Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Шашков, Коммутативные однородные пространства с одномерным стабилизатором, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2012, том 76, выпуск 4, 185–206

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7583>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 15:12:57

УДК 512.745.2

С. А. Шашков

Коммутативные однородные пространства с одномерным стабилизатором

Найдены все однородные пространства $X = G/H$ алгебраических групп с одномерным стабилизатором, для которых действие $G : T^*X$ коизотропно (т. е. касательное пространство общей G -орбиты коизотропно).

Библиография: 10 наименований.

Ключевые слова: коммутативные однородные пространства, действия алгебраических групп.

§ 1. Введение

Пусть G – некоторая комплексная алгебраическая группа и H – ее алгебраическая подгруппа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Однородное пространство $X = G/H$ называется *геометрически коммутативным*, если выполнены следующие эквивалентные условия:

- 1) действие $G : T^*X$ коизотропно (т. е. касательное пространство общей G -орбиты коизотропно относительно стандартной симплектической формы);
- 2) поле $\mathbb{C}(T^*X)^G$ инвариантных рациональных функций на кокасательном расслоении T^*X многообразия X коммутативно относительно скобки Пуассона.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Однородное пространство $X = G/H$ называется *алгебраически коммутативным*, если алгебра $\mathbb{C}[T^*X]^G$ инвариантных регулярных функций на T^*X коммутативна относительно скобки Пуассона.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Однородное пространство $X = G/H$ называется *коммутативным*, если алгебра $\mathcal{D}(X)^G$ инвариантных дифференциальных операторов на X коммутативна.

Каждое из перечисленных свойств коммутативности локально, т. е. зависит только от пары алгебр Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Пару алгебр Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ будем называть *коммутативной* (геометрически коммутативной, алгебраически коммутативной), если для некоторых алгебраических групп G и $H \subset G$ таких, что $\mathrm{Lie} G = \mathfrak{g}$ и $\mathrm{Lie} H = \mathfrak{h}$, однородное пространство G/H коммутативно (геометрически коммутативно, алгебраически коммутативно).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-01-00648а), Федерального агентства по науке и инновациям в рамках госконтракта № 02.740.11.5029.

Связь этих свойств однородных пространств изучалась в работах [1]–[4]. При некоторых ограничениях классификации геометрически коммутативных однородных пространств получены в работах [5]–[8]. (В работах [1]–[8] геометрически коммутативные однородные пространства называются *слабо коммутативными*.)

На рис. 1 представлена диаграмма импликаций между свойствами коммутативности, геометрической коммутативности и алгебраической коммутативности.

Рис. 1. Свойства коммутативности однородных пространств

Так, в общем случае из геометрической коммутативности следует алгебраическая коммутативность. Однако обратная импликация неверна: в некоторых случаях, когда орбиты действия $H : (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*$ не разделяются полиномиальными инвариантами, алгебра $\mathbb{C}[T^*X]^G$ слишком мала и только поэтому коммутативна, в то время как пространство X не является геометрически коммутативным. Также не всегда из коммутативности следует геометрическая коммутативность.

Если орбиты действия $H : (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*$ разделяются полиномиальными инвариантами (например, если H не имеет характеров), геометрическая коммутативность эквивалентна алгебраической коммутативности.

Если группа G редуктивна, то коммутативность эквивалентна геометрической коммутативности и оба эти свойства эквивалентны сферичности [1].

В работах [3], [4] в случае унитарной группы G (тогда группа H также унитарна и геометрическая коммутативность эквивалентна алгебраической коммутативности) доказана эквивалентность коммутативности и алгебраической коммутативности.

Пусть N – нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в H . Тогда коммутативность (геометрическая коммутативность, алгебраическая коммутативность) однородного пространства G/H равносильна коммутативности (геометрической коммутативности, алгебраической коммутативности) однородного пространства $(G/N)/(H/N)$. В частности, если группа H нормальна, то любое из этих свойств эквивалентно коммутативности группы G/H , т. е. тому, что группа H содержит коммутант G' группы G .

Если $\text{codim } H < 2$ или $\text{codim } H = 2$ и подгруппа H не нормальна, то однородное пространство G/H всегда коммутативно и геометрически коммутативно (см. лемму 13).

Вероятно, коммутативность эквивалентна алгебраической коммутативности, а из геометрической коммутативности следует коммутативность. Во всяком случае автору не известно никаких контрпримеров.

