Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. М. Алексенцев, Многочлен Гильберта и линейные формы от логарифмов алгебраических чисел, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2008, том 72, выпуск 6, 5–52

DOI: <https://doi.org/10.4213/im757>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 15:31:59

УДК 511.3+511.364+511.51+511.682

Ю. М. Алексенцев

Многочлен Гильберта и линейные формы от логарифмов алгебраических чисел

Доказана новая оценка однородной линейной формы с целыми коэффициентами от логарифмов алгебраических чисел. Получены качественное улучшение оценки в зависимости от коэффициентов линейной формы и наилучшее значение константы в оценке при не очень большом количестве логарифмов.

Библиография: 24 наименования.

Введение

Статья посвящена получению оценки однородной линейной формы с целыми коэффициентами от логарифмов алгебраических чисел (см. также [1]–[8]). Оценки линейных форм имеют широкое применение в теории чисел (см. [9]). В статье предложен новый технический подход к доказательству подобных оценок. Подход основан на том, что индукция проводится не как во всех предыдущих работах по числу логарифмов алгебраических чисел, а по величине значения многочлена Гильберта некоторой целочисленной решетки, содержащей вектор коэффициентов исходной линейной формы. При доказательстве индукцией по числу логарифмов на каждом шаге приходится менять линейную форму, при этом портится как качественный, так и количественный вид оценки. В доказательстве индукцией по величине значения многочлена Гильберта объемлющей решетки исходная линейная форма не меняется вовсе, что позволяет получить оптимальную зависимость оценки от коэффициентов линейной формы (это не удавалось сделать ранее; см. [10], [8]), наилучшие константы при малых значениях логарифмов и упростить доказательство на завершающем этапе. Возможность таким образом построить доказательство удалось в том числе благодаря тождеству для многочленов Гильберта, доказанному в § 2.

В настоящей статье будем использовать следующие понятия и соглашения.

Для любого $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$, под $\log \alpha$ понимается некоторое фиксированное значение натурального логарифма α .

Для алгебраического числа $\alpha \neq 0$ его модифицированная логарифмическая высота $h'(\alpha)$ определена равенством $h'(\alpha) = \max(h(\alpha), \frac{|\log \alpha|}{d}, \frac{1}{d})$, где $h(\alpha)$ – абсолютная логарифмическая высота Вейля, свойства которой напоминаются в § 4, а d – степень алгебраического числа α .

Пусть $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^n$ – решетка ранга r , $0 \leq r \leq n$, и V – подпространство в $\mathbb{R}^n$ размерности r , порождаемое решеткой Λ . Ортогональная решетка $\Lambda^\perp$ определяется равенством $\Lambda^\perp = V^\perp \cap \mathbb{Z}^n$. Определение ортогональной решетки зависит лишь от подпространства V . Напомним, что решетка $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^n$ называется *примитивной*, если $\Lambda = \mathbb{Z}^n \cap V$.

Для решетки Λ определен ее многочлен Гильберта $H(\Lambda; X_1, \dots, X_n)$, это однородный многочлен от n переменных с целыми неотрицательными коэффициентами. Степень его по этим переменным равна $n - r$. Подробно это понятие обсуждается в § 1, 2. Для тривиальной решетки $\Lambda = 0$ многочлен Гильберта имеет вид

$$H(0; X_1, \dots, X_n) = X_1 \cdots X_n.$$

Наше определение многочлена Гильберта отличается от определения, введенного в работе [5], отсутствием множителя $(n - r)!$.

Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$, где $\mathbb{A}$ – множество всех алгебраических чисел, и поле $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ имеет степень d . Кроме того, $\log \alpha_1, \dots, \log \alpha_n$ – фиксированные значения натуральных логарифмов. Пусть $L(x_1, \dots, x_n) = b_1 x_1 + \dots + b_n x_n$ – линейная форма с целыми коэффициентами. Не уменьшая общности, мы будем предполагать в дальнейшем, что α_i и b_i пронумерованы так, что выполнено равенство

$$|b_n| h'(\alpha_n) = \max_{1 \leq i \leq n} |b_i| h'(\alpha_i),$$

в противном случае их можно перенумеровать.

Далее следует основной результат настоящей статьи.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $L(x_1, \dots, x_n) = b_1 x_1 + \dots + b_n x_n$ – линейная форма с целыми коэффициентами $b_i \neq 0$, $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$. Тогда для произвольной решетки $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^n$, $\dim \Lambda = r$, такой, что $\vec{b} \in \Lambda$, и ненулевых мультипликативно независимых чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{A}$ при условии $L = L(\log(\alpha_1), \dots, \log(\alpha_n)) \neq 0$ выполняется следующая оценка:

$$\begin{aligned} \log |L| \geq & -(5.3)^\varkappa n^\varkappa (n+1)(n+8)^2 (n+5) (7.86)^r 4^n d^{r+2} \log B \\ & \times H(\Lambda^\perp; h'(\alpha_1), \dots, h'(\alpha_n)) \log(3nd)U. \end{aligned}$$

Здесь $H(\Lambda^\perp; h'(\alpha_1), \dots, h'(\alpha_n))$ – значение многочлена Гильберта ортогональной решетки $\Lambda^\perp$ в точке $(h'(\alpha_1), \dots, h'(\alpha_n))$; $U = \frac{(n+1)^r}{r^{r+0.5}}$; число $\varkappa$ равно 1, если все числа $\log(\alpha_1), \dots, \log(\alpha_n)$ действительные, и равно 2, если среди них есть комплексные; параметр B (с учетом $|b_n| h'(\alpha_n) = \max_{1 \leq i \leq n} |b_i| h'(\alpha_i)$) определен равенством

$$B = \max \left(\max_{1 \leq i \leq n-1} \left(\frac{|b_i|}{dh'(\alpha_n)} + \frac{|b_n|}{dh'(\alpha_i)} \right), 3 \right).$$

В случае, когда $\Lambda = \mathbb{Z}^n$, а следовательно, $\Lambda^\perp = 0$ и $r = n$, как уже упоминалось выше, значение многочлена Гильберта решетки $\Lambda^\perp$ в точке $h'(\alpha_1), \dots, h'(\alpha_n)$ определяется равенством

$$H(\Lambda^\perp; h'(\alpha_1), \dots, h'(\alpha_n)) = h'(\alpha_1) \cdots h'(\alpha_n).$$

С учетом этого и неравенства $U < e/\sqrt{n}$ (при $r = n$) получаем следствие теоремы 1:

ТЕОРЕМА 2. Для ненулевых мультипликативно независимых алгебраических чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и любой линейной формы $L(x_1, \dots, x_n) = b_1 x_1 + \dots + b_n x_n$ с целыми ненулевыми коэффициентами при выполнении условия $L = L(\log(\alpha_1), \dots, \log(\alpha_n)) \neq 0$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \log |L| \geq & -e(5.3)^\varkappa n^{\frac{2\varkappa-1}{2}} (n+1)(n+8)^2 (n+5) (31.5)^n d^{n+2} \log B \\ & \times h'(\alpha_1) \cdots h'(\alpha_n) \log(3nd). \end{aligned}$$

Здесь $\varkappa$ и B определены так же, как и в теореме 1.

В теоремах 1 и 2 предполагается, что числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ являются мультипликативно независимыми, однако это не будет серьезным ограничением. В приложениях это часто имеет место, и, кроме того, от этого ограничения легко избавляются методом, изложенным, например, в [10]. В качестве параметра B в теоремах 1 и 2 можно, уже без предположения $|b_n|h'(\alpha_n) = \max_{1 \leq i \leq n} |b_i|h'(\alpha_i)$, взять менее точное, однако более симметричное выражение

$$B = \max \left(\max_{1 \leq i, j \leq n} \left(\frac{|b_i|}{dh'(\alpha_j)} + \frac{|b_j|}{dh'(\alpha_i)} \right), 3 \right).$$

Статья организована следующим образом. В §1 дается определение многочлена Гильберта решетки, обсуждаются некоторые его свойства и упоминавшаяся во введении лемма о нулях. В §2 доказывается еще несколько важных свойств многочленов Гильберта. В §3 содержится результат, касающийся оценки числа точек решетки в некотором множестве; этот результат необходим при построении вспомогательных функций. В §4 напоминаются определение и некоторые свойства логарифмической высоты Вейля и связанные с ней факты. В §5 содержатся лемма Зигеля об оценке решений систем линейных уравнений и формулировка одной оценки дискриминанта алгебраического поля. В §6 приводится без доказательства известное неравенство Лиувилля в терминах логарифмических высот. В §7 обсуждаются свойства полиномов Фельдмана и близкие к ним вопросы. И наконец, в §8 формулируется индуктивное предположение и объясняется ход доказательства теоремы 1, этим параграфом завершается подготовительная часть работы, и с §9 начинается изложение непосредственно самого доказательства, которое в основном следует методу Бейкера [1].

Автор выражает глубокую признательность профессору Ю. В. Нестеренко за внимание и помощь в работе, а также д.ф.м.н. Е. М. Матвееву за целый ряд полезных замечаний.

§ 1. Лемма о нулях

В последнее время было опубликовано много работ об оценке количества и кратности нулей многочленов на алгебраических группах. Здесь следует назвать имена Д. Массера, а также Д. Броунвелла и Г. Вюстхольца. Мы будем пользоваться результатом П. Филиппона, доказавшего в 1986 г. (см. [11]) общий результат, касающийся такого рода оценок. Некоторый частный случай этой общей теоремы указан в работе [5]. Поскольку именно этот частный случай мы будем использовать, то после введения необходимых определений сформулируем его в виде леммы (лемма 2).

Обсудим подробно понятие многочлена Гильберта произвольной решетки $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$. Для тривиальной решетки $\Lambda = 0$ многочлен Гильберта по определению имеет вид

$$H(0; X_1, \dots, X_n) = X_1 \cdots X_n.$$

Пусть теперь решетка Λ размерности $r > 0$ порождается векторами

[illegible]

Пусть $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)$ – возрастающее подмножество множества $\{1, \dots, n\}$. Обозначим через Λ_θ определитель подматрицы размера $r \times r$ матрицы, состоящей

из координат λ_i^j , причем из этой матрицы взяты столбцы с номерами $\theta_1, \dots, \theta_r$. Определим многочлен Гильберта этой решетки следующим равенством:

$$H(\Lambda; X_1, \dots, X_n) = \sum_{\theta} |\Lambda_{\theta}| \cdot \prod_{i \notin \theta} X_i. \quad (2)$$

Нетрудно показать, что это определение не зависит от выбора базиса решетки Λ .

ЛЕММА 1. Пусть Υ и Λ – решетки в $\mathbb{R}^n$, причем $\dim \Lambda = \dim \Upsilon$, $\Lambda \subseteq \Upsilon$. Обозначим через $\rho = [\Upsilon : \Lambda]$ индекс решетки Λ в решетке Υ . Тогда

$$\rho H(\Upsilon; X_1, \dots, X_n) = H(\Lambda; X_1, \dots, X_n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Коэффициенты $|\Lambda_{\theta}|$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)$, в определении многочлена Гильберта не что иное, как r -мерные объемы проекций основного параллелепипеда решетки на r -мерные подпространства, порожденные базисными векторами $\vec{e}_{\theta_1}, \dots, \vec{e}_{\theta_r}$. Так как $\rho = d(\Lambda)/d(\Upsilon)$ – отношение r -мерных объемов основных параллелепипедов решеток, то для r -мерных объемов проекций также выполняется равенство $\rho = |\Lambda_{\theta}|/|\Upsilon_{\theta}|$, из которого сразу следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Пусть, как и раньше, Λ – решетка размерности r , порожденная векторами $\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_r$ (см. (1)). Для дальнейшего нам понадобится следующее отображение:

$$\varphi: (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow (\mathbb{C}^*)^r, \quad 0 \leq r \leq n,$$

где

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \left[\prod_{i=1}^n u_i^{\lambda_i^1}, \dots, \prod_{i=1}^n u_i^{\lambda_i^r} \right].$$

Для любого целого неотрицательного S положим $E(S) = \varphi(\Gamma(S))$, $\Gamma(S) = \{(\alpha_1^s, \dots, \alpha_n^s), 0 \leq s \leq S\}$. Теперь все готово для того, чтобы сформулировать вариант леммы о нулях в том виде, в котором мы будем его использовать.

ЛЕММА 2 (о нулях). Пусть S и T – целые неотрицательные числа. Предположим, что существует многочлен $P(X_0, \dots, X_n) \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$ степени не выше $D_0, D_1, \dots, D_n$ по соответствующим переменным, обращающийся в нуль во всех точках вида $(s, \alpha_1^s, \dots, \alpha_n^s)$, $|s| \leq S$, с кратностью по меньшей мере T по отношению к производным вида

$$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial X_0}, \quad \partial_i = b_i \frac{\partial}{\partial X_i} - b_n \frac{\partial}{\partial X_n}, \quad b_i \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq i \leq n-1,$$

причем выполняются следующие неравенства для параметров:

$$\binom{T_1 + (r+1)}{r+1} S_1(n-r)! H(\Lambda; D_1, \dots, D_n) > (n+1)! D_0 D_1 \cdots D_n$$

для любых решеток Λ ранга r , $0 \leq r \leq n$, и

$$\binom{T_1 + r}{r} \text{card } E(S_1)(n-r)! H(\Lambda; D_1, \dots, D_n) > \frac{(n+1)!}{n+1-r} D_1 \cdots D_n$$

для любых решеток Λ ранга r , $1 \leq r \leq n$. Здесь $T_1 = \lfloor \frac{T}{n+1} \rfloor$, $S_1 = \lfloor \frac{S}{n+1} \rfloor$. Тогда существует примитивная решетка $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^n$ размерности r , $1 \leq r \leq n$, такая, что $b = (b_1, \dots, b_n) \in \Lambda$ и выполняется одно из двух неравенств:

- 1) $\binom{T_1 + r}{r} S_1(n - r)! H(\Lambda; D_1, \dots, D_n) \leq (n + 1)! D_0 D_1 \cdots D_n;$
- 2) $\binom{T_1 + (r - 1)}{r - 1} \text{card } E(S_1)(n - r)! H(\Lambda; D_1, \dots, D_n) \leq \frac{(n + 1)!}{n + 1 - r} D_1 \cdots D_n.$

Доказательство см. в [5, предложение 3.5].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что если $\text{card } E(S_1) < S_1$, то для некоторого целого $s \neq 0$ выполняются соотношения

$$\alpha_1^{s\lambda_1^i} \cdots \alpha_n^{s\lambda_n^i} = 1, \quad i = 1, \dots, r,$$

откуда следует, что $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ мультипликативно зависимы, а это невозможно вследствие предположения теоремы 1.

§ 2. Многочлены Гильберта

Основная идея, применяемая в настоящей статье, – использовать многочлен Гильберта во всех оценках, связанных с методом Бейкера, освободившись от искусственного перехода от многочленов Гильберта к их оценкам, и обратно. Следующая лемма – одно из замечательных свойств многочленов Гильберта – во многом помогает осуществить эту идею.

ЛЕММА 3. Пусть $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^n$ – примитивная решетка размерности r , $\Lambda = V \cap \mathbb{Z}^n$, где V – некоторое подпространство в $\mathbb{R}^n$. Ортогональная решетка размерности $n - r$ определена равенством $\Lambda^\perp = V^\perp \cap \mathbb{Z}^n$; здесь $V^\perp$ – ортогональное дополнение к подпространству V . Рассмотрим произвольные действительные числа D и $h_i \neq 0$, $1 \leq i \leq n$, а также числа $D_i = \frac{D}{h_i}$. Тогда справедливо равенство

$$H(\Lambda; D_1, \dots, D_n) = \frac{D^{n-r}}{h_1 \cdots h_n} H(\Lambda^\perp; h_1, \dots, h_n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)$ – возрастающее упорядоченное подмножество множества $\{1, \dots, n\}$. Обозначим через $\Lambda_\theta = \Lambda_{\theta_1, \dots, \theta_r}$ определитель матрицы размера $r \times r$, являющейся подматрицей матрицы координат λ_i^j (см. (1)), причем из последней матрицы взяты столбцы с номерами $\theta_1, \dots, \theta_r$. Многочлен Гильберта этой решетки мы определили равенством

$$H(\Lambda; X_1, \dots, X_n) = \sum_{\theta} |\Lambda_\theta| \cdot \prod_{i \notin \theta} X_i.$$

Многочлен Гильберта ортогональной решетки имеет вид

$$H(\Lambda^\perp; X_1, \dots, X_n) = \sum_{\theta'} |\Lambda_{\theta'}^\perp| \cdot \prod_{i \notin \theta'} X_i.$$

Здесь суммирование ведется по всем $\theta' = (\theta'_1, \dots, \theta'_{n-r})$ – возрастающим упорядоченным подмножествам множества $\{1, \dots, n\}$, а $\Lambda_{\theta'}^\perp$ определяются аналогично Λ_θ , но уже относительно базиса решетки $\Lambda^\perp$ и набора θ' . Из этих двух представлений многочленов Гильберта видно, что для доказательства леммы достаточно установить равенство $|\Lambda_{\theta'}^\perp| = |\Lambda_\theta|$, где наборы θ и θ' дополняют друг

относительно этого базиса. Рассмотрим ортогональную решетку $\Lambda^\perp = V^\perp \cap \mathbb{Z}^n$ и выберем в качестве базиса в $V^\perp$ базис решетки $\Lambda^\perp$. Этот последний базис будет задавать грасмановы координаты для $V^\perp$. Вследствие равенства (3) и свойств 1) и 2) для этих двух базисов существует действительное число κ такое, что $|p_{\theta_1, \dots, \theta_r}| = \kappa |p_{\theta'_1, \dots, \theta'_r}|$. Для доказательства леммы осталось заметить, что $\Lambda_\theta = p_{\theta_1, \dots, \theta_r}$, $\Lambda_{\theta'}^\perp = p_{\theta'_1, \dots, \theta'_r}$, и доказать равенство $\kappa = 1$. В работе [13] установлено равенство объемов основных параллелепипедов решеток Λ и $\Lambda^\perp$. Как известно, объем основного параллелепипеда для любой решетки Λ равен корню квадратному из суммы Λ_θ^2 по всем определенным выше наборам θ . Из этого замечания с учетом равенства (3) имеем

$$\sqrt{\sum_{\theta} \Lambda_{\theta}^2} = |\kappa| \sqrt{\sum_{\theta'} (\Lambda_{\theta'}^\perp)^2},$$

причем подкоренные выражения равны, поскольку они и есть квадраты объемов соответствующих фундаментальных параллелепипедов. Отсюда сразу следует необходимый результат $|\kappa| = 1$, а следовательно, лемма полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для произвольных положительных $D_1 \geq D'_1, \dots, D_n \geq D'_n$ выполнено неравенство

$$\frac{D'_1 \cdots D'_n}{H(\Lambda; D'_1, \dots, D'_n)} \leq \frac{D_1 \cdots D_n}{H(\Lambda; D_1, \dots, D_n)}.$$

Это сразу следует из формулы

$$\frac{H(\Lambda; D_1, \dots, D_n)}{D_1 \cdots D_n} = \sum_{\theta} |\Lambda_{\theta}| \cdot \frac{1}{\prod_{i \in \theta} D_i},$$

вытекающей непосредственно из определения многочлена Гильберта (см. (2)). Доказанное неравенство позволяет применять лемму 3 в случае, когда мы не знаем точные значения параметров D_i , а знаем только их оценки.

§ 3. Многочлены Гильберта и количество точек решетки

В методе Бейкера при построении вспомогательных функций необходимо иметь оценку снизу числа коэффициентов этих функций. В связи с этим нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 4. Пусть D_i ($i = 1, \dots, n$), η , η_1 , D – положительные действительные, а v_i – комплексные числа, причем $D_i |v_i| \leq \eta_1 D$. Положим $\varkappa = 1$, если все числа $v_1, \dots, v_n$ действительные, и $\varkappa = 2$, если среди них есть хотя бы одно комплексное. Пусть $\Lambda = (\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_r)$ – решетка в $\mathbb{R}^n$ размерности r , V – подпространство, порождаемое Λ . Определим тело Ω условием

$$\Omega = \{\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in V, |x_i| \leq D_i, |x_1 v_1 + \dots + x_n v_n| \leq \eta D\}.$$

Обозначим через N максимальное число точек в $\mathbb{R}^n$, сравнимых по модулю решетки Λ и принадлежащих Ω . Тогда для N выполнена оценка снизу:

$$N \geq \frac{2^r D_1 \cdots D_n}{H(\Lambda; D_1, \dots, D_n)} \min \left(1, \left(\frac{\eta}{\eta_1 n} \right)^{\varkappa} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Π – параллелепипед, задаваемый неравенствами $|x_i| \leq D_i$, $i = 1, \dots, n$. Сделаем в $\mathbb{R}^n$ аффинное преобразование, заданное в координатах равенствами $x'_i = \frac{x_i}{D_i}$, $i = 1, \dots, n$. При этом параллелепипед Π перейдет в параллелепипед Π' , задаваемый неравенствами $|x_i| \leq 1$, а решетка Λ также изменится соответствующим образом на решетку Λ' . Решетка Λ' порождает подпространство V' , которое является образом V при нашем аффинном преобразовании. И наконец, тело Ω перейдет в некоторое тело Ω' , равное пересечению множества $W' = V' \cap \Pi'$ и множества, задаваемого неравенством $|x'_1 D_1 v_1 + \dots + x'_n D_n v_n| \leq \eta D$. Таким образом, нам достаточно доказать, что в Ω' содержится по крайней мере N точек таких, что разность любых двух из них принадлежит Λ' . Для этой цели нам понадобится оценить снизу объем тела Ω' .

