpha, \beta) \in T_1, \quad T_1 = \left\{ (\alpha, \beta) : |\alpha| \geq \lambda^{-1/2}, |A| \leq \frac{1}{12} \lambda^{-2/3} |\beta|^{10/9} \right\},$$

выполнена оценка

$$|I(u)| \leq C(u)\lambda^{-1/3}|\alpha|^{-1/6}. \quad (1.6)$$

Д. А. Попов [5], [18] высказал предположение, что ширина области, в которой интеграл имеет порядок $O(\lambda^{-1/3})$, экспоненциально мала. Однако это предположение не верно. В п. 2.3, 2) показано, что оценку (1.6) в области T_1 нельзя улучшить.

В работе [5] доказано, что неравенство (1.5) будет справедливо, если в области значений параметров удалить некоторую окрестность каустики. В комментариях к одной задаче В. И. Арнольда, связанной с оценкой (1.5), Д. А. Попов [18] высказал гипотезу, что ширина этой области экспоненциально мала. Как показывает пример области T_1 , эта гипотеза не верна уже для многочленов. Для области $T_2 = \{(\alpha, \beta) : \lambda^{-2/3}|\beta|^{10/9} \leq A \leq \lambda^{-1/2}|\beta|^{4/3}, |\beta| \geq \lambda^{-3/4}\}$ в [5] получена оценка

$$|I| = O\left(\frac{1}{\lambda A}\right). \quad (1.7)$$

В п. 2.3, 2) показано, что для осциллирующих интегралов с амплитудой ограниченной вариации границы области T_2 точные. Однако если амплитуда из класса $\text{Lip}_\alpha[a, b]$ и $\alpha > 1/2$, то, как показано в п. 2.4, верхнюю границу области T_2 можно уменьшить до $A \leq C\lambda^{-\frac{2}{3}+\varepsilon}$, где C – абсолютная постоянная, а ε – произвольное, сколь угодно малое положительное число. При $A \geq C\lambda^{-\frac{2}{3}+\varepsilon}$ имеет место оценка

$$|I| = O\left(\frac{1}{\lambda^{1/2}}\right)$$

с постоянной, зависящей от ε , что улучшает оценку интеграла Пирси, приведенную в [5].

В п. 2.4 рассматриваются одномерные осциллирующие интегралы с выпуклой фазой и амплитудой из классов Липшица. Основным результатом здесь является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть функция $u(x)$ принадлежит классу $\text{Lip}_\alpha[0, b)$, $v(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[0, b)$, функция $f(x)$ монотонно возрастает, выпукла вниз на промежутке $[0, b)$, $f(0) = 0$, и существует интеграл

$$m_0 = \int_0^b \left| \frac{x}{f(x)} \right|^\alpha dx = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ b_1 \rightarrow b}} \int_\varepsilon^{b_1} \left| \frac{x}{f(x)} \right|^\alpha dx.$$

Тогда для осциллирующего интеграла

$$I = \int_0^b u(x)v(x) \exp\{i\lambda f(x)\} dx \quad (1.8)$$

выполнена оценка

$$\begin{aligned} I &= u(0) \int_0^b v(x) \exp\{i\lambda f(x)\} dx + R, \\ |R| &\leq \frac{8(2\pi)^\alpha C m_0 M}{\lambda^\alpha}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где C – постоянная из определения класса Липшица, а

$$M = \max_{0 \leq x < b} |v(x)| + \text{var}(v, [0, b)).$$

Если функция $\left| \frac{x}{f(x)} \right|^\alpha$ не интегрируема в нуле, то m_0 в (1.9) необходимо заменить на

$$m_\delta = \int_\delta^b \left| \frac{x}{f(x)} \right|^\alpha dx + \frac{\lambda^\alpha \delta^{1+\alpha}}{\pi^\alpha},$$

где $\delta = \delta(\pi/\lambda)$ – модуль осцилляции функции $f(x)$.

Применим теорему 1.3 к функции $f(x)$, удовлетворяющей, кроме условий теоремы, еще условию

$$f(x) \geq Cx^\beta, \quad x \in [0, 1],$$

при некоторых положительных постоянных C и β , $\beta \geq 1$. Тогда для интеграла

$$I = \int_0^1 u(x) \exp\{i\lambda f(x)\} dx$$

имеем

$$I = C(\lambda)u(0) + R,$$

где

$$|R| = \begin{cases} O\left(\frac{1}{\lambda^\alpha}\right) & \text{при } 1 \leq \beta < 1 + \frac{1}{\alpha}, \\ O\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda^\alpha}\right) & \text{при } \beta = 1 + \frac{1}{\alpha}, \\ O\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{1+\alpha}{\beta}}}\right) & \text{при } \beta > 1 + \frac{1}{\alpha}, \end{cases}$$

$$C(\lambda) = \int_0^1 \exp\{i\lambda f(x)\} dx = O(\lambda^{-1/\beta}).$$

В частности, при $\alpha = 1/2$, $\beta = 2$, $f(x) = x^2$ имеем

$$\int_0^1 u(x) \exp\{i\lambda x^2\} dx = \frac{\sqrt{\pi} e^{i\pi/4}}{2\lambda^{1/2}} u(0) + O\left(\frac{1}{\lambda^{1/2}}\right). \quad (1.10)$$

Оценка (1.10) по существу является следующим результатом Л. Карлесона.

ТЕОРЕМА 1.4 [23]. Пусть $\psi(t, x)$ – обобщенное решение задачи Коши:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{i} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \psi(0, x) = f(x).$$

Если функция $f(x)$ финитна и оценка $|f(x) - f(y)| = o(|x - y|^{1/2})$ равномерна, то выполнено свойство Фату, т. е. $\psi(t, x)$ стремится к $f(x)$ равномерно. Если же функция $f(x)$ финитна и $|f(x) - f(y)| = O(|x - y|^{1/2})$, то $\psi(t, x)$ ограничена, но свойство Фату может не выполняться.

Пример, приведенный в работе [23], показывает, что в равенстве (1.10) знак O нельзя заменить на o , т. е. оценка (1.10) точная.

В п. 2.5 рассмотрены кратные осциллирующие интегралы.

§ 2. Оценки осциллирующих интегралов

2.1. Свойства модуля осцилляции функции. Следующая лемма дает простые свойства модуля осцилляции функции.

ЛЕММА 2.1. *При любом положительном λ имеем*

$$\delta(\varepsilon, \lambda f) = \delta\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}, f\right). \quad (2.1)$$

Кроме того, если отрезок $[a, b]$ не содержит интервалов, на которых функция $f(x)$ постоянна, то $\delta(\varepsilon, f) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство (2.1) следует из определения модуля осцилляции (1.1). Докажем вторую часть леммы. Действительно, пусть, от противного, для некоторой последовательности $\{\varepsilon_n\}$ положительных чисел таких, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$, имеем $\delta_n = \delta(\varepsilon_n) = \beta_n - \alpha_n \geq \delta_0 > 0$. Поскольку последовательности $\{\beta_n\}$ и $\{\alpha_n\}$ ограничены, то найдется подпоследовательность $\{n_k\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$, такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{n_k} = \alpha_0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_{n_k} = \beta_0.$$

Ясно, что $\beta_0 - \alpha_0 \geq \delta_0 > 0$. Переходя к пределу при $k \rightarrow +\infty$ в неравенстве $\omega(f, [\alpha_{n_k}, \beta_{n_k}]) \leq \varepsilon_{n_k}$, получим

$$\omega(f, [\alpha_0, \beta_0]) = \max_{\alpha_0 \leq x \leq \beta_0} f(x) - \min_{\alpha_0 \leq x \leq \beta_0} f(x) \leq 0,$$

т. е. $f(x) = \text{const}$ при $x \in [\alpha_0, \beta_0]$. Полученное противоречие доказывает лемму.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. На бесконечном промежутке $[a, +\infty)$ величина $\delta(\varepsilon) = \delta_{[a, +\infty)}(\varepsilon, f)$ может быть бесконечной при любом $\varepsilon > 0$ даже для ограниченной и непрерывной функции. Достаточно рассмотреть функцию $f(x) = \arctg x$, $x \in [0, +\infty)$. Однако если при некотором $c \geq a$ функция $f(x)$ строго монотонно возрастает и выпукла вниз или строго монотонно убывает и выпукла вверх на промежутке $[c, +\infty)$, то $\delta(\varepsilon) = \delta_{[a, +\infty)}(\varepsilon, f)$ конечна при любом $\varepsilon > 0$ и $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Действительно, пусть функция $f(x)$ монотонно возрастает и выпукла вниз на промежутке $[c, +\infty)$, $c \geq a$. Ясно, что тогда $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Для заданного положительного числа ε определим $c_1 = c_1(\varepsilon)$ из условия

$$f(c_1) - f(c) = \varepsilon.$$

Покажем, что

$$\delta_{[a, +\infty)}(\varepsilon, f) = \delta_{[a, c_1]}(\varepsilon, f). \quad (2.2)$$

Пусть от противного

$$\delta_{[a, +\infty)}(\varepsilon, f) > \delta_{[a, c_1]}(\varepsilon, f). \quad (2.3)$$

Тогда найдется отрезок $[\alpha, \beta]$ такой, что $[\alpha, \beta] \not\subset [a, c_1]$, $\beta - \alpha > c - c_1$ и

$$\omega(f, [\alpha, \beta]) \leq \varepsilon. \quad (2.4)$$

Поскольку $[\alpha, \beta] \not\subset [a, c_1]$, то $\beta > c_1$. Ясно, что $\alpha > c$, иначе

$$\omega(f, [\alpha, \beta]) = \max_{\alpha \leq x \leq \beta} f(x) - \min_{\alpha \leq x \leq \beta} f(x) \geq f(\beta) - f(c) > f(c_1) - f(c) = \varepsilon$$

в силу монотонности $f(x)$, что противоречит (2.4). Функция $f(x)$ выпукла вниз на промежутке $[c, +\infty)$. Так как $\alpha > c$ и $\beta > c$, то наклон хорды с концами в точках $(c, f(c))$ и $(c_1, f(c_1))$ меньше, чем наклон хорды с концами в точках $(\alpha, f(\alpha))$ и $(\beta, f(\beta))$, т. е.

$$\frac{f(c_1) - f(c)}{c_1 - c} < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Учитывая, что $\beta - \alpha > c_1 - c$, отсюда получим

$$f(\beta) - f(\alpha) > \frac{\beta - \alpha}{c_1 - c} (f(c_1) - f(c)) > \varepsilon,$$

что противоречит (2.4). Из полученного противоречия следует, что

$$\delta_{[a, +\infty)}(\varepsilon, f) = \delta_{[a, c_1]}(\varepsilon, f),$$

и, следовательно, в этом случае для модуля осцилляции выполнены те же свойства, что и для модуля осцилляции по конечному отрезку. Аналогично рассматривается случай, когда функция $f(x)$ убывает и выпукла вверх на промежутке $[c, +\infty)$. Отметим, что это требование выполнено, в частности, для любого многочлена степени $n \geq 1$.

2.2. Оценки осциллирующих интегралов с амплитудой ограниченной вариации. Сформулируем следующую лемму.

ЛЕММА 2.2. Пусть функция $u(x)$ положительна и монотонно убывает на отрезке $[a, b]$, функция $f(x)$ выпукла вниз и монотонно возрастает на $[a, b]$. Тогда для интеграла

$$I = \int_a^b u(x) \exp\{i\lambda f(x)\} dx$$

справедлива оценка

$$|I| \leq 2u(a)\delta\left(\frac{\pi}{\lambda}\right), \quad (2.5)$$

где $\delta(\pi/\lambda) = \delta_{[a, b]}(\pi/\lambda, f)$ – модуль осцилляции функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности будем считать, что $a = 0$, $f(0) = 0$. Рассмотрим интеграл

$$I_1 = \int_0^b u(x) \sin(\lambda f(x)) dx.$$

Пусть $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots \leq b$ – последовательные корни уравнения $\lambda f(t) = \pi k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ (если при $k \geq 1$ корней нет, то положим $t_1 = b$). Функция

$$\varphi(t) = \int_a^t u(x) \sin(\lambda f(x)) dx$$

возрастает на интервалах (t_k, t_{k+1}) при нечетном k и убывает при четном k . Кроме того, максимумы $\varphi(t_{2k+1})$ функции $\varphi(t)$ образуют монотонно убывающую, а минимумы $\varphi(t_{2k})$ – монотонно возрастающую последовательности. Действительно, пусть функция $f(x)$ имеет монотонно возрастающую производную $f'(x)$. Тогда

$$\begin{aligned}\varphi(t_{k+2}) - \varphi(t_k) &= \int_{t_{k+1}}^{t_{k+2}} u(x) \sin(\lambda f(x)) dx + \int_{t_k}^{t_{k+1}} u(x) \sin(\lambda f(x)) dx \\ &= \int_{\pi(k+1)}^{\pi(k+2)} \frac{u(x(t)) \sin t}{\lambda f'(x(t))} dt + \int_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{u(x(t)) \sin t}{\lambda f'(x(t))} dt \\ &= (-1)^{k+1} \int_0^\pi \left[\frac{u(x(\tau + \pi(k+1)))}{\lambda f'(x(\tau + \pi(k+1)))} - \frac{u(x(\tau + \pi k))}{\lambda f'(x(\tau + \pi k))} \right] \sin \tau d\tau\end{aligned}$$

и, следовательно, $\varphi(t_{k+2}) - \varphi(t_k) \geq 0$ при четном k и $\varphi(t_{k+2}) - \varphi(t_k) \leq 0$ при нечетном k . В общем случае функцию можно приблизить средними Стеклова, сохраняющими монотонность и выпуклость.