В случае $\dim H = 1$ на многообразии $X = G/H$ существует инвариантная линейная связность [9], позволяющая установить изоморфизм $\text{gr } \mathcal{D}(X)^G \cong \mathbb{C}[T^*X]^G$. Таким образом, в этом случае из коммутативности следует алгебраическая коммутативность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пара алгебр Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ называется *разложимой*, если алгебра $\mathfrak{g}$ может быть представлена в виде $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ так, чтобы $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ и $\mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{g}_i$. Однородное пространство $X = G/H$ называется *локально разложимым*, если пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ разложима.

Пара алгебр Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1) \oplus (\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$ геометрически коммутативна (коммутативна, алгебраически коммутативна) тогда и только тогда, когда каждая из пар $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$ и $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$ коммутативна (геометрически коммутативна, алгебраически коммутативна).

Классификация геометрически коммутативных однородных пространств с одномерным стабилизатором сводится к классификации неразложимых геометрических коммутативных пар $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, для которых подалгебра $\mathfrak{h}$ не является идеалом алгебры $\mathfrak{g}$.

В § 3 работы даны основные определения и необходимые для дальнейших рассуждений свойства геометрически коммутативных однородных пространств. В § 4 описаны все геометрически коммутативные однородные пространства с одномерным стабилизатором, а именно доказана

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – некоторая комплексная алгебраическая группа и H – ее одномерная алгебраическая подгруппа, причем однородное пространство G/H локально неразложимо. Если алгебра $\mathfrak{h}$ не является идеалом в алгебре $\mathfrak{g}$, то пространство G/H геометрически коммутативно тогда и только тогда, когда пара алгебр Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ находится в табл. 1. (Обозначения $\mathfrak{g}_{5,4}$, $\mathfrak{g}_{6,3}$ и $\mathfrak{g}_{3,1}$ заимствованы из [10].)

В § 5 работы будет показано, что все геометрически коммутативные однородные пространства с одномерным стабилизатором являются коммутативными.

Таблица 1. Неразложимые геометрически коммутативные пары алгебр Ли

№	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$
1	$\mathfrak{n} \not\subset \mathfrak{h}$, идеал $\mathfrak{n}$ коммутативен	
2	$\mathfrak{n} \not\subset \langle a \rangle$, идеал $\mathfrak{n}$ коммутативен	$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{n}$
3	$\mathfrak{g}_{5,4} = \langle x_1, \dots, x_5 \rangle : [x_1, x_2] = x_3, [x_1, x_3] = x_4, [x_2, x_3] = x_5, [x_4, x_i] = [x_5, x_i] = 0$	$\langle x_1 \rangle$ или $\langle x_3 \rangle$
4	$\mathfrak{g}_{6,3} = \langle x_1, \dots, x_6 \rangle : [x_1, x_2] = x_6, [x_1, x_3] = x_4, [x_2, x_3] = x_5, [x_4, x_i] = [x_5, x_i] = [x_6, x_i] = 0$	$\langle x_1 \rangle$
5	$\mathfrak{sl}_2$	любая
6	$\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathbb{C}$	$\mathfrak{h} \not\subseteq \mathbb{C}, \mathfrak{h} \not\subseteq \mathfrak{sl}_2$
7	$\mathfrak{g}_{3,1} \oplus \mathbb{C} = \langle x_1, x_2, x_3, t \rangle : [x_1, x_2] = x_3, [t, x_1] = x_1, [t, x_2] = -x_2, [x_3, x_i] = [x_3, t] = 0$	любая

Автор благодарен Э. Б. Винбергу за постоянное внимание к работе и большое количество ценных замечаний.

§ 2. Некоторые обозначения

Алгебраические группы обозначаются прописными латинскими буквами, а их касательные алгебры – соответствующими строчными готическими буквами: $\mathfrak{g}'$ – коммутант алгебры Ли $\mathfrak{g}$; $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}$ – централизатор подалгебры $\mathfrak{h}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$; $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}$ – централизатор подалгебры $\mathfrak{h}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ в тех случаях, когда понятно, о какой алгебре $\mathfrak{g}$ идет речь; $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}$ – нормализатор подалгебры $\mathfrak{h}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$; $\mathfrak{n}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}$ – нормализатор алгебры $\mathfrak{h}$ в алгебре $\mathfrak{g}$ в тех случаях, когда понятно, о какой алгебре $\mathfrak{g}$ идет речь.