В работе [7, лемма 5.1] доказано следующее утверждение: *пусть $M \in \mathbb{R}^n$ – симметричное выпуклое тело и $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ – вектор из $\mathbb{C}^n$; положим $\varkappa = 1$, если все числа $v_1, \dots, v_n$ действительные, и $\varkappa = 2$, если это не выполнено, а также положим*

$$\theta_1 = \sup\{|w_1 v_1 + \dots + w_n v_n| : \vec{w} \in M\},$$

$$E = \{w \in \mathbb{R}^n : |w_1 v_1 + \dots + w_n v_n| \leq \theta_1\};$$

тогда для любого действительного $\theta > 0$

$$\text{Vol}(M \cap (\theta E)) \geq \text{Vol}(M) \min(1, \theta^\varkappa). \quad (4)$$

Применим это утверждение в нашем случае для оценки $\text{Vol}(\Omega')$. Для этого положим $M = W' = V' \cap \Pi'$. Известно (см., например, [14]), что для любого подпространства размерности r , пересекающего параллелепипед Π' , объем пересечения будет не меньше 2^r , следовательно, это выполнено и для V' . В нашем случае это означает, что $\text{Vol}(W') \geq 2^r$. В качестве вектора $\vec{v}$ возьмем вектор с комплексными координатами $D_1 v_1, \dots, D_n v_n$. При этом для числа θ_1 , так как $D_i |v_i| \leq \eta_1 D$, выполнено неравенство $\theta_1 \leq \eta_1 n D$. Если теперь мы положим $\theta = \frac{\eta}{\eta_1 n}$, то с помощью (4) получим

$$\text{Vol}(W' \cap (\theta E)) \geq 2^r \min\left(1, \left(\frac{\eta}{\eta_1 n}\right)^\varkappa\right).$$

Поскольку $\theta_1 \leq \eta_1 n D$, то θE – множество, удовлетворяющее условию $\theta E \subseteq \{\vec{w}' \in \mathbb{R}^n : |w'_1 D_1 v_1 + \dots + w'_n D_n v_n| \leq \eta D\}$. Отсюда имеем $W' \cap (\theta E) \subseteq \Omega'$, а значит, мы доказали, что

$$\text{Vol}(\Omega') \geq 2^r \min\left(1, \left(\frac{\eta}{\eta_1 n}\right)^\varkappa\right).$$

Теперь для оценки требуемого количества точек можно воспользоваться теоремой Бlichфельда (см., например, [15]), которая в рассматриваемом случае утверждает, что

$$N \geq \frac{2^r}{\text{Vol}(\Lambda')} \min\left(1, \left(\frac{\eta}{\eta_1 n}\right)^\varkappa\right).$$

Далее, как известно, $\text{Vol}(\Lambda') = \sqrt{\sum_\theta |\Lambda'_\theta|^2}$, где $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)$ – все различные упорядоченные подмножества множества $\{1, \dots, n\}$, состоящие из r элементов, а Λ'_θ – определители миноров матрицы λ_i^j , из которой взяты столбцы

с номерами $\theta_1, \dots, \theta_r$. Учитывая, что

$$|\Lambda'_\theta| = \frac{|\Lambda_\theta|}{D_{\theta_1} \cdots D_{\theta_r}},$$

получаем

$$\begin{aligned} N &\geq \frac{2^r}{\text{Vol}(\Lambda')} \min\left(1, \left(\frac{\eta}{\eta_1 n}\right)^\kappa\right) \\ &= \frac{2^r}{\sqrt{\sum_{\theta=(\theta_1, \dots, \theta_r) \subseteq \{1, \dots, n\}} (\Lambda'_\theta)^2}} \min\left(1, \left(\frac{\eta}{\eta_1 n}\right)^\kappa\right) \\ &= \frac{2^r}{\sqrt{\sum_{\theta=(\theta_1, \dots, \theta_r) \subseteq \{1, \dots, n\}} \left(\frac{\Lambda_\theta}{D_{\theta_1} \cdots D_{\theta_r}}\right)^2}} \min\left(1, \left(\frac{\eta}{\eta_1 n}\right)^\kappa\right). \end{aligned}$$

Наконец, домножая числитель и знаменатель на $D_1 \cdots D_n$ и замечая, что

$$\begin{aligned} D_1 \cdots D_n &\left(\sqrt{\sum_{\theta=(\theta_1, \dots, \theta_r) \subseteq \{1, \dots, n\}} \left(\frac{\Lambda_\theta}{D_{\theta_1} \cdots D_{\theta_r}}\right)^2} \right) \\ &\leq D_1 \cdots D_n \left(\sum_{\theta=(\theta_1, \dots, \theta_r) \subseteq \{1, \dots, n\}} \frac{|\Lambda_\theta|}{D_{\theta_1} \cdots D_{\theta_r}} \right) = H(\Lambda; D_1, \dots, D_n), \end{aligned}$$

получаем утверждение леммы. Тем самым лемма полностью доказана.

§ 4. Логарифмические высоты

В этом параграфе для полноты изложения мы кратко напомним основные определения и свойства логарифмической высоты Вейля.

Пусть $\mathbb{K}$ – поле алгебраических чисел степени d над $\mathbb{Q}$, v – некоторое нормирование этого поля. Через $\mathbb{K}_v$ и $\mathbb{Q}_v$ обозначим топологическое замыкание полей $\mathbb{K}$ и $\mathbb{Q}$ по норме v . Если v – архимедово нормирование, то $\mathbb{Q}_v$ изоморфно $\mathbb{R}$, а $\mathbb{K}_v$ изоморфно в этом случае либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, в зависимости от того, комплексное или действительное нормирование v . Положим $d_v = [\mathbb{K}_v : \mathbb{Q}_v]$. Для удобства изложения нормализуем нормирование v следующим образом. Если v – неархимедово p -адическое нормирование ($v \mid p$), то положим $|p|_v = p^{-d_v}$; если же v – архимедово нормирование, то оно порождается некоторым вложением σ поля $\mathbb{K}$ в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, $\sigma: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{C}$, и тогда, как и для неархимедова случая, нормализуем v , положив $|x|_v = |\sigma(x)|^{d_v}$.

Благодаря выбору нормализации нормирований формула произведения имеет следующий простой вид:

$$\prod_v |\gamma|_v = 1, \quad \gamma \in \mathbb{K}^*, \quad (5)$$

где произведение берется по всем нормированиям v поля $\mathbb{K}$.

Пусть $\alpha \in \mathbb{K}$. Как и раньше, степень алгебраического поля $\mathbb{K}$ обозначим d . Определим абсолютную логарифмическую высоту Вейля $h(\alpha)$ числа α следующей формулой:

$$h(\alpha) = \frac{1}{d} \sum_v \log(\max(1, |\alpha|_v)),$$

где суммирование распространяется на все нормирования v поля $\mathbb{K}$. Отметим, что в силу (5) выполнено

$$h(\alpha) = \frac{1}{2d} \sum_v |\log |\alpha|_v| \quad (6)$$

и абсолютная логарифмическая высота Вейля алгебраического числа α не зависит от алгебраического поля $\mathbb{K}$, в котором мы это число рассматриваем.

Определим абсолютную логарифмическую высоту Вейля для произвольного вектора $\vec{l} = (l_1, \dots, l_n)$, $l_i \in \mathbb{K}$, и одновременно для линейной формы $L = l_1 x_1 + \dots + l_n x_n$ равенством

$$h(\vec{l}) = h(L) = \frac{1}{d} \sum_v \log \left(\max_{i=1, \dots, n} (|l_i|_v) \right).$$

Для произвольного числа $\alpha \in \mathbb{K}$ определим следующую модифицированную высоту:

$$h'(\alpha) = \max \left(h(\alpha), \frac{|\log \alpha|}{d}, \frac{1}{d} \right).$$

Для произвольных ненулевых алгебраических чисел α и β выполнено неравенство $h(\alpha\beta) \leq h(\alpha) + h(\beta)$, а для ненулевого алгебраического числа α верна формула $h(\alpha^{m/n}) = \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor h(\alpha)$, где $\frac{m}{n}$ – произвольное рациональное число.

Доказательство большинства упоминавшихся в этом параграфе фактов можно найти, например, в книге [6].

§ 5. Лемма Зигеля и дискриминант алгебраического поля

Применение леммы Зигеля в настоящей работе обусловлено необходимостью найти “маленькое” решение некоторой системы линейных однородных уравнений

$$L_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j = 0, \quad 1 \leq i \leq M. \quad (7)$$

Нам необходима эта лемма в случае, когда все a_{ij} принадлежат некоторому алгебраическому полю $\mathbb{K}$ степени d , а решения x_i , $i = 1, \dots, n$, мы будем искать в кольце целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ этого поля. Следующий результат доказан в работе [16].

ЛЕММА 5. Пусть $N > M$, где N и M – число неизвестных и число уравнений системы (7). Тогда эта система имеет нетривиальное решение $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ такое, что $x_i \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ и выполнено неравенство

$$h(\vec{x}) \leq \frac{1}{2d} \log |\mathbb{D}| + \frac{1}{N-M} \sum_{i=1}^M \left(\frac{1}{2} \log N + h(L_i) \right),$$

где $\mathbb{D}$ – дискриминант поля $\mathbb{K}$, а $h(\vec{x})$ – абсолютная логарифмическая высота Вейля вектора $\vec{x}$.

Отметим, что подобный, даже более точный, результат доказан в работе [8].

Для применения леммы Зигеля необходимо иметь оценку дискриминанта $\mathbb{D}$ алгебраического поля $\mathbb{K}$. Хорошая оценка такого типа доказана в работе [7, лемма 6.2]. Приведем здесь этот результат.

ЛЕММА 6. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – алгебраические числа. Рассмотрим поле $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ степени d , а также промежуточные поля $\mathbb{K}_i = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_i)$, $i = 1, \dots, n$. Положим $d_i = [\mathbb{K}_i : \mathbb{K}_{i-1}]$, $i = 1, \dots, n$. Тогда для дискриминанта $\mathbb{D}$ поля $\mathbb{K}$ верны оценка

$$\log|\mathbb{D}| \leq d \log d + 2d \sum_{j=1}^n (d_j - 1) h(\alpha_j)$$

и, как следствие, оценка $\log|\mathbb{D}| \leq d \log d + 2d(d-1) \max_j (h(\alpha_j))$.

§ 6. Неравенство Лиувилля

Простейшая оценка линейной формы от логарифмов алгебраических чисел – это так называемое *неравенство Лиувилля*. Один из вариантов этого неравенства содержится в следующей лемме.

ЛЕММА 7. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – ненулевые алгебраические числа, и пусть $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и d – степень поля $\mathbb{K}$. Тогда для любых целых рациональных чисел $y_1, \dots, y_n$ таких, что линейная форма

$$L = y_1 \log \alpha_1 + \dots + y_n \log \alpha_n$$

не равна нулю, выполняется оценка

$$\log|L| \geq -|y_1|dh(\alpha_1) - \dots - |y_n|dh(\alpha_n) - d \log 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [10, лемма 3].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из леммы 7 следует утверждение теоремы 1 при $r = 1$. В нашем случае $y_i = b_i$, и при использовании неравенства $h(\alpha_i) \leq h'(\alpha_i)$ лемма 7 дает следующую оценку:

$$\log|L| \geq -d(|b_1|h'(\alpha_1) + \dots + |b_n|h'(\alpha_n) + \log 2).$$

При $r = 1$ решетка Λ порождается вектором $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$ (здесь b_i можно считать взаимно простыми). Отсюда в силу определения многочлена Гильберта выполнено $H(\Lambda^\perp; h'(\alpha_1), \dots, h'(\alpha_n)) = |b_1|h'(\alpha_1) + \dots + |b_n|h'(\alpha_n)$. Из неравенства $dh'(\alpha) \geq 1$ следует

$$d^2 H(\Lambda^\perp; h'(\alpha_1), \dots, h'(\alpha_n)) = d(|b_1|dh'(\alpha_1) + \dots + |b_n|dh'(\alpha_n)) \geq d > d \log 2,$$

а значит,

$$2d^2 H(\Lambda^\perp; h'(\alpha_1), \dots, h'(\alpha_n)) > d(|b_1|h'(\alpha_1) + \dots + |b_n|h'(\alpha_n) + \log 2).$$

Отсюда видно, что при $r = 1$ имеет место неравенство

$$\log|L| \geq -2d^2 H(\Lambda^\perp; h'(\alpha_1), \dots, h'(\alpha_n)),$$

из чего и следует выполнение теоремы 1 при $r = 1$. Отметим, что при $n = 1$ необходимо $r = 1$ (так как $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \Lambda$, $\vec{b} \neq \vec{0}$), и теорема 1 также выполнена.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из леммы 7 также следует справедливость теоремы 1 при $\log B < 18$. Действительно, из леммы 7, используя условие теоремы 1: $|b_n|h'(\alpha_n) = \max_{1 \leq i \leq n} |b_i|h'(\alpha_i)$, находим

$$\begin{aligned} \log|L| &\geq -d(|b_1|h'(\alpha_1) + \dots + |b_n|h'(\alpha_n) + \log 2) \\ &\geq -d\left(nh'(\alpha_j)h'(\alpha_n)\left(\frac{|b_j|}{h'(\alpha_n)} + \frac{|b_n|}{h'(\alpha_j)}\right) + \log 2\right) \end{aligned} \quad (8)$$

при любом $j = 1, \dots, n-1$. Докажем важные и для дальнейшего неравенства

$$d^r H(\Lambda^\perp; h'(\alpha_1), \dots, h'(\alpha_n)) \geq \max_{1 \leq i \leq n} dh'(\alpha_i) \geq 1, \quad (9)$$

$$d^r H(\Lambda^\perp; h'(\alpha_1), \dots, h'(\alpha_n)) \geq dh'(\alpha_j)dh'(\alpha_n) \quad (10)$$

при $r \geq 2$ и некотором $1 \leq j \leq n-1$. Заметим для этого, что в многочлене $H(\Lambda^\perp; X_1, \dots, X_n)$ присутствуют все переменные $X_1, \dots, X_n$. Если бы это условие не было выполнено, скажем, для переменной X_j , то, учитывая определение многочлена Гильберта, можно заключить, что решетка $\Lambda^\perp$ ортогональна $(n-1)$ -мерному подпространству, порожденному векторами базиса $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{j-1}, \vec{e}_{j+1}, \dots, \vec{e}_n$ в $\mathbb{R}^n$. Значит, решетка Λ ортогональна базисному вектору $\vec{e}_j$, но это невозможно, так как $(b_1, \dots, b_n) \in \Lambda$, причем $b_i \neq 0$ по предположению теоремы 1. Отсюда и из того, что указанный однородный многочлен Гильберта имеет целые неотрицательные коэффициенты и степень r , а также из неравенства $dh'(\alpha_i) \geq 1$ следуют (9) и (10). Из (10) получаем, что для некоторого j выполнено

$$nh'(\alpha_j)h'(\alpha_n) \leq d^{r-2}nH(\Lambda^\perp; h'(\alpha_1), \dots, h'(\alpha_n)). \quad (11)$$

Неравенство

$$\log 2 \leq d^r H(\Lambda^\perp; h'(\alpha_1), \dots, h'(\alpha_n)) \quad (12)$$

сразу следует из (9) и неравенства $dh'(\alpha_i) \geq 1$. Объединяя только что доказанные два неравенства (11), (12) и пользуясь (8), мы видим, что выполнено неравенство

$$\log|L| \geq -d^r(n+d)H(\Lambda^\perp; h'(\alpha_1), \dots, h'(\alpha_n))e^{\log B}, \quad (13)$$

откуда следует, что теорема 1 выполнена, если правая часть (13) больше, чем правая часть неравенства в теореме 1. Упрощая это условие, находим, что теорема 1 доказана, если

$$\begin{aligned} \log B &< \log(5.3n(n+1)(n+8)^2(n+5)) + r \log(7.86) + n \log 4 + 2 \log d \\ &+ \log\left(\frac{n+1}{r}\right)^r + \log \log B + \log \log(3nd) - 0.5 \log n - \log(n+d). \end{aligned}$$

Согласно замечанию 3 можно считать, что $r \geq 2$ и $n \geq 2$, а $\log(n+d) \leq \log(n+1) + \log d$ и $((n+1)/r)^r \geq 9/4$, следовательно, получаем, что теорема 1 доказана, если

$$\log B < 16 + \log \log B. \quad (14)$$

Несложно получить, что (14) выполнено для $\log B < 18$.

§ 7. Вспомогательные многочлены

Для неотрицательных целых $N, H, H > 0$, и комплексного числа z определим $\Delta(z, 0, H) = 1$, а при $N > 0$ положим

$$\Delta(z, N, H) = \left(\frac{z(z+1) \cdots (z+H-1)}{H!} \right)^q \frac{z(z+1) \cdots (z+r-1)}{r!}. \quad (15)$$

Здесь $N = qH + r$, $0 \leq r < H$, q – целое неотрицательное число.

Впервые идея исключения факториальных множителей из производных вспомогательной функции с помощью подобных полиномов возникла в 1960 г. в работах [17], [18]. В дальнейшем в работе [2] это дало ему возможность доказать не улучшаемую по отношению к высоте $\log B$ оценку линейной формы от логарифмов алгебраических чисел. Многочлены вида (15) впервые рассмотрены в работе [19], где доказан более общий результат, чем следующая ниже лемма 8.

Для каждого целого положительного числа k через d_k обозначим наименьшее общее кратное чисел $1, \dots, k$. Для неотрицательного целого u определим многочлен

$$\Theta(z, N, H, u) = (d_H)^u \frac{1}{u!} \left(\frac{d}{dz} \right)^u \Delta(z, N, H) = (d_H)^u \hat{\Theta}(z, N, H, u).$$

ЛЕММА 8. Пусть $N \geq 0$, $H \geq 1$, $u \geq 0$, x – целые рациональные числа. Тогда

$$\begin{aligned} \Theta(x, N, H, u) &\in \mathbb{Z}, \quad \log(d_H) \leq \frac{107}{103} H, \\ |\hat{\Theta}(x, N, H, u)| &< e^{N+H} \left(1 + \frac{|x|}{H} \right)^N. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательства первых двух соотношений см. в [19, теорема 1] (а также в [20]). Докажем теперь последнее неравенство леммы. Поскольку $\hat{\Theta}(x, N, H, u) = 0$ при $u > N$, то

$$\begin{aligned} |\hat{\Theta}(x, N, H, u)| &\leq \sum_{u=0}^N |\hat{\Theta}(x, N, H, u)| \leq \sum_{u=0}^N \binom{N}{u} (|x| + H - 1)^{N-u} (H!)^{-q} (r!)^{-1} \\ &\leq \left(\frac{H^H}{H!} \right)^q \left(\frac{H^r}{r!} \right) H^{-N} \sum_{u=0}^N \binom{N}{u} (|x| + H - 1)^{N-u} \\ &< e^{N+H} \left(1 + \frac{|x|}{H} \right)^N. \end{aligned}$$

Лемма полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Многочлены $\Theta(z, n, H, u)$, $n = 1, \dots, N$, образуют базис над $\mathbb{R}$ пространства всех многочленов степени не выше N с действительными коэффициентами.

Обозначим $\Delta(z, k) = \frac{(z+1) \cdots (z+k)}{k!}$, где k , как и раньше, целое положительное число. Для построения вспомогательной функции нам необходимо еще рассмотреть многочлены от $z_1, \dots, z_s$ следующего вида:

$$\Pi(z_1, \dots, z_s; t_1, \dots, t_s) = \Delta(z_1, t_1) \cdots \Delta(z_s, t_s).$$

Оценивая Π , в предположении $t_1 + \dots + t_s \leq T$, $T > 0$, получаем

$$|\Pi| \leq e^T \left(1 + \frac{|z_1| + \dots + |z_s|}{T} \right)^T. \quad (16)$$

Доказательство неравенства (16) в случае $s = 1$ сразу следует из неравенства $n! \geq \frac{n^n}{e^n}$, оценка же в общем случае доказывается применением к каждому сомножителю $\Delta(z_i, t_i)$ неравенства для $s = 1$ и последующим использованием неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Пусть $(x_1, \dots, x_s)$ – фиксированный набор чисел. Несложно доказать, что полиномы $\Pi(z_1 + x_1, \dots, z_s + x_s; t_1, \dots, t_s)$ с условием $t_1 + \dots + t_s \leq T$, $T > 0$, образуют базис над $\mathbb{R}$ пространства многочленов с действительными коэффициентами от переменных $z_1, \dots, z_s$ степени не выше T по совокупности переменных.

§ 8. Индуктивное предположение

Напомним, что в предположениях теоремы 1 фиксируется некоторая линейная форма $L = b_1 x_1 + \dots + b_n x_n$, $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$, и для любой целочисленной решетки $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^n$ такой, что $\vec{b} \in \Lambda$, и ненулевых мультипликативно независимых алгебраических чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ с фиксированными значениями $\log(\alpha_1), \dots, \log(\alpha_n)$ утверждается выполнение следующего неравенства:

$$\begin{aligned} \log|L| \geq & -(5.3)^{\varkappa} n^{\varkappa} (n+1)(n+8)^2 (n+5)(7.86)^r 4^n d^{r+2} \log B \\ & \times H(\Lambda^\perp; h'(\alpha_1), \dots, h'(\alpha_n)) \log(3nd)U. \end{aligned}$$

Здесь, как и ранее, $U = \frac{(n+1)^r}{r^{r+0.5}}$, r – размерность Λ , а $\varkappa$ равно 1 или 2 в зависимости от того, все ли числа $\log(\alpha_1), \dots, \log(\alpha_n)$ действительные или среди них есть комплексные.

Доказательство теоремы 1 мы будем вести следующим образом: предполагая, что существуют решетки, для которых теорема 1 не выполнена, мы выберем среди них и обозначим через Λ решетку, для которой величина

$$\begin{aligned} & [(5.3)^{\varkappa} n^{\varkappa} (n+1)(n+8)^2 (n+5)(7.86)^r 4^n d^{r+2} \log B \\ & \times H(\Lambda^\perp; h'(\alpha_1), \dots, h'(\alpha_n)) \log(3nd)U] \end{aligned} \quad (17)$$

принимает наименьшее возможное значение. Здесь и далее $[x]$ – целая часть числа x . На завершающем шаге доказательства мы укажем новую решетку Λ_1 , для которой выполнены все условия теоремы 1, но не ее утверждение, а величина (17) строго меньше, чем для решетки Λ . Таким образом будет получено противоречие с выбором решетки Λ , и теорема 1 будет полностью доказана.

Если не учитывать в (17) множитель $\log B$, который в доказательстве не меняется, и величину $(5.3)^{\varkappa} n^{\varkappa} (n+1)(n+8)^2 (n+5)(7.86)^r 4^n d^{r+2} \log(3nd)U$, которая необходима лишь для получения наилучших по возможности констант, то наше доказательство могло бы вестись по сути индукцией по величине значения многочлена Гильберта решетки $\Lambda^\perp$ в точках $h'(\alpha_1), \dots, h'(\alpha_n)$.

Таким образом, предположим, что мы имеем целый вектор $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$ и решетку $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^n$, $\vec{b} \in \Lambda$, такие, что выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \log|L| < & -(5.3)^{\varkappa} n^{\varkappa} (n+1)(n+8)^2 (n+5)(7.86)^r 4^n d^{r+2} \log B \\ & \times H(\Lambda^\perp; h'(\alpha_1), \dots, h'(\alpha_n)) \log(3nd)U. \end{aligned} \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Введем и напомним некоторые результаты и обозначения, которые мы будем использовать при доказательстве.

Вследствие замечания 3 число логарифмов n и размерность решетки r будем считать большими либо равными двум. Поскольку заключение теоремы формулируется в терминах значения многочлена Гильберта ортогональной решетки $\Lambda^\perp$, которая зависит только от подпространства V , порождаемого Λ , то в дальнейшем без ограничения общности мы будем предполагать, что решетка Λ примитивна, т. е.

$$\Lambda = V \cap \mathbb{Z}^n. \quad (19)$$

Коэффициенты b_i рассматриваемой линейной формы предполагаем взаимно простыми в совокупности, так как иначе поделим на общий множитель все коэффициенты и получим новую линейную форму L' с меньшей величиной $\log|L'(\log \alpha_1, \dots, \log \alpha_n)|$, для которой в силу (19) условие $\vec{b}' \in \Lambda$ будет выполнено. Доказав теорему 1 для новой линейной формы, мы установим выполнение этой теоремы и для формы L .

Пусть $\Upsilon = \{\vec{x} = (x_1, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{Q} \mid \alpha_1^{x_1} \cdots \alpha_n^{x_n} \in \mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\}$. Хорошо известно (см., например, [21] и [22]), что множества Υ и $\Upsilon \cap V$ – это решетки, кроме того, очевидно, что Υ содержит $\mathbb{Z}^n$, следовательно, $\Lambda \subseteq \Upsilon \cap V$. Обозначим $\rho = [\Upsilon \cap V : \Lambda]$. Из определения видно, что ρ – натуральное число. В работе [23] Е. М. Матвеев доказал первую оценку сверху для подобных индексов ρ , однако в этой работе $\Lambda = \mathbb{Z}^n$ и, следовательно, $V = \mathbb{R}^n$. В работе [21] Т. Лохер и Д. Массер развили идеи Е. М. Матвеева и улучшили оценку, однако условие $\Lambda = \mathbb{Z}^n$ осталось. Наконец, в работе [22] доказана оценка для произвольной примитивной решетки $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^n$. Из этой оценки следует, что

$$\rho \leq \frac{c(d)}{2} \left(e\sqrt{n} \cdot \frac{n^r}{r^r} \right) H(\Lambda^\perp; h'(\alpha_1), \dots, h'(\alpha_n)),$$

причем $c(d) = 68d^{r+1}(\log d)$, если $d \geq 2$, и $c(d) = 17$, если $d = 1$. Следовательно,

$$\log \rho \leq \log \left(68ed^{r+1} H(\Lambda^\perp; h(\alpha_1), \dots, h(\alpha_n)) \frac{(n+1)^r}{r^r} \sqrt{n} \log(3nd) \right). \quad (20)$$

В заключение отметим, что, как известно, $\rho(\Upsilon \cap V) \subseteq \Lambda$.