Из доказанного следует, что при $t \geq t_{2k+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$,

$$\varphi(t_{2k}) \leq \varphi(t) \leq \varphi(t_{2k+1}).$$

В частности, при $k = 0$ и $t = b$ получим

$$0 \leq \int_0^b u(x) \sin(\lambda f(x)) dx \leq \int_0^{t_1} u(x) \sin(\lambda f(x)) dx \leq u(0)t_1.$$

Поскольку $\lambda f(t_1) = \pi$, то в силу выпуклости функции $f(x)$ следует, что $\delta(\pi/\lambda) = t_1$, т. е.

$$|I_1| \leq u(0)\delta(\pi/\lambda).$$

Аналогично можно рассмотреть интеграл

$$I_2 = \int_0^b u(x) \cos(\lambda f(x)) dx.$$

Оценка (2.5) доказана.

Пусть теперь функция $u(x)$ имеет ограниченное полное изменение на отрезке $[a, b]$. Тогда $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$, где $u_1(x)$ и $u_2(x)$ – монотонно возрастающие функции. Полагая

$$M = \max_{a \leq x \leq b} |u(x)| + \text{var}(u, [a, b]),$$

где $\text{var}(u, [a, b])$ – полное изменение $u(x)$ на отрезке $[a, b]$, имеем

$$|u(x)| = [M - u_2(x)] - [M - u_1(x)] = v_2(x) - v_1(x),$$

где $v_2(x)$ и $v_1(x)$ – неотрицательные монотонно убывающие функции, причем $\max_{a \leq x \leq b} v_1(x) \leq M$ и $\max_{a \leq x \leq b} v_2(x) \leq M$. Применяя лемму 2.2, получим

$$|I| = \left| \int_a^b u(x) \exp\{i\lambda f(x)\} dx \right| \leq 4M\delta\left(\frac{\pi}{\lambda}\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям леммы 2.2, а функция $u(x)$ имеет ограниченное изменение на отрезке $[a, b]$. Тогда

$$|I| = \left| \int_a^b u(x) \exp\{i\lambda f(x)\} dx \right| \leq 4M\delta\left(\frac{\pi}{\lambda}\right),$$

где $M = \max_{a \leq x \leq b} |u(x)| + \text{var}(u, [a, b])$, $\delta(\pi/\lambda) = \delta_{[a, b]}(\pi/\lambda, f)$ – модуль осцилляции функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Пусть функция $f(x)$ монотонна (возрастает или убывает) и выпукла (вверх или вниз). Тогда она при соответствующем выборе знаков: $\pm f(\pm x)$, удовлетворяет требованиям леммы 2.2, т. е. лемма 2.2 и следствие 2.1 справедливы и в этом случае.

Из леммы 2.2 и замечания 2.2 непосредственно следует теорема 1.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Теорема 1.1 допускает обобщение и на бесконечный промежуток $[a, +\infty)$ при условии, что функция $f(x)$ удовлетворяет требованиям замечания 2.1.

Из теоремы 1.1 следуют некоторые известные результаты и их обобщения. Для этого достаточно вычислить модуль осцилляции соответствующих фаз или классов фаз.

2.3. Вычисление модуля осцилляции для некоторых классов функций. Рассмотрим несколько примеров вычисления модуля осцилляции функций.

1) Пусть функция $f(x)$ имеет при $a \leq x \leq b$ непрерывную производную порядка $n > 1$ и при некотором $A > 0$ выполнено неравенство $|f^{(n)}(x)| \geq A$, $a < x < b$. Тогда

$$\delta\left(\frac{\pi}{\lambda}\right) = \delta_{[a, b]}\left(\frac{\pi}{\lambda}, f\right) = \max\left\{\beta - \alpha \mid [\alpha, \beta] \subset [a, b], \omega(f, [\alpha, \beta]) \leq \frac{\pi}{\lambda}\right\}.$$

Пусть $[\alpha, \beta]$ – тот отрезок, на котором достигается максимум разности $\beta - \alpha = \delta = \delta(\pi/\lambda)$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\lambda} &= \max_{\alpha \leq x \leq \beta} f(x) - \min_{\alpha \leq x \leq \beta} f(x) = 2 \min_{-\infty < c < +\infty} \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |f(x) - c| \\ &= 2 \min_{-\infty < c < +\infty} \max_{0 \leq t \leq 1} |f(\alpha + \delta t) - c|. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Пусть P_n – множество многочленов степени $n - 1$. Учитывая, что класс функций с условием $|f^{(n)}(x)| \geq A$, $a < x < b$, содержит вместе с функцией $f(x)$ и функцию $f(x) + P(x)$, где $P(x) \in P_n$, из (2.6) получаем неравенства

$$\frac{\pi}{\lambda} \geq 2 \inf_{P(t) \in P_n} \max_{0 \leq t \leq 1} |f(\alpha + \delta t) - P(t)| \geq 2 \inf_{P(t) \in P_n} \int_0^1 |f(\alpha + \delta t) - P(t)| dt. \quad (2.7)$$

Покажем, что нижняя грань в правой части (2.7) достигается для многочлена $q(t)$, интерполирующего функцию $f(\alpha + \delta t)$ в корнях многочлена Чебышева

2-го рода, наименее уклоняющегося от нуля на отрезке $[0, 1]$ в среднем. Действительно, пусть $l(t) = (t - t_1) \dots (t - t_n)$, где $0 < t_1 < \dots < t_n < 1$ – корни многочлена Чебышева. Тогда функция

$$h(t) = f(\alpha + \delta t) - q(t) = f(\alpha + \delta t) - \sum_{k=1}^n \frac{f(\alpha + \delta t_k) l(t)}{(t - t_k) l'(t_k)}$$

имеет простые корни в точках t_k , $k = 1, \dots, n$, и не имеет других корней, так как в противном случае по теореме Роля функция

$$h^{(n)}(t) = \delta^n f^{(n)}(\alpha + \delta t)$$

имела бы корень внутри интервала $(0, 1)$, что невозможно ввиду условия $|f^{(n)}(x)| \geq A$. Следовательно, с точностью до знака

$$\text{sign } h(t) = \text{sign } l(t).$$

Учитывая, что для многочлена $l(t)$, равного с точностью до постоянного множителя многочлену Чебышева 2-го рода, выполнено условие

$$\int_0^1 P(t) \text{sign } l(t) dt = 0,$$

для любого многочлена $P(t) \in P_n$ получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(\alpha + \delta t) - P(t)| dt &= \int_0^1 [f(\alpha + \delta t) - P(t)] \text{sign}(f(\alpha + \delta t) - P(t)) dt \\ &\geq \int_0^1 [f(\alpha + \delta t) - P(t)] \text{sign } h(t) dt = \int_0^1 f(\alpha + \delta t) \text{sign } h(t) dt \\ &= \int_0^1 [f(\alpha + \delta t) - q(t)] \text{sign } h(t) dt = \int_0^1 |h(t)| dt. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\min_{P(t) \in P_n} \int_0^1 |f(\alpha + \delta t) - P(t)| dt = \int_0^1 |h(t)| dt. \quad (2.8)$$

Вычислим последний интеграл в равенстве (2.8). Пусть $\tau \in (t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, \dots, n$, $t_0 = 0$, $t_{n-1} = 1$, – произвольная точка. Рассмотрим функцию

$$F(t) = h(t) - \frac{h(\tau)}{l(\tau)} l(t).$$

Функция $F(t)$ имеет $n + 1$ корень $\tau, t_1, \dots, t_n$. Из теоремы Роля следует, что найдется точка $\xi = \xi(\tau)$, $0 < \xi < 1$, такая, что

$$F^{(n)}(\xi) = h^{(n)}(\xi) - \frac{h(\tau)}{l(\tau)} l^{(n)}(\xi) = \delta^n f^{(n)}(\alpha + \delta \xi) - \frac{h(\tau)}{l(\tau)} n! = 0.$$

Отсюда имеем

$$h(\tau) = \frac{\delta^n}{n!} f^{(n)}(\alpha + \delta \xi) l(\tau)$$

и

$$\int_0^1 |h(\tau)| d\tau = \int_0^1 \left| \frac{\delta^n}{n!} f^{(n)}(\alpha + \delta\xi) l(\tau) \right| d\tau \geq \frac{\delta^n A}{n!} \int_0^1 |l(\tau)| d\tau. \quad (2.9)$$

Учитывая, что

$$l(\tau) = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{\sin(n+1) \arccos(2t-1)}{\sqrt{1-(2t-1)^2}},$$

и вычисляя последний интеграл в (2.9), из соотношений (2.7) и (2.8) получим

$$\frac{\pi}{\lambda} \geq \frac{\delta^n A}{n! 2^n}.$$

Следовательно,

$$\delta \leq C \frac{n}{\lambda^{1/n} A^{1/n}}, \quad (2.10)$$

где C – абсолютная постоянная. Отсюда и из теоремы 1.1 получим следствие 1.1.2) Пусть $f(x)$ – многочлен степени n . Положим

$$H_\alpha = \sum_{k=1}^n \left| \frac{\lambda f^{(k)}(\alpha)}{k!} \right|^{1/k},$$

и пусть $P_{n+1}(H_\alpha)$ – множество многочленов $P(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0$ степени n с условием

$$\sum_{k=1}^n |a_k|^{1/k} = H_\alpha.$$

Так же, как и в п. 1), для модуля осцилляции

$$\delta\left(\frac{\pi}{\lambda}\right) = \delta_{[a,b]}\left(\frac{\pi}{\lambda}, f\right) = \delta_{[a,b]}(\pi, \lambda f)$$

и экстремального отрезка получим

$$\begin{aligned} \pi &\geq 2 \min_{-\infty < C < +\infty} \max_{0 \leq t \leq 1} |\lambda f(\alpha + \delta t) - C| \\ &= 2 \min_{-\infty < C < +\infty} \max_{0 \leq t \leq 1} \left| \lambda f(\alpha) + \frac{\lambda f'(\alpha)}{1!} \delta t + \dots + \frac{\lambda f^{(n)}(\alpha)}{n!} \delta^n t^n - C \right| \\ &\geq 2 \inf_{P(t) \in P_{n+1}(\delta H_\alpha)} \max_{0 \leq t \leq 1} |P(t)|. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |P(t)| = \max_{0 \leq t \leq 1} |a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0| \rightarrow \min \quad (2.12)$$

при ограничениях

$$\sum_{k=1}^n |a_k|^{1/k} = \delta H_\alpha. \quad (2.13)$$

Покажем, что решением задачи (2.12), (2.13) является многочлен

$$q(t) = \gamma T_n(2t-1) = \sum_{k=0}^n b_k t^k,$$

где $T_n(t) = \cos n \arccos t$ – многочлен Чебышева 1-го рода, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[-1, 1]$ в равномерной метрике, а положительное число γ выбрано так, чтобы выполнялись ограничения (2.13). Пусть, от противного, для некоторого многочлена

$$P(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k, \quad \sum_{k=1}^n |a_k|^{1/k} = \delta H_\alpha,$$

выполнено неравенство $\max_{0 \leq t \leq 1} |P(t)| < \gamma$. В силу условия

$$\sum_{k=1}^n |a_k|^{1/k} = \sum_{k=1}^n |b_k|^{1/k}$$

найдется индекс m такой, что $|a_m| \geq |b_m|$, при этом $a_m \neq 0$, так как иначе $b_m = 0$, что невозможно, поскольку многочлен Чебышева $T_n(t)$ имеет n корней внутри интервала $(-1, 1)$, и, следовательно, многочлен $q(t) = \gamma T_n(2t - 1)$ имеет n положительных корней.

Рассмотрим многочлен

$$Q(t) = q(t) - \frac{b_m}{a_m} P(t) = \sum_{k=0}^n b_k t^k - \frac{b_m}{a_m} \sum_{k=0}^n a_k t^k.$$

Поскольку $|b_m/a_m| \leq 1$, то многочлен $Q(t)$ имеет n положительных корней, расположенных между $n+1$ точками альтернанса многочлена $q(t)$, что невозможно, так как коэффициент при t^m многочлена $Q(t)$ равен нулю. Полученное противоречие доказывает, что решением задачи (2.12), (2.13) является многочлен $q(t) = \gamma \cos n \arccos(2t - 1)$. Из соотношений (2.11)–(2.13) имеем

$$\pi \geq 2\gamma. \quad (2.14)$$

Так как

$$\sum_{k=1}^n |b_k|^{1/k} = \sum_{k=1}^n \left| \frac{q^{(k)}(0)}{k!} \right|^{1/k} = \sum_{k=1}^n \left| \frac{\gamma \cdot 2^k T_n^{(k)}(1)}{k!} \right|^{1/k} = \delta H_\alpha,$$

то

$$\delta = \frac{\sum_{k=1}^n |\gamma \cdot 2^k T_n^{(k)}(1)|/k!}{H_\alpha}$$

и из неравенства (2.14) получим

$$\delta \leq \frac{\sum_{k=1}^n |\pi \cdot 2^{k-1} T_n^{(k)}(1)/k!|^{1/k}}{H_\alpha}. \quad (2.15)$$

Полагая

$$H = \min_{a \leq \alpha \leq b} H_\alpha = \min_{a \leq \alpha \leq b} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\lambda f^{(k)}(\alpha)}{k!} \right|^{1/k},$$

из неравенства (2.15) окончательно получим

$$\delta = \delta_{[a,b]} \left(\frac{\pi}{\lambda}, f \right) \leq \frac{\sum_{k=1}^n |\pi \cdot 2^{k-1} T_n^{(k)}(1)/k!|^{1/k}}{H}, \quad (2.16)$$

где $T_n(t) = \cos n \arccos t$ – многочлен Чебышева.