Кроме того, используем следующие обозначения: $N \curvearrowright L$ – полупрямое произведение групп N и L (в котором подгруппа N нормальна); $\mathfrak{n} \not\subset \mathfrak{h}$ – полупрямая сумма алгебр Ли $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{h}$ (в которой подалгебра $\mathfrak{n}$ – идеал); $\langle M \rangle$ – линейная оболочка векторов множества M ; $\mathfrak{h}^\circ$ – аннулятор подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ в сопряженном пространстве $\mathfrak{g}^*$; $\text{Ad}, \text{ad}, \text{Ad}^*, \text{ad}^*$ – присоединенные и коприсоединенные представления группы Ли G и алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$ соответственно; $\xi \cdot \alpha$ – коприсоединенное действие элемента $\xi \in \mathfrak{g}$ на $\alpha \in \mathfrak{g}^*$; TX – касательное расслоение многообразия X ; T^*X – кокасательное расслоение многообразия X .

Пусть $S(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^n(V)$ – симметрическая алгебра пространства V ; $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ – универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$; X^G – подмножество неподвижных точек множества X под действием группы G ; $\mathbb{C}[T^*X]^G$ – алгебра инвариантных регулярных функций на кокасательном расслоении T^*X однородного пространства $X = G/H$; $\mathcal{D}(X)^G$ – алгебра инвариантных дифференциальных операторов на $X = G/H$; $A^\top$ – транспонированная матрица A ; $\text{gr } A$ – градуированная алгебра, соответствующая фильтрованной алгебре A ; $\text{Quot } R$ – поле частных кольца R .

Кроме того, $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2]$ – пространство, порожденное множеством $\{[g_1, g_2] \mid g_1 \in \mathfrak{g}_1, g_2 \in \mathfrak{g}_2\}$; $[[\mathfrak{v}, \mathfrak{w}]]$ – матрица, состоящая из коммутаторов базисных элементов подпространств $\mathfrak{v}$ и $\mathfrak{w}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, рассматриваемых как элементы поля

$\text{Quot}(S(\mathfrak{g})); [[\mathfrak{v}, \mathfrak{w}]]_{\mathfrak{h}}$ – матрица, состоящая из коммутаторов базисных элементов подпространств $\mathfrak{v}$ и $\mathfrak{w}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, рассматриваемых как элементы поля $\text{Quot}(S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})\mathfrak{h}) = \text{Quot}(S(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}))$, где $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ – некоторая подалгебра.

§ 3. Геометрически коммутативные однородные пространства

Пусть $X = G/H$ – однородное пространство алгебраической группы G . На T^*X имеется стандартная симплектическая форма ω . Пусть $U \subset T_x^*X$ – линейное подпространство. Ранг ограничения формы ω на U называется *рангом* подпространства U . Ранг подпространства $U^\perp$ – косоортогонального дополнения к U в смысле формы ω – называется *корангом* подпространства U .

Кокасательное пространство $T_o^*(X)$ в точке $o = eH$ отождествим с $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^* = \mathfrak{h}^\circ$ – аннулятором алгебры $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}^*$. Действие группы H на $T_o^*(X)$ совпадает тогда с ограничением на $\mathfrak{h}^\circ$ коприсоединенного действия группы H на $\mathfrak{g}^*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Однородное пространство $X = G/H$ называется *геометрически коммутативным*, если действие $G : T^*X$ имеет коранг 0, т. е. коранг касательного пространства орбиты общего положения равен нулю. Пару алгебр Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ в этом случае будем также называть *геометрически коммутативной*.

Неравенство

$$\dim(\mathfrak{g} \cdot \alpha) \geq 2 \dim(\mathfrak{h} \cdot \alpha)$$

выполнено для любых алгебр Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ и любого элемента $\alpha \in \mathfrak{g}^*$. В работе [1] доказано, что пространство $X = G/H$ геометрически коммутативно тогда и только тогда, когда для точки α общего положения в $T_o^*(X) = \mathfrak{h}^\circ$ выполнено условие

$$\dim(\mathfrak{g} \cdot \alpha) = 2 \dim(\mathfrak{h} \cdot \alpha). \quad (1)$$

Отсюда следует, что свойство геометрической коммутативности локально, т. е. зависит только от пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Пусть $\{g_1, \dots, g_n\}$ – базис в $\mathfrak{g}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Матрицей коммутаторов алгебры $\mathfrak{g}$ будем называть следующую кососимметрическую матрицу с элементами из $\text{Quot}(S(\mathfrak{g}))$:

$$\begin{pmatrix} [g_1, g_1] & [g_1, g_2] & \dots & [g_1, g_n] \\ [g_2, g_1] & [g_2, g_2] & \dots & [g_2, g_n] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [g_n, g_1] & [g_n, g_2] & \dots & [g_n, g_n] \end{pmatrix}.$$

Матрицу коммутаторов алгебры $\mathfrak{g}$ (зависящую от выбора базиса) будем обозначать через $[[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]$. Замена базиса в алгебре $\mathfrak{g}$ с помощью матрицы $C \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ влечет изменение матрицы коммутаторов по правилу $M' = C^\top M C$.