§ 9. Построение вспомогательных функций

Для краткости мы обозначим $h_i = h'(\alpha_i)$ и $\hat{\rho} = (1 + \frac{\log \rho}{11}) \geq 1$. Выберем параметры следующим образом:

$$\begin{aligned} D &= 0.54(5.3)^{\varkappa} n^{\varkappa} (n+1)(n+8)(7.86)^r 2^n d^{r+1} H(\Lambda^\perp; h_1, \dots, h_n) \frac{\log(3nd)}{\hat{\rho}} U, \\ T &= \left[2.89D(n+1) \left(1 + \frac{1}{30n^2} \right) \right], \quad S = [0.9\hat{\rho}(n+8)d \log B], \quad H = [\log B], \\ I_0 &= [9 \log(3nd\rho)], \quad D_0 = \left[\frac{1.5D \log B}{\log(3nd\rho)} \right], \quad D_i = \frac{0.5D}{h_i d}, \quad i = 1, \dots, n; \end{aligned}$$

здесь и далее $[x]$ – целая часть числа x . Отметим, что в силу (9) выполнено

$$d^r H(\Lambda^\perp; h_1, \dots, h_n) \geq d \max_i h_i \geq 1.$$

Отсюда, из (20) и того, что $n \geq r \geq 2$, $\log B \geq 18$ и $(n+1)^r/r^r \geq 9/4$, следуют неравенства

$$\begin{aligned} \frac{10^5}{4} &\leq \frac{10^5}{12}(n+1) \leq D, \\ 10^5 d &\leq 10^5 d \max_i h_i d \leq \left(\frac{10^5}{8\hat{\rho}} \cdot 2^n n d \max_i h_i d \right) \hat{\rho} \leq D\hat{\rho}, \\ 10^4 &\leq D_0, \quad 151d \leq 0.9\hat{\rho}(n+7.935)d \log B \leq 0.9\hat{\rho}(n+8)d \log B - 1 \leq S, \\ S &\leq 0.9\hat{\rho}(n+8)d \log B, \quad 18 \leq H \leq \log B, \quad \frac{\log B}{H} < 1.063, \\ 10^5 &\leq 2.8899 \frac{10^5}{12} (n+1)^2 \leq 2.8899 D(n+1) \leq T, \\ T &\leq 2.89 D(n+1) \left(1 + \frac{1}{30n^2} \right) \leq 2.89nD + 2.963D. \end{aligned} \quad (21)$$

При оценке D снизу мы пользовались соотношением (20) и тем, что функция $x/(1+\log(x)/11)$ возрастает при $x \geq 1$. При оценке D_0 снизу мы пользовались (20) и тем, что функция $x/(2\log(x)(1+\log(x)/11))$ возрастает при $x \geq 3$. Неравенства (21) мы будем часто использовать в дальнейшем.

Обозначим

$$\Omega = \left\{ \vec{x} \in V : |x_i| \leq D_i, \quad |x_1 \log(\alpha_1) + \dots + x_n \log(\alpha_n)| \leq \frac{1}{10.6} \cdot 2^{-n/\varkappa} D \right\}.$$

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ максимальное множество точек, принадлежащих телу Ω и сравнимых между собой по модулю решетки $\Upsilon \cap V$. Количество точек в таком множестве благодаря леммам 4 и 1 (при $\eta = \frac{1}{10.6} \cdot 2^{-n/\varkappa}$, $\eta_1 = 0.5$, $v_i = \log \alpha_i$ в условии леммы 4 и для решетки $\Upsilon \cap V$) оценивается снизу величиной

$$\begin{aligned} W &= \left\lceil \left(\frac{2^{-n/\varkappa}}{10.6 \cdot 0.5n} \right)^{\varkappa} \frac{2^r D_1 \dots D_n}{H(\Upsilon \cap V; D_1, \dots, D_n)} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{1}{2^n (5.3)^{\varkappa n \varkappa}} \frac{2^r \rho D_1 \dots D_n}{H(\Lambda; D_1, \dots, D_n)} \right\rceil. \end{aligned}$$

Здесь и далее $[x]$ – наименьшее целое число, большее либо равное x . Обозначим через $\Omega(\Upsilon)$ множество, состоящее ровно из W точек, принадлежащих телу Ω и сравнимых между собой по модулю решетки $\Upsilon \cap V$. Благодаря нашим рассуждениям видно, что такое множество существует и, кроме того, для W выполнены оценки

$$\frac{1}{2^n (5.3)^{\varkappa n \varkappa}} \frac{2^r \rho D_1 \dots D_n}{H(\Lambda; D_1, \dots, D_n)} \leq W < \frac{1}{2^n (5.3)^{\varkappa n \varkappa}} \frac{2^r \rho D_1 \dots D_n}{H(\Lambda; D_1, \dots, D_n)} + 1. \quad (22)$$

Как мы уже отмечали, $\rho(\Upsilon \cap V) \subseteq \Lambda \subseteq \mathbb{Z}^n$ (это важное замечание мы будем часто использовать в дальнейшем).

Определим функцию $P = P(Y_0, Y_1, \dots, Y_n)$ равенством

$$P(Y_0, Y_1, \dots, Y_n) = \rho^{2T} \sum_{\lambda_0=0}^{D_0} \sum_{\vec{\lambda} \in \Omega(\Upsilon)} p(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \Delta(2^{I_0} Y_0, \lambda_0, H) Y_1^{\lambda_1} \dots Y_n^{\lambda_n}.$$

Здесь $\Delta(Y_0, \lambda_0, H)$ – полиномы, определенные в § 7, $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, а числа $p(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ – неизвестные коэффициенты, которые мы определим

позднее. В дальнейшем, для краткости, мы всегда будем использовать запись $p(\vec{\lambda})$ вместо $p(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Определим также дифференциальные операторы ∂_i равенствами

$$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial Y_0}, \quad \partial_j = b_n Y_j \frac{\partial}{\partial Y_i} - b_j Y_n \frac{\partial}{\partial Y_n}, \quad 1 \leq j \leq n-1. \quad (23)$$

Действие этих операторов на мономах имеет следующий вид:

$$\partial_j Y_1^{\lambda_1} \cdots Y_n^{\lambda_n} = \gamma_j Y_1^{\lambda_1} \cdots Y_n^{\lambda_n}, \quad 1 \leq j \leq n-1,$$

где $\gamma_j = b_n \lambda_j - b_j \lambda_n$. Число γ_j можно записать как скалярное произведение вектора $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ и вектора $\vec{w}_j = (0, \dots, 0, b_n, 0, \dots, 0, -b_j)$. Вектор $\vec{w}_j$ состоит из нулей, кроме j -й координаты, которая равна b_n , и последней координаты, которая равна $-b_j$. Таким образом, можно записать

$$\partial_j Y_1^{\lambda_1} \dots Y_n^{\lambda_n} = (\vec{\lambda}, \vec{w}_j) Y_1^{\lambda_1} \dots Y_n^{\lambda_n}, \quad 1 \leq j \leq n-1. \quad (24)$$

Заметим, что по построению $\vec{\lambda} \in \Omega(\Upsilon) \subset V$. Следовательно, каждый вектор $\vec{\lambda}$ можно представить в виде $\vec{\lambda} = \sum_{i=1}^r c_i(\vec{\lambda}) \vec{\mu}_i$. Здесь $\vec{\mu}_1, \dots, \vec{\mu}_r$ – линейно независимые векторы, принадлежащие V , а $c_i(\vec{\lambda})$ – действительные числа. Поскольку $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \Lambda \subset V$, то без ограничения общности можно потребовать, чтобы $\vec{\mu}_1 = \vec{b}$. Таким образом, можно записать (24) в виде

$$\begin{aligned} \partial_1 Y_1^{\lambda_1} \dots Y_n^{\lambda_n} &= \sum_{i=2}^r c_i(\vec{\lambda})(\vec{\mu}_i, \vec{w}_1) Y_1^{\lambda_1} \dots Y_n^{\lambda_n}, \\ &\dots \\ \partial_n Y_1^{\lambda_1} \dots Y_n^{\lambda_n} &= \sum_{i=2}^r c_i(\vec{\lambda})(\vec{\mu}_i, \vec{w}_n) Y_1^{\lambda_1} \dots Y_n^{\lambda_n}. \end{aligned}$$

При этом мы использовали тот факт, что $(\vec{b}, \vec{w}_j) = 0$ для всех j .

Ранг матрицы $\|(\vec{\mu}_i, \vec{w}_j)\|$, $i = 2, \dots, r$, $j = 1, \dots, n-1$, не выше $r-1$. Это означает, что существуют не более чем $r-1$ строк в этой матрице, через которые все $n-1$ выражаются линейно с действительными коэффициентами, не зависящими от вектора $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Следовательно, среди операторов $\partial_1, \dots, \partial_{n-1}$ существуют $r-1$ операторов таких, что действие остальных на произвольных мономах такого типа выражается линейно с действительными постоянными коэффициентами через эти $r-1$ операторов. Без ограничения общности в качестве таких $r-1$ операторов возьмем первые $\partial_1, \dots, \partial_{r-1}$. Таким образом, мы доказали равенство

$$\partial_1^{t_1} \cdots \partial_{n-1}^{t_{n-1}} P = \sum c(\vec{t}') \partial_1^{t'_1} \cdots \partial_{r-1}^{t'_{r-1}} P, \quad (25)$$

причем сумма распространяется на все векторы $\vec{t}' = (t'_1, \dots, t'_{r-1})$, удовлетворяющие условию $t'_1 + \dots + t'_{r-1} = t_1 + \dots + t_{n-1}$, а $c(\vec{t}')$ – некоторые действительные числа.

Из построения множества $\Omega(\Upsilon)$ следует, что существует вектор $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ такой, что $|\mu_i| \leq D_i, i = 1, \dots, n$, и $(\Omega(\Upsilon) + \vec{\mu}) \in \Upsilon \cap V$, т.е. для любого $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Omega(\Upsilon)$ выполнено $\vec{\lambda} + \vec{\mu} \in \Upsilon \cap V$. Для краткости обозначим

$\gamma'_j = \gamma_j + (b_n \mu_j - b_j \mu_n)$, $j = 1, \dots, n$, и введем теперь новые функции

$$Q(Y_0, Y_1, \dots, Y_n; \vec{t}) = Q(\vec{t}) = \rho^{2T} \sum_{\lambda_0=0}^{D_0} \sum_{\vec{\lambda} \in \Omega(\Upsilon)} p(\vec{\lambda}) \Pi(\vec{t}) \Theta(2^{I_0} Y_0, \vec{t}) Y_1^{\lambda_1} \dots Y_n^{\lambda_n}. \quad (26)$$

Здесь $\vec{t} = (t_0, \dots, t_{r-1})$, а

$$\begin{aligned} \Pi(\vec{t}) &= \Pi(\gamma'_1, \dots, \gamma'_{r-1}; t_1, \dots, t_{r-1}) = \Delta(\gamma'_1, t_1) \cdots \Delta(\gamma'_{r-1}, t_{r-1}), \\ \Theta(Y_0, \vec{t}) &= \Theta(Y_0, \lambda_0, H, t_0) \end{aligned}$$

– многочлены, определенные в § 7. Для краткости при обозначении этих многочленов будем не выписывать их зависимость от λ_0 и $\vec{\lambda}$.

С учетом замечаний 5 и 6 по поводу этих многочленов получаем, что векторное пространство многочленов от переменных $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$ над $\mathbb{R}$, порожденное $Q(\vec{t})$, $t_0 + t_1 + \dots + t_{r-1} \leq T$, совпадает с пространством, порожденным $\partial_0^{t_0} \partial_1^{t_1} \dots \partial_{r-1}^{t_{r-1}} P$, при том же условии для вектора $\vec{t}$, а благодаря формуле (25) и комментарию к ней – и с пространством, порожденным $\partial_0^{t_0} \partial_1^{t_1} \dots \partial_{n-1}^{t_{n-1}} P$, $t_0 + t_1 + \dots + t_{n-1} \leq T$.

ЛЕММА 9. Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Тогда существуют коэффициенты $p(\vec{\lambda}) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, не все равные нулю, такие, что выполняются $M = (2S + 1) \binom{T+r}{r}$ уравнений

$$Q(s, \alpha_1^s, \dots, \alpha_n^s; \vec{t}) = 0.$$

Здесь $s \in \mathbb{Z}$, $|s| \leq S$, а $\vec{t} = (t_0, t_1, \dots, t_{r-1})$ – вектор с целыми неотрицательными координатами, удовлетворяющими условию $t_0 + t_1 + \dots + t_{r-1} \leq T$. При этом верна оценка

$$h(p(\vec{\lambda})) \leq \left(0.21 + \frac{4.765}{n+1}\right) T \hat{\rho} \log B;$$

здесь $h(p(\vec{\lambda}))$ – абсолютная логарифмическая высота Вейля линейной формы с коэффициентами $p(\vec{\lambda})$ (см. § 4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится стандартным методом, основанным на использовании леммы Зигеля (лемма 5). Единственная проблема, которая возникнет на этом пути, – это то, что суммирование в определении функций $Q(\vec{t})$ ведется по векторам $\vec{\lambda}$, не принадлежащим $\Upsilon \cap V$, а сравнимым по этой решетке. Для того чтобы избежать возникающих из-за этого трудностей, мы перейдем к эквивалентной системе

$$L_{s, \vec{t}} = \alpha_1^{s\mu_1} \cdots \alpha_n^{s\mu_n} Q(s, \alpha_1^s, \dots, \alpha_n^s; \vec{t}) = 0.$$

Вектор $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ – это вектор сдвига, который мы зафиксировали при построении функций Q .

Таким образом, для доказательства леммы необходимо оценить $h(L_{s, \vec{t}})$ (определение высоты линейной формы $h(L_{s, \vec{t}})$ см. в § 4), оценить количество неизвестных и количество уравнений.

Количество неизвестных N вследствие (22) оценивается следующим образом:

$$N = W(D_0 + 1) \geq \frac{1}{2^n (5.3)^{\times n} n^{\times}} \frac{2^r \rho D_1 \cdots D_n}{H(\Lambda; D_1, \dots, D_n)} (D_0 + 1).$$

Используя лемму 3 с учетом того, что $D_i = 0.5 \frac{D}{h_i d}$, получаем следующие неравенства:

$$\begin{aligned}
 N &\geq \frac{1}{2^n (5.3)^{\times n \times}} \frac{2^r \rho D_1 \cdots D_n}{H(\Lambda; D_1, \dots, D_n)} (D_0 + 1) \\
 &\geq \frac{1}{2^n (5.3)^{\times n \times}} \frac{(0.5)^n \cdot 2^r \rho (D_0 + 1) D^n h_1 \cdots h_n d^{n-r}}{d^n h_1 \cdots h_n (0.5)^{n-r} D^{n-r} H(\Lambda^\perp; h_1, \dots, h_n)} \\
 &= \frac{1}{2^n (5.3)^{\times n \times}} \frac{(0.5)^r \cdot 2^r \rho (D_0 + 1) D^r}{d^r H(\Lambda^\perp; h_1, \dots, h_n)} \\
 &\geq \frac{0.89 \rho (n+1) (7.86)^r S D^r (n+1)^r}{\left(1 + \frac{\log \rho}{\log(3nd)}\right) \hat{\rho}^2 r^{r+0.5}} \geq \frac{0.89(n+1) (7.86)^r S D^r (n+1)^r}{r^{r+0.5}},
 \end{aligned}$$

для получения последнего неравенства мы использовали тот факт, что

$$\frac{\rho}{\left(1 + \frac{\log \rho}{\log(3nd)}\right) \hat{\rho}^2} \geq \frac{\rho}{\left(1 + \frac{\log \rho}{\log 6}\right) \left(1 + \frac{\log \rho}{11}\right)^2} \geq 1,$$

который следует из того, что $n \geq 2$, $\rho \geq 1$ и функция

$$\frac{\rho}{\left(1 + \frac{\log \rho}{\log 6}\right) \left(1 + \frac{\log \rho}{11}\right)^2}$$

при $\rho \geq 1$ возрастает.

Как отмечалось в лемме 9, количество M уравнений вычисляется по формуле

$$M = (2S + 1) \binom{T+r}{r}.$$

Учитывая $\binom{T+r}{r} \leq \frac{(T+r)^r}{r!}$, а также неравенства $r! \geq \sqrt{2\pi r} \frac{r^r}{e^r}$ и (21), получаем

$$\begin{aligned}
 M &\leq \frac{2e^r}{\sqrt{2\pi r}} S \left(1 + \frac{1}{2S}\right) \left(1 + \frac{T}{r}\right)^r \\
 &\leq \frac{2e^r}{\sqrt{2\pi r}} S \left(\frac{2.89005D(n+1)}{r}\right)^r \left(1 + \frac{1}{302}\right) \left(1 + \frac{1}{30n^2}\right)^r.
 \end{aligned}$$

Используя неравенство $\left(1 + \frac{1}{30n^2}\right)^r \leq \left(1 + \frac{1}{30n^2}\right)^n < e^{1/(30n)}$, получаем следующее:

$$M \leq \frac{2(7.856)^r S D^r (n+1)^r}{\sqrt{2\pi} r^{r+0.5}} \cdot 1.021.$$

В лемме Зигеля нам понадобится оценить сверху величину $\frac{M}{N-M}$. Используя полученные оценки для N и M и неравенство $n \geq 2$, это легко сделать:

$$\frac{M}{N-M} \leq \frac{1.34}{n+1}. \quad (27)$$

Перейдем к оценке $h(L_{s,\vec{t}})$. Вследствие определения $h(L)$ (см. § 4) выполнено равенство

$$h(L_{s,\vec{t}}) = \frac{1}{d} \sum_v \log \left(\max_{\lambda_0=0,\dots,D_0, \vec{\lambda} \in \Omega(\Upsilon)} \right) \left| \rho^{2T} \Pi(\vec{t}) \Theta(2^{I_0} s, \vec{t}) \alpha_1^{s(\lambda_1+\mu_1)} \cdots \alpha_n^{s(\lambda_n+\mu_n)} \right|_v;$$

здесь, как и ранее, v – все нормирования поля $\mathbb{K}$. Далее мы, если не оговорено противное, под $\max$ подразумеваем $\max_{\lambda_0=0, \dots, D_0, \vec{\lambda} \in \Omega(\Upsilon)}$. Так как произведение максимумов не меньше максимума произведения, то получаем

$$\begin{aligned} h(L_{s, \vec{t}}) &\leq \frac{1}{d} \sum_v \log(\max |\rho^{2T} \Pi(\vec{t}) \Theta(2^{I_0} s, \vec{t})|_v) \\ &\quad + \frac{1}{d} \sum_v \log(\max |\alpha_1^{s(\lambda_1 + \mu_1)} \dots \alpha_n^{s(\lambda_n + \mu_n)}|_v). \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь $\Pi(\vec{t}) = \Pi(\gamma'_1, \dots, \gamma'_{r-1}; t_1, \dots, t_{r-1})$ – числа, рациональные в силу определения Π и равенства $\gamma'_i = b_n(\lambda_i + \mu_i) - b_i(\lambda_n + \mu_n)$, $b_i \in \mathbb{Z}$, $\vec{\lambda} + \vec{\mu} \in \Upsilon \cap V$. Как мы уже отмечали, $\rho(\Upsilon \cap V) \subseteq \Lambda \subseteq \mathbb{Z}^n$, следовательно, $\rho(\lambda_i + \mu_i) \in \mathbb{Z}$, откуда (см., например, [24]) величина $\rho^{2T} \Pi(\vec{t})$ уже будет целым числом. Числа $\Theta(2^{I_0} s, \vec{t})$ также целые и рациональные вследствие леммы 8. Поэтому для любого архимедова нормирования v выполняется

$$|\rho^{2T} \Pi(\vec{t}) \Theta(2^{I_0} s, \vec{t})|_v = |\rho^{2T} \Pi(\vec{t}) \Theta(2^{I_0} s, \vec{t})|$$

(здесь $|x|$ – обычная евклидова норма числа x), а для любого неархимедова нормирования v выполняется

$$|\rho^{2T} \Pi(\vec{t}) \Theta(2^{I_0} s, \vec{t})|_v \leq 1.$$

Пользуясь этим, из неравенства (28) можно получить оценку

$$\begin{aligned} h(L_{s, \vec{t}}) &\leq \log(\max |\rho^{2T} \Pi(\vec{t}) \Theta(2^{I_0} s, \vec{t})|) \\ &\quad + \frac{1}{d} \sum_v \log(\max |\alpha_1^{s(\lambda_1 + \mu_1)} \dots \alpha_n^{s(\lambda_n + \mu_n)}|_v). \end{aligned} \quad (29)$$

Прежде всего заметим, что в силу неравенств $|\lambda_i| \leq D_i$ и $|\mu_i| \leq D_i$ для γ'_j , $0 \leq j \leq r-1$, верна оценка

$$|\gamma'_j| = |b_n(\lambda_j + \mu_j) - b_j(\lambda_n + \mu_n)| \leq |b_n| \frac{D}{dh_j} + |b_j| \frac{D}{dh_n} \leq e^{\log B} D.$$

Пользуясь этим, неравенствами (16) и $\log B \geq 18$, оцениваем многочлены $\Pi(\vec{t})$:

$$\max |\Pi(\vec{t})| \leq e^{T'} \left(1 + (r-1) \frac{e^{\log B} D}{T'} \right)^{T'} \leq e^{T'} e^{(\log B - 1)T'} \left(0.001 + r \frac{eD}{T'} \right)^{T'}.$$

Здесь $T' = t_1 + t_2 + \dots + t_{r-1} = T - t_0$ и, следовательно, $T' \geq 0$. В силу неравенств (21) имеем $(0.001 + r \frac{eD}{T'}) < 1$, следовательно,

$$\log(\max |\Pi(\vec{t})|) \leq T' \log B = (T - t_0) \log B. \quad (30)$$

Благодаря лемме 8 мы можем утверждать, что для любого комплексного z выполнено неравенство

$$\max |\Theta(2^{I_0} z, \vec{t})| \leq e^{\frac{107}{103} H t_0} e^{D_0 + H} \left(1 + \frac{2^{I_0} |z|}{H} \right)^{D_0}. \quad (31)$$

Подставляя вместо z целое число s , используя лемму 8 и неравенство $H \leq \log B$, мы видим, что для $\Theta(2^{I_0} s, \vec{t})$ выполнена оценка

$$\log(\max |\Theta(2^{I_0} s, \vec{t})|) \leq \frac{107}{103} t_0 \log B + D_0 + H + D_0 \log \left(0.01 + \frac{S}{H} \right) + I_0 D_0 \log 2.$$

Используя последнее неравенство, неравенство (30), а также соотношение $(T - t_0) \log B + \frac{107}{103} t_0 \log B \leq \frac{107}{103} T \log B$, получаем оценку

$$\begin{aligned} \log(\max|\rho^{2T} \Pi(\vec{t}) \Theta(2^{I_0} s, \vec{t})|) &\leq 2T \log \rho + \frac{107}{103} T \log B + D_0 + H \\ &\quad + D_0 \log\left(0.01 + \frac{S}{H}\right) + I_0 D_0 \log 2 \\ &\leq 2T \log \rho + 2.45T \log B \leq 2.45T \hat{\rho} \log B. \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь мы пользовались тем, что многочлен $\Pi(\vec{t})$ не зависит от λ_0 , а также использовали неравенства, полученные с помощью (21):

$$\begin{aligned} D_0 &\leq \frac{1.5D \log B}{\log(3nd\rho)} \leq \frac{1.5D \log B}{\log(3nd)} \leq 0.097T \log B, \quad H \leq 10^{-4}T \log B, \\ I_0 D_0 \log 2 &\leq 1.08T \log B, \end{aligned}$$

$$D_0 \log\left(0.01 + \frac{S}{H}\right) \leq D_0 \log(0.01 + 1.063 \cdot 0.9(n+8)d\hat{\rho}) \leq 0.2182T \log B$$

(так как $\frac{\log(0.01+1.063 \cdot 0.9(n+8)d\hat{\rho})}{\log(3nd\rho)} \leq 1.261$),

$$2T \log \rho + 2.45T \log B \leq 2.45T \hat{\rho} \log B.$$

Оценим теперь выражение

$$\frac{1}{d} \sum_v \log(\max|\alpha_1^{s(\lambda_1+\mu_1)} \dots \alpha_n^{s(\lambda_n+\mu_n)}|_v).$$