Как следует из приведенных выше оценок, неравенство (2.16) точное, т. е.

$$\sup \delta_{[a,b]} \left(\frac{\pi}{\lambda}, f \right) = \min \left\{ b - a \mid \sum_{k=1}^n \left| \frac{\pi \cdot 2^{k-1} T_n^{(k)}(1)}{k!} \right|^{1/k} H^{-1} \right\};$$

здесь верхняя грань берется по всем многочленам $f(x)$ степени n с условием $\min_{a \leq \alpha \leq b} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\lambda f^{(k)}(\alpha)}{k!} \right|^{1/k} = H$, где H – фиксированное положительное число, а экстремальным является нормированный многочлен Чебышева. Кроме того, если $b = +\infty$ (см. замечание 2.1), то

$$\sup \delta_{[a,+\infty]} \left(\frac{\pi}{\lambda}, f \right) = \sum_{k=1}^n \left| \frac{\pi \cdot 2^{k-1} T_n^{(k)}(1)}{k!} \right|^{1/k} H^{-1}. \quad (2.17)$$

Из теоремы 1.1 и оценки (2.16) имеем

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть функция $u(x)$ имеет ограниченное изменение на отрезке $[a, b]$, $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x$ – многочлен степени n с вещественными коэффициентами и

$$H = \min_{a \leq x \leq b} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\lambda f^{(k)}(x)}{k!} \right|^{1/k}.$$

Тогда для интеграла $I = \int_a^b u(x) \exp\{i\lambda f(x)\} dx$ справедлива оценка

$$|I| \leq \min \left\{ b - a \mid 8(n-1) \left(\max_{a \leq x \leq b} |u(x)| + \text{var}(u, [a, b]) \right) \delta \right\}, \quad (2.18)$$

где

$$\delta = \sum_{k=1}^n \left| \pi \cdot 2^{k-1} \frac{T_n^{(k)}(1)}{k!} \right|^{1/k} H^{-1}.$$

Оценка (2.18) получена в [1, с. 19] для непрерывных функций $u(x)$, имеющих конечное число интервалов монотонности.

При использовании оценки (2.18) сложность состоит в необходимости нахождения минимума

$$H = \min_{a \leq \alpha \leq b} H_\alpha = \min_{a \leq \alpha \leq b} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\lambda f^{(k)}(\alpha)}{k!} \right|^{1/k}. \quad (2.19)$$

Изложенный выше метод доказательства оценки (2.18) позволяет сделать важное для приложений уточнение. Поскольку для монотонно возрастающей (убывающей) и выпуклой вниз (вверх) на отрезке $[a, b]$ функции экстремальным при вычислении модуля осцилляции является отрезок $[a, a + \delta]$, а для монотонно убывающей (возрастающей) и выпуклой вниз (вверх) на отрезке $[a, b]$ функции – отрезок $[b - \delta, b]$, то минимум при вычислении H необходимо брать только в точках, в которых меняется характер монотонности или характер выпуклости функции, т. е. в правильных особых точках. С учетом этого получаем следствие 1.2.

В частности, для произвольного многочлена степени $n \geq 2$ с простыми корнями имеем неравенство

$$|I| = \left| \int_a^b u(x) \exp\{i\lambda f(x)\} dx \right| \leq C_n(u) \left(\sum_{x_c} |\lambda f''(x_c)|^{-1/2} + \sum_{x_p} |\lambda f'(x_p)|^{-1} \right), \quad (2.20)$$

в котором, в отличие от неравенства Колин де Вердье, учитывается вклад в интеграл нестационарных особых точек.

Применим следствие 1.2 к задаче об оценке интеграла Пирси, т.е. одномерного интеграла с фазой $f(x) = x^4/4 + \alpha x^2/2 + \beta x$. В работе [17] получена оценка

$$|I| = \left| \int_a^b u(x) \exp\{i\lambda f(x)\} dx \right| \leq C_n(u) \min\{d(t, K)^{-1/2} |t|^{-1/4} \lambda^{-1/2}, |t|^{-1/6} \lambda^{-1/3}, \lambda^{-1/4}\}, \quad (2.21)$$

где $t = (\alpha, \beta)$, $|t| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $d(t, K)$ – расстояние от точки t до каустики K , задаваемой уравнением $A = \frac{\alpha^3}{27} + \frac{\beta^2}{4} = 0$.

И. А. Икромов (см. [11]) получил оценку, улучшающую оценку (2.21):

$$|I| = \left| \int_a^b u(x) \exp\{i\lambda f(x)\} dx \right| \leq C_n(u) \left[\lambda^{1/4} + \lambda^{1/3} (|\alpha|^{1/6} + |\beta|^{1/4}) + \lambda^{1/2} \left(\frac{|A|}{|\alpha| + |A|^{1/3}} \right)^{1/4} \right]^{-1}. \quad (2.22)$$

В работе [5] получена оценка, улучшающая и оценку (2.21), и оценку (2.22). Применим следствие 1.2. При $\alpha \geq 0$ отсутствуют точки x_p и имеется единственная точка x_c , $f'(x_c) = 0$. Из соотношения (1.3) имеем

$$|I| \leq C_n(u) [\lambda^{1/2} (3x_c^2 + \alpha)^{1/2} + \lambda^{1/3} |x_c|^{1/3} + \lambda^{1/4}]^{-1}. \quad (2.23)$$

При $\alpha < 0$ имеются две точки перегиба $x_p = \pm \sqrt{\frac{|\alpha|}{3}}$, одна из которых не является особой, и одна или три стационарные точки x_c . Из неравенства (1.3) имеем

$$|I| \leq C_n(u) \left[\sum_{x_c} (\lambda^{1/2} (3x_c + \alpha)^{1/2} + \lambda^{1/3} |x_c|^{1/3} + \lambda^{1/4})^{-1} + \left(\lambda \left| \beta - \frac{2|\alpha^{3/2}|}{3\sqrt{3}} \right| + \lambda^{1/3} |\alpha|^{1/6} + \lambda^{1/4} \right)^{-1} \right]. \quad (2.24)$$

Из соотношений (2.23), (2.24) и оценки стационарных точек x_c следуют оценки (2.21), (2.22) и оценки из работы [5]. Для значений параметров, близких к каустике $A = \alpha^3/27 + \beta^2/4 = 0$, основной вклад в интеграл дает второе слагаемое в (2.24), т.е. оценка не определяется вкладом стационарных точек. В [5] показано, что для значений параметров $(\alpha, \beta) \in T_1$, $T_1 = \{(\alpha, \beta) : |\alpha| \geq \lambda^{-1/2}, |A| \leq \frac{1}{12} \lambda^{-2/3} |\beta|^{10/9}\}$, выполнена оценка

$$|I(u)| \leq C(u) \lambda^{-1/3} |\alpha|^{-1/6}, \quad (2.25)$$

однако вопрос об истинной ширине области, в которой вклад в интеграл не определяется окрестностью стационарной точки, оставался открытым. Как отмечалось выше, Д. А. Попов [5], [18] высказал предположение, что ширина этой области экспоненциально мала. Однако это предположение не верно. Покажем, что оценку (2.25) в области T_1 нельзя улучшить.

Рассмотрим интеграл

$$I(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) \exp\{i\lambda f(x)\} dx, \quad (2.26)$$

где финитную амплитуду $u(x)$ выберем далее. Пусть $x_p = \sqrt{|\alpha|/3}$ – корень уравнения $f''(x) = 3x^2 + \alpha = 0$, $-1 \leq \alpha < 0$ – фиксированное число. Будем считать, что $\beta \geq 0$, так как иначе можно рассмотреть функцию $f(-x) = x^4/4 + ax^2 - bx$. Полагая

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_p) &= f'(x_p)(x - x_p) + \frac{f^{(3)}(x_p)}{3!} (x - x_p)^3 + \frac{f^{(4)}(x_p)}{4!} (x - x_p)^4 \\ &= \left(\beta - \frac{2|\alpha|^{3/2}}{3\sqrt{3}}\right)(x - x_p) + \frac{|\alpha|^{1/2}}{\sqrt{3}} (x - x_p)^3 + \frac{1}{4} (x - x_p)^4 \end{aligned}$$

и делая в формуле (2.26) замену $x - x_p = t$, получим

$$I = \exp\{i\lambda f(x_p)\} \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \exp\{i\lambda G(t)\} dt,$$

где $G(t) = \frac{t^4}{4} + \frac{|\alpha|^{1/2}}{\sqrt{3}} t^3 + \varepsilon t$, $\varepsilon = \beta - \frac{2|\alpha|^{3/2}}{3\sqrt{3}} = O(A)$.

Выберем амплитуду $v(t) = v(t, \alpha)$ так, что $v(t) = 1$ при $t \in [0, 1]$ и $v(t) = 0$ при остальных t . Тогда

$$I = \int_0^1 \exp\{i\lambda G(t)\} dt.$$

Пусть $|\varepsilon| \leq C_1 |\alpha|^{1/6} \lambda^{-2/3}$. Рассмотрим случай $\varepsilon \geq 0$, случай $\varepsilon < 0$ рассматривается аналогично. Поскольку функция $G(t)$ монотонно возрастает и выпукла вниз при $t > 0$, то для интеграла

$$I_1 = \int_0^1 \cos(\lambda G(t)) dt$$

имеем (см. доказательство леммы 2.2)

$$\int_0^1 \cos(\lambda G(t)) dt > \int_0^{t_2} \cos(\lambda G(t)) dt = \int_0^{t_1} \cos(\lambda G(t)) dt + \int_{t_1}^{t_2} \cos(\lambda G(t)) dt,$$

где $\lambda G(t_1) = \pi/2$, $\lambda G(t_2) = 3\pi/2$. Так как функция $G(t)$ выпукла вниз и $G(0) = 0$, то $\lambda G(t) \leq \frac{\pi}{2t_1} t$ при $0 \leq t \leq t_1$. Отсюда имеем

$$\int_0^{t_1} \cos(\lambda G(t)) dt \geq \int_0^{t_1} \cos\left(\frac{\pi}{2t} t\right) dt = \frac{2}{\pi} t_1.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 \cos(\lambda G(t)) dt > \frac{2}{\pi} t_1 - (t_2 - t_1) = \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) t_1 - t_2.$$

Поскольку $\frac{\pi}{2\lambda} = G(t_1) = \frac{t_1^4}{4} + \frac{|\alpha|^{1/2}}{\sqrt{3}} t_1^3 + \varepsilon t_1 > \frac{|\alpha|^{1/2}}{\sqrt{3}} t_1^3$, то $t_1 < 2|\alpha|^{-1/6} \lambda^{-1/3}$. Отсюда, учитывая, что $\varepsilon \leq C_1 |\alpha|^{1/6} \lambda^{-2/3}$, получим

$$\frac{|\alpha|^{1/2}}{\sqrt{3}} t_1^3 = \frac{\pi}{2\lambda} - \varepsilon t_1 - \frac{t_1^4}{4} \geq \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\pi}{2} - 2C_1 - \frac{4}{|\alpha|^{2/3} \lambda^{1/3}} \right) \geq \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\pi}{2} - 2C_1 - C_2 \right),$$

если $|\alpha| \geq 8C_2^{-2/3} \lambda^{-1/2}$. Для t_2 имеем оценку $\frac{|\alpha|^{1/2}}{\sqrt{3}} t_2^3 < \frac{3\pi}{2\lambda}$. Отсюда

$$\left(1 + \frac{2}{\pi}\right) t_1 - t_2 \geq \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{|\alpha|^{1/2}\lambda}\right)^{1/3} \left[\left(1 + \frac{2}{\pi}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{2C_1}{\pi} - \frac{C_2}{\pi}\right)^{1/3} - \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} \right].$$

Так как $\left(1 + \frac{2}{\pi}\right) > 3^{1/3}$, то можно выбрать C_1 и C_2 столь малыми, что

$$\left(1 + \frac{2}{\pi}\right) t_1 - t_2 \geq C_3 |\alpha|^{-1/6} \lambda^{-1/3},$$

где C_3 – абсолютная постоянная. Отсюда имеем

$$|I| = \left| \int_0^1 \exp\{i\lambda G(t)\} dt \right| \geq C_3 |\alpha|^{-1/6} \lambda^{-1/3}$$

при $0 \leq \beta - \frac{2|\alpha|^{3/2}}{3\sqrt{3}} \leq C_1 |\alpha|^{1/6} \lambda^{-2/3}$ и $|\alpha| \geq C_4 \lambda^{-1/2}$, т. е. ширина полосы около каустики имеет точный порядок $\lambda^{-2/3}$.