Более общо, пусть $\mathfrak{v}$ и $\mathfrak{w}$ – некоторые подпространства в алгебре $\mathfrak{g}$. Выберем в пространстве $\mathfrak{v}$ базис $\{v_1, \dots, v_p\}$, а в пространстве $\mathfrak{w}$ – базис $\{w_1, \dots, w_q\}$.

Обозначим через $[[\mathfrak{v}, \mathfrak{w}]] \in \text{Mat}_{p \times q}(\text{Quot } S(\mathfrak{g}))$ матрицу $([v_i, w_j])_{i,j=1}^{p,q}$, зависящую от выбора базисов $\mathfrak{v}$ и $\mathfrak{w}$.

Пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ – некоторая подалгебра. Рассмотрим гомоморфизм факторизации $\rho_{\mathfrak{h}}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Обозначим через $[[\mathfrak{v}, \mathfrak{w}]]_{\mathfrak{h}} \in \text{Mat}_{p \times q}(\text{Quot } S(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}))$ матрицу $(\rho_{\mathfrak{h}}([v_i, w_j]))_{i,j=1}^{p,q}$, также зависящую от выбора базисов $\mathfrak{v}$ и $\mathfrak{w}$.

Заметим, что ранг $\text{rk}[[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]$ не зависит от выбора базиса и равен размерности общей коприсоединенной $\mathfrak{g}$ -орбиты, а $\text{rk}[[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]_{\mathfrak{h}}$ равен $\dim(\mathfrak{g} \cdot \alpha)$ для общего $\alpha \in \mathfrak{h}^{\circ} \subset \mathfrak{g}^*$. Числа $\text{rk}[[\mathfrak{v}, \mathfrak{w}]]$ и $\text{rk}[[\mathfrak{v}, \mathfrak{w}]]_{\mathfrak{h}}$ также не зависят от выбора базисов подпространств $\mathfrak{v}$ и $\mathfrak{w}$.

Для любых подпространств $\mathfrak{v}, \mathfrak{w} \subset \mathfrak{g}$ и любой подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, очевидно, выполняется неравенство

$$\text{rk}[[\mathfrak{v}, \mathfrak{w}]] \geq \text{rk}[[\mathfrak{v}, \mathfrak{w}]]_{\mathfrak{h}}.$$

Условие (1) с использованием матриц коммутаторов может быть переписано в виде

$$\text{rk}[[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]_{\mathfrak{h}} = 2 \text{rk}[[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}]]_{\mathfrak{h}}. \quad (2)$$

Пусть $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \in \mathfrak{g}$. Обозначим через $[\xi_1, \xi_2, \xi_3; \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3]$ следующую матрицу:

$$\begin{pmatrix} [\xi_1, \zeta_1] & [\xi_1, \zeta_2] & [\xi_1, \zeta_3] \\ [\xi_2, \zeta_1] & [\xi_2, \zeta_2] & [\xi_2, \zeta_3] \\ [\xi_3, \zeta_1] & [\xi_3, \zeta_2] & [\xi_3, \zeta_3] \end{pmatrix}.$$

Далее при классификации будут использоваться следующие леммы.

ЛЕММА 1. Пусть однородное пространство $X = G/H$ с одномерным стабилизатором геометрически коммутативно. Тогда определитель любой матрицы $[\xi_1, \xi_2, \xi_3; \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3]$, $\xi_i, \zeta_j \in \mathfrak{g}$, лежит в $S(\mathfrak{g})\mathfrak{h}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\dim \mathfrak{h} \cdot \alpha \leq 1$ для общего $\alpha \in \mathfrak{h}^{\circ} \subset \mathfrak{g}^*$, необходимым условием геометрической коммутативности является выполнение неравенства

$$\dim \mathfrak{g} \cdot \alpha \leq 2.$$

Следовательно, любой минор порядка 3 матрицы $[[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]_{\mathfrak{h}}$ равен нулю, т. е. соответствующий минор матрицы $[[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]$ лежит в $S(\mathfrak{g})\mathfrak{h}$.