Используя свойства логарифмической высоты Вейля (см. §4 и формулу (6)), а также умножая и деля на ρ последнее выражение (для того, чтобы выполнялось $\rho(\lambda_i + \mu_i) \in \mathbb{Z}$), получаем неравенства

$$\begin{aligned} &\frac{1}{d\rho} \sum_v \log(\max|\alpha_1^{s(\lambda_1+\mu_1)\rho} \dots \alpha_n^{s(\lambda_n+\mu_n)\rho}|_v) \\ &= \frac{1}{d\rho} \sum_v \max(s(\lambda_1 + \mu_1)\rho \log|\alpha_1|_v + \dots + s(\lambda_n + \mu_n)\rho \log|\alpha_n|_v) \\ &\leq \frac{1}{d\rho} \sum_v \left(\max_{\lambda_1}(s\lambda_1\rho \log|\alpha_1|_v) + \dots + \max_{\lambda_n}(s\lambda_n\rho \log|\alpha_n|_v) \right) + \frac{1}{d} \sum_v sW_\mu \\ &\leq |s|D_1 \frac{1}{d} \sum_v |\log|\alpha_1|_v| + \dots + |s|D_n \frac{1}{d} \sum_v |\log|\alpha_n|_v| + \frac{1}{d} \sum_v sW_\mu \\ &= |s|D_1 2h(\alpha_1) + \dots + |s|D_n 2h(\alpha_n) + \frac{1}{d} \sum_v sW_\mu \\ &\leq \frac{n|s|D}{d} + \frac{1}{d} \sum_v sW_\mu = \frac{n|s|D}{d}. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь $W_\mu = \mu_1 \log|\alpha_1|_v + \dots + \mu_n \log|\alpha_n|_v$. Последнее равенство в (33) выполнено вследствие того, что $\sum_v \log|\alpha_i|_v = 0$ для всех i (см. формулу произведения (5)). Таким образом, подставляя в (29) неравенства (32) и (33), выводим оценку

$$h(L_{s,\vec{t}}) \leq \frac{n|s|D}{d} + 2.452T \hat{\rho} \log B.$$

Для применения леммы Зигеля нам осталось еще оценить $\log N$ и $\log|\mathbb{D}|$. Поскольку $N = W(D_0 + 1)$, вследствие (22) верна оценка

$$N \leq \left(\frac{1}{2^n (5.3)^{\varkappa n \varkappa}} \frac{2^r \rho D_1 \cdots D_n}{H(\Lambda; D_1, \dots, D_n)} + 1 \right) (D_0 + 1).$$

Применяя лемму 3, учитывая при этом, что $D_i = 0.5 \frac{D}{h_i d}$, получаем

$$\log N \leq \log \left(\left(\frac{1}{2^n (5.3)^{\varkappa n \varkappa}} \frac{(0.5)^r \cdot 2^r \rho D^r}{d^r H(\Lambda^\perp; h_1, \dots, h_n)} + 1 \right) (D_0 + 1) \right).$$

Оценивая $D_0 \leq \frac{1.5D \log B}{\log(3nd)}$ и учитывая (21), окончательно находим

$$\begin{aligned} \log N &\leq \log \left(\frac{2\rho(n+1)(n+8)(7.86)^r d D^r (n+1)^r \log B}{r^{r+0.5}} \right) \\ &\leq \log(2\rho) + \log B + n \log \left(\frac{(n+1)(n+8)(7.86)d(n+1)^r}{r^{r+0.5}} D \right). \end{aligned}$$

Используя, что $\log B \leq 10^{-5} T \hat{\rho} \log B$, так как $T > 10^5$ (см. (21)), а также что

$$n \log \left(\frac{(n+1)(n+8)(7.86)d(n+1)^r}{r^{r+0.5}} \right) \leq n \log(D\hat{\rho}) \leq 2 \cdot 10^{-3} n D \hat{\rho} \leq \frac{10^{-4}}{2} T \hat{\rho} \log B,$$

так как $\frac{\log(D\hat{\rho})}{D\hat{\rho}} < 10^{-3}$ (см. (21)), и $\log(2\rho) \leq 2 \cdot 10^{-5} T \hat{\rho} \log B$ (см. (20)), получаем неравенство

$$\log N \leq 3 \cdot 10^{-4} T \hat{\rho} \log B. \quad (34)$$

Для $\log|\mathbb{D}|$ вследствие леммы 6 верна оценка

$$\log|\mathbb{D}| \leq d \log d + 2d(d-1) \max_j (h(\alpha_j)).$$

С учетом этого неравенства из (21) и определения D получаем

$$\log|\mathbb{D}| \leq d \log d + 2d \max_j (h(\alpha_j) d) \leq 2 \cdot 10^{-4} D \hat{\rho} < 10^{-5} T \hat{\rho} \log B. \quad (35)$$

Из леммы 5 и определения M следует неравенство

$$h(p(\vec{\lambda})) \leq \frac{1}{2d} \log|\mathbb{D}| + \left(\frac{M}{N-M} \right) \log N + \left(\frac{1}{N-M} \right) \sum_{\substack{|s| \leq S \\ t_0 + \dots + t_{r-1} \leq T}} h(L_{s, \vec{t}}). \quad (36)$$

Используя оценку (29) для $h(L_{s, \vec{t}})$, теперь можно записать

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{N-M} \right) \sum_{\substack{|s| \leq S \\ t_0 + \dots + t_{r-1} \leq T}} h(L_{s, \vec{t}}) \\ &\leq \frac{M}{(2S+1)(N-M)} \sum_{|s| \leq S} \frac{n|s|D}{d} + 2.46 \frac{M}{N-M} T \hat{\rho} \log B \\ &\leq \frac{M}{N-M} \frac{S+1}{2S+1} \frac{nSD}{d} + 2.46 \frac{M}{N-M} T \hat{\rho} \log B. \end{aligned}$$

Подставляя в (36) неравенства (27), (34), (35) и учитывая то, что

$$\frac{SD}{d} \leq 0.3116 \frac{nT\hat{\rho} \log B}{n+1} + 2.493 \frac{T\hat{\rho} \log B}{n+1} \leq 0.3116 T\hat{\rho} \log B + 2.182 \frac{T\hat{\rho} \log B}{n+1}$$

и $\frac{S+1}{2S+1} \leq 0.502$ (см. (21)), получаем

$$h(p(\vec{\lambda})) \leq \left(0.21 + \frac{4.765}{n+1}\right) T\hat{\rho} \log B,$$

а это и есть утверждение леммы. Таким образом, лемма полностью доказана.

В дальнейшем мы под $\max |p(\vec{\lambda})|$ будем иметь в виду $\max_{\substack{\lambda_0=0, \dots, D_0 \\ \vec{\lambda} \in \Omega(\Upsilon)}} |p(\vec{\lambda})|$.

Для $I = 0, 1, 2, \dots, I_0$ построим функции $Q^{(I)}(Y_0, Y_1, \dots, Y_n; \vec{t})$, $t_0 + t_1 + \dots + t_{r-1} \leq T$, такие, что

$$Q^{(I)}(Y_0, Y_1, \dots, Y_n; \vec{t}) = \rho^{2T} \sum_{\lambda_0=0}^{D_0} \sum_{\vec{\lambda} \in \Omega_I(\Upsilon)} p(\vec{\lambda}) \Pi(\vec{t}) \Theta\left(\frac{2^{I_0}}{2^I} Y_0, \vec{t}\right) Y_1^{\lambda_1/2^I} \dots Y_n^{\lambda_n/2^I},$$

множество $\Omega_I(\Upsilon)$ – это некоторое подмножество множества $\Omega(\Upsilon)$ такое, что для любых векторов $\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2 \in \Omega_I(\Upsilon)$ выполнено $\vec{\lambda}_1/2^I - \vec{\lambda}_2/2^I \in \Upsilon \cap V \subseteq \Upsilon$ и функция $Q^{(I)}(Y_0, Y_1, \dots, Y_n; \vec{0})$ не равна тождественно нулю. Построение будем проводить по индукции. При $I = 0$ положим

$$\begin{aligned} Q^{(0)}(Y_0, Y_1, \dots, Y_n; \vec{t}) &= Q(Y_0, Y_1, \dots, Y_n; \vec{t}) \\ &= \rho^{2T} \sum_{\lambda_0=0}^{D_0} \sum_{\vec{\lambda} \in \Omega(\Upsilon)} p(\vec{\lambda}) \Pi(\vec{t}) \Theta(2^{I_0} Y_0, \vec{t}) Y_1^{\lambda_1} \dots Y_n^{\lambda_n}, \end{aligned}$$

где $Q(Y_0, Y_1, \dots, Y_n; \vec{t})$ – функции, определенные в настоящем параграфе. Отметим, что по построению множество $\Omega(\Upsilon)$ состоит из точек $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, сравнимых между собой по модулю решетки $\Upsilon \cap V$, а функция

$$Q(Y_0, Y_1, \dots, Y_n; \vec{0}) = P(Y_0, Y_1, \dots, Y_n)$$

не равна тождественно нулю.

Предположим, что функции $Q^{(I)}$ уже построены, и определим $Q^{(I+1)}$. Рассмотрим векторы множества $\Omega_I(\Upsilon)$ по модулю решетки $2 \cdot 2^I \Upsilon \cap V$. Все векторы из $\Omega_I(\Upsilon)$ распадаются на классы эквивалентных (векторы $\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2 \in \Omega_I(\Upsilon)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\vec{\lambda}_1 - \vec{\lambda}_2 \in 2^{I+1} \Upsilon \cap V$). Количество этих классов равно 2^r . Представим теперь $Q^{(I)}$ в следующем виде:

$$Q^{(I)}(Y_0, Y_1, \dots, Y_n; \vec{t}) = \sum_{i=1}^{2^r} Q_i^{(I)}(Y_0, Y_1, \dots, Y_n; \vec{t}), \quad (37)$$

причем функции $Q_i^{(I)}$ определены равенствами

$$Q_i^{(I)}(Y_0, Y_1, \dots, Y_n; \vec{t}) = \rho^{2T} \sum_{\lambda_0=0}^{D_0} \sum_{\vec{\lambda} \in \Omega_I(\Upsilon)_i} p(\vec{\lambda}) \Pi(\vec{t}) \Theta\left(\frac{2^{I_0}}{2^I} Y_0, \vec{t}\right) Y_1^{\lambda_1/2^I} \dots Y_n^{\lambda_n/2^I}. \quad (38)$$

Здесь множество $\Omega_I(\Upsilon)_i$ состоит из тех точек множества $\Omega_I(\Upsilon)$, которые принадлежат i -му классу эквивалентности. Таким образом, если $\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2 \in \Omega_I(\Upsilon)_i$, то $\vec{\lambda}_1 - \vec{\lambda}_2 \in 2^{I+1}\Upsilon \cap V$.

Если взять вектор $\vec{t} = \vec{0}$, то функция $Q^{(I)}(Y_0, Y_1, \dots, Y_n; \vec{0})$ по построению не равна тождественно нулю. Следовательно, в равенстве (37) при $\vec{t} = \vec{0}$ существует хотя бы одно j такое, что функция $Q_j(Y_0, Y_1, \dots, Y_n; \vec{0})$ также не равна тождественно нулю. Зафиксируем это j и определим новые функции равенством

$$Q^{(I+1)}(X_0, \dots, X_n; \vec{t}) = Q_j^{(I)}(Y_0, Y_1, \dots, Y_n; \vec{t}). \quad (39)$$

Здесь взято $X_0 = 2Y_0$ и $X_i = Y_i^2$, $i = 1, \dots, n$. Множество $\Omega_{I+1}(\Upsilon) = \Omega_I(\Upsilon)_j$ по построению удовлетворяет условиям построения. На этом мы завершили индуктивный процесс построения функций $Q^{(I)}$.

Если определить функцию $P^{(I)} = P^{(I)}(Y_0, Y_1, \dots, Y_n)$ равенством

$$P^{(I)} = \rho^{2T} \sum_{\lambda_0=0}^{D_0} \sum_{\vec{\lambda} \in \Omega_I(\Upsilon)} p(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \Delta\left(\frac{2^{I_0}}{2^I} Y_0, \lambda_0, H\right) Y_1^{\lambda_1/2^I} \dots Y_n^{\lambda_n/2^I},$$

то точно так же, как и для функции P , можно легко доказать, что векторное пространство над $\mathbb{R}$, порожденное $Q^{(I)}(\vec{t})$, $t_0 + t_1 + \dots + t_{r-1} \leq T$, совпадает с пространством, порожденным $\partial_0^{t_0} \partial_1^{t_1} \dots \partial_{r-1}^{t_{r-1}} P^{(I)}$ при том же условии для вектора $\vec{t}$, а следовательно, и с пространством, порожденным $\partial_0^{t_0} \partial_1^{t_1} \dots \partial_{n-1}^{t_{n-1}} P^{(I)}$, $t_0 + t_1 + \dots + t_{n-1} \leq T$.

§ 10. Приближающие функции

Нам понадобятся функции $g^{(I)}(z; \vec{t}) = g^{(I)}(z)$ и $f^{(I)}(z; \vec{t}) = f^{(I)}(z)$, определенные следующими равенствами:

$$g^{(I)}(z) = Q^{(I)}(z, \alpha_1^z, \dots, \alpha_n^z; \vec{t}),$$

$$f^{(I)}(z) = Q^{(I)}\left(z, \alpha_1^z, \dots, \alpha_{n-1}^z, \alpha_1^{-\frac{b_1}{b_n}z} \dots \alpha_{n-1}^{-\frac{b_{n-1}}{b_n}z}; \vec{t}\right),$$

где $\vec{t} = (t_0, \dots, t_{r-1})$ – вектор с целыми неотрицательными координатами, а функции $Q^{(I)}(Y_0, Y_1, \dots, Y_n; \vec{t})$ определены в § 9.

ЛЕММА 10. При условии $0 \leq t_0 + t_1 + \dots + t_{r-1} \leq T$ для $\log|f^{(I)}(z)|$ и $\log|f^{(I)}(z) - g^{(I)}(z)|$ выполнены следующие оценки:

$$\log|f^{(I)}(z)| \leq \log(\max|p(\vec{\lambda})|) + \left(1.266 + \frac{4.77}{n+1}\right) T \hat{\rho} \log B + \frac{33.447 \cdot 2^{-n/\kappa}}{10^3(n+1)} \frac{|z|}{2^I} T,$$

$$\log|f^{(I)}(z) - g^{(I)}(z)| \leq \log(\max|p(\vec{\lambda})|) + \left(1.268 + \frac{4.772}{n+1}\right) T \hat{\rho} \log B$$

$$+ \frac{33.45 \cdot 2^{-n/\kappa}}{10^3(n+1)} \frac{|z|}{2^I} T - 2(n+5)2^n SD.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим $\log|f^{(I)}(z)|$, оценка $\log|f^{(I)}(z) - g^{(I)}(z)|$ довольно легко следует из первой. Из определения $f^{(I)}(z)$ следует равенство

$$f^{(I)}(z) = \rho^{2T} \sum_{\lambda_0=0}^{D_0} \sum_{\vec{\lambda} \in \Omega_I(\Upsilon)} p(\vec{\lambda}) \Pi(\vec{t}) \Theta\left(2^{I_0} \frac{z}{2^I}, \vec{t}\right) \alpha_1^{\frac{z}{2^I} \hat{\gamma}_1} \dots \alpha_{n-1}^{\frac{z}{2^I} \hat{\gamma}_{n-1}}; \quad (40)$$

здесь $\hat{\gamma}_i$ определяются по формулам $\hat{\gamma}_i = \lambda_i - \frac{b_i}{b_n} \lambda_n$, $i = 1, \dots, n-1$. Из равенства (40) следует оценка

$$\begin{aligned} \log |f^{(I)}(z)| &\leq \log N + \log(\max |p(\vec{\lambda})|) + 2T \log \rho \\ &+ \log \left(\max \left| \Pi(\vec{t}) \Theta \left(2^{I_0} \frac{z}{2^I}, \vec{t} \right) \right| \right) + \log \left(\max \left| \alpha_1^{\frac{z}{2^I} \hat{\gamma}_1} \cdots \alpha_{n-1}^{\frac{z}{2^I} \hat{\gamma}_{n-1}} \right| \right). \end{aligned} \quad (41)$$

Число N здесь, как и ранее, равно числу слагаемых в (40). Используя результаты из § 7 и (21), получаем оценки

$$\log(\max |\Pi(\vec{t})|) \leq (T - t_0) \log B$$

(см. (30)) и

$$\max \left| \Theta \left(2^{I_0} \frac{z}{2^I}, \vec{t} \right) \right| \leq e^{\frac{107}{103} H t_0} e^{D_0 + H} 2^{I_0 D_0} \left(1 + \frac{|z|}{2^I H} \right)^{D_0} \quad (42)$$

(см. (31)).

Для каждого $\mu > 0$ максимум функции $(1 + \frac{x}{H})^H e^{-\frac{x}{\mu}}$ в зависимости от x достигается в точке $x = (\mu - 1)H$. Учитывая это, получаем

$$\begin{aligned} \log \left(\left(1 + \frac{|z|}{2^I H} \right)^H \right)^{\frac{D_0}{H}} &\leq \log \left(\left(1 + \frac{(\mu - 1)H}{H} \right)^H e^{-\left(\frac{\mu - 1}{\mu}\right)H} e^{\frac{1}{2^I \mu}} \right)^{\frac{D_0}{H}} \\ &\leq \left(\left(\log \mu + \frac{1}{\mu} \right) - 1 + \frac{|z|}{2^I H \mu} \right) D_0. \end{aligned}$$

Выберем $\mu = 2^n \cdot 385d$. При таком выборе получаем оценку

$$\begin{aligned} \left(\left(\log \mu + \frac{1}{\mu} \right) - 1 + \frac{|z|}{2^I H \mu} \right) D_0 &\leq \left(0.201 + \frac{1.529}{n+1} \right) T \log B \\ &+ \frac{|z|}{1250(n+1)2^I d} \cdot 2^{-n} T - D_0. \end{aligned} \quad (43)$$

Здесь мы использовали неравенства

$$\begin{aligned} D_0 \log \mu &\leq n D_0 \log 2 + D_0 \log(385d) \leq (n+1) D_0 \log 2 + 5.27 D_0 \\ &\leq \left(0.201 + \frac{1.528}{n+1} \right) T \log B, \end{aligned}$$

$$\frac{D_0}{\mu} \leq \frac{1}{1000(n+1)} T \log B, \quad \frac{D_0}{H \mu} \leq \frac{1}{1250(n+1)} \cdot 2^{-n} T.$$

Подставляя оценку (43) в (42) и учитывая $I_0 D_0 \log 2 \leq \frac{3.238}{n+1} T \log B$ и $H \leq \log B$, находим

$$\begin{aligned} \log \left(\max \left| \Theta \left(2^{I_0} \frac{z}{2^I}, \vec{t} \right) \right| \right) &\leq \left(0.201 + \frac{4.768}{n+1} \right) T \log B \\ &+ \frac{|z|}{1250(n+1)2^I d} \cdot 2^{-n} T + \frac{107}{103} t_0 \log B. \end{aligned} \quad (44)$$

Принимая во внимание неравенство $t_0 \left(\frac{107}{103} \log B - \log B \right) \leq 0.04 T \log B$, мы находим

$$\log \left(\max \left| \Pi(\vec{t}) \Theta \left(2^{I_0} \frac{z}{2^I}, \vec{t} \right) \right| \right) \leq \left(1.264 + \frac{4.768}{n+1} \right) T \log B + \frac{2^{-n} |z|}{1250(n+1)2^I d} T. \quad (45)$$

Из определения множества $\Omega(\Upsilon)$ следует неравенство

$$\log(\max|\alpha_1^{\lambda_1} \cdots \alpha_n^{\lambda_n}|) \leq |\lambda_1 \log \alpha_1 + \cdots + \lambda_n \log \alpha_n| \leq \frac{1}{10.6} \cdot 2^{-n/\varkappa} D, \quad (46)$$

поэтому

$$\begin{aligned} \log\left(\max\left|\alpha_1^{\hat{\gamma}_1 \frac{z}{2^I}} \cdots \alpha_{n-1}^{\hat{\gamma}_{n-1} \frac{z}{2^I}}\right|\right) &= \log\left(\left|\alpha_1^{\lambda_1 \frac{z}{2^I}} \cdots \alpha_n^{\lambda_n \frac{z}{2^I}}\right| \left|\prod_{i=1}^n \alpha_i^{-\frac{b_i}{b_n} \lambda_n \frac{z}{2^I}}\right|\right) \\ &\leq \frac{|z|}{2^I} |\lambda_1 \log \alpha_1 + \cdots + \lambda_n \log \alpha_n| + \log\left|\exp\left\{\frac{\lambda_n z}{2^I b_n} \sum_{i=1}^n b_i \log \alpha_i\right\}\right| \\ &\leq \frac{32.645 \cdot 2^{-n/\varkappa}}{10^3(n+1)} \frac{|z|}{2^I} T + |L| \frac{|z|}{2^I} D_n. \end{aligned} \quad (47)$$

Из (18) и (21) следует неравенство $|L| \leq \frac{1}{10^7} \cdot 2^{-n/\varkappa}$. Отсюда с учетом соотношений (21) получаем

$$|L| D_n \leq \frac{1}{10^7(n+1)} \cdot 2^{-n/\varkappa} T. \quad (48)$$

Подставляя в (41) оценки (45), (47), (34) и учитывая при этом неравенства $2^{-n} \leq 2^{-n/\varkappa}$ и $1 \leq d$, мы можем выписать оценку

$$\begin{aligned} \log|f^{(I)}(z)| &\leq \log(\max|p(\vec{\lambda})|) + 2T \log \rho + \left(1.266 + \frac{4.77}{n+1}\right) T \log B \\ &\quad + \frac{33.447 \cdot 2^{-n/\varkappa}}{10^3(n+1)} \frac{|z|}{2^I} T. \end{aligned}$$

Для доказательства первой оценки леммы осталось заметить что $\hat{\rho} \geq 1$ и $2T \log \rho + 1.266T \log B \leq 1.266T \hat{\rho} \log B$.