Рассмотрим теперь область

$$T_2 = \{(\alpha, \beta) : \lambda^{-2/3} |\beta|^{10/9} \leq A \leq \lambda^{-1/2} |\beta|^{4/3}, |\beta| \geq \lambda^{-3/4}\}.$$

В работе [5] для значений параметров из области T_2 получена оценка

$$|I| = O\left(\frac{1}{\lambda A}\right).$$

Покажем, что на классе амплитуд ограниченной вариации эту оценку нельзя улучшить. Отметим, что соответствующая амплитуда имеет разрыв в особой точке фазы. Как будет показано далее, в п. 2.4, для достаточно гладких амплитуд оценку осциллирующего интеграла можно улучшить.

Пусть амплитуда $v(t) = 1$ при $t \in [0, +\infty)$ и $v(t) = 0$ при остальных t . Тогда

$$I = \int_0^{+\infty} \exp\{i\lambda G(t)\} dt.$$

Применяя здесь формулу интегрирования по частям, получим

$$I = \int_0^{+\infty} \exp\{i\lambda G(t)\} dt = \frac{1}{i\lambda\varepsilon} + \frac{1}{i\lambda} \int_0^{+\infty} \frac{G''(t)}{(G'(t))^2} \exp\{i\lambda G(t)\} dt.$$

Учитывая, что для функции

$$g(t) = \frac{G''(t)}{(G'(t))^2} = \frac{3t^2 + 2\sqrt{3}|\alpha|^{1/2}t}{(t^3 + \sqrt{3}|\alpha|^{1/2}t^2 + \varepsilon)^2}$$

выполнены оценки

$$\max_{0 \leq t \leq +\infty} g(t) = O(\varepsilon^{-2/3}), \quad \text{var}(g(t), [0, +\infty)) = O(\varepsilon^{-2/3})$$

и для модуля осцилляции функции $G(t)$ выполнена оценка $\delta = \delta(\frac{\pi}{\lambda}) \leq \frac{1}{\lambda\varepsilon}$, из теоремы 1.1 имеем

$$I = \frac{1}{i\lambda\varepsilon} + O\left(\frac{1}{\lambda^2\varepsilon^{5/2}}\right).$$

Поскольку

$$O\left(\frac{1}{\lambda^2\varepsilon^{5/2}}\right) \leq C \frac{1}{\lambda^2\varepsilon^{5/2}} \leq \frac{1}{2\lambda\varepsilon}, \quad \varepsilon \geq \frac{(2C)^{2/3}}{\lambda^{2/3}},$$

то

$$|I| \geq \frac{1}{2\lambda\varepsilon} \geq \frac{C_1}{\lambda A},$$

где C_1 – постоянная, зависящая только от α , т. е. в области T_2 оценка осциллирующего интеграла точная.

3) Пусть фаза $f(x)$, $a \leq x \leq b$, является решением дифференциального уравнения

$$P_n\left(\frac{d}{dx}\right)f(x) = v(x), \quad a < x < b, \quad (2.27)$$

где $P_n(z) = a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$, $a_n \neq 0$, – многочлен степени n с вещественными коэффициентами. Предположим, что все корни многочлена $P_n(z)$ вещественные, а функция $v(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и

$$\min_{a \leq x \leq b} v(x) = A > 0. \quad (2.28)$$

Оценим модуль осцилляции $\delta(\frac{\pi}{\lambda}) = \delta_{[a,b]}(\frac{\pi}{\lambda}, f)$. Так же, как и выше, в пп. 1) и 2), для экстремального отрезка $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\lambda} &\geq \max_{\alpha \leq x \leq \beta} f(x) - \min_{\alpha \leq x \leq \beta} f(x) = 2 \min_{-\infty \leq c \leq +\infty} \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |f(x) - c| \\ &\geq 2 \min_{-\infty \leq c \leq +\infty} \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - c| dx. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Пусть линейное многообразие

$$M_n = \left\{ y(x) \mid P_n\left(\frac{d}{dx}\right)y(x) \equiv 0 \right\}$$

– ядро оператора $P_n(\frac{d}{dx})$, и пусть $y_1(x), \dots, y_n(x)$ – фундаментальная система решений уравнения

$$P_n\left(\frac{d}{dx}\right)y(x) = 0.$$

Поскольку все корни многочлена $P_n(z)$ вещественны, то функции $y_1(x), \dots, \dots, y_n(x)$ образуют систему Чебышева на любом отрезке вещественной оси, т. е. любой нетривиальный многочлен вида

$$y(x) = \sum_{k=1}^n a_k y_k(x)$$

имеет не более $n - 1$ корней (см., например, [19, с. 136]).

Так как нуль является корнем многочлена $P_n(z)$, то множество M_n содержит любую константу и из (2.29) имеем

$$\frac{\pi}{\lambda} \geq 2 \inf_{y(x) \in M_n} \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - y(x)| dx. \quad (2.30)$$

Заметим, что если $P_n(0) \neq 0$, то класс функций $f(x)$ с условием $|P_n(\frac{d}{dx})f(x)| \geq A > 0$ содержит произвольную постоянную c такую, что $|P_n(0)c| \geq A$ и, следовательно,

$$\sup \left\{ \delta_{[a,b]} \left(\frac{\pi}{\lambda}, f \right) : \left| P_n \left(\frac{d}{dx} \right) f(x) \right| \geq A \right\} = b - a.$$

Рассмотрим экстремальную задачу типа задачи П. Л. Чебышева о полиноме, наименее уклоняющемся от нуля в среднем на отрезке $[\alpha, \beta]$:

$$\inf \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} |x^s - y(x)| dx : y(x) \in M_n \right\}, \quad (2.31)$$

где s – кратность нуля, рассматриваемого как корень многочлена $P_n(z)$.

Задача (2.31) для случая, когда все корни многочлена $P_n(z)$ равны нулю, т. е. для классических многочленов, была подробно исследована еще Е. И. Золотарёвым и А. Н. Коркиным [20]. Для многочлена $P_n(z)$, все корни которого вещественны, задача (2.31) исследована в работе автора [16], где, в частности, установлено, что существует единственная функция $l(x) = x^s - y_0(x)$, $y_0(x) \in M_n$, реализующая нижнюю грань в (2.31), и для экстремальной функции $l(x)$ выполнены соотношения

$$\int_{\alpha}^{\beta} y(x) \operatorname{sign} l(x) dx = 0 \quad (2.32)$$

при любой функции $y(x) \in M_n$, являющиеся также достаточным условием экстремальности. Функция $l(x)$ имеет в точности n корней $\alpha < x_1 < \dots < x_n < \beta$ внутри интервала (α, β) .

Рассмотрим снова задачу

$$\inf \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - y(x)| dx : y(x) \in M_n \right\}. \quad (2.33)$$

Выберем функцию $g(x) \in M_n$, интерполирующую $f(x)$ в корнях функции $l(x)$. Это можно сделать, так как базис $y_1(x), \dots, y_n(x)$ множества M_n образует систему Чебышева. Функция

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

имеет корни $x_1, \dots, x_n$ и не имеет других корней. Действительно, из представления

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)h(x) = e^{\lambda x} \frac{d}{dx} [e^{-\lambda x} h(x)]$$

следует по теореме Ролля, что между любыми корнями функции $h(x)$ имеется по крайней мере один корень функции $\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)h(x)$. Поскольку действие оператора $P_n\left(\frac{d}{dx}\right)$ сводится к применению n раз оператора $\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)$, где λ – корень многочлена $P_n(z)$, то функция $h(x)$ не может иметь более n корней, так как в противном случае функция $P_n\left(\frac{d}{dx}\right)h(x) = P_n\left(\frac{d}{dx}\right)f(x) = v(x)$ имела бы по крайней мере один корень, что противоречит условию $v(x) > 0$, $a \leq x \leq b$. Следовательно, функция $h(t)$ имеет те же простые корни, что и функция $l(x)$, и не имеет других корней; значит, с точностью до знака

$$\text{sign } h(t) = \text{sign } l(x).$$

Учитывая это равенство и соотношение (2.32), для любой функции $y(x) \in M_n$ получим

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - y(x)| dx &= \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - y(x)) \text{sign}(f(x) - y(x)) dx \\ &\geq \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - y(x)) \text{sign } h(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \text{sign } h(x) dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) \text{sign } h(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} |h(x)| dx, \end{aligned}$$

т. е. функция $h(x)$ реализует нижнюю грань в (2.33), и, следовательно, из соотношения (2.30) имеем

$$\frac{\pi}{\lambda} \geq \frac{2}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} |h(x)| dx. \quad (2.34)$$

Оценим интеграл в правой части (2.34), где $\beta - \alpha = \delta = \delta_{[a,b]}\left(\frac{\pi}{\lambda}, f\right)$. Рассмотрим функцию

$$F(x) = h(x) - \frac{h(\tau)}{\varphi(\tau)} \varphi(x),$$

где $\varphi(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$, τ – произвольное число из отрезка $[\alpha, \beta]$, отличное от корней функции $\varphi(x)$. Функция $F(x)$ имеет корни $\tau, x_1, x_2, \dots, x_n$, и, следовательно, функция

$$P_n\left(\frac{d}{dx}\right)F(x) = v(x) - \frac{h(\tau)}{\varphi(\tau)} P_n\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)$$

имеет внутри интервала (α, β) корень $\xi = \xi(\tau)$. Отсюда

$$h(\tau) = \frac{v(x)}{P_n\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)} \Big|_{x=\xi} \cdot \varphi(\tau) \quad (2.35)$$

для любой точки $\tau \in [\alpha, \beta]$ и $\xi = \xi(\tau) \in (\alpha, \beta)$.

Поскольку $\varphi(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$ и $|x - x_k| \leq \beta - \alpha = \delta$, то, полагая $a_0 = \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|$, нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \max_{\alpha \leq \xi \leq \beta} \left| P_n \left(\frac{d}{dx} \right) \varphi(x) \right|_{x=\xi} &= \max_{\alpha \leq \xi \leq \beta} |a_1 \varphi'(\xi) + \dots + a_n \varphi^{(n)}(\xi)| \\ &\leq a_0 (n \delta^{n-1} + n(n-1) \delta^{n-2} + \dots + n!) \\ &\leq a_0 n! (n-1) \max\{1, (b-a)^{n-1}\} = B. \end{aligned}$$

Учитывая, что $v(x) \geq A > 0$, из (2.35) и (2.34) получим

$$\frac{\pi}{\lambda} \geq \frac{2A}{B} \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi(x)| dx = \frac{2A}{B} \int_0^1 |\varphi(\alpha + \delta t)| dt.$$

Функция $\varphi(\alpha + \delta t)$ – многочлен вида $\varphi(\alpha + \delta t) = \delta^n (t^n + \alpha_{n-1} t^{n-1} + \dots + \alpha_0)$, и, следовательно,

$$\frac{\pi}{\lambda} \geq \frac{2A\delta^n}{B} \min_{\{\alpha_k\}} \int_0^1 |t^n + \alpha_{n-1} t^{n-1} + \dots + \alpha_0| dt = \frac{2A\delta^n}{B} \int_0^1 |l_n(t)| dt,$$

где $l_n(t) = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{\sin(n+1) \arccos(2t-1)}{\sqrt{1-(2t-1)^2}}$ – многочлен Чебышева 2-го рода, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[0, 1]$ в среднем. Вычисляя интеграл, получим

$$\frac{\pi}{\lambda} \geq \frac{A\delta^n}{B \cdot 2^n},$$

и, следовательно,

$$\delta \leq 2 \left(\frac{\pi B}{\lambda A} \right)^{1/n}, \quad (2.36)$$

где $B = a_0 n! (n-1) \max\{1, (b-a)^{n-1}\}$, $a_0 = \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|$. Отсюда из теоремы 1.1 получим

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть все корни многочлена $P_n(z) = a_1 z + \dots + a_n z^n$ вещественные, функция $f(x)$ удовлетворяет условию

$$\left| P_n \left(\frac{d}{dx} \right) f(x) \right| \geq A > 0, \quad a < x < b,$$

число интервалов монотонности производной $f'(x)$ не превосходит K , а функция $u(x)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$. Тогда

$$|I| = \left| \int_a^b u(x) \exp\{i\lambda f(x)\} dx \right| \leq C_n K \left(\max_{a \leq x \leq b} |u(x)| + \text{var}(u, [a, b]) \right) (\lambda A)^{-1/n}, \quad (2.37)$$

где постоянная C_n зависит только от n , длины отрезка $[a, b]$ и коэффициентов многочлена $P_n(z)$.

Оценка вида (2.37) получена в [1] для функций $u(x)$, непрерывных и имеющих конечное число интервалов монотонности. Однако доказательство следствия 2.3 остается справедливым и без требования вещественности корней многочлена $P_n(z) = a_1 z + \dots + a_n z^n$. Действительно, пусть ω – максимальная

мнимая часть корней многочлена $P_n(z)$. При выводе следствия 2.3 мы пользовались только тем, что функции $t^s - y(t)$ и $h(t) = f(t) - g(t)$, где s – кратность нуля, рассматриваемого как корень многочлена $P_n(z)$, а $y(t)$ и $g(t)$ принадлежат ядру оператора $P_n\left(\frac{d}{dt}\right)$, имеют на любом отрезке, принадлежащем отрезку $[a, b]$, не более n корней. Разобьем отрезок $[a, b]$ на $m = \left[\frac{\omega(b-a)}{\pi}\right] + 1$ отрезков равной длины так, что длина каждого отрезка будет не больше $\frac{\pi}{\omega}$, и пусть $[a_1, b_1]$ – один из них. Действие оператора $P_n\left(\frac{d}{dt}\right)$ на интервале (a_1, b_1) сводится к последовательному применению операторов

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda\right)f = e^{\lambda t} \frac{d}{dt} [e^{-\lambda t} f(t)],$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - 2\alpha \frac{d}{dt} + \alpha^2 + \beta^2\right)f = \frac{e^{\alpha t}}{\sin \beta(t - a_1)} \frac{d}{dt} \left(\sin^2 \beta(t - a_1) \frac{d}{dt} \frac{e^{-\alpha t} f(t)}{\sin \beta(t - a_1)} \right),$$

где действительное число λ и комплексные числа $\alpha \pm i\beta$, $0 < \beta \leq \omega$, – корни многочлена $P_n(z)$. Действие каждого из этих операторов по теореме Роля может уменьшить число корней функции не более чем на один и два соответственно. Поскольку функция

$$P_n\left(\frac{d}{dt}\right)(f(t) - g(t)) = A > 0$$

не имеет корней, число корней функции $f(t) - g(t)$ на отрезке $[a_1, b_1]$ не больше n . Аналогичное утверждение верно и для функции $t^s - y(t)$. Разбивая интеграл

$$I = \int_a^b u(x) \exp\{i\lambda f(x)\} dx$$

на m интегралов и дословно повторяя доказательство следствия 2.3, получим теорему 1.2.

При $\omega = 0$, т. е. если все корни многочлена $P_n(z)$ вещественные, из неравенства (1.2) получим (2.37).

4) Рассмотрим теперь интеграл

$$I = \int_{-1}^1 u(x) \exp\{i\lambda f(x)\} dx, \quad (2.38)$$

где функция $u(x)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[-1, 1]$, а функция $f(x)$ четная, $f(0) = 0$, $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, и линейная на отрезках $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$. Нетрудно видеть, что производная $f'(x)$ имеет бесконечное число точек разрыва в любой окрестности стационарной точки $x_0 = 0$ и, следовательно, к интегралу (2.38) не применимы методы, основанные на вычислении производных, в частности метод стационарной фазы.

Вычислим модуль осцилляции функции $f(x)$ на отрезке $[-1, 1]$. При $\lambda \geq \pi$

$$\delta = \delta_{[-1, 1]}\left(\frac{\pi}{\lambda}, f\right) = 2\Delta,$$

где Δ определяется из условия $f(\Delta) = \pi/\lambda$. Поскольку $f(x) \geq x^2$, $-1 \leq x \leq 1$, то

$$\delta = 2\Delta \leq 2\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}.$$

Отсюда по теореме 1.1 для интеграла (2.38) получим

$$|I| \leq C \left(\max_{-1 \leq x \leq 1} |u(x)| + \text{var}(u, [-1, 1]) \right) \lambda^{-1/2}. \quad (2.39)$$

Оценка (2.39) точная по порядку параметра λ при $\lambda \rightarrow +\infty$.

5) Пусть $f(x) = e^{-1/x^2}$, $x \neq 0$, и $f(0) = 0$. К интегралу

$$I = \int_{-1/2}^{1/2} u(x) e^{i\lambda f(x)} dx$$

не применим метод стационарной фазы, так как $f^{(k)}(0) = 0$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Поскольку функция $f(x) = e^{-1/x^2}$ выпукла вниз на отрезке $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ и

$$\delta\left(\frac{\pi}{\lambda}\right) = \frac{2}{\sqrt{\ln(\lambda/\pi)}}, \quad \lambda \geq \pi e^4,$$

то по теореме 1.1 имеем

$$|I| \leq 8 \left(\max_{-1/2 \leq x \leq 1/2} |u(x)| + \text{var}\left(u, \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right) \right) \left(\ln \frac{\lambda}{\pi} \right)^{-1/2}.$$

Покажем точность этой оценки. Рассмотрим интеграл

$$I_1 = \int_0^{1/2} \cos(\lambda f(x)) dx.$$

Определим точки x_1, x_2, x_3 из условий $\lambda f(x_1) = \pi/4$, $\lambda f(x_2) = \pi/2$, $\lambda f(x_3) = 3\pi/2$. Ясно, что

$$\int_0^{x_3} \cos(\lambda f(x)) dx < \int_0^{1/2} \cos(\lambda f(x)) dx < \int_0^{x_2} \cos(\lambda f(x)) dx.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \int_0^{x_3} \cos(\lambda f(x)) dx &= \int_0^{x_2} \cos(\lambda f(x)) dx + \int_{x_2}^{x_3} \cos(\lambda f(x)) dx \\ &\geq \int_0^{x_1} \cos(\lambda f(x)) dx - (x_3 - x_2) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} x_1 - (x_3 - x_2) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\sqrt{\ln(4\lambda/\pi)}} - \left(\frac{1}{\sqrt{\ln(2\lambda/(3\pi))}} - \frac{1}{\sqrt{\ln(2\lambda/\pi)}} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\sqrt{\ln(4\lambda/\pi)}} \\ &\quad - \frac{\ln 3}{\sqrt{\ln(2\lambda/(3\pi))} \sqrt{\ln(2\lambda/\pi)} (\sqrt{\ln(2\lambda/\pi)} + \sqrt{\ln(2\lambda/(3\pi))})} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\sqrt{\ln(4\lambda/\pi)}} + O\left(\frac{1}{(\ln \lambda)^{3/2}}\right). \end{aligned}$$

Отметим, что для мнимой части интеграла I выполнено соотношение

$$I_2 = \int_0^{1/2} \sin(\lambda f(x)) dx = O\left(\frac{1}{(\ln \lambda)^{3/2}}\right).$$

2.4. Оценки осциллирующих интегралов с амплитудой из класса Липшица. В этом пункте докажем теорему 1.3.

ЛЕММА 2.3. Пусть на промежутке $[a, b)$, b – конечное число или $+\infty$, функция $v(x)$ положительна и не возрастает, функция $f(x)$ монотонно возрастает и выпукла вниз и $0 < t_1 < t_2 < \dots$, $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$ – последовательные корни соответственно уравнений $\sin(\lambda f(x)) = 0$ и $\cos(\lambda f(x)) = 0$. Тогда найдутся точки $\xi_k \in (t_k, t_{k+1})$ и $z_k \in (\tau_k, \tau_{k+1})$, $k = 1, 2, 3, \dots$, такие, что

$$\int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} v(x) \sin(\lambda f(x)) dx = 0, \quad \int_{z_k}^{z_{k+1}} v(x) \cos(\lambda f(x)) dx = 0. \quad (2.40)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое из соотношений (2.40), считая без ограничения общности, что $a = 0$ и $f(0) = 0$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = \int_0^t v(x) \sin(\lambda f(x)) dx.$$

В п. 2.2 при доказательстве леммы 2.2 было установлено, что функция $\varphi(t)$ возрастает на интервалах (t_k, t_{k+1}) при четном k и убывает при нечетном k . Кроме того, локальные максимумы $\varphi(t_{2k-1})$ и минимумы $\varphi(t_{2k})$ образуют монотонно убывающую и возрастающую последовательности соответственно, и

$$\varphi(t_{2k}) \leq \varphi(t) \leq \varphi(t_{2k-1}), \quad t \geq t_{2k}.$$

Если число корней t_k на промежутке $[0, b)$ конечно, то положим

$$C_1 = \min\{\varphi(t_{2k-1}) \mid t_{2k-1} \in [a, b)\}, \\ C_2 = \max\{\varphi(t_{2k}) \mid t_{2k} \in [a, b)\}.$$

В противном случае положим

$$C_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t_{2k-1}), \quad C_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t_{2k}).$$

Ясно, что $C_2 \leq C_1$. (Равенство $C_2 = C_1$ означает, что несобственный интеграл $\int_0^b v(x) \sin(\lambda f(x)) dx$ сходится.) Пусть $C = \int_0^b v(x) \sin(\lambda f(x)) dx$, если интеграл существует, и C – любое число из интервала (C_2, C_1) , если интеграл расходится. Тогда функция $\varphi(t) - C$ меняет знак на каждом интервале (t_k, t_{k+1}) и, значит, найдется точка ξ_k , $\xi_k \in (t_k, t_{k+1})$, такая, что $\varphi(\xi_k) = C$, $k = 1, 2, \dots$, и, следовательно,

$$\int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} v(x) \sin(\lambda f(x)) dx = \varphi(\xi_{k+1}) - \varphi(\xi_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Лемма доказана.

Лемма 2.3 позволяет аппроксимировать амплитуду $u(x)$ в действительной и мнимой частях интеграла

$$I = \int_0^b u(x) v(x) \exp\{i\lambda f(x)\} dx \quad (2.41)$$

кусочно постоянной на интервалах (ξ_k, ξ_{k+1}) функцией. Если функция $u(x)$ достаточно гладкая и $f(x)$ растет достаточно быстро, так что длины отрезков $[\xi_k, \xi_{k+1}]$ быстро стремятся к нулю, то интеграл (2.41) определяется интегрированием по отрезку $[0, \xi_1]$, длина которого не превосходит модуль осцилляции $\delta(\frac{\pi}{\lambda})$ функции $f(x)$ и стремится к нулю при $\lambda \rightarrow +\infty$.

Пусть, в частности, функция $u(x)$ принадлежит классу $\text{Lip}_\alpha[a, b]$, т.е. удовлетворяет условию

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\alpha \quad (2.42)$$

для всех x и y из промежутка $[a, b]$, где C – некоторая положительная постоянная, $0 < \alpha \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3. Представим функцию $v(x)$ в виде $v(x) = v_1(x) - v_2(x)$, где $v_1(x)$ и $v_2(x)$ – положительные невозрастающие функции. Рассмотрим сначала интеграл

$$I_1 = \int_0^b u(x)v_1(x) \sin(\lambda f(x)) dx,$$

где $b_1 < b$. По лемме 2.3 имеем

$$I_1 = u(0) \int_0^{b_1} v_1(x) \sin(\lambda f(x)) dx + \sum_{k=0}^N \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} [u(x) - u(\xi_k)] v_1(x) \sin(\lambda f(x)) dx, \quad (2.43)$$

где $\xi_0 = 0$, $\xi_{N+1} = b_1$, $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$, $\lambda f(x_k) = \pi k$, $k = 1, 2, 3, \dots$.

Оценим второе слагаемое в (2.43):

$$\begin{aligned} |R_1| &= \left| \sum_{k=0}^N \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} [u(x) - u(\xi_k)] v_1(x) \sin(\lambda f(x)) dx \right| \\ &\leq \max_{0 \leq x \leq b_1} |v_1(x)| \sum_{k=0}^N \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} |u(x) - u(\xi_k)| dx \leq CM \sum_{k=0}^N |\xi_{k+1} - \xi_k|^{1+\alpha}. \end{aligned}$$

Поскольку $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$, то

$$\Delta \xi_k = \xi_{k+1} - \xi_k \leq x_{k+2} - x_k = \Delta x_{k+1} + \Delta x_k. \quad (2.44)$$

Последовательность Δx_k , $k = 1, 2, 3, \dots$, не возрастает, так как функция $f(x)$ монотонно возрастает и выпукла вниз. Следовательно, полагая $x_0 = 0$, получим

$$x_{k+1} = \Delta x_k + \Delta x_{k+1} + \dots + \Delta x_1 + \Delta x_0 \geq (k+1)\Delta x_k.$$

Отсюда и из (2.44) имеем

$$\begin{aligned} \Delta \xi_k &\leq 2\Delta x_k \leq 2 \frac{x_{k+1}}{k+1}, \\ |R_1| &\leq C \max_{0 \leq x < b} |v_1(x)| \sum_{k=0}^N |\Delta \xi_k|^{1+\alpha} \leq 2^{1+\alpha} CM \sum_{k=0}^N \left| \frac{x_{k+1}}{k+1} \right|^\alpha \Delta x_k. \end{aligned}$$

Так как $\lambda f(x_{k+1}) = \pi(k+1)$, то

$$|R_1| \leq 2^{1+\alpha} CM \left(\frac{\pi}{\lambda} \right)^\alpha \sum_{k=0}^N \left| \frac{x_{k+1}}{f(x_{k+1})} \right|^\alpha \Delta x_k. \quad (2.45)$$

Функция $g(x) = \frac{x}{f(x)}$ положительна и монотонно убывает на интервале $(0, b)$, так как функция $f(x)$ выпукла вниз. Действительно, пусть сначала функция $f(x)$ имеет непрерывную производную второго порядка. Тогда $f''(x) \geq 0$ и

$$f(y) - f(x) = f'(x)(y-x) + \frac{f''(\xi)}{2} (y-x)^2.$$

Полагая $y = 0$, получим

$$xf'(x) - f(x) = \frac{f''(\xi)}{2} x^2 \geq 0.$$

Отсюда имеем

$$g'(x) = \frac{f(x) - xf'(x)}{f^2(x)} \leq 0,$$

т.е. функция $g(x) = \frac{x}{f(x)}$ монотонно убывает. В общем случае функцию $f(x)$ можно приблизить дифференцируемой функцией. Следовательно,