Для вывода второй оценки заметим, что из определения функции $g^{(I)}(z)$ сразу следует равенство

$$g^{(I)}(z) = \rho^{2T} \sum_{\lambda_0=0}^{D_0} \sum_{\vec{\lambda} \in \Omega_I(\Upsilon)} p(\vec{\lambda}) \Pi(\vec{t}) \Theta\left(2^{I_0} \frac{z}{2^I}, \vec{t}\right) \alpha_1^{\frac{z}{2^I} \lambda_1} \cdots \alpha_n^{\frac{z}{2^I} \lambda_n}. \quad (49)$$

Учитывая (40), получаем

$$\begin{aligned} |f^{(I)}(z) - g^{(I)}(z)| &= \left| \rho^{2T} \sum_{\lambda_0=0}^{D_0} \sum_{\vec{\lambda} \in \Omega_I(\Upsilon)} p(\vec{\lambda}) \Pi(\vec{t}) \right. \\ &\quad \times \left. \Theta\left(2^{I_0} \frac{z}{2^I}, \vec{t}\right) \alpha_1^{\lambda_1 \frac{z}{2^I}} \cdots \alpha_n^{\lambda_n \frac{z}{2^I}} \left(\prod_{i=1}^n \alpha_i^{-\frac{b_i}{b_n} \lambda_n \frac{z}{2^I}} - 1\right) \right|. \end{aligned}$$

Из этого равенства видно, что

$$\begin{aligned} \log|f^{(I)}(z) - g^{(I)}(z)| &\leq \log N + \log(\max|p(\vec{\lambda})|) + 2T \log \rho \\ &\quad + \log\left(\max\left|\Pi(\vec{t}) \Theta\left(2^{I_0} \frac{z}{2^I}, \vec{t}\right)\right|\right) + \log\left(\max\left|\alpha_1^{\lambda_1 \frac{z}{2^I}} \cdots \alpha_n^{\lambda_n \frac{z}{2^I}}\right|\right) \\ &\quad + \log\left(\max\left|\prod_{i=1}^n \alpha_i^{-\frac{b_i}{b_n} \lambda_n \frac{z}{2^I}} - 1\right|\right). \end{aligned} \quad (50)$$

Большинство слагаемых в правой части (50) мы уже оценивали при доказательстве первого неравенства леммы. Осталось оценить логарифм модуля последней скобки в (50). Пользуясь неравенством $\log|e^x - 1| \leq |x| + \log|x|$, находим

$$\begin{aligned} \log\left(\max\left|\prod_{i=1}^n \alpha_i^{-\frac{b_i}{b_n} \frac{z}{2^I} \lambda_n} - 1\right|\right) &= \log\left(\max\left|\exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^n b_i \log \alpha_i}{b_n} \frac{z}{2^I} \lambda_n\right\} - 1\right|\right) \\ &= \log\left(\max\left|e^{-\frac{L}{b_n} \frac{z}{2^I} \lambda_n} - 1\right|\right) \leq \log\left(\frac{|z|}{2^I} |L| D_n\right) + \frac{|z|}{2^I} |L| D_n \\ &\leq \log|L| + \log \frac{|z|}{2^I} + \log D_n + \frac{|z|}{2^I} |L| D_n. \end{aligned}$$

Из предположения (18), а также из (21) и выбора параметров следует неравенство

$$\log|L| \leq -1.8d(n+5)(n+8)2^n \hat{\rho} D \log B \leq -2(n+5)2^n SD.$$

Используя то, что для любых $x \geq 0$ и $\mu > 0$ выполнено $x \leq \mu e^{x/\mu-1}$, взяв $\mu = 100 \cdot 2^{n/\varkappa}$, $x = \frac{|z|}{2^I}$ и учитывая (21), получаем

$$\begin{aligned} \log \frac{|z|}{2^I} &\leq n \log 2 + \log 100 + \frac{1}{100} \cdot 2^{-n/\varkappa} \frac{|z|}{2^I} \\ &\leq \left(10^{-4} + \frac{10^{-4}}{n+1}\right) T \log B + \frac{2^{-n/\varkappa}}{2 \cdot 10^6(n+1)} \frac{|z|}{2^I} T. \end{aligned}$$

Оценку $\log D_n$ получить совсем просто. Вследствие того, что $D > \frac{10^5}{4}$ (см. (21)), находим

$$\log D_n \leq \log D \leq \frac{1}{10^4(n+1)} T \log B.$$

Теперь, собирая вместе только что полученные оценки для $\log|L|$, $\log \frac{|z|}{2^I}$, $\log D_n$ и (48), находим

$$\begin{aligned} \log\left(\max\left|\prod_{i=1}^n \alpha_i^{-\frac{b_i}{b_n} \lambda_n \frac{z}{2^I}} - 1\right|\right) &\leq \left(\frac{1}{10^4} + \frac{2}{10^4(n+1)}\right) T \log B \\ &\quad + \frac{2^{-n/\varkappa}}{10^6(n+1)} \frac{|z|}{2^I} T - 2(n+5)2^n SD. \end{aligned} \quad (51)$$

Подставляя в (50) неравенства (45), (46), (34), (51) и пользуясь тем, что $\hat{\rho} \geq 1$ и $2T \log \rho + 1.268T \log B \leq 1.268T \hat{\rho} \log B$, получаем второе неравенство леммы. Лемма полностью доказана.

§ 11. Алгебраическая оценка снизу

Далее, в § 14, при экстраполяции нам понадобятся не сами оценки леммы 10, а вытекающие из них оценки, представленные в следующей лемме.

ЛЕММА 11. Пусть s – целое число и выполнено условие $g^{(I)}(s) \neq 0$. Тогда если $|s| \leq 2^n \cdot 2^I S$ и $t_0 + t_1 + \dots + t_{r-1} \leq T$, то выполняется оценка

$$\log \left| \frac{f^{(I)}(z)}{f^{(I)}(s)} \right| \leq \left(1.477 + \frac{9.54}{n+1}\right) \frac{d}{\varkappa} T \hat{\rho} \log B + \frac{|s|nD}{2^I \varkappa} + \frac{33.447}{10^3(n+1)} \frac{|z|}{2^I} \cdot 2^{-n/\varkappa} T.$$

Если предположить, что $g^{(I)}\left(\frac{s}{2}\right) \neq 0$, то при $|s| \leq 4 \cdot 2^I S$ и $t_0 + t_1 + \dots + t_{r-1} \leq T$ выполняется неравенство

$$\log \left| \frac{f^{(I)}(z)}{f^{(I)}(s/2)} \right| \leq \frac{2^n}{\varkappa} \left(\left(1.477 + \frac{9.54}{n+1} \right) dT \hat{\rho} \log B + \frac{|s|}{2 \cdot 2^I} nD \right) + \frac{33.447}{10^3(n+1)} \frac{|z|}{2^I} \cdot 2^{-n/\varkappa} T.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из построения множеств $\Omega_I(\Upsilon)$ в §9 следует, что существует вектор $\vec{\mu}_I = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ такой, что $\Omega_I(\Upsilon) + \vec{\mu}_I \in 2^I \Upsilon$. Обозначим $g_1^{(I)}(z) = g_1^{(I)}(z; \vec{t}) = g^{(I)}(z; \vec{t}) \alpha_1^{\frac{s}{2^I} \mu_1} \dots \alpha_n^{\frac{s}{2^I} \mu_n}$. Из (49) следует равенство

$$g_1^{(I)}(s) = \rho^{2T} \sum_{\lambda_0=0}^{D_0} \sum_{\vec{\lambda} \in \Omega_I(\Upsilon)} p(\vec{\lambda}) \Pi(\vec{t}) \Theta \left(2^{I_0} \frac{s}{2^I}, \vec{t} \right) \alpha_1^{(\lambda_1 + \mu_1) \frac{s}{2^I}} \dots \alpha_n^{(\lambda_n + \mu_n) \frac{s}{2^I}}. \quad (52)$$

При целых s из определения $\Omega_I(\Upsilon)$ следует, что числа $g_1^{(I)}(s)$ принадлежат полю $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Оценим $|g_1^{(I)}(s)|_v$ в двух случаях: когда v – неархимедово нормирование поля $\mathbb{K}$ и когда v архимедово.

Как уже отмечалось в §9, $\rho^{2T} \Pi(\vec{t})$ и $\Theta(2^{I_0} \frac{s}{2^I}, \vec{t})$ – целые числа, поэтому в случае неархимедова нормирования v , умножая и деля (52) на ρ , получаем оценку

$$\begin{aligned} \log |g_1^{(I)}(s)|_v &\leq \log(\max |p(\vec{\lambda})|_v) + \max \sum_{i=1}^n \frac{1}{\rho \cdot 2^I} \log |\alpha_i|_v^{s\rho(\lambda_i + \mu_i)} \\ &\leq \log(\max |p(\vec{\lambda})|_v) + \frac{|s|}{2^I} \max \sum_{i=1}^n |\lambda_i| |\log |\alpha_i|_v| + \frac{s}{2^I} \sum_{i=1}^n \mu_i \log |\alpha_i|_v \\ &\leq \log(\max |p(\vec{\lambda})|_v) + \frac{|s|}{2^I} W_v + \frac{s}{2^I} W_\mu, \end{aligned} \quad (53)$$

где $W_v = \sum_{i=1}^n D_i |\log |\alpha_i|_v|$, а $W_\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i \log |\alpha_i|_v$. В случае архимедова нормирования v получаем

$$\begin{aligned} \log |g_1^{(I)}(s)|_v &\leq \log N + \log(\max |p(\vec{\lambda})|_v) + \log \left(\max \left| \rho^{2T} \Pi(\vec{t}) \Theta \left(2^{I_0} \frac{s}{2^I}, \vec{t} \right) \right| \right) \\ &\quad + \log \left(\max \left| \alpha_1^{(\lambda_1 + \mu_1) \frac{s}{2^I}} \dots \alpha_n^{(\lambda_n + \mu_n) \frac{s}{2^I}} \right| \right). \end{aligned}$$

Из этого неравенства, используя (45), (34) и рассуждая аналогично (33), выводим следствие:

$$\begin{aligned} \log |g_1^{(I)}(s)|_v &\leq \log(\max |p(\vec{\lambda})|_v) + \frac{|s|}{2^I} W_v + \frac{s}{2^I} W_\mu \\ &\quad + d_v \left(\left(1.265 + \frac{4.768}{n+1} \right) T \log B + 2T \log \rho + \frac{|s| \cdot 2^{-n} \cdot 2^{-I}}{1250(n+1)d} T \right); \end{aligned} \quad (54)$$

здесь d_v равно 2 или 1 в случае комплексного или действительного нормирования v соответственно.

Если $g^{(I)}(s) \neq 0$, то $g_1^{(I)}(s) \neq 0$. Прологарифмировав формулу произведения для $g_1^{(I)}(s)$ (см. § 4, формула (5)), находим

$$\sum_v \log |g_1^{(I)}(s)|_v = 0,$$

где суммирование распространяется, как обычно, на все нормирования v поля $\mathbb{K}$. Заметим, что из этой формулы следует равенство

$$\log |g_1^{(I)}(s)| = \frac{1}{\varkappa} \log |g_1^{(I)}(s)|_{v_0} = -\frac{1}{\varkappa} \sum_{v \neq v_0} \log |g_1^{(I)}(s)|_v; \quad (55)$$

здесь $|x|$ – обычная евклидова абсолютная величина, а $|x|_{v_0}$ – нормирование, соответствующее естественному вложению $\mathbb{K}$ в $\mathbb{C}$. Отметим также, что $d_{v_0} = \varkappa$. Воспользовавшись (53) и (54), оценим сумму $-\frac{1}{\varkappa} \sum_{v \neq v_0} \log |g_1^{(I)}(s)|_v$ снизу. Имеем

$$\sum_{v \neq v_0} \log (\max |p(\vec{\lambda})|_v) = dh(p(\vec{\lambda})) - \varkappa \log (\max |p(\vec{\lambda})|). \quad (56)$$

Учитывая (6) и неравенство $h(\alpha_i) \leq h'(\alpha_i)$, получаем

$$\sum_{v \neq v_0} W_v \leq \sum_{i=1}^n 2D_i dh(\alpha_i) \leq \sum_{i=1}^n 2D_i dh'(\alpha_i) \leq nD. \quad (57)$$

Подставляя (53) и (54) в (55) и учитывая при этом (56), (57) и равенство $\sum_{v \neq v_0} d_v = d - \varkappa$, получаем

$$\begin{aligned} \log |g_1^{(I)}(s)| &\geq \log (\max |p(\vec{\lambda})|) - \frac{d}{\varkappa} h(p(\vec{\lambda})) - \frac{|s|nD}{2^I \varkappa} - \frac{1}{\varkappa} \sum_{v \neq v_0} \sum_{i=1}^n \frac{s}{2^I} \mu_i \log |\alpha_i|_v \\ &- \left(\frac{d}{\varkappa} - 1 \right) \left(\left(1.265 + \frac{4.768}{n+1} \right) T \log B + 2T \log \rho + \frac{|s| \cdot 2^{-n} \cdot 2^{-I}}{1250(n+1)d} T \right). \end{aligned}$$

Пользуясь неравенством $2T \log \rho + 1.265T \log B \leq 1.265T \hat{\rho} \log B$, вспоминая, что $\log |g^{(I)}(s)| = \log |g_1^{(I)}(s) \alpha_1^{-\frac{s}{2^I} \mu_1} \cdots \alpha_n^{-\frac{s}{2^I} \mu_n}|$, и учитывая, что в силу формулы произведения выполнено равенство

$$\log \left| \alpha_1^{-\frac{s}{2^I} \mu_1} \cdots \alpha_n^{-\frac{s}{2^I} \mu_n} \right| = \frac{1}{\varkappa} \sum_{v \neq v_0} \sum_{i=1}^n \frac{s}{2^I} \mu_i \log |\alpha_i|_v,$$

находим

$$\begin{aligned} \log |g^{(I)}(s)| &\geq \log (\max |p(\vec{\lambda})|) - \frac{d}{\varkappa} h(p(\vec{\lambda})) - \frac{|s|nD}{2^I \varkappa} \\ &- \left(\frac{d}{\varkappa} - 1 \right) \left(\left(1.265 + \frac{4.768}{n+1} \right) T \hat{\rho} \log B + \frac{|s| \cdot 2^{-n} \cdot 2^{-I}}{1250(n+1)d} T \right). \end{aligned} \quad (58)$$

Из (58) и второго неравенства леммы 10 с учетом условия $|s| \leq 2^n \cdot 2^I S$ имеем неравенство $|f^{(I)}(s) - g^{(I)}(s)| < \frac{1}{2} |g^{(I)}(s)|$, откуда сразу получаем

$$\begin{aligned} \log |f^{(I)}(s)| &\geq \log \left(\frac{|g^{(I)}(s)|}{2} \right) \geq \log (\max |p(\vec{\lambda})|) - \frac{d}{\varkappa} h(p(\vec{\lambda})) \\ &- \left(\frac{d}{\varkappa} - 1 \right) \left(1.266 + \frac{4.775}{n+1} \right) T \hat{\rho} \log B - \frac{|s|nD}{2^I \varkappa}. \end{aligned} \quad (59)$$

При этом мы еще использовали тот факт, что при $|s| \leq 2^n \cdot 2^I S$ выполнено неравенство

$$\frac{|s| \cdot 2^{-n} \cdot 2^{-I}}{1250(n+1)d} T \leq \frac{ST}{1250(n+1)d} \leq \left(0.0008 + \frac{0.006}{n+1}\right) T \hat{\rho} \log B.$$

Доказательство оценки для $\log|f^{(I)}(z)/f^{(I)}(s)|$ в предположении, что $|s| \leq 2^n \cdot 2^I S$, теперь можно легко получить, учитывая оценку (59), оценку леммы 10 для $|f^{(I)}(z)|$ и результат леммы 9 для оценки $h(p(\vec{\lambda}))$. В итоге получается первое неравенство леммы.

Докажем второе неравенство леммы. Для $g_1^{(I)}\left(\frac{s}{2}\right)$ верна формула (52) только при замене s на $\frac{s}{2}$. Все $\vec{\lambda} + \vec{\mu}$ принадлежат $2^I \Upsilon$ по построению. Пусть $\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n$ — некоторый базис в Υ ; рассмотрим числа

$$\hat{\alpha}_i = \alpha_1^{\lambda_{i1}} \dots \alpha_n^{\lambda_{in}}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (60)$$

Все эти числа лежат в поле $\mathbb{K}$ по определению Υ , и, кроме этого, все числа $g_1^{(I)}\left(\frac{s}{2}\right)$ лежат в поле $\widehat{\mathbb{K}} = \mathbb{K}(\sqrt{\hat{\alpha}_1}, \dots, \sqrt{\hat{\alpha}_n})$, причем $[\widehat{\mathbb{K}} : \mathbb{K}] \leq 2^n$, следовательно, $\deg \widehat{\mathbb{K}} \leq 2^n d$. Мы будем считать, что $\deg \widehat{\mathbb{K}} = 2^n d$, иначе оценки только улучшатся. Получим с небольшими изменениями оценки, аналогичные тем, которые мы проводили для доказательства оценки $|g^{(I)}(s)|$.

В случае неархимедова нормирования v поля $\widehat{\mathbb{K}}$ получаем оценку

$$\log \left(\left| g_1^{(I)}\left(\frac{s}{2}\right) \right|_v \right) \leq \log(\max |p(\vec{\lambda})|_v) + \frac{|s|}{2 \cdot 2^I} W_v + \frac{s}{2 \cdot 2^I} W_\mu. \quad (61)$$

Здесь, как и ранее, $W_v = \sum_{i=1}^n D_i |\log|\alpha_i|_v|$, $W_\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i \log|\alpha_i|_v$. В случае архимедова нормирования v оценка имеет тот же самый вид (см. (54)), что и при оценке $|g_1^{(I)}(s)|$ с заменой s на $\frac{s}{2}$:

$$\begin{aligned} \log \left| g_1^{(I)}\left(\frac{s}{2}\right) \right|_v &\leq \log(\max |p(\vec{\lambda})|_v) + \frac{|s|}{2 \cdot 2^I} W_v + \frac{s}{2 \cdot 2^I} W_\mu \\ &+ d_v \left(\left(1.265 + \frac{4.768}{n+1}\right) T \log B + 2T \log \rho + \frac{|s| \cdot 2^{-n} \cdot 2^{-I}}{2500(n+1)d} T \right). \end{aligned} \quad (62)$$

Как и при доказательстве первого неравенства леммы, воспользуемся (55) с заменой s на $\frac{s}{2}$, понимая под v все нормирования поля $\widehat{\mathbb{K}}$. Подставляя в (55) оценки (61) и (62), пользуясь при этом (56), (57) и $2T \log \rho + 1.265T \log B \leq 1.265T \hat{\rho} \log B$, находим

$$\begin{aligned} \log \left| g_1^{(I)}\left(\frac{s}{2}\right) \right| &\geq \log(\max p(\vec{\lambda})) - \frac{2^n d}{\varkappa} h(p(\vec{\lambda})) \\ &- \left(\frac{2^n d}{\varkappa} - 1 \right) \left(\left(1.265 + \frac{4.768}{n+1}\right) T \hat{\rho} \log B + \frac{|s| \cdot 2^{-n} \cdot 2^{-I}}{2500(n+1)d} T \right) \\ &- 2^n \frac{n|s|D}{2 \cdot 2^I \varkappa} - \frac{1}{\varkappa} \sum_{v \neq v_0} \sum_{i=1}^n \frac{s}{2 \cdot 2^I} \mu_i \log|\alpha_i|_v. \end{aligned}$$

Далее, возвращаясь к оценке $|g^{(I)}(s/2)|$ (подробно см. рассуждение, использованное при выводе оценки $|g^{(I)}(s)|$), получаем

$$\begin{aligned} \log \left| g^{(I)}\left(\frac{s}{2}\right) \right| &\geq \log(\max p(\vec{\lambda})) - \frac{2^n d}{\varkappa} h(p(\vec{\lambda})) \\ &- \left(\frac{2^n d}{\varkappa} - 1 \right) \left(\left(1.265 + \frac{4.768}{n+1}\right) T \hat{\rho} \log B + \frac{|s| \cdot 2^{-n} \cdot 2^{-I}}{2500(n+1)d} T \right) - 2^n \frac{n|s|D}{2 \cdot 2^I \varkappa}. \end{aligned}$$

Как и при выводе оценки $|g^{(I)}(s)|$, вследствие второго неравенства леммы 10 и выбора параметров при $|s| \leq 4 \cdot 2^I S$ выполнено $|f^{(I)}(\frac{s}{2}) - g^{(I)}(\frac{s}{2})| < \frac{1}{2}|g^{(I)}(\frac{s}{2})|$, откуда вытекает $\log|f^{(I)}(\frac{s}{2})| \geq \log(\frac{|g^{(I)}(s/2)|}{2})$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \log \left| f^{(I)}\left(\frac{s}{2}\right) \right| &\geq \log(\max p(\vec{\lambda})) - \frac{2^n d}{\varkappa} h(p(\vec{\lambda})) \\ &- \left(\frac{2^n d}{\varkappa} - 1 \right) \left(1.266 + \frac{4.775}{n+1} \right) T \hat{\rho} \log B - 2^n \frac{n|s|D}{2 \cdot 2^I \varkappa}. \end{aligned} \quad (63)$$

При этом мы использовали, что при $|s| \leq 4 \cdot 2^I S$ выполнено неравенство

$$\frac{|s| \cdot 2^{-n} \cdot 2^{-I}}{2500(n+1)d} T \leq \frac{ST}{2500(n+1)d} \leq \left(0.0008 + \frac{0.006}{n+1} \right) T \hat{\rho} \log B.$$

Теперь легко доказать второе утверждение леммы. Воспользовавшись (63), первым неравенством леммы 10 и леммой 9, получаем выполнение второго неравенства леммы. Таким образом, лемма полностью доказана.

§ 12. Оценка производных

Пусть T' и T'' — неотрицательные действительные числа, $T' + T'' \leq T$. Пусть $0 \leq t' \leq T'$ — целое число, а вектор $\vec{t}'' = (t''_0, \dots, t''_{r-1})$ имеет целые неотрицательные координаты с условием $t''_0 + \dots + t''_{r-1} \leq T''$. В этом параграфе мы оценим сверху $|f^{(I)}(s; \vec{t}'')|$; здесь

$$f^{(I)}(z; \vec{t}'') = \rho^{2T} \sum_{\lambda_0=0}^{D_0} \sum_{\vec{\lambda} \in \Omega_I(\Upsilon)} p(\vec{\lambda}) \Pi(\vec{t}'') \Theta\left(2^{I_0} \frac{z}{2^I}, \vec{t}''\right) \alpha_1^{\frac{z}{2^I} \hat{\gamma}_1} \dots \alpha_{n-1}^{\frac{z}{2^I} \hat{\gamma}_{n-1}}$$

— функции, определенные в § 10, а s — некоторое целое число. Напомним также, что по определению $\hat{\gamma}_i = \lambda_i - \frac{b_i}{b_n} \lambda_n$. Для $0 \leq m \leq T'$ определим функции $f_m^{(I)}(z) = f_m^{(I)}(z; \vec{t}'')$ равенством

$$f_m^{(I)}(z) = \frac{1}{m!} \left(\frac{d}{dz} \right)^m f^{(I)}(z; \vec{t}'').$$

ЛЕММА 12. Пусть T' и T'' — неотрицательные действительные числа, $T' + T'' \leq T$, m — целое число с условием $0 \leq m \leq T'$, вектор $\vec{t}'' = (t''_0, \dots, t''_{r-1})$ имеет целые неотрицательные координаты и $t''_0 + \dots + t''_{r-1} \leq T''$. Тогда для любого целого числа s при условии $g^{(I)}(s; \vec{t}'') \neq 0$, $|s| \leq 2^n \cdot 2^I S$, и для любого действительного l при условии $g^{(I)}(l; \vec{t}'') = 0$, $t_0 + \dots + t_{r-1} \leq T$, выполняется следующая оценка:

$$\begin{aligned} \log \left| \frac{f_m^{(I)}(l; \vec{t}'')}{f^{(I)}(s; \vec{t}'')} \right| &\leq \left(1.6 + \frac{12.78}{n+1} \right) \frac{d}{\varkappa} T \hat{\rho} \log B \\ &+ \frac{33.447}{10^3(n+1)} \frac{|l|}{2^I} \cdot 2^{-n/\varkappa} T + \frac{n|s|D}{2^I \varkappa} - 2(n+5)2^n SD, \end{aligned}$$

а при условии $g^{(I)}(\frac{s}{2}; \vec{t}'') \neq 0$, $|s| \leq 4 \cdot 2^I S$, и тех же условиях для l и $\vec{t}'$ выполнено

$$\begin{aligned} \log \left| \frac{f_m^{(I)}(l; \vec{t}'')}{f^{(I)}(s/2; \vec{t}'')} \right| &\leq \left(1.6 + \frac{12.78}{n+1} \right) \frac{2^n d}{\varkappa} T \hat{\rho} \log B + \frac{33.447}{10^3(n+1)} \frac{|l|}{2^I} \cdot 2^{-n/\varkappa} T \\ &+ \frac{2^n n|s|D}{2 \cdot 2^I \varkappa} - 2(n+5)2^n SD. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу определения величину $f_m^{(I)}(l)$ можно записать в виде

$$f_m^{(I)}(l) = \sum_{t'_0+t'_1+\dots+t'_{n-1}=m} \frac{1}{2^{I(m-t'_0)} t'_0!} a(\vec{t}') f^{(I)}(\vec{t}', \vec{t}'', l), \quad (64)$$