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \left| \frac{x}{f(x)} \right|^\alpha dx \geq \left| \frac{x_{k+1}}{f(x_{k+1})} \right|^\alpha \Delta x_k,$$

и из неравенства (2.45) имеем

$$\begin{aligned} |R_1| &\leq \frac{C_1}{\lambda^\alpha} \left(\left| \frac{x_1}{f(x_1)} \right|^\alpha \Delta x_1 + \sum_{k=1}^N \left| \frac{x_{k+1}}{f(x_{k+1})} \right|^\alpha \Delta x_k \right) \\ &\leq \frac{C_1}{\lambda^\alpha} \left(\frac{\lambda^\alpha x_1^{1+\alpha}}{\pi^\alpha} + \int_{x_1}^{b_1} \left| \frac{x}{f(x)} \right|^\alpha dx \right) = C_1 \left(\frac{\delta^{1+\alpha}}{\pi^\alpha} + \frac{1}{\lambda^\alpha} \int_\delta^{b_1} \left| \frac{x}{f(x)} \right|^\alpha dx \right), \end{aligned} \quad (2.46)$$

где $C_1 = 2(2\pi)^\alpha CM$, $\delta = x_1$ определяется из условия $f(\delta) = \pi/\lambda$. Переходя к пределу при $b_1 \rightarrow b$ и учитывая, что в силу убывания функции $\left| \frac{x}{f(x)} \right|^\alpha$ выполнено

$$\int_0^\delta \left| \frac{x}{f(x)} \right|^\alpha dx \geq \frac{\delta^\alpha}{|f(\delta)|^\alpha} \delta = \frac{\lambda^\alpha}{\pi^\alpha} \delta^{1+\alpha}$$

при условии существования интеграла, из (2.46) получим

$$|R_1| \leq \frac{C_1}{\lambda^\alpha} \int_0^b \left| \frac{x}{f(x)} \right|^\alpha dx = \frac{C_1 m}{\lambda^\alpha}.$$

Аналогично оцениваются интегралы вида I_1 с функцией $v_2(x)$, а также действительная часть интеграла (1.8). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Если функция $\left|\frac{x}{f(x)}\right|^\alpha$ имеет в нуле неинтегрируемую особенность, то будем использовать в оценке интеграла (1.8) вместо величины m величину m_δ :

$$m_\delta = \int_\delta^b \left|\frac{x}{f(x)}\right|^\alpha dx + \frac{\lambda^\alpha \delta^{1+\alpha}}{\pi^\alpha},$$

где $\delta = \delta\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)$ – модуль осцилляции функции $f(x)$.

Теорема 1.3 позволяет получать оценки осциллирующих интегралов при минимальной информации о функции $f(x)$.

Рассмотрим в качестве примера интеграл

$$I = \int_0^1 u(x) \exp\{i\lambda f(x)\} dx,$$

где $u(x) \in \text{Lip}_\alpha[0, 1]$, $0 < \alpha \leq 1$, функция $f(x)$ монотонно возрастает, выпукла вниз, $f(0) = 0$, и при некоторых положительных постоянных C и $\beta \geq 1$ выполнено неравенство

$$f(x) \geq Cx^\beta, \quad x \in [0, 1].$$

Применяя при $1 \leq \beta < 1 + \frac{1}{\alpha}$ теорему 1.3, а при $\beta \geq 1 + \frac{1}{\alpha}$ – замечание 2.4, получим

$$I = C_1(\lambda)u(0) + R,$$

где

$$|R| = \begin{cases} O\left(\frac{1}{\lambda^\alpha}\right) & \text{при } 1 \leq \beta < 1 + \frac{1}{\alpha}, \\ O\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda^\alpha}\right) & \text{при } \beta = 1 + \frac{1}{\alpha}, \\ O\left(\frac{1}{\lambda^{(1+\alpha)/\beta}}\right) & \text{при } \beta > 1 + \frac{1}{\alpha}, \end{cases}$$

а для $C_1(\lambda) = \int_0^1 \exp\{i\lambda f(x)\} dx$ по теореме 1.1 выполнена оценка

$$C_1(\lambda) = O\left(\frac{1}{\lambda^{1/\beta}}\right),$$

так как модуль осцилляции $\delta = \delta\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)$ имеет порядок $O\left(\frac{1}{\lambda^{1/\beta}}\right)$ в силу того, что $\pi/\lambda = f(\delta) \geq C\delta^\beta$.

Пусть $\beta > 1 + \frac{1}{\alpha}$. Интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^\alpha \exp\{i\lambda x^\beta\} dx &= \frac{1}{(1+\alpha)\lambda^{(1+\alpha)/\beta}} \int_0^{\lambda^{(1+\alpha)/\beta}} \exp\{it^{\beta/(1+\alpha)}\} dt \\ &= \frac{C(\alpha, \beta)}{(1+\alpha)\lambda^{(1+\alpha)/\beta}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \end{aligned}$$

где $C(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \exp\{it^{\beta/(1+\alpha)}\} dt \neq 0$, показывает точность полученных результатов в данном случае.

Применим теорему 1.3 к исследованию интеграла Пирси

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) \exp\{i\lambda f(x)\} dx,$$

где $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3\alpha}{2}x^2 + \beta x$, амплитуда $u(x)$ принадлежит классу $\text{Lip}_\delta(-\infty, +\infty)$, $\delta > 1/2$, при значениях параметров, близких к каустике $A = \frac{\beta^2}{4} - \alpha^3 = 0$. Считая α положительной и делая замену переменной $x = \sqrt{\alpha}t$, получим

$$I = \sqrt{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\sqrt{\alpha}t) \exp\left\{i\lambda\alpha^2\left(\frac{t^4}{4} - \frac{3}{2}t^2 + \frac{\beta}{\alpha^{3/2}}t\right)\right\} dt.$$

Сделаем замену $\tau = t - 1$. Тогда

$$I = \sqrt{\alpha} \exp\left\{i\lambda\left(\alpha^{1/2}\beta - \frac{5}{4}\alpha^2\right)\right\} \int_{-\infty}^{+\infty} v(\tau) \exp\{i\lambda G(\tau)\} d\tau,$$

где $G(\tau) = \frac{1}{4}\tau^4 + \tau^3 + \varepsilon\tau$, $\varepsilon = \frac{\beta}{\alpha^{3/2}} - 2$, а $v(\tau)$ принадлежит классу $\text{Lip}_\delta(-\infty, +\infty)$, $\delta > 1/2$. Пусть $0 < \varepsilon < \lambda^{-1/2}$; тогда

$$0 < A = \frac{\beta^2}{4} - \alpha^2 < \frac{4\alpha^3}{\lambda^{1/2}} + \frac{\alpha^3}{\lambda} = O\left(\frac{1}{\lambda^{1/2}}\right).$$

Фаза $G(\tau) = \frac{1}{4}\tau^4 + \tau^3 + \varepsilon\tau$ выпукла вниз и имеет простую стационарную точку на промежутке $(-\infty, -2]$. Из теоремы 1.3 имеем

$$I_1 = \int_{-\infty}^{-2} v(\tau) \exp\{i\lambda G(\tau)\} d\tau = v(\tau_c) \int_{-\infty}^{-2} \exp\{i\lambda G(\tau)\} d\tau + R,$$

где

$$|R| \leq \frac{C}{\lambda^\delta} \int_{-\infty}^{-2} \left| \frac{\tau - \tau_c}{G(\tau) - G(\tau_c)} \right|^\delta d\tau = O\left(\frac{1}{\lambda^\delta}\right).$$

Поскольку $\int_{-\infty}^{-2} \exp\{i\lambda G(\tau)\} d\tau = O\left(\frac{1}{\lambda^{1/2}}\right)$ и $\delta > 1/2$, то $|I_1| = O(\lambda^{-1/2})$.

Рассмотрим интеграл

$$I_2 = \int_{-2}^2 v(\tau) \exp\{i\lambda G(\tau)\} d\tau.$$

По теореме 1.3 получим

$$I_2 = v(0) \int_{-2}^{+\infty} \exp\{i\lambda G(\tau)\} d\tau + R_2,$$

где

$$\begin{aligned} |R_2| &\leq \frac{1}{\lambda^\delta} \int_{-2}^{+\infty} \left| \frac{\tau}{\tau^4/4 + \tau^3 + \varepsilon\tau} \right|^\delta d\tau \leq \frac{1}{\lambda^\delta} \int_{-2}^{+\infty} \left| \frac{1}{\tau^2(1 + \tau/4) + \varepsilon} \right|^\delta d\tau \\ &\leq \frac{1}{\lambda^\delta} \int_{-2}^{+\infty} \left| \frac{1}{\tau^2/2 + \varepsilon} \right|^\delta d\tau \leq \frac{1}{\lambda^\delta \varepsilon^{\delta-1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{\tau^2/2 + 1} \right|^\delta d\tau = O\left(\frac{1}{\lambda^\delta \varepsilon^{\delta-1/2}}\right), \end{aligned}$$

так как $\delta > 1/2$.

Оценим интеграл

$$I_3 = \int_{-2}^{+\infty} \exp\{i\lambda G(\tau)\} d\tau = \frac{1}{i\lambda} \int_{-2}^{+\infty} \frac{d \exp\{i\lambda G(\tau)\}}{G'(\tau)}.$$

Полагая $g_0(\tau) = \frac{1}{G'(\tau)} = \frac{1}{\tau^3 + 3\tau^2 + \varepsilon}$, $g_1(\tau) = g'_0(\tau)g_0(\tau), \dots, g_n(\tau) = g'_{n-1}(\tau)g_0(\tau)$ и интегрируя n раз по частям, получим

$$I_3 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(i\lambda)^{k+1}} g_k(\tau) \exp\{i\lambda G(\tau)\} \Big|_{-2}^{+\infty} + \frac{(-1)^n}{(i\lambda)^{n+1}} \int_{-2}^{+\infty} g_n(\tau) d \exp\{i\lambda G(\tau)\}.$$

Учитывая, что $g_k(+\infty) = 0$, $g_k(-2) = O(1)$, $\max_{-2 \leq \tau < +\infty} |g_n(\tau)| = O\left(\frac{1}{\varepsilon^{3n/2+1}}\right)$, $\text{var}(g_n(\tau), [-2, +\infty)) = O\left(\frac{1}{\varepsilon^{3n/2+1}}\right)$, получим

$$I_3 = O\left(\frac{1}{\lambda}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^{n+1}\varepsilon^{3n/2+1}}\right)$$

с постоянной в знаке O , зависящей от n . Отсюда

$$I_2 = v(0)I_3 + R_2 = O\left(\frac{1}{\lambda}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^{n+1}\varepsilon^{3n/2+1}}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^\delta \varepsilon^{\delta-1/2}}\right),$$

и при $\varepsilon \geq (\lambda^{\frac{2}{3}-\frac{1}{9n+6}})^{-1}$ имеем

$$I_2 = O\left(\frac{1}{\lambda^{1/2}}\right).$$

Поскольку $I = \sqrt{\alpha}(I_1 + I_2)$, то, выбирая n достаточно большим, имеем

$$|I| = O\left(\frac{1}{\lambda^{1/2}}\right)$$

при $\varepsilon \geq \frac{1}{\lambda^{2/3-\sigma}}$, где σ – произвольное, сколь угодно малое положительное число. Эта оценка улучшает оценку из работы [5] в области $\frac{1}{\lambda^{2/3-\sigma}} \leq \varepsilon \leq \frac{1}{\lambda^{1/2}}$.

2.5. Оценки осциллирующих интегралов от функций нескольких переменных. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – выпуклая замкнутая ограниченная область, функции $u(x, y)$ и $f(x, y)$ непрерывны в области D , и пусть

$$I = I(u) = \iint_D u(x, y) \exp\{i\lambda f(x, y)\} dx dy. \quad (2.47)$$

Пусть $P_0 \in D$, а функция $|f(P) - f(P_0)|$ выпукла на любом отрезке, соединяющем точку P_0 с точкой P , лежащей на границе ∂D области D . Будем называть такие точки *правильными особыми точками*. Без ограничения общности будем считать, что область D содержит начало координат, $P_0 = (0, 0)$ и $f(P_0) = 0$. Пусть $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \rho \leq \rho(\varphi)$, где $\rho = \rho(\varphi)$ – уравнение границы области D в полярных координатах.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть при каждом фиксированном φ , $\varphi \in [0, 2\pi]$, функция $u(\rho) = u(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$ принадлежит классу $\text{Lip}_\alpha[0, \rho(\varphi)]$, т. е. удовлетворяет неравенству

$$|u(\rho_2) - u(\rho_1)| \leq C|\rho_2 - \rho_1|^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

функция $G(\rho) = f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$ удовлетворяет неравенству

$$|G(\rho)| \geq s(\varphi)\rho^\beta, \quad \beta \geq 1, \quad s(\varphi) \geq 0, \quad (2.48)$$

и при некотором δ , $0 < \delta \leq 1$, существует интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{s^\delta(\varphi)} d\varphi = A_\delta < +\infty.$$

Тогда

$$|I(u)| = \begin{cases} O(\lambda^{-\min(\frac{1+\alpha}{\beta}, \delta)}) & \text{при } \beta > 1 + \frac{1}{\alpha}, \\ O(\lambda^{-\min(\alpha, \delta)} \ln \lambda) & \text{при } \beta = 1 + \frac{1}{\alpha}, \\ O(\lambda^{-\min(\alpha, \delta)}) & \text{при } 1 \leq \beta < 1 + \frac{1}{\alpha}, \end{cases}$$

где постоянная в знаке O зависит от α , β , δ , диаметра области D и $\max_{(x,y) \in D} |u(x,y)|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим мнимую часть интеграла (2.47):

$$\text{Im } I(u) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} \rho u(\rho) \sin(\lambda G(\rho)) d\rho = \int_0^{2\pi} J(\varphi) d\varphi,$$

где $J(\varphi) = \int_0^{\rho(\varphi)} \rho u(\rho) \sin(\lambda G(\rho)) d\rho$. Функция $G(\rho)$ монотонно возрастает и выпукла вниз или монотонно убывает и выпукла вверх. Пусть для определенности $G(\rho)$ возрастает и выпукла вниз, иначе можно рассмотреть функцию $-G(\rho)$. Воспользуемся леммой 2.3, где $v(x) = 1$. Тогда найдутся точки ξ_k , $k = 1, \dots, m$, $\xi_m = \rho(\varphi)$, $\xi_0 = 0$, $\xi_k \in (\rho_k, \rho_{k+1})$, где ρ_k – корень уравнения $\lambda G(\rho_k) = \pi k$, такие, что

$$\int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \sin(\lambda G(\rho)) d\rho = 0, \quad k = 1, \dots, m-1.$$

Отсюда имеем

$$J(\varphi) = \sum_{k=1}^m \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} [\rho u(\rho) - \xi_{k-1} u(\xi_{k-1})] \sin(\lambda G(\rho)) d\rho. \quad (2.49)$$

Поскольку $u(\rho) \in \text{Lip}_\alpha[0, \rho(\varphi)]$, то выполнено

$$\begin{aligned} |\rho u(\rho) - \xi_{k-1} u(\xi_{k-1})| &\leq \rho |u(\rho) - u(\xi_{k-1})| + |\rho - \xi_{k-1}| |u(\xi_{k-1})| \\ &\leq C \text{diam } D |\Delta \xi_k|^\alpha + |\Delta \xi_k| \max_{(x,y) \in D} |u(x,y)| \leq C_1 |\Delta \xi_k|^\alpha, \end{aligned}$$

где $C_1 = C_1(u, D) = (C + \max_{(x,y) \in D} |u(x, y)|)(1 + \text{diam } D)$. Следовательно, из (2.49) получим

$$|J(\varphi)| \leq C_1 \sum_{k=1}^m |\Delta \xi_k|^{1+\alpha}. \quad (2.50)$$

Так как $\xi_k \in (\rho_k, \rho_{k+1})$, то $\Delta \xi_k = \xi_k - \xi_{k-1} \leq \rho_k - \rho_{k-2} \leq \Delta \rho_k + \Delta \rho_{k-1} \leq 2\Delta \rho_{k-1}$ при $k \geq 2$ и $\Delta \xi_1 \leq \Delta \rho_1 = \rho_1$. Следовательно, из (2.50) имеем

$$\begin{aligned} |J(\varphi)| &\leq C_1 \left(|\Delta \xi_1|^{1+\alpha} + \sum_{k=2}^m |\Delta \xi_k|^{1+\alpha} \right) \\ &\leq C_1 \left(\rho_1^{1+\alpha} + 2 \sum_{k=1}^{m-1} |\Delta \rho_k|^{1+\alpha} \right) \leq 3C_1 \sum_{k=1}^{m-1} |\Delta \rho_k|^{1+\alpha}. \end{aligned}$$

Поскольку функция $G(\rho)$ монотонно возрастает и выпукла вниз, то последовательность $\Delta \rho_k$ убывает, а значит, $\Delta \rho_k \leq \rho_k/k$. Отсюда имеем

$$|J(\varphi)| \leq 3C_1 \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{\rho_k}{k} \right)^{1+\alpha}. \quad (2.51)$$

Разобьем промежутки $[0, 2\pi]$ на два множества E_1 и E_2 . К первому множеству отнесем точки $\varphi \in [0, 2\pi]$ такие, что $\lambda s(\varphi) \leq 1$ при $\varphi \in E_1$. К множеству E_2 отнесем остальные точки отрезка $[0, 2\pi]$. Поскольку

$$A_\delta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{s^\delta(\varphi)} d\varphi \geq \int_{E_1} \frac{1}{s^\delta(\varphi)} d\varphi \geq \lambda^\delta \mu(E_1),$$

где $\mu(E_1)$ – мера множества E_1 , то

$$\mu(E_1) \leq \frac{A_\delta}{\lambda^\delta}. \quad (2.52)$$

Для точек множества E_2 из (2.51) имеем

$$\begin{aligned} |J(\varphi)| &\leq 3C_1 \left(\sum_{k \leq \lambda s(\varphi)} \left(\frac{\rho_k}{k} \right)^{1+\alpha} + \sum_{k \geq \lambda s(\varphi)} \left(\frac{\rho_k}{k} \right)^{1+\alpha} \right) \\ &\leq 3C_1 \left(\sum_{k \leq \lambda s(\varphi)} \left(\frac{\rho_k}{k} \right)^{1+\alpha} + (\rho(\varphi))^{1+\alpha} \sum_{k \geq \lambda s(\varphi)} \left(\frac{1}{k} \right)^{1+\alpha} \right) \\ &\leq 3C_1 \left(\sum_{k \leq \lambda s(\varphi)} \left(\frac{\rho_k}{k} \right)^{1+\alpha} + \frac{(\text{diam } D)^{1+\alpha}}{(\lambda s(\varphi))^\alpha} \right) \\ &\leq C_2 \left(\sum_{k \leq \lambda s(\varphi)} \left(\frac{\rho_k}{k} \right)^{1+\alpha} + \frac{1}{(\lambda s(\varphi))^\alpha} \right), \end{aligned}$$

где постоянная C_2 зависит только от диаметра области D и $\max_{(x,y) \in D} |u(x, y)|$. Поскольку $\lambda G(\rho_k) = \pi k$, то с учетом (2.48) имеем

$$|J(\varphi)| \leq C_2 \left(\left(\frac{\pi}{\lambda s(\varphi)} \right)^{(1+\alpha)/\beta} \sum_{k \leq \lambda s(\varphi)} \frac{1}{k^{1+\alpha-(1+\alpha)/\beta}} + \frac{1}{(\lambda s(\varphi))^\alpha} \right). \quad (2.53)$$

Пусть $\alpha > (1+\alpha)/\beta$, т. е. $\beta > 1+1/\alpha$. Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\alpha-(1+\alpha)/\beta}}$ сходится, то

$$|J(\varphi)| \leq C_2 C(\alpha, \beta) \frac{1}{(\lambda s(\varphi))^{(1+\alpha)/\beta}}.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im} I(u)| &= \left| \int_0^{2\pi} J(\varphi) d\varphi \right| = \left| \int_{E_1} J(\varphi) d\varphi + \int_{E_2} J(\varphi) d\varphi \right| \\ &\leq \mu(E_1) \max_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} \left| \int_0^{\rho(\varphi)} \rho u(\rho) \sin(\lambda G(\rho)) d\rho \right| \\ &\quad + \frac{C_3}{\lambda^{(1+\alpha)/\beta}} \int_{E_2} \frac{1}{(s(\varphi))^{(1+\alpha)/\beta}} d\varphi \\ &\leq \frac{A_\delta}{\lambda^\delta} \max_{(x,y) \in D} |u(x,y)| \frac{(\operatorname{diam} D)^2}{2} + \frac{C_3}{\lambda^{(1+\alpha)/\beta}} \int_{E_2} \frac{1}{(s(\varphi))^{(1+\alpha)/\beta}} d\varphi. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Если $(1+\alpha)/\beta \leq \delta$, то интеграл сходится и

$$|\operatorname{Im} I(u)| = O\left(\frac{1}{\lambda^{(1+\alpha)/\beta}}\right).$$

Если $(1+\alpha)/\beta > \delta$, то

$$\begin{aligned} \int_{E_2} \frac{1}{(s(\varphi))^{(1+\alpha)/\beta}} d\varphi &= \int_{E_2} \frac{|s(\varphi)|^{\delta-(1+\alpha)/\beta}}{s^\delta(\varphi)} d\varphi \\ &\leq \lambda^{(1+\alpha)/\beta-\delta} \int_{E_2} \frac{1}{s^\delta(\varphi)} d\varphi \leq A_\delta \lambda^{(1+\alpha)/\beta-\delta} \end{aligned}$$

и

$$|\operatorname{Im} I(u)| = O\left(\frac{1}{\lambda^\delta}\right).$$

Аналогичные оценки верны и для $|\operatorname{Re} I(u)|$. Первая часть теоремы доказана. Пусть теперь $\alpha = (1+\alpha)/\beta$. Тогда из неравенства (2.53) имеем

$$|J(\varphi)| = O\left(\frac{\ln \lambda}{(\lambda s(\varphi))^\alpha}\right)$$

и так же, как и для случая $\alpha > (1+\alpha)/\beta$, получим

$$|\operatorname{Im} I(u)| = O\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda^{\min(\alpha, \delta)}}\right).$$

Рассмотрим случай $\alpha < (1+\alpha)/\beta$. Тогда

$$\sum_{k \leq \lambda s(\varphi)} \frac{1}{k^{1+\alpha-(1+\alpha)/\beta}} = O((\lambda s(\varphi))^{(1+\alpha)/\beta-\alpha})$$

и из неравенства (2.53) получим

$$|J(\varphi)| = O\left(\frac{1}{(\lambda s(\varphi))^\alpha}\right).$$

Оценивая $|\operatorname{Im} I(u)|$, как в (2.54), получим

$$|\operatorname{Im} I(u)| = O\left(\frac{1}{\lambda^{\min(\alpha, \delta)}}\right).$$

Теорема доказана.

Теорема 2.1 позволяет оценивать осциллирующие интегралы с фазой, имеющей вырожденные или вырожденные и неизолированные особые точки, а также с недифференцируемой фазой. Рассмотрим в качестве примера осциллирующий интеграл

$$|I(u)| = \iint_D u(x, y) \exp\{i\lambda|x|^p|y|^q\} dx dy,$$

где замкнутая выпуклая и ограниченная область D содержит начало координат, $p \geq 1$, $q \geq 1$, $p \geq q$, — действительные числа, $u(x, y) \in \operatorname{Lip}_1(D)$. Поскольку $\alpha = 1$, $\beta = p + q \geq 2$, $s(\varphi) = |\cos \varphi|^p |\sin \varphi|^q$ и интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{s^\delta(\varphi)} d\varphi = A_\delta < +\infty$$

при любом $\delta < \delta_0 = 1/p$, то по теореме 2.1 имеем

$$|I(u)| = O\left(\frac{1}{\lambda^\delta}\right) \quad (2.55)$$

при $\beta = p + q > 2$ и

$$|I(u)| = O\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda^\delta}\right)$$

при $\beta = p + q = 2$, где δ — любое положительное число, меньшее $\delta_0 = 1/p$, и постоянная зависит от δ . Пусть $p = q = n$. Для интеграла

$$I_n = \int_0^1 \int_0^1 \exp\{2\pi i \lambda x^n y^n\} dx dy$$

справедлива оценка снизу (см. [1, с.41]):

$$|I_n| \geq \frac{1}{2\pi n^2} \frac{\ln \lambda}{\lambda^{1/n}},$$

что показывает неулучшаемость оценки (2.55) в степенной шкале. В работе [1] доказана следующая теорема об оценке кратного тригонометрического интеграла.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $n, k_1, \dots, k_r$ – целые числа, $n \geq 1, k_1, \dots, k_r \geq 0, k_1 + \dots + k_r \leq n$, и $\alpha(k_1, \dots, k_r)$ – вещественные числа,

$$F(x_1, \dots, x_r) = \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{k_1=0 \\ k_1+\dots+k_r=k}}^n \dots \sum_{k_r=0}^n \alpha(k_1, \dots, k_r) x_1^{k_1} \dots x_r^{k_r},$$

$$\beta(\bar{x}; \bar{k}) = \frac{1}{k_1! \dots k_r!} \frac{\partial^{k_1+\dots+k_r} F(x_1, \dots, x_r)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_r^{k_r}},$$

$$H = \min_{0 \leq x_1, \dots, x_r \leq 1} \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{k_1=0 \\ k_1+\dots+k_r=k}}^n \dots \sum_{k_r=0}^n |\beta(\bar{x}; \bar{k})|^{1/k}.$$

Тогда для интеграла

$$J = \int_0^1 \dots \int_0^1 \exp\{2\pi i F(x_1, \dots, x_r)\} dx_1 \dots dx_r$$