при этом мы использовали обозначения

$$\begin{aligned} a(\vec{t}') &= \frac{(\log \alpha_1)^{t'_1} \dots (\log \alpha_{n-1})^{t'_{n-1}}}{t'_1! \dots t'_{n-1}!}, \quad \Theta'(z, \vec{t}'') = \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{t'_0} \Theta \left(2^{I_0} \frac{z}{2^I}, \vec{t}'' \right), \\ f^{(I)}(\vec{t}', \vec{t}'', l) &= \rho^{2T} \sum_{\lambda_0=0}^{D_0} \sum_{\vec{\lambda} \in \Omega_I(\Upsilon)} p(\vec{\lambda}) \Pi(\vec{t}'') \Theta'(l, \vec{t}'') \hat{\gamma}_1^{t'_1} \dots \hat{\gamma}_{n-1}^{t'_{n-1}} \alpha_1^{\lambda_1 \frac{l}{2^I}} \dots \alpha_n^{\lambda_n \frac{l}{2^I}} \\ &\quad \times \left(\prod_{i=1}^n \alpha_i^{-\frac{b_i}{b_n} \lambda_n \frac{l}{2^I}} \right). \end{aligned} \quad (65)$$

Оценим величину $|f_m^{(I)}(l)|$ сверху. Число слагаемых в (64) оценивается величиной $\binom{m+n}{n} \leq 2^{m+n} \leq 2^{T+n}$ (так как по условию леммы $m \leq T' \leq T$). Таким образом, с учетом неравенства $\frac{1}{2^{I(m-t'_0)}} \geq 1$ находим

$$\log |f_m^{(I)}(l)| \leq (T+n) \log 2 + \max_{t'_0+t'_1+\dots+t'_{n-1}=m} \log \left| \frac{1}{t'_0!} a(\vec{t}') f^{(I)}(\vec{t}', \vec{t}'', l) \right|. \quad (66)$$

Рассмотрим в (65) отдельно сумму без последней скобки. Из определения функций Q (см. (26)) следует равенство

$$\begin{aligned} &\frac{b_n^{m-t'_0}}{2^{I(m-t'_0)}} \rho^{2T} \sum_{\lambda_0=0}^{D_0} \sum_{\vec{\lambda} \in \Omega_I(\Upsilon)} p(\vec{\lambda}) \Pi(\vec{t}'') \Theta'(l, \vec{t}'') \hat{\gamma}_1^{t'_1} \dots \hat{\gamma}_{n-1}^{t'_{n-1}} \alpha_1^{\lambda_1 \frac{l}{2^I}} \dots \alpha_n^{\lambda_n \frac{l}{2^I}} \\ &= \partial_0^{t'_0} \partial_1^{t'_1} \dots \partial_{n-1}^{t'_{n-1}} Q^{(I)}(Y_0, Y_1, \dots, Y_n; \vec{t}''), \end{aligned} \quad (67)$$

в правой части равенства взято $Y_0 = l$, $Y_i = \alpha_i^l$. В § 9 при построении функций $Q^{(I)}$ доказано, что линейное пространство над $\mathbb{R}$ функций $Q^{(I)}(Y_0, Y_1, \dots, Y_n; \vec{t}'')$, $t''_0 + \dots + t''_{r-1} \leq T''$, совпадает с пространством $\partial_0^{t''_0} \partial_1^{t''_1} \dots \partial_{n-1}^{t''_{n-1}} P^{(I)}$, $t''_0 + t''_1 + \dots + t''_{n-1} \leq T''$, также рассмотренным над $\mathbb{R}$ (определение функции $P^{(I)}$ см. в § 9), т. е.

$$\begin{aligned} &\langle Q^{(I)}(Y_0, Y_1, \dots, Y_n; \vec{t}''), t''_0 + t''_1 + \dots + t''_{r-1} \leq T'' \rangle_{\mathbb{R}} \\ &= \langle \partial_0^{t''_0} \partial_1^{t''_1} \dots \partial_{n-1}^{t''_{n-1}} P^{(I)}, t''_0 + t''_1 + \dots + t''_{n-1} \leq T'' \rangle_{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

С учетом неравенства $T' + T'' \leq T$ (по условию доказываемой леммы) отсюда следует, что при условиях $t''_0 + \dots + t''_{r-1} \leq T''$ и $t'_0 + \dots + t'_{n-1} \leq T'$ выполнено

$$\begin{aligned} &\langle \partial_0^{t'_0} \partial_1^{t'_1} \dots \partial_{n-1}^{t'_{n-1}} Q^{(I)}(Y_0, Y_1, \dots, Y_n; \vec{t}'') \rangle_{\mathbb{R}} \\ &= \langle \partial_0^{t'_0} \partial_1^{t'_1} \dots \partial_{n-1}^{t'_{n-1}} P^{(I)}, t_0 + t_1 + \dots + t_{n-1} \leq T \rangle_{\mathbb{R}} \\ &= \langle Q^{(I)}(Y_0, Y_1, \dots, Y_n; \vec{t}'), t_0 + t_1 + \dots + t_{r-1} \leq T \rangle_{\mathbb{R}}. \end{aligned} \quad (68)$$

Из определения функций $g^{(I)}$ (см. § 10) следует равенство $g^{(I)}(l; \vec{t}) = Q^{(I)}(l, \alpha_1^l, \dots, \alpha_n^l; \vec{t})$. По условию доказываемой леммы отсюда вытекает выполнение равенств $Q^{(I)}(l, \alpha_1^l, \dots, \alpha_n^l; \vec{t}) = 0$ для $t_0 + \dots + t_{r-1} \leq T$, а это вследствие (68) означает, что все правые части (67) с условиями $t_0'' + \dots + t_{r-1}'' \leq T''$ и $t_0' + \dots + t_{n-1}' \leq T'$ равны нулю.

Поскольку правые части (67) равны нулю, то и левые части (67) также равны нулю. Следовательно, для оценки $\max_{t_0'+t_1'+\dots+t_{n-1}'=m} \log \left| \frac{1}{t_0'!} a(\vec{t}') f^{(I)}(\vec{t}', \vec{t}'', l) \right|$ (см. (66)) достаточно оценить величину

$$\begin{aligned} & \log \left(\max \left| \frac{1}{t_0'!} a(\vec{t}') \left(f^{(I)}(\vec{t}', \vec{t}'', l) \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \rho^{2T} \sum_{\lambda_0=0}^{D_0} \sum_{\vec{\lambda} \in \Omega_I(\Upsilon)} p(\vec{\lambda}) \Pi(\vec{t}'') \Theta'(l, \vec{t}'') \hat{\gamma}_1^{t_1'} \dots \hat{\gamma}_{n-1}^{t_{n-1}'} \alpha_1^{\lambda_1 \frac{1}{2T}} \dots \alpha_n^{\lambda_n \frac{1}{2T}} \right) \right| \Bigg) \\ & \leq \log \left(\max \left| \frac{1}{t_0'!} a(\vec{t}') \left(\sum_{\lambda_0=0}^{D_0} \sum_{\vec{\lambda} \in \Omega_I(\Upsilon)} p(\vec{\lambda}) \Pi(\vec{t}'') \Theta'(l, \vec{t}'') \hat{\gamma}_1^{t_1'} \dots \hat{\gamma}_{n-1}^{t_{n-1}'} \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times \alpha_1^{\lambda_1 \frac{1}{2T}} \dots \alpha_n^{\lambda_n \frac{1}{2T}} \right) \rho^{2T} \left(\prod_{i=1}^n \alpha_i^{-\frac{b_i}{b_n} \lambda_n \frac{1}{2T}} - 1 \right) \right| \Bigg) \\ & \leq \log N + \log(\max p(\vec{\lambda})) + \log(\max |\Pi(\vec{t}'') \Theta'(l, \vec{t}'') R(\vec{t}')|) + 2T \log \rho \\ & \quad + \log \left(\max \left| \alpha_1^{\lambda_1 \frac{1}{2T}} \dots \alpha_n^{\lambda_n \frac{1}{2T}} \right| \right) + \log \left(\max \left| \prod_{i=1}^n \alpha_i^{-\frac{b_i}{b_n} \lambda_n \frac{1}{2T}} - 1 \right| \right). \quad (69) \end{aligned}$$

При этом мы обозначили $|R(\vec{t}')| = |a(\vec{t}') \hat{\gamma}_1^{t_1'} \dots \hat{\gamma}_{n-1}^{t_{n-1}'}|$. Здесь и далее в этом параграфе, мы для краткости будем под $\max$ понимать $\max_{\substack{t_0'+t_1'+\dots+t_{n-1}'=m \\ \lambda_0=0, \dots, D_0, \vec{\lambda} \in \Omega_I(\Upsilon)}}$.

Напомним, что по построению $\Omega_I(\Upsilon) \subseteq \Omega(\Upsilon)$. Аналогично (46), (30) и (51) получим оценки

$$\log \left(\max \left| \alpha_1^{\lambda_1 \frac{1}{2T}} \dots \alpha_n^{\lambda_n \frac{1}{2T}} \right| \right) \leq \frac{|l|}{10.6 \cdot 2^I} \cdot 2^{-n/\varkappa} D, \quad (70)$$

$$\log |\Pi(\vec{t}'')| \leq (T'' - t_0'') \log B, \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \log \left(\max \left| \prod_{i=1}^n \alpha_i^{-\frac{b_i}{b_n} \lambda_n \frac{1}{2T}} - 1 \right| \right) & \leq \left(\frac{1}{10^4} + \frac{2}{10^4(n+1)} \right) T \log B \\ & \quad + \frac{2^{-n/\varkappa}}{10^6(n+1)} \frac{|l|}{2^I} T - 2(n+5)2^n S D. \quad (72) \end{aligned}$$

Оценим $|R(\vec{t}')|$:

$$\begin{aligned} |\hat{\gamma}_i \log \alpha_i| & \leq |\lambda_i \log \alpha_i| + \left| \frac{b_i}{b_n} \lambda_n \log \alpha_i \right| \leq \frac{0.5D}{dh_i} dh_i + \frac{|b_i|}{|b_n|} \frac{0.5D}{dh_n} dh_i \\ & \leq 0.5D + 0.5D = D. \end{aligned}$$

При этом мы использовали $h_i = h'(\alpha_i) = \max(h(\alpha_i), \frac{1}{d}, \frac{|\log \alpha_i|}{d})$, а также то, что $|\lambda_i| \leq D_i = \frac{0.5D}{h_i d}$, и предположение $|b_n| h_n \geq |b_i| h_i$, $i = 1, \dots, n-1$ (см. § 8).

Таким образом, можно получить оценку

$$\begin{aligned} \log(\max |R(\vec{t}')|) &\leq \log \left(\max \left(\frac{|\hat{\gamma}_1 \log \alpha_1|^{t'_1} \cdots |\hat{\gamma}_{n-1} \log \alpha_{n-1}|^{t'_{n-1}}}{t'_1! \cdots t'_{n-1}!} \right) \right) \\ &\leq \log \left(\max \frac{D^{t'_1 + \cdots + t'_{n-1}}}{t'_1! \cdots t'_{n-1}!} \right) \leq \log \left(\max \frac{((n-1)D)^{t'_1 + \cdots + t'_{n-1}}}{(t'_1 + \cdots + t'_{n-1})!} \right) \\ &\leq (n-1)D. \end{aligned}$$

В последнем неравенстве мы использовали тот факт, что $\frac{X^T}{T!} < e^X$, взяв при этом $X = (n-1)D$. Учитывая неравенства $(n-1)D \leq 0.021T \log B$ и (71), получаем

$$\begin{aligned} \log(\max |\Pi(\vec{t}'')R(\vec{t}')|) &\leq (T'' - t'_0) \log B + 0.044T \log B \\ &\leq (T - t'_0 - t'_0) \log B + 0.044T \log B. \end{aligned} \quad (73)$$

Из определения многочленов Θ следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\Theta'(l, \vec{t}'')}{t'_0!} &= \binom{t'_0 + t''_0}{t'_0} \frac{2^{(I_0 - I)t'_0} \Theta(2^{I_0} \frac{l}{2^I}, \vec{t}' + \vec{t}'')}{d_H^{t'_0}} \\ &\leq \binom{t'_0 + t''_0}{t'_0} 2^{I_0 D_0} \Theta\left(\frac{2^{I_0} l}{2^I}, \vec{t}' + \vec{t}''\right). \end{aligned}$$

Здесь мы использовали неравенство $t'_0 \leq D_0$, так как количество дифференцирований можно считать не превосходящим степени многочлена. Замечая, что в нашем случае, поскольку $t'_0 + t''_0 \leq T$, выполнено $\log \binom{t'_0 + t''_0}{t'_0} \leq \log 2^T \leq 0.041T \log B$, а также пользуясь (44) и $I_0 D_0 \log 2 \leq \frac{3 \cdot 238}{n+1} T \log B$, выводим

$$\begin{aligned} \log \left(\max \left| \frac{\Theta'(l, \vec{t}'')}{t'_0!} \right| \right) &\leq T \log 2 + I_0 D_0 \log 2 + \left(0.201 + \frac{4.768}{n+1} \right) T \log B \\ &\quad + \frac{|l| \cdot 2^{-n} \cdot 2^{-I}}{1250(n+1)} T + \frac{107}{103} (t'_0 + t''_0) \log B \\ &\leq \left(0.242 + \frac{8.01}{n+1} \right) T \log B + \frac{|l| \cdot 2^{-n} \cdot 2^{-I}}{1250(n+1)} T + \frac{107}{103} (t'_0 + t''_0) \log B. \end{aligned}$$

Пользуясь этим, а также (73) и неравенством $\frac{107}{103} (t'_0 + t''_0) \log B + (T - t'_0 - t''_0) \log B \leq 1.04 T \log B$ (так как $t'_0 + t''_0 \leq T$), находим

$$\log(\max |\Pi(\vec{t}'')\Theta'(l, \vec{t}'')R(\vec{t}')|) \leq \left(1.326 + \frac{8.01}{n+1} \right) T \log B + \frac{|l| \cdot 2^{-n} \cdot 2^{-I}}{1250(n+1)} T. \quad (74)$$

Теперь, подставляя в (69) неравенства (70), (72), (74), (34) и пользуясь неравенством $1.326T \log B + 2T \log \rho \leq 1.326T \hat{\rho} \log B$, мы получаем

$$\begin{aligned} \log \left(\max \left| \frac{1}{t'_0!} a(\vec{t}') f^{(I)}(\vec{t}', \vec{t}'', l) \right| \right) &\leq \log(\max p(\vec{\lambda})) + \left(1.327 + \frac{8.011}{n+1} \right) T \hat{\rho} \log B \\ &\quad + \frac{33.447}{10^3(n+1)} \frac{|l|}{2^I} \cdot 2^{-n/\varkappa} T - 2(n+5)2^n S D. \end{aligned}$$

И наконец, подставляя в (66) последнюю оценку и используя тот факт, что $(T + n) \log 2 \leq 0.041T \log B$ (см. (21)), видим, что выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \log |f_m^{(I)}(l)| &\leq \log(\max p(\vec{\lambda})) + \left(1.368 + \frac{8.011}{n+1}\right) T \hat{\rho} \log B \\ &\quad + \frac{33.447}{10^3(n+1)} \frac{|l|}{2^I} \cdot 2^{-n/\varkappa} T - 2(n+5)2^n SD. \end{aligned}$$

Из этого неравенства оба утверждения леммы получаются, если учесть оценки снизу для $\log |f^{(I)}(s)|$ и $\log |f^{(I)}(s/2)|$ (см. (59) и (63) соответственно) и воспользоваться леммой 9 для оценки $h(p(\vec{\lambda}))$. Лемма доказана.

§ 13. Конечные произведения Бляшке

Конечное произведение Бляшке будет применяться в следующем параграфе при экстраполяции. Использование этой техники обусловлено необходимостью получить наилучшие по возможности константы.

Пусть $R > 0$, а k – целое число с условием $|k| < R$. Рассмотрим следующее выражение:

$$\beta(z; k) = \frac{R(z - k)}{R^2 - kz},$$

это отображение римановой сферы на себя, которое переводит круг $|z| \leq R$ в круг $|z| \leq 1$, при этом окружность $|z| = R$ переходит в окружность $|z| = 1$.

Для любого такого ψ , что $0 < \psi < \frac{1}{2}$, и для любого целого X с условием $0 < X \leq R - \psi$ определим произведение Бляшке формулой

$$B(z; X) = \prod_{|k| \leq X} \beta(z; k),$$

где произведение берется по всем целым k , удовлетворяющим указанному условию.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Отметим, что вследствие определения $B(z; X)$ на окружности $|z| = R$ выполнено равенство $|B(z; X)| = 1$.

Доказательство следующей леммы можно найти, например, в [10, § 18].

ЛЕММА 13. Пусть R, ψ – положительные действительные числа, а X – целое число такие, что $0 < X \leq R - \psi$ и $0 < \psi < 1/2$. Тогда для любого комплексного x выполнено

$$|B(x; X)| \leq \left(\frac{\max(|x|, X)}{R} \right)^{2X+1}.$$

Для любого целого числа l такого, что $|l| \leq X$, определим окружность C_l равенством $|z - l| = \psi$. Тогда для $z \in C_l$ и любого комплексного x выполняется оценка

$$\left| \frac{B(x; X)}{B(z; X)} \right| \leq (2\pi\psi)^{-1} (1 - \psi)^{-2} X^2 e^{2X} \left(\max \left(1, \frac{|x|}{X} \right) \right)^{2X+1}.$$

Предположим теперь, что X не только целое положительное, но еще и четное число. Определим произведение Бляшке со штрихом следующей формулой:

$$B'(z; X) = \prod'_{|k| < X} \beta(z; k),$$

причем $\prod'$ означает, что произведение берется только по целым нечетным k . Доказательство следующей леммы также можно найти в [10, § 18].

ЛЕММА 14. Пусть выполнены все условия леммы 13, при этом X – четное число, а l – нечетное целое. Тогда при аналогичном определении окружности C_l для любого $z \in C_l$ и любого комплексного x выполняются оценки

$$|B'(x; X)| \leq \left(\frac{\max(|x|, X)}{R} \right)^X,$$

$$\left| \frac{B'(x; X)}{B'(z; X)} \right| \leq (4\pi\psi)^{-1} \left(1 - \frac{\psi}{2} \right)^{-2} X^2 e^X \left(\max\left(1, \frac{|x|}{X} \right) \right)^X,$$

причем оба произведения Бляшке по-прежнему берутся относительно параметра R .

§ 14. Индуктивный процесс экстраполяции

ЛЕММА 15. Пусть $T^{(I)} = \left[\frac{2.89}{2 \cdot 2^I} D \right]$, $S^{(I)} = \left\lceil \frac{2.89SD}{2(T^{(I)}+1)} \right\rceil$ и $0 \leq I \leq I_0$. Тогда для $|s| \leq 2^j S^{(I)}$ и для $\vec{t} = (t_0, t_1, \dots, t_{r-1})$ таких, что

$$t_0 + t_1 + \dots + t_{r-1} \leq 2.89D(n+1) \left(\left(\frac{1}{2^I} - \frac{j}{2 \cdot 2^I(n+1)} \right) + \frac{1}{30n^2} \right),$$

$$j = 1, \dots, n,$$

выполнены равенства

$$Q^{(I)}(s, \alpha_1^s, \dots, \alpha_n^s; \vec{t}) = g^{(I)}(s; \vec{t}) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенства $Q^{(I)} = g^{(I)}$ выполнены по определению функций g , поэтому доказывать следует только равенство нулю значений этих функций. Лемма выполнена для $j = 0$, $I = 0$ вследствие леммы 9, равенства $g^{(0)}(s; \vec{t}) = g(s; \vec{t}) = Q(s, \alpha_1^s, \dots, \alpha_n^s; \vec{t})$ (см. определение g в § 10) и неравенства $S^{(0)} \leq \lceil S \rceil = S$. Доказательство леммы будем вести индукцией по j и I . Сначала мы докажем, что если утверждение леммы выполнено для $0 \leq j \leq n-1$ и некоторого I , то оно выполнено и для $j+1$ и I ; затем мы докажем (см. леммы 16 и 17), что если лемма верна для $j = n$ и некоторого I , то она верна и для $j = 1$ и $I+1$.

Таким образом, предположим, что лемма верна для $j = J \leq n-1$ и некоторого I , и докажем ее для $j = J+1$ и этого же I . Из нашего предположения следует, что $g^{(I)}(s; \vec{t}) = 0$ для $|s| \leq S' = 2^J S^{(I)}$ и

$$t_0 + t_1 + \dots + t_{r-1} \leq 2.89D(n+1) \left(\left(\frac{1}{2^I} - \frac{J}{2 \cdot 2^I(n+1)} \right) + \frac{1}{30n^2} \right).$$

Предположим также, что существуют целое s , $S' < |s| \leq 2S'$, и вектор $\vec{t} = (t_0, \dots, t_{r-1})$, $t_0 + \dots + t_{r-1} \leq 2.89D(n+1) \left(\left(\frac{1}{2^I} - \frac{J+1}{2 \cdot 2^I(n+1)} \right) + \frac{1}{30n^2} \right)$, такие,

что утверждение леммы для них не выполнено, т. е. для этих величин $g^{(I)}(s; \vec{t})$ не равно нулю. Зафиксируем данные s и $\vec{t}$, и в дальнейшем, если не оговорено противное, под s и $\vec{t}$ будем подразумевать именно эти значения. Для удобства обозначений определим $T' = T^{(I)}$. Отметим также, что выполнено неравенство

$$S^{(I)} \leq \left\lceil \frac{2.89SD}{2 \cdot \frac{2.89D}{2 \cdot 2^I}} \right\rceil = \lceil 2^I S \rceil = 2^I S.$$

Пусть $F(z) = (B(z; S'))^{T'+1}$, где $B(z; S')$ – произведение Бляшке, определенное в § 13 с $R = 28 \cdot 2^{n/\varkappa} S'$. Рассмотрим интеграл

$$V = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f^{(I)}(z) dz}{(z-s)F(z)}, \quad (75)$$

где окружность C определяется равенством $|z| = R = 28 \cdot 2^{n/\varkappa} S'$, а $f^{(I)}(z) = f^{(I)}(z; \vec{t})$. По интегральной теореме Коши выполнено равенство

$$V - V_1 = \frac{f^{(I)}(s)}{F(s)}. \quad (76)$$

Здесь

$$V_1 = \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=-S'}^{S'} \sum_{m=0}^{T'} f_m^{(I)}(l) \int_{C_l} \frac{(z-l)^m dz}{(z-s)F(z)}. \quad (77)$$

Окружности C_l определены равенством $|z-l| = \psi$, $0 < \psi < 1/2$, число ψ мы определим немного позже.

Докажем, что из предположения $g^{(I)}(s; \vec{t}) \neq 0$ вытекает, что $|V|$ и $|V_1|$ меньше, чем $\frac{1}{2}|f^{(I)}(s)/F(s)|$. Это противоречит равенству (76).

Прежде всего отметим, что из замечания 7 следует, что для z , лежащих на C , мы имеем $|F(z)| = 1$, и для этих z выполнено $|z-s| \geq (28 \cdot 2^{n/\varkappa} - 2)S'$ (так как $|s| \leq 2S'$). Отсюда и из (75) следует неравенство

$$|V| \leq 2 \sup_{z \in C} f^{(I)}(z). \quad (78)$$

Первое неравенство леммы 13 с учетом того, что $R = 28 \cdot 2^{n/\varkappa} S'$, $X = S'$, а $S' < |s| \leq 2S'$, дает оценку

$$\log|F(s)| \leq -(2S' + 1)(T' + 1) \log(14 \cdot 2^{n/\varkappa}) \leq -\left(\frac{2n}{\varkappa} + 7.626\right) 2^J SD. \quad (79)$$

Последнее неравенство в (79) выполнено, так как $S'(T' + 1) \geq 1.445 \cdot 2^J SD$. Далее, из леммы 11, используя тот факт, что $|z| \leq 28 \cdot 2^{n/\varkappa} S'$, $|s| \leq 2S'$ и $S' = 2^J S^{(I)} \leq 2^J \cdot 2^I S$, мы находим

$$\begin{aligned} \log \left| \frac{f^{(I)}(z)}{f^{(I)}(s)} \right| &\leq \left(1.477 + \frac{9.54}{n+1} \right) dT \hat{\rho} \log B + \frac{2nS'D}{2^I \varkappa} + \frac{0.937}{2^I(n+1)} S'T \\ &\leq \left(1.477 + \frac{9.54}{n+1} \right) dT \hat{\rho} \log B + \frac{2n2^J SD}{\varkappa} + \frac{0.937}{n+1} \cdot 2^J ST. \end{aligned} \quad (80)$$

При этом мы использовали неравенство $1 \leq \varkappa$. Из (80), (78) и (79), используя неравенства $T \log B \leq 2.89nD \log B + 2.963D \log B$, $\frac{T}{n+1} \leq 2.915D$ и $S \geq (0.9n + 7.14)d\hat{\rho} \log B$ (см. (21)), получаем

$$\log \left| \frac{F(s)V}{f^{(I)}(s)} \right| \leq (6.73n + 52 - 6.8n - 54)dD\hat{\rho} \log B < \log \frac{1}{2}.$$

Таким образом, неравенство $|V| < \frac{1}{2}|f^{(I)}(s)/F(s)|$ доказано.

Перейдем к оценке $|V_1|$. Как уже отмечалось, для получения противоречия с (76) необходимо доказать неравенство $|V_1| < \frac{1}{2}|f^{(I)}(s)/F(s)|$. Для z , принадлежащих окружности C_l (для l из промежутка $-S' \leq l \leq S'$; см. (77)), выполняется $|z - l| = \psi$ и $|z - s| \geq 1 - \psi$ (по определению C_l и в силу $S' < |s| \leq 2S'$). Используя эти замечания, находим оценку

$$\left| \int_{C_l} \frac{(z-l)^m dz}{(z-s)F(z)} \right| \leq 2\pi\psi^{m+1}(1-\psi)^{-1} \sup_{z \in C_l} (|F(z)|^{-1}). \quad (81)$$

Отсюда, используя второе неравенство леммы 13 и учитывая, что в нашем случае $X = S'$, $|s| \leq 2S'$, получаем, что справедливо неравенство

$$\left| \int_{C_l} \frac{(z-l)^m dz}{(z-s)F(z)} F(s) \right| \leq (2\pi)^{-T'} \psi^{m-T'} (1-\psi)^{-2T'-3} ((S')^2 e^{2S'} 2^{2S'+1})^{T'+1}.$$

Используя (77) и неравенство $\sum_{m=0}^{T'} \psi^{m-T'} = \frac{\psi^{-T'} - \psi}{1-\psi} \leq \frac{\psi^{-T'}}{1-\psi}$, мы можем написать следующую оценку:

$$|F(s)V_1| \leq (2S' + 1)(S'(2e)^{S'})^{2(T'+1)} \max |f_m^{(I)}(l)| \cdot q. \quad (82)$$

Здесь максимум берется по всем целым l и m с условиями $|l| \leq S'$, $0 \leq m \leq T'$, а $q = \pi^{-(T'+1)} \psi^{-T'} (1-\psi)^{-2(T'+2)}$. Выбирая $\psi = 1/3$, получаем

$$q \leq \frac{3}{4} \left(\frac{27}{4\pi} \right)^{T'+1}.$$

И наконец, вследствие того, что $S' = 2^J S^{(I)} \geq 151$ (см. (21)), выполнено неравенство $\log q \leq 0.007 S'(T' + 1)$. Поскольку $S' \geq 151$ и $T' \geq 0$, то в неравенстве (82) логарифм величины, зависящей от S' , оценивается сверху:

$$\begin{aligned} \log((2S' + 1)(S'(2e)^{S'})^{2(T'+1)}) &\leq \left(2 \log(2e) + \frac{2 \log S'}{S'} + \frac{\log(2S' + 1)}{S'(T' + 1)} \right) S'(T' + 1) \\ &\leq 3.5 S'(T' + 1) \leq 3.5 \cdot 2^J \left(\frac{2.89}{2} (S + 1.0001) D \right). \end{aligned} \quad (83)$$

Последнее неравенство в (83) выполнено, так как

$$\begin{aligned} S'(T' + 1) &\leq 2^J \left(\frac{2.89}{2} SD + T' + 1 \right) \leq 2^J \left(\frac{2.89}{2} SD + \frac{2.89}{2 \cdot 2^I} D + 1 \right) \\ &\leq 2^J \left(\frac{2.89}{2} (S + 1.0001) D \right). \end{aligned}$$

В силу леммы 12, полагая в ней $T'' = T - T'$ и используя $|l| \leq S' \leq 2^J \cdot 2^I S \leq 2^{n-1} \cdot 2^I S$, $|s| \leq 2S'$, $2^{-n/\kappa} \leq 1/2$ и $\kappa \geq 1$, получаем оценку

$$\begin{aligned} \log \left| \frac{f_m^{(I)}(l)}{f^{(I)}(s)} \right| &\leq \left(1.6 + \frac{12.78}{n+1} \right) dT \hat{\rho} \log B \\ &\quad + \frac{33.447 \cdot 2^{n-1}}{10^3(n+1)2} ST + 2^n n SD - 2(n+5)2^n SD. \end{aligned} \quad (84)$$

Используя (84), а также (82), (83), оценку $\log q$ и неравенства $\frac{T}{n+1} \leq 2.915D$, $S \geq (0.9n + 7.14)d\hat{\rho} \log B$, $T \log B \leq 2.89nD \log B + 2.963D \log B$ и $S + 1.0001 \leq (0.9n + 7.258)d\hat{\rho} \log B$ (см. (21)), получаем

$$\log \left| \frac{F(s)V_1}{f^{(I)}(s)} \right| \leq (5n + 50 - 9n - 71) \cdot 2^n dD\hat{\rho} \log B < \log \frac{1}{2}.$$

Отсюда следует необходимое нам неравенство $|V_1| < \frac{1}{2}|f^{(I)}(s)/F(s)|$. Таким образом, мы доказали, что если лемма верна для $j = J \leq n - 1$ и некоторого I , то она верна и для $j = J + 1$ и этого же I .

ЛЕММА 16. Если лемма 15 верна для $j = n$ и некоторого I , то для $|s| \leq 2S^{(I+1)}$, $s \equiv 1 \pmod{2}$, и для $\vec{t} = (t_0, t_1, \dots, t_{r-1})$ такого, что $t_0 + t_1 + \dots + t_{r-1} \leq 2.89D(n+1)(\frac{1}{2^{I+1}} + \frac{1}{30n^2})$, выполнены равенства

$$g^{(I)}(s/2; \vec{t}) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S' и T' – такие же, как в предыдущем рассуждении для $J = n$ (а именно, $S' = 2^n S^{(I)}$, $T' = T^{(I)}$, $R = 14 \cdot 2^{n/\varkappa} S'$ и $F(z) = (B(z; S'))^{T'+1}$). Определим интегралы

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f^{(I)}(z) dz}{(z - \frac{s}{2})F(z)}, \\ V_1 &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=-S'}^{S'} \sum_{m=0}^{T'} f_m^{(I)}(l) \int_{C_l} \frac{(z-l)^m dz}{(z - \frac{s}{2})F(z)}. \end{aligned} \quad (85)$$

Для величин V и V_1 верно равенство

$$V - V_1 = \frac{f^{(I)}(\frac{s}{2})}{F(\frac{s}{2})}. \quad (86)$$

Как и в доказательстве леммы 15, предполагая, что существуют нечетное целое s и вектор $\vec{t} = (t_0, \dots, t_{r-1})$, удовлетворяющие условиям леммы и такие, что $g^{(I)}(\frac{s}{2}; \vec{t}) \neq 0$, фиксируем эти величины и докажем, что V и V_1 по модулю меньше, чем $|\frac{1}{2}f^{(I)}(\frac{s}{2})/F(\frac{s}{2})|$, и, тем самым, придем к противоречию с равенством (86).

Аналогично (78) находим

$$|V| \leq 2 \sup_{|z|=R} f^{(I)}(z). \quad (87)$$

Из первого неравенства леммы 13 с $X = S'$ и $R = 14 \cdot 2^{-n/\varkappa} S'$, поскольку $\frac{|s|}{2} \leq S^{(I+1)} \leq 2^n S^{(I)} = S'$, имеем

$$\log \left| F\left(\frac{s}{2}\right) \right| \leq -(T' + 1)(2S' + 1) \log(14 \cdot 2^{-n/\varkappa}) \leq -\left(\frac{2n}{\varkappa} + 7.626\right) 2^n SD. \quad (88)$$

Последнее неравенство в (88) выполнено, так как $S'(T' + 1) \geq 1.445 \cdot 2^n SD$. Далее, из леммы 11, учитывая, что в нашем случае $|z| = 14 \cdot 2^{-n/\varkappa} S'$, $|\frac{s}{2}| \leq S^{(I+1)} \leq 2^{I+1} S$ и $S' = 2^n S^{(I)} \leq 2^n \cdot 2^I S$, выводим следующую оценку:

$$\log \left| \frac{f^{(I)}(z)}{f^{(I)}(s/2)} \right| \leq 2^n \left(1.477 + \frac{9.54}{n+1} \right) dT\hat{\rho} \log B + 2^n \frac{2nSD}{\varkappa} + \frac{0.937}{n+1} 2^n ST. \quad (89)$$

При этом мы еще использовали неравенства $1 \leq \varkappa$ и $S' = 2^n S^{(I)} \leq 2^n \cdot 2^I S$. Применим (87)–(89) с учетом $T \log B \leq 2.89nD \log B + 2.963D \log B$, $\frac{T}{n+1} \leq 2.915D$ и $S \geq (0.9n + 7.14)d\hat{\rho} \log B$, получаем

$$\log \left| \frac{F(s/2)V}{f^{(I)}(s/2)} \right| \leq 2^n(6.73n + 52 - 6.8n - 54)dD\hat{\rho} \log B < \log \frac{1}{2}.$$

Таким образом, мы доказали, что $|V| < \frac{1}{2} \left| f^{(I)}\left(\frac{s}{2}\right) / F\left(\frac{s}{2}\right) \right|$.

Рассмотрим теперь сумму V_1 (см. (85)). В случае $z \in C_l$ мы имеем $|z - \frac{s}{2}| \geq \frac{1}{2} - \psi$ (напомним, что s нечетно, а окружности C_l определены равенствами $|z - l| = \psi$, $0 < \psi < \frac{1}{2}$). Используя это замечание, видим, что выполнена оценка

$$\left| \int_{C_l} \frac{(z - l)^m dz}{(z - \frac{s}{2})F(z)} \right| \leq 2\pi\psi^{m+1} \left(\frac{1}{2} - \psi \right)^{-1} \sup_{z \in C_l} (|F(z)|^{-1}).$$

Отсюда, используя второе неравенство леммы 13 и учитывая, что в нашем случае $X = S' = 2^n S^{(I)} \geq 4S^{(I)}$ и $|s/2| \leq S^{(I+1)} \leq 4S^{(I)}$, получаем

$$\left| \int_{C_l} \frac{(z - l)^m dz}{(z - \frac{s}{2})F(z)} F\left(\frac{s}{2}\right) \right| \leq \frac{(2\pi)^{-T'} \psi^{m-T'} (1 - \psi)^{-2T'-2} ((S')^2(e)^{2S'})^{T'+1}}{\left(\frac{1}{2} - \psi\right)}.$$

Далее, используя (85) и неравенство $\sum_{m=0}^{T'} \psi^{m-T'} = \frac{\psi^{-T'} - \psi}{1 - \psi} \leq \frac{\psi^{-T'}}{1 - \psi}$, мы можем выписать следующую оценку:

$$\left| F\left(\frac{s}{2}\right) V_1 \right| \leq (2S' + 1)(S'(e)^{S'})^{2(T'+1)} \max |f_m^{(I)}(l)| \cdot q, \quad (90)$$

где максимум берется по всем целым l и m из промежутков $|l| \leq S'$, $0 \leq m \leq T'$ (см. (85)), а

$$q = (2\pi)^{-T'} \psi^{-T'} (1 - \psi)^{-2T'-3} \left(\frac{1}{2} - \psi \right)^{-1}.$$

Снова выбираем $\psi = 1/3$. Так как $S' = 2^n S^{(I)} \geq 600$ (см. (21)), то выполнено неравенство $\log q \leq 0.002S'(T' + 1)$. Логарифм величины в равенстве (90), зависящей от S' , оценивается сверху:

$$\begin{aligned} \log((2S' + 1)(S'(e)^{S'})^{2(T'+1)}) &\leq \left(2 \log e + \frac{2 \log S'}{S'} + \frac{\log(2S' + 1)}{S'(T' + 1)} \right) S'(T' + 1) \\ &\leq 2.04S'(T' + 1) \leq 2.04 \cdot 2^n \left(\frac{2.89}{2} (S + 1.0001)D \right). \end{aligned} \quad (91)$$

Последнее неравенство в (91) выполнено, так как

$$\begin{aligned} S'(T' + 1) &\leq 2^n \left(\frac{2.89}{2} SD + T' + 1 \right) \leq 2^n \left(\frac{2.89}{2} SD + \frac{2.89}{2 \cdot 2^I} D + 1 \right) \\ &\leq 2^n \left(\frac{2.89}{2} (S + 1.0001)D \right). \end{aligned}$$

Используя второе неравенство леммы 12, полагая при этом $T'' = T - T'$ и используя $|l| \leq S' = 2^n S^{(I)} \leq 2^n \cdot 2^I S$, $|s/2| \leq S^{(I+1)} \leq 2^{I+1} S$, $2^{-n/\varkappa} \leq 1/2$ и $\varkappa \geq 1$, получаем оценку

$$\begin{aligned} \log \left| \frac{f_m^{(I)}(l)}{f^{(I)}(s/2)} \right| &\leq \left(1.6 + \frac{12.78}{n+1} \right) 2^n dT\hat{\rho} \log B + \frac{2^n \cdot 33.447}{2 \cdot 10^3(n+1)} ST \\ &\quad + 2^{n+1} nSD - 2(n+5)2^n SD. \end{aligned} \quad (92)$$

Используя (92), а также (91), оценку для $\log q$ и неравенства $\frac{T}{n+1} \leq 2.915D$, $T \log B \leq 2.89nD \log B + 2.963D \log B$, $S \geq (0.9n + 7.14)d\hat{\rho} \log B$ и $S + 1.0001 \leq (0.9n + 7.258)d\hat{\rho} \log B$, получаем

$$\log \left| \frac{F(s/2)V_1}{f^{(I)}(s/2)} \right| \leq (7.5n + 65 - 9n - 71)2^n dD\hat{\rho} \log B < \log \frac{1}{2}. \quad (93)$$

Отсюда следует, что $|V_1| < \frac{1}{2} |f^{(I)}(\frac{s}{2})/F(\frac{s}{2})|$. Лемма полностью доказана.

ЛЕММА 17. Если лемма 15 верна для $j = n$ и некоторого I , то она верна и для $j = 1$ и $I + 1$, т.е. для $|s| \leq 2S^{(I+1)}$ и для $\vec{t} = (t_0, t_1, \dots, t_{r-1})$ такого, что $t_0 + t_1 + \dots + t_{r-1} \leq 2.89D(n+1)((\frac{1}{2^{I+1}} - \frac{1}{2 \cdot 2^{I+1}(n+1)}) + \frac{1}{30n^2})$, выполнены равенства

$$g^{(I+1)}(s; \vec{t}) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку предположения этой леммы и леммы 16 совпадают, мы можем считать доказанными равенства $g^{(I)}(s/2; \vec{t}) = 0$ для целых s и $\vec{t} = (t_0, \dots, t_{r-1})$, удовлетворяющих условию леммы 16. По определению (см. § 10) имеем $g^{(I)}(z/2; \vec{t}) = Q^{(I)}(z/2, \alpha_1^{z/2}, \dots, \alpha_n^{z/2}; \vec{t})$, следовательно, для функций $Q^{(I)}$ при тех же самых s и $\vec{t}$ выполнены те же равенства:

$$Q^{(I)}(s/2, \alpha_1^{s/2}, \dots, \alpha_n^{s/2}; \vec{t}) = 0. \quad (94)$$

Из (37) следует, что для $Q^{(I)}$ верны следующие разложения:

$$Q^{(I)}(s/2, \alpha_1^{s/2}, \dots, \alpha_n^{s/2}; \vec{t}) = \sum_{i=1}^{2^r} Q_i^{(I)}(s/2, \alpha_1^{s/2}, \dots, \alpha_n^{s/2}; \vec{t}).$$

Для $Q_i^{(I)}$ из правой части этого равенства выполнены формулы (38) при замене Y_0 на $s/2$ и Y_i на $\alpha_i^{s/2}$. Каждое выражение вида $\alpha_1^{\lambda_1 s/2^I} \dots \alpha_n^{\lambda_n s/2^I}$, $\vec{\lambda} \in \Omega_I(\Upsilon)_i$, в этих формулах можно переписать следующим образом:

$$\alpha_1^{-s\mu_1/2^I} \dots \alpha_n^{-s\mu_n/2^I} \hat{\alpha}_1^{\hat{s}\hat{\lambda}_1/2^I} \dots \hat{\alpha}_n^{\hat{s}\hat{\lambda}_n/2^I}$$

(определение $\hat{\alpha}_i$ см. в (60), а определение $\vec{\mu}_I = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ см. в (52)). Из определения $\hat{\alpha}_i$ следует, что $\hat{\lambda}_i \in \mathbb{Z}$. Более того, так как $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Omega_I(\Upsilon)_i$ в (38), то для любых векторов $\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2 \in \Omega_I(\Upsilon)_i$ выполнено $\vec{\lambda}_1 - \vec{\lambda}_2 \in 2^{I+1}\Upsilon$. Отсюда несложно получить, что для соответствующих им $\vec{\lambda}_1$ и $\vec{\lambda}_2$ выполнено $\vec{\lambda}_1 - \vec{\lambda}_2 \in 2^{I+1}\mathbb{Z}^n$, причем для разных i векторы из $\Omega_I(\Upsilon)_i$ не сравнимы по модулю решетки $2^{I+1}\mathbb{Z}^n$. Отсюда следует, что функции $Q_i^{(I)}$, $i = 1, \dots, n$, можно записать в виде

$$Q_i^{(I)}(Y_0, Y_1, \dots, Y_n; \vec{t}) = \alpha_1^{-s\mu_1/2^I} \dots \alpha_n^{-s\mu_n/2^I} \left(\rho^{2T} \sum_{\lambda_0=0}^{D_0} \sum_{\vec{\lambda}} p(\vec{\lambda}) \Pi(\vec{t}) \right. \\ \left. \times \Theta \left(\frac{2^{I_0} s}{2^{I+1}}, \vec{t} \right) \hat{\alpha}_1^{(\hat{\lambda}_1 - \delta_{i1}) \frac{s}{2^{I+1}}} \dots \hat{\alpha}_n^{(\hat{\lambda}_n - \delta_{in}) \frac{s}{2^{I+1}}} \right) \hat{\alpha}_1^{\delta_{i1}} \dots \hat{\alpha}_n^{\delta_{in}},$$

где $\vec{\delta}_i = (\delta_{i1}, \dots, \delta_{in}) \in \{0, 1\}^n$ – различные при разных i , $\hat{\lambda}_j - \delta_{ij} \in 2^{I+1}\mathbb{Z}$ и вектор $\vec{\mu}_I = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ не зависит от i . Выражение, записанное в скобках,

принадлежит полю $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. В работе [8, § 18] доказано, что числа $\hat{\alpha}_1^{\delta_{i1}} \dots \hat{\alpha}_n^{\delta_{in}}$ при указанных $\vec{\delta}_i$ линейно независимы над полем $\mathbb{K}$. Отсюда и из (94) следует выполнение равенств

$$Q_i^{(I)}(s/2, \alpha_1^{s/2}, \dots, \alpha_n^{s/2}; \vec{t}) = 0$$

для s и $\vec{t}$, указанных в лемме 16 и всех i . Из определения (см. (39)) следует, что для некоторого $1 \leq j \leq 2^r$ выполнено

$$Q^{(I+1)}(s, \alpha_1^s, \dots, \alpha_n^s; \vec{t}) = Q_j^{(I)}(s/2, \alpha_1^{s/2}, \dots, \alpha_n^{s/2}; \vec{t}).$$

Следовательно, для s и $\vec{t}$, указанных в лемме 16, выполнены равенства

$$Q^{(I+1)}(s, \alpha_1^s, \dots, \alpha_n^s; \vec{t}) = g^{(I+1)}(s; \vec{t}) = 0. \quad (95)$$

Таким образом, мы установили выполнение (95) для s и $\vec{t}$, указанных в лемме 16, т. е. для целых нечетных s , $|s| \leq 2S^{(I+1)}$, и целых векторов $\vec{t}$ с условием $t_0 + t_1 + \dots + t_{r-1} \leq 2.89D(n+1)\left(\frac{1}{2^{I+1}} + \frac{1}{30n^2}\right)$. Это доказывает утверждение леммы для нечетных s .

Докажем лемму для четных s . Предположим противное: существуют некоторое целое четное s , $|s| \leq 2S^{(I+1)}$, и целочисленный вектор $\vec{t}$, удовлетворяющий условию леммы, такие, что

$$g^{(I+1)}(s; \vec{t}) \neq 0.$$

Докажем, что такое предположение ведет к противоречию. Зафиксируем эти величины s и $\vec{t}$. Аналогично предыдущему определим $S' = S^{(I+1)}$, $T' = T^{(I+1)}$ и рассмотрим интеграл

$$V = V(F', f^{(I+1)}, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f^{(I+1)}(z) dz}{(z-s)F'(z)}. \quad (96)$$

Здесь $F'(z) = (B'(z; 2S'))^{T'+1}$, а $B'(z; X)$ – штрихованное произведение Бляшке, определенное в § 13; наконец, параметр R , присутствующий в определении произведения Бляшке, выбирается так: $R = 28 \cdot 2^{n/\kappa} S'$. Окружность C определяется равенством $|z| = R$. Пусть

$$V_1 = \frac{1}{2\pi i} \sum'_{l=-2S'}^{2S'} \sum_{m=0}^{T'} f_m^{(I+1)}(l) \int_{C_l} \frac{(z-l)^m dz}{(z-s)F'(z)}. \quad (97)$$

Штрих в сумме по l означает, что суммирование ведется только по нечетным целым l из интервала суммирования. Окружности C_l определяются равенствами $|z-l| = \psi$, число $\psi < \frac{1}{2}$ выберем чуть позднее.

Вследствие теоремы Коши о вычетах из (96) и (97) следует, что

$$V - V_1 = \frac{f^{(I+1)}(s)}{F'(s)}. \quad (98)$$

Как и ранее, мы докажем, что $|V|$ и $|V_1|$ строго меньше, чем $\frac{1}{2} \left| \frac{f^{(I+1)}(s)}{F'(s)} \right|$, что будет противоречить равенству (98), и, тем самым, мы докажем лемму. Далее в сжатом виде приводятся рассуждения, неоднократно уже нами проводимые. Из определения V следует, что

$$|V| \leq 2 \sup_{|z|=R} |f^{(I+1)}(z)|. \quad (99)$$

Из первого неравенства леммы 14 с учетом того, что $R = 28 \cdot 2^{n/\varkappa} S'$, $X = 2S'$, а $|s| \leq 2S'$, получаем

$$\log |F'(s)| \leq -2S'(T' + 1) \log(14 \cdot 2^{n/\varkappa}) \leq -\left(\frac{2n}{\varkappa} + 7.626\right) SD. \quad (100)$$

Последнее неравенство в (100) выполнено, так как $S'(T' + 1) \geq 1.445SD$. Из леммы 11, учитывая, что $|z| \leq 28 \cdot 2^{n/\varkappa} S'$, $|s| \leq 2S'$ и $S' \leq 2^{I+1}S$, получаем

$$\log \left| \frac{f^{(I+1)}(z)}{f^{(I+1)}(s)} \right| \leq \left(1.477 + \frac{9.54}{n+1}\right) dT\hat{\rho} \log B + \frac{2nSD}{\varkappa} + \frac{0.937}{(n+1)} ST. \quad (101)$$

Из (99)–(101) в силу неравенств $T \log B \leq 2.89nD \log B + 2.963D \log B$, $\frac{T}{n+1} \leq 2.915D$ и $S \geq (0.9n + 7.14)d\hat{\rho} \log B$ следует, что

$$\log \left| \frac{F'(s)V}{f^{(I+1)}(s)} \right| \leq (6.73n + 52 - 6.8n - 54)dD\hat{\rho} \log B < \log \frac{1}{2}.$$

Таким образом, мы доказали, что $|V| < \frac{1}{2} |f^{(I+1)}(s)/F'(s)|$.