справедлива оценка

$$|J| \leq C(n, r) \min(1, H^{-1}).$$

Применяя теорему 2.2 к многочлену $F(x, y) = \lambda(x^4 + x^2 y^2 + y^4)$, получим оценку

$$|J| = O(\lambda^{-1/4}).$$

В то же время из теоремы 2.1 следует точная оценка

$$|J| = O(\lambda^{-1/2}).$$

Пусть функция $u(x, y)$ непрерывна в $\mathbb{R}^2$. Определим разности:

$$\Delta_{\xi\eta}^2 u(x, y) = u(x, y) - u(x, \eta) - u(\xi, y) + u(\xi, \eta),$$

$$\Delta_\xi u(x, \cdot) = u(x, y) - u(\xi, y), \quad \Delta_\eta u(\cdot, y) = u(x, y) - u(x, \eta).$$

Пусть, далее, $f(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$, где функции $f_1(x)$ и $f_2(y)$ непрерывны на всей оси, $f_1(0) = 0, f_2(0) = 0$ и функции $|f_1(x)|$ и $|f_2(y)|$ выпуклы, т. е. нуль является правильной особой точкой.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть функция $u(x, y)$ финитна,

$$|\Delta_{\xi\eta}^2 u(x, y)| \leq C_1 |x - \xi| |y - \eta|,$$

$$|\Delta_\xi u(x, \cdot)| \leq C_2 |x - \xi|, \quad |\Delta_\eta u(\cdot, y)| \leq C_3 |y - \eta|,$$

$$|f_1(x)| \geq C_4 |x|^p, \quad |f_2(y)| \geq C_5 |y|^q,$$

где $p > 1, q > 1, C_1, \dots, C_5$ – абсолютные постоянные. Тогда для интеграла

$$I = I(u) = \iint_{\mathbb{R}^2} u(x, y) \exp\{i\lambda f(x, y)\} dx dy,$$

где $f(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$, имеем

$$I = u(0, 0)C(p, q, \lambda) + O(\lambda^{-1/p-1/q-\tau}),$$

$$\tau = \min\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right), \quad C(p, q, \lambda) = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\{i\lambda f(x, y)\} dx dy = O(\lambda^{-1/p-1/q}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим интеграл

$$I_1 = \iint_{\mathbb{R}^2} u(x, y) \cos(\lambda f_1(x)) \cos(\lambda f_2(y)) dx dy.$$

Интегралы, содержащие $\sin(\lambda f_1(x)) \cos(\lambda f_2(y))$, $\sin(\lambda f_1(x)) \sin(\lambda f_2(y))$, $\cos(\lambda f_1(x)) \sin(\lambda f_2(y))$, рассматриваются аналогично. Согласно лемме 2.3 выберем точки $\dots < \xi_{-k} < \dots < \xi_{-1} < 0 < \xi_1 < \dots < \xi_k < \dots$ такие, что

$$\begin{aligned} \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \cos(\lambda f_1(x)) dx &= 0, \quad k = 1, \pm 2, \dots, \\ \int_{\xi_{-1}}^{\xi_1} \cos(\lambda f_1(x)) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\lambda f_1(x)) dx. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Аналогичные точки η_s , $s = \pm 1, \pm 2, \dots$, выберем для функции $f_2(y)$. Учитывая (2.56), получим

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{\substack{|k| \geq 1 \\ k \neq -1}} \sum_{\substack{|s| \geq 1 \\ s \neq -1}} \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \int_{\eta_s}^{\eta_{s+1}} \Delta_{\xi_k \eta_s}^2 u(x, y) \cos(\lambda f_1(x)) \cos(\lambda f_2(y)) dx dy \\ &\quad + \sum_{\substack{|s| \geq 1 \\ s \neq -1}} \int_{\xi_{-1}}^{\xi_1} \int_{\eta_s}^{\eta_{s+1}} \Delta_{\eta} u(\cdot, y) \cos(\lambda f_1(x)) \cos(\lambda f_2(y)) dx dy \\ &\quad + \sum_{\substack{|k| \geq 1 \\ k \neq -1}} \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \int_{\eta_{-1}}^{\eta_1} \Delta_{\xi_k} u(x, \cdot) \cos(\lambda f_1(x)) \cos(\lambda f_2(y)) dx dy \\ &\quad + \int_{\xi_{-1}}^{\xi_1} \int_{\eta_{-1}}^{\eta_1} (u(x, y) - u(x, 0) + u(x, 0) - u(0, 0)) \\ &\quad \quad \times \cos(\lambda f_1(x)) \cos(\lambda f_2(y)) dx dy \\ &\quad + u(0, 0) \int_{\xi_{-1}}^{\xi_1} \int_{\eta_{-1}}^{\eta_1} \cos(\lambda f_1(x)) \cos(\lambda f_2(y)) dx dy. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Поскольку точки ξ_k и η_s лежат между точками x_k и y_s , определяемыми из соотношений

$$\frac{\pi|2k+1|}{2\lambda} = |f_1(x_k)| \geq C_4|x_k|^p, \quad \frac{\pi|2s+1|}{2\lambda} = |f_2(y_s)| \geq C_5|y_s|^q,$$

а в силу выпуклости функций $|f_1(x)|$ и $|f_2(y)|$ следует, что $|\Delta x_k| \leq \left| \frac{x_k}{k} \right|$ и $|\Delta y_s| \leq \left| \frac{y_s}{s} \right|$, из (2.57) имеем

$$I_1 = u(0, 0)C(p, q, \lambda) + R,$$

где

$$\begin{aligned}
 C(p, q, \lambda) &= \int_{\xi_{-1}}^{\xi_1} \int_{\eta_{-1}}^{\eta_1} \cos(\lambda f_1(x)) \cos(\lambda f_2(y)) dx dy \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\lambda f_1(x)) dx \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\lambda f_2(y)) dy = O(\lambda^{-1/p-1/q}), \\
 |R| &\leq \sum_{|k| \geq 1} \sum_{|s| \geq 1} \left| \frac{x_k}{k} \right|^2 \left| \frac{y_s}{s} \right|^2 + \frac{1}{\lambda^{1/p}} \sum_{|s| \geq 1} \left| \frac{y_s}{s} \right|^2 \\
 &\quad + \frac{1}{\lambda^{1/q}} \sum_{|k| \geq 1} \left| \frac{x_k}{k} \right|^2 + \frac{1}{\lambda^{1/p+2/q}} \frac{1}{\lambda^{2/p+1/q}}. \tag{2.58}
 \end{aligned}$$

Так как функция $u(x, y)$ финитна, то все суммы в (2.58) конечны и верхний предел суммирования есть $O(\lambda^{-1})$. Учитывая, что $|x_k| = O(|\frac{k}{\lambda}|^{1/p})$, имеем

$$\sum_{|k| \geq 1} \left| \frac{x_k}{k} \right|^2 = \begin{cases} O(\lambda^{-2/p}) & \text{при } p > 2, \\ O(\lambda^{-2/p} \ln \lambda) & \text{при } p = 2, \\ O(\lambda^{-1}) & \text{при } 1 < p < 2. \end{cases}$$

Аналогичное равенство выполнено для $\sum_{|s| \geq 1} \left| \frac{y_s}{s} \right|^2$. Теорема доказана.

Заметим, что при $p > 2$ сходится ряд $\sum_{|k| \geq 1} \left| \frac{x_k}{k} \right|^2 = O(\lambda^{-2/p})$, т. е. в этом случае можно не требовать финитности функции $u(x, y)$ по переменной x . Аналогично, при $q > 2$ функция $u(x, y)$ может быть не финитной по y , при этом интеграл будет существовать как предел интегралов по прямоугольникам со сторонами, параллельными осям координат.

Теорема 2.3 легко переносится на случай функций любого числа переменных. Пусть, в частности, функция $u(x) = u(x_1, \dots, x_n)$ определена и финитна в $\mathbb{R}^n$ и имеет непрерывные смешанные производные $\frac{\partial^k u}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}$, $k = 1, 2, \dots, n$, $j_s \neq j_l$ при $s \neq l$, функции $f_k(t)$ удовлетворяют условиям: $f_k(0) = 0$, $|f_k(t)|$ выпукла и $|f_k(t)| \geq C_k |t|^{\beta_k}$, $\beta_k > 1$, $k = 1, 2, \dots, n$. Тогда для интеграла

$$I = I(u) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x, y) \exp\{i\lambda f(x, y)\} dx dy, \tag{2.59}$$

где $f(x) = f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n)$, выполнена оценка

$$\begin{aligned}
 I &= u(0, 0)C(\lambda, f) + O(\lambda^{-1/\beta_1 - \dots - 1/\beta_n - \tau}), \\
 \tau &= \min(1/\beta_1, \dots, 1/\beta_n), \quad C(\lambda, f) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{i\lambda f(x)\} dx = O(\lambda^{-1/\beta_1 - \dots - 1/\beta_n}).
 \end{aligned}$$

Применяя эту оценку к интегралу (2.59) с фазой $f(x) = \pm x_1^{k+1} \pm x_2^2 + Q$, $k \geq 1$,

$Q = -x_3^2 - \dots - x_s^2 + x_{s+1}^2 + \dots + x_n^2$ т. е. с фазой, имеющей особенность типа A_k (см. [21], [22]), получим точную оценку:

$$I = I(u) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x, y) \exp\{i\lambda f(x, y)\} dx dy = u(0, 0) \frac{C_{k,n}}{\lambda^{n/2-\beta}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{(n+1)/2-\beta}}\right), \quad (2.60)$$

где $\beta = \frac{k-1}{2(k+1)}$, а постоянная $C_{k,n} = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{i\lambda f(x)\} dx$ может быть явно вычислена.

Для особенности типа E_6 или E_8 , т. е. фаз $f(x) = x_1^3 \pm x_2^4 + Q$ и $f(x) = x_1^3 \pm x_2^5 + Q$, получим оценку (2.60), где $\beta = \frac{5}{12}$ и $\beta = \frac{7}{15}$ соответственно.

Рассмотрим особенность D_4 : $f(x) = x_1^2 x_2 \pm x_3^2 + Q$. Применяя теоремы 2.1 и 2.3, получим оценку (2.60), где $\beta = \frac{1}{3}$. Все эти оценки точные (см. [21], [22]).

Автор благодарен ректору РГСУ, члену-корреспонденту РАН В. И. Жукову и А. А. Харсиеву за всестороннюю поддержку.

Список литературы

1. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н., *Теория кратных тригонометрических сумм*, Наука, М., 1987.
2. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н., “Показатель сходимости особого интеграла проблемы Терри”, *ДАН СССР*, **248**:2 (1979), 268–272.
3. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н., *Кратные тригонометрические суммы*, Наука, М., 1980.
4. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н., “Тригонометрические интегралы”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **43**:5 (1979), 971–1003.
5. Попов Д. А., “Оценки с константами для некоторых классов осциллирующих интегралов”, *УМН*, **52**:1 (1997), 77–148.
6. Попов Д. А., “Восстановление характеристических функций в двумерной радоновской томографии”, *УМН*, **53**:1 (1998), 115–198.
7. Попов Д. А., “Сферическая сходимость ряда и интеграла Фурье индикатора двумерной области”, *Тр. МИАН*, **218** (1997), 354–373.
8. Чубариков В. Н., “Об одном кратном тригонометрическом интеграле”, *ДАН СССР*, **227**:6 (1976), 1308–1310.
9. Чубариков В. Н., “О кратных рациональных тригонометрических суммах и кратных интегралах”, *Матем. заметки*, **20**:1 (1976), 61–68.
10. Hua L.-K., “On the numbers of solutions of Tarry’s problem”, *Acta Sci. Sinica*, **1**:1 (1952), 1–76.
11. Ikromov I. A., “On the convergence exponent of trigonometric integrals”, *Тр. МИАН*, **218** (1997), 179–189.
12. Эрдейи А., *Асимптотические разложения*, Наука, М., 1962.
13. Виноградов И. М., *Метод тригонометрических сумм в теории чисел*, Наука, М., 1980.
14. Van der Corput J. G., “Zahlentheoretische Abschätzungen”, *Math. Ann.*, **84**:1 (1921), 33–79.
15. Федорюк М. В., *Метод перевала*, Наука, М., 1977.
16. Чаккиев М. А., “Экспоненциальные полиномы, наименее уклоняющиеся от нуля, и оптимальные квадратурные формулы”, *Матем. сб.*, **120**(162):2 (1983), 273–285.
17. Y. Colin de Verdière., “Nombre de points entiers dans une famille homothétique de domaines de $\mathbf{R}$ ”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. Ser. 4*, **10**:4 (1977), 559–576.
18. Popov D. A., “Comments”, *Arnold’s Problems*, **1**, Springer–Phases, Berlin–M., 2004, 392–393.

19. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкредидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., *Математическая теория оптимальных процессов*, Наука, М., 1969.
20. Zolotarev G., Korkine A., “Sur un certain minimum”, *Nouvelles annals de math. Ser. 2*, 1873, 337–355.
21. Арнольд В. И., “Интегралы быстроосциллирующих функций и особенности проекций лагранжевых многообразий”, *Функцион. анализ и его прилож.*, **6**:3 (1972), 61–62.
22. Арнольд В. И., “Замечания о методе стационарной фазы и числах Кокстера”, *УМН*, **28**:5 (1973), 17–44.
23. Carleson L., “Some analytic problems related to statistical mechanics”, *Lect. Notes Math.*, **779**, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

М. А. ЧАХКИЕВ (М. А. СНАКНКІЕВ)

Российский государственный
социальный университет

Поступило в редакцию

17.05.2005