Теперь нам необходимо получить такое же неравенство, но уже для $|V_1|$. Сделаем это, используя рассуждения, приведенные в доказательстве леммы 15. Подробные рассуждения при оценке модуля произведения $|F'(s)|$ и модуля интеграла по контуру C_l приведены также в доказательстве леммы 15. Вследствие второго неравенства леммы 14 имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_l} \frac{(z-l)^m dz}{(z-s)F'(z)} F'(s) \right| &\leq 2\pi\psi^{m+1}(1-\psi)^{-1} \sup_{z \in C_l} (|F'(z)|^{-1}) \cdot |F'(s)| \\ &\leq q_1(S'^2 e^{2S'})^{T'+1}; \end{aligned} \quad (102)$$

здесь $q_1 = 2\pi^{-T'} \psi^{m-T'}(1-\psi)^{-1}(1-\frac{\psi}{2})^{-2T'-2}$. Из (97) и (102) следует, что

$$|F'(s)V_1| \leq q_1 2S'(S'e^{S'})^{2(T'+1)} \max |f_m^{(I+1)}(l)|. \quad (103)$$

При выборе $\psi = 1/3$ имеем $\log q_1 \leq 0.002S'(T' + 1)$. Для величины из неравенства (103), зависящей от S' , выполнена оценка

$$\log(2S'((S')^2 e^{2S'})^{T'+1}) \leq 2.04S'(T' + 1) \leq 2.04 \left(\frac{2.89}{2}(S + 1.0001)D \right). \quad (104)$$

Последнее неравенство верно вследствие оценки

$$\begin{aligned} S'(T' + 1) &\leq \left(\frac{2.89}{2} SD + T' + 1 \right) \leq \left(\frac{2.89}{2} SD + \frac{2.89}{2 \cdot 2^{I+1}} D + 1 \right) \\ &\leq \left(\frac{2.89}{2} (S + 1.0001)D \right). \end{aligned}$$

Учитывая неравенства $|l| \leq 2S'$, $|s| \leq 2S'$, $S' = S^{(I+1)} \leq 2^{I+1}S$ и используя лемму 12, получаем оценку

$$\begin{aligned} \log \left| \frac{f_m^{(I+1)}(l)}{f^{(I+1)}(s)} \right| &\leq \left(1.6 + \frac{12.78}{n+1}\right) dT\hat{\rho} \log B + \frac{33.447}{10^3(n+1)2} ST \\ &\quad + 2nSD - 2(n+5)2^n SD. \end{aligned} \quad (105)$$

Теперь, собирая вместе (103)–(105), оценку для q_1 и неравенства $\frac{T}{n+1} \leq 2.915D$, $T \log B \leq 2.89nD \log B + 2.963D \log B$, $S \geq (0.9n + 7.14)d\hat{\rho} \log B$ и $S + 1.0001 \leq (0.9n + 7.258)d\hat{\rho} \log B$ (см. (21)), получаем

$$\log \left| \frac{F'(s)V_1}{f^{(I+1)}(s)} \right| \leq (5n + 50 - 9n - 71)2^n dD\hat{\rho} \log B < \log \frac{1}{2}.$$

Отсюда следует необходимое нам неравенство $|V_1| < \frac{1}{2}|f^{(I+1)}(s)/F'(s)|$. Таким образом, получено требуемое противоречие, и тем самым лемма полностью доказана.

§ 15. Последний шаг: использование леммы о нулях

В силу леммы 15 мы имеем функцию

$$Q^{(I_0)}(Y_0, Y_1, \dots, Y_n; \vec{0}) = \sum_{\lambda_0=0}^{D_0} \sum_{\vec{\lambda} \in \Omega_{I_0}(\Upsilon)} p(\vec{\lambda}) \Pi(\vec{0}) \Theta(Y_0, \vec{0}) Y_1^{\lambda_1/2^{I_0}} \dots Y_n^{\lambda_n/2^{I_0}} \neq 0,$$

обращающуюся в нуль во всех точках $(s, \alpha_1^s, \dots, \alpha_n^s)$ с кратностью $t_0 + t_1 + \dots + t_{n-1} \leq 2.89D(n+1)\frac{1}{30n^2}$ по отношению к производным (23).

Множество $\Omega_{I_0}(\Upsilon)$ устроено так, что для любых $\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2 \in \Omega_{I_0}(\Upsilon)$ выполнено $\vec{\lambda}_1/2^{I_0} - \vec{\lambda}_2/2^{I_0} \in \Upsilon \subseteq \Lambda \subseteq \mathbb{Z}^n$ и $|\lambda_i/2^{I_0}| \leq D_i/2^{I_0}$, $i = 1, \dots, n$. Из этого следует, что существует вектор $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ такой, что $|\mu_i| \leq D_i/2^{I_0}$, и если домножить $Q^{(I_0)}$ на $Y_1^{\mu_1/2^{I_0}} \dots Y_n^{\mu_n/2^{I_0}}$ и заменить переменные $Y_0 = Z_0$, $Y_i = Z_i^{\rho}$, $i = 1, \dots, n$, то в результате получится многочлен $R(Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$ такой, что $\deg_{Y_0} R \leq D_0$ и $\deg_{Y_i} R \leq \frac{\rho D_i}{2^{I_0-1}}$, $i = 1, \dots, n$. Определим

$$R(Z_0, Z_1, \dots, Z_n) = Y_1^{\mu_1/2^{I_0}} \dots Y_n^{\mu_n/2^{I_0}} Q^{(I_0)}(Y_0, Y_1, \dots, Y_n) \Big|_{\substack{Y_0=Z_0 \\ Y_i=Z_i^{\rho}}}$$

Благодаря этому равенству, а также в силу (23) многочлен R будет обращаться в нуль в точках $(s, (\alpha_1^{1/\rho})^s, \dots, (\alpha_n^{1/\rho})^s)$ и с той же кратностью, что и $Q^{(I_0)}$. Применим к многочлену R лемму о нулях (лемму 2). Следуя обозначениям леммы 2, положим $S_1 = \left\lceil \frac{2^n S^{(I_0)}}{n+1} \right\rceil$ и $T_1 = \left\lceil \frac{2.89D(n+1)\frac{1}{30n^2}}{n+1} \right\rceil = \left\lceil 2.89D\frac{1}{30n^2} \right\rceil$. Напомним, что по определению $S^{(I_0)} = \left\lceil \frac{2.89SD}{2(T^{(I_0)}+1)} \right\rceil$, где $T^{(I_0)} = \left\lceil \frac{2.89}{2.2^{I_0}} D \right\rceil$. Отсюда видно, что $T^{(I_0)} + 1 \leq \max(1, \frac{2 \cdot 2.89D}{2 \cdot 2^{I_0}})$, следовательно, $S^{(I_0)} \geq \min(SD, 2^{I_0-1}S)$. Отметим, что из определений I_0 и D имеем

$$2^{I_0-1} \geq 2^{9 \log(3nd\rho)-2} > 235n^6 d^6 \rho^6, \quad D > 10n(n+1)(n+8) \frac{(7.86)^r}{r^{0.5}} \frac{2^n d}{\hat{\rho}}$$

вследствие (9) и $n \geq 2$, $r \geq 2$, $\frac{(n+1)^r}{r^r} \geq \frac{9}{4}$. Отсюда следует, что $S^{(I_0)} \geq 235n^4(n+1)d^3 S/\hat{\rho}$. Используя (21) и $n \geq 2$, из этого можно получить важную для дальнейшего оценку

$$\begin{aligned} S_1 &\geq \frac{2^n S^{(I_0)}}{n+1} - 1 \geq 234n^4 2^n d \frac{S}{\hat{\rho}} \geq 210n^4(n+7.935)2^n d^2 \log B \\ &\geq 208n^4(n+8)2^n d^2 \log B. \end{aligned}$$

Чтобы использовать лемму о нулях, необходимо проверить выполнение двух неравенств для параметров, указанных в условиях леммы. В нашем конкретном случае эти неравенства имеют следующий вид:

$$\binom{T_1 + (r_0 + 1)}{r_0 + 1} S_1(n - r_0)! H\left(\Lambda_0; \frac{\rho D_1}{2^{I_0-1}}, \dots, \frac{\rho D_n}{2^{I_0-1}}\right) > (n+1)! D_0 \frac{\rho D_1}{2^{I_0-1}} \cdots \frac{\rho D_n}{2^{I_0-1}} \quad (106)$$

для любых целых решеток Λ_0 ранга r_0 , $0 \leq r_0 \leq n$, и

$$\begin{aligned} & \binom{T_1 + r_0}{r_0} \text{card } E(S_1)(n - r_0)! H\left(\Lambda_0; \frac{\rho D_1}{2^{I_0-1}}, \dots, \frac{\rho D_n}{2^{I_0-1}}\right) \\ & > \frac{(n+1)!}{(n+1-r_0)} \frac{\rho D_1}{2^{I_0-1}} \cdots \frac{\rho D_n}{2^{I_0-1}} \end{aligned} \quad (107)$$

для любых целых решеток Λ_0 ранга r_0 , $1 \leq r_0 \leq n$.

Заметим, что при проверке этих неравенств можно предполагать, что решетка Λ_0 примитивна, т.е. $\Lambda_0 = V_0 \cap \mathbb{R}^n$. Если для решетки Λ_0 это условие не выполнено, то для нее величина $H(\Lambda_0; \frac{\rho D_1}{2^{I_0-1}}, \dots, \frac{\rho D_n}{2^{I_0-1}})$ строго больше, чем аналогичная величина для соответствующей ей примитивной решетки (см. лемму 1), и если для последней неравенства (106) и (107) выполнены, то они тем более выполнены и для Λ_0 .

В неравенстве (107) присутствует величина $\text{card } E(S_1)$. Ввиду замечания 1 выполнено $\text{card } E(S_1) = S_1$. Если мы теперь для оценки D_0 в (106) воспользуемся неравенством $D_0 \leq \frac{1.5D \log B}{\log(3nd)}$ (которое следует из определения D_0), то (107) будет являться следствием (106), поскольку при такой оценке D_0 и вследствие равенства $\text{card } E(S_1) = S_1$ неравенство (107) получается из (106) умножением левой части (106) на величину $\frac{1.5D \log B(r_0+1)(n+1-r_0)}{(T_1+r_0+1) \log(3nd)}$, которая больше 1 (см. (21)). Поэтому достаточно доказать справедливость (106).

Применяя к (106) лемму 3, используя при этом $D_i = 0.5D/(h_i d)$ и учитывая неравенство $\binom{T_1 + (r_0+1)}{r_0+1} \geq \frac{(T_1+1)^{r_0+1}}{(r_0+1)!}$, получим, что (106) выполнено, если выполнено следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \frac{(T_1 + 1)^{r_0+1}}{(r_0 + 1)!} S_1(n - r_0)! \left(\frac{0.5\rho D}{2^{I_0-1}d} \right)^{n-r_0} \frac{H(\Lambda_0^\perp; h_1, \dots, h_n)}{h_1 \cdots h_n} \\ & > \frac{(n+1)!}{h_1 \cdots h_n} \left(\frac{0.5\rho D}{2^{I_0-1}d} \right)^n \frac{1.5D \log B}{\log(3nd)}. \end{aligned}$$

Используя неравенства $d^{r_0} H(\Lambda_0^\perp; h_1, \dots, h_n) \geq 1$ (см. (9)) и $T_1 + 1 \geq \frac{2.89D}{30n^2}$, находим, что (106) выполнено, если выполнено неравенство

$$2^{(I_0-1)r_0} S_1 D \left(\frac{2.89}{30n^2} \right)^{r_0+1} \frac{(n-r_0)!}{(r_0+1)!} > 0.5^{r_0} \rho^{r_0} (n+1)! \frac{1.5D \log B}{\log(3nd)}. \quad (108)$$

Неравенство (108) легко доказать индукцией по $0 \leq r_0 \leq n$. Для $r_0 = 0$ оно выполнено, так как $S_1 \geq 208n^4(n+8)2^n d^2 \log B$.

Для перехода от r_0 к $r_0 + 1$ достаточно левую часть неравенства (108) умножить на $2^{I_0-1} \left(\frac{2.89}{30n^2} \right) \frac{1}{(n-r_0)(r_0+2)} \times \frac{1}{0.5\rho} > 1$, так как $2^{I_0-1} \geq 235n^6 d^6 \rho^6$. Таким образом, мы доказали (106) и (107).

Все условия леммы 2 выполнены, и, следовательно, существует примитивная решетка $\Lambda_1 \subseteq \mathbb{Z}^n$ размерности r_1 , $1 \leq r_1 \leq n$, такая, что $b = (b_1, \dots, b_n) \in \Lambda_1$ и

выполняется одно из двух следующих неравенств:

$$\begin{aligned} & \binom{T_1 + r_1}{r_1} S_1(n - r_1)! H\left(\Lambda_1; \frac{\rho D_1}{2^{I_0-1}}, \dots, \frac{\rho D_n}{2^{I_0-1}}\right) \\ & \leq (n + 1)! D_0 \frac{\rho D_1}{2^{I_0-1}} \dots \frac{\rho D_n}{2^{I_0-1}}, \end{aligned} \quad (109)$$

$$\begin{aligned} & \binom{T_1 + (r_1 - 1)}{r_1 - 1} \text{card } E(S_1)(n - r_1)! H\left(\Lambda_1; \frac{\rho D_1}{2^{I_0-1}}, \dots, \frac{\rho D_n}{2^{I_0-1}}\right) \\ & \leq \frac{(n + 1)!}{(n + 1 - r_1)} \frac{\rho D_1}{2^{I_0-1}} \dots \frac{\rho D_n}{2^{I_0-1}}. \end{aligned} \quad (110)$$

Как отмечалось в § 8, для получения противоречия с (18) необходимо показать, что для решетчатого Λ_1 величина

$$\begin{aligned} & [(5.3)^{\varkappa} n^{\varkappa} (n + 1)(n + 8)^2 (n + 5)(7.86)^{r_1} 4^n d^{r_1+2} (\log B) \\ & \times H(\Lambda_1^{\perp}; h_1, \dots, h_n) \log(3nd)U] \end{aligned}$$

строго меньше, чем аналогичная величина для решетчатого Λ (см. (17)). Для этого достаточно доказать неравенство

$$\begin{aligned} & 0.54(5.3)^{\varkappa} n^{\varkappa} (n + 1)(n + 8)(7.86)^{r_1} 2^n d^{r_1+1} \\ & \times H(\Lambda_1^{\perp}; h_1, \dots, h_n) \log(3nd)U + 1 < D\hat{\rho}. \end{aligned} \quad (111)$$

Ввиду замечания 1 выполнено $\text{card } E(S_1) = S_1$. Если мы опять для оценки D_0 воспользуемся неравенством $D_0 \leq \frac{1.5D \log B}{\log(3nd)}$, то (109) получается из (110) делением левой части (110) на величину $\frac{1.5D \log B r_1 (n+1-r_1)}{(T_1+r_1) \log(3nd)}$, которая больше 1 (см. (21)). Поэтому достаточно разобрать, что происходит, если выполнено (109).

После применения к неравенству (109) леммы 3, используя неравенство $\binom{T_1+r_1}{r_1} \geq \frac{(T_1+1)^{r_1}}{r_1!}$, получаем следствие:

$$\begin{aligned} & \frac{(T_1 + 1)^{r_1}}{r_1!} S_1(n - r_1)! \left(\frac{0.5\rho D}{2^{I_0-1}d} \right)^{n-r_1} \frac{H(\Lambda_1^{\perp}; h_1, \dots, h_n)}{h_1 \dots h_n} \\ & \leq \frac{(n + 1)!}{h_1 \dots h_n} \left(\frac{0.5\rho D}{2^{I_0-1}d} \right)^n \frac{1.5D \log B}{\log(3nd)}. \end{aligned} \quad (112)$$

Используя неравенства $T_1 + 1 \geq \frac{2.89D}{30n^2}$, $\frac{(n+1)!}{(n-r_1)!} \leq (n + 1)n^{r_1}$, $r_1! \leq \frac{3r_1^{r_1+0.5}}{e^{r_1}}$ и домножая обе части неравенства (112) на $(n + 1)^{r_1}$, находим

$$\begin{aligned} & 2^{(I_0-1)r_1} S_1 \left(\frac{2.89e}{30n^2 \cdot 0.5} \right)^{r_1} d^{r_1} H(\Lambda_1^{\perp}; h_1, \dots, h_n) \frac{(n + 1)^{r_1}}{r_1^{r_1+0.5}} \\ & \leq 3\rho^{r_1} (n + 1)n^{r_1} (n + 1)^{r_1} \frac{1.5D \log B}{\log(3nd)}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $S_1 \geq 208n^4(n + 8)2^n d^2 \log B$, получаем

$$\begin{aligned} & 208n^2 2^{(I_0-1)r_1} (0.54(5.3)^{\varkappa} n^{\varkappa} (n + 1)(n + 8)(7.86)^{r_1} 2^n d^{r_1+1} \\ & \times H(\Lambda_1^{\perp}; h_1, \dots, h_n) \log(3nd)U) \leq (5.3)^{\varkappa} \rho^{r_1} 16^{r_1} (n + 1)^2 n^{3r_1} (n + 1)^{r_1} D. \end{aligned}$$

С учетом неравенств $2^{(I_0-1)r_1} > (235)^{r_1} n^{6r_1} d^{6r_1} \rho^{6r_1}$ и $r_1 \geq 1$, $n \geq 2$ отсюда следует (111), так как $\hat{\rho} \geq 1$. Тем самым мы получили противоречие с предположением (18) о малости линейной формы от логарифмов, и, следовательно, теорема 1 полностью доказана.

Список литературы

1. A. Baker, "Linear forms in the logarithms of algebraic numbers. I", *Mathematika*, **13** (1966), 204–216; II, **14** (1967), 102–107; III, **14** (1967), 220–228; IV, **15** (1968), 204–216.
2. Н. И. Фельдман, "Улучшение оценки линейной формы от логарифмов алгебраических чисел", *Матем. сб.*, **77(119):3** (1968), 423–436; англ. пер.: N. I. Fel'dman, "Improved estimate for a linear form of the logarithms of algebraic numbers", *Math. USSR-Izv.*, **6:3** (1968), 393–406.
3. А. О. Гельфонд, "О приближении алгебраическими числами отношения логарифмов двух алгебраических чисел", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **3:5–6** (1939), 509–518.
4. G. Wüstholz, "A new approach to Baker's theorem on linear forms in logarithms. I, II", *Diophantine problems and transcendence theory* (Bonn, 1985), Lecture Notes in Math., **1290**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1987, 189–202, 203–211; III, *New advances in transcendence theory* (Durham, 1986), Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988, 399–410.
5. P. Philippon, M. Waldschmidt, "Lower bounds for linear forms in logarithms", *New advances in transcendence theory* (Durham, 1986), Cambridge Univ. Press., Cambridge, 1988, 280–312.
6. M. Waldschmidt, *Diophantine approximation on linear algebraic groups. Transcendence properties of the exponential function in several variables*, Grundlehren Math. Wiss., **326**, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
7. Е. М. Матвеев, "Явная нижняя оценка однородной рациональной линейной формы от логарифмов алгебраических чисел", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62:4** (1998), 81–136; англ. пер.: E. M. Matveev, "An explicit lower bound for a homogeneous rational linear form in logarithms of algebraic numbers", *Izv. Math.*, **62:4** (1998), 723–772.
8. Е. М. Матвеев, "Явная нижняя оценка однородной рациональной линейной формы от логарифмов алгебраических чисел. II", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **64:6** (2000), 125–180; англ. пер.: E. M. Matveev, "An explicit lower bound for a homogeneous rational linear form in logarithms of algebraic numbers. II", *Izv. Math.*, **64:6** (2000), 1217–1269.
9. А. О. Гельфонд, *Трансцендентные и алгебраические числа*, ГИТТЛ, М., 1952; англ. пер.: A. O. Gelfond, *Transcendental and algebraic numbers*, Dover, New York, 1960.
10. A. Baker, G. Wüstholz, "Logarithmic forms and group varieties", *J. Reine Angew. Math.*, **442** (1993), 19–62.
11. P. Philippon, "Lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs", *Bull. Soc. Math. France*, **114:3** (1986), 355–383; Addendum, **115:3** (1987), 397–398.
12. В. Ходж, Д. Пидо, *Методы алгебраической геометрии*, ИЛ, М., 1954–1955; пер. с англ.: W. V. D. Hodge, D. Pedoe, *Methods of algebraic geometry*, Cambridge Univ. Press, Cambridge; Macmillan, New York, 1947–1954.
13. D. Bertrand, "Duality on tori and multiplicative dependence relations", *J. Aust. Math. Soc. Ser. A*, **62:2** (1997), 198–216.
14. J. D. Vaaler, "A geometric inequality with applications to linear forms", *Pacific J. Math.*, **83:2** (1979), 543–553.

15. J. W. S. Cassels, *An introduction to the geometry of numbers*, Grundlehren Math. Wiss., **99**, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1959.
16. E. Bombieri, J. D. Vaaler, “On Siegel’s lemma”, *Invent. Math.*, **73**:1 (1983), 11–32.
17. Н. И. Фельдман, “О приближении алгебраическими числами логарифмов алгебраических чисел”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **24**:3 (1960), 475–492; англ. пер.: N. I. Fel’dman, “Approximation of the logarithms of algebraic numbers by algebraic numbers”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **58**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1966, 125–142.
18. Н. И. Фельдман, “О мере трансцендентности числа π ”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **24**:2 (1960), 357–368; англ. пер.: N. I. Fel’dman, “On the measure of transcendence of π ”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **58**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1966, 110–124.
19. Е. М. Матвеев, “Об арифметических свойствах значений обобщенных биномиальных многочленов”, *Матем. заметки*, **54**:4 (1993), 76–81; англ. пер.: E. M. Matveev, “On the arithmetic properties of the values of generalized binomial polynomials”, *Math. Notes*, **54**:4 (1993), 1031–1036.
20. М. Вальдшмидт, Ю. В. Нестеренко, “О приближении алгебраическими числами значений экспоненциальной функции и логарифма”, *Матем. записки*, **2**, Наука, М., 1996, 23–41.
21. T. Loher, D. Masser, “Uniformly counting points of bounded height”, *Acta Arith.*, **111**:3 (2004), 277–297.
22. Ю. М. Алексенцев, “Индекс решетки и многочлен Гильберта”, *Матем. заметки*, **80**:3 (2006), 323–327; англ. пер.: Yu. M. Aleksentsev, “Index of lattices and Hilbert polynomials”, *Math. Notes*, **80**:3–4 (2006), 313–317.
23. Е. М. Матвеев, “О последовательных минимумах расширенной логарифмической высоты алгебраических чисел”, *Матем. сб.*, **190**:3 (1999), 89–108; англ. пер.: E. M. Matveev, “On the successive minima of the extended logarithmic height of algebraic numbers”, *Sb. Math.*, **190**:3 (1999), 407–425.
24. R. Tijdeman, “On the equation of Catalan”, *Acta Arith.*, **29**:2 (1976), 197–209.

Ю. М. АЛЕКСЕНЦЕВ (Yu. M. ALEXENCEV)
Московский государственный институт стали и сплавов
(технологический университет)
E-mail: alexencev@mail.ru

Поступило в редакцию
30.01.2006