ЛЕММА 2. Пусть $L \subset G$ – подгруппа, содержащая группу H , причем пространство G/H коммутативно (геометрически коммутативно, алгебраически коммутативно). Тогда коммутативно (геометрически коммутативно, алгебраически коммутативно) пространство L/H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Геометрическая коммутативность. Достаточно доказать, что $\mathbb{C}(T^*(L/H))^G$ вкладывается в $\mathbb{C}(T^*(G/H))^G$. Алгебра $\mathbb{C}(T^*(G/H))^G$ инвариантных рациональных функций на $T^*(G/H)$ изоморфна $\mathbb{C}(T_o^*(G/H))^H$. Косасательное пространство $T_o^*(G/H)$ в точке $o = eH$ отождествляется с $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^* = \mathfrak{h}_{\mathfrak{g}^*}^{\circ} \subset \mathfrak{g}^*$ – аннулятором алгебры $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}^*$; аналогично, косасательное пространство $T_o^*(L/H)$ в точке $o = eH$ отождествляется с $(\mathfrak{l}/\mathfrak{h})^* = \mathfrak{h}_{\mathfrak{l}^*}^{\circ} \subset \mathfrak{l}^*$ –

аннулятором алгебры $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{l}^*$. Действие группы H на $T_o^*(G/H)$ и $T_o^*(L/H)$ совпадает с ограничением на $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}^*}^o$ и $\mathfrak{h}_{\mathfrak{l}^*}^o$ коприсоединенного действия группы H на $\mathfrak{g}^*$ и $\mathfrak{l}^*$ соответственно. Следовательно, имеется естественная сюръекция

$$T_o^*(G/H) \twoheadrightarrow T_o^*(L/H),$$

согласованная с действием группы H . Далее, имеется вложение

$$\mathbb{C}(T_o^*(L/H)) \hookrightarrow \mathbb{C}(T_o^*(G/H)),$$

согласованное со скобкой Пуассона и действием группы H . Поэтому имеется вложение

$$\mathbb{C}(T^*(L/H))^G \simeq \mathbb{C}(T_o^*(L/H))^H \hookrightarrow \mathbb{C}(T_o^*(G/H))^H \simeq \mathbb{C}(T^*(G/H))^G.$$

Коммутативность. Для доказательства коммутативности L/H достаточно доказать, что алгебра $\mathcal{D}(L/H)^L$ вкладывается в алгебру $\mathcal{D}(G/H)^G$.

Каждому элементу $\xi \in \mathfrak{g}$ можно сопоставить инвариантный дифференциальный оператор первого порядка на группе G – дифференцирование вдоль левоинвариантного векторного поля ξ_* , равного ξ в единице группы. Это отображение продолжается до изоморфизма универсальной обертывающей алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ на алгебру $\mathcal{D}(G)^G$ левоинвариантных дифференциальных операторов на G . отождествляя G -инвариантные операторы на X с ограничениями G -инвариантных операторов на G , сохраняющих пространство H -правоинвариантных функций, можно показать, что

$$\mathcal{D}(G/H)^G \cong [\mathcal{U}(\mathfrak{g})/\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{h}]^{\mathfrak{h}}.$$

Имеется естественное вложение $\mathcal{U}(\mathfrak{l}) \hookrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, причем

$$\mathcal{U}(\mathfrak{l})\mathfrak{h} = \mathcal{U}(\mathfrak{l}) \cap \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{h}.$$

Таким образом,

$$\mathcal{D}(L/H)^L \simeq (\mathcal{U}(\mathfrak{l})/(\mathcal{U}(\mathfrak{l})\mathfrak{h}))^{\mathfrak{h}} \hookrightarrow (\mathcal{U}(\mathfrak{g})/(\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{h}))^{\mathfrak{h}} \simeq \mathcal{D}(G/H)^G.$$

Алгебраическая коммутативность. Для доказательства алгебраической коммутативности L/H достаточно доказать, что $\mathbb{C}[T^*(L/H)]^G$ вкладывается в $\mathbb{C}[T^*(G/H)]^G$. Алгебра $\mathbb{C}[T^*G/H]^G$ инвариантных регулярных функций на T^*G/H , аналогично, изоморфна $(S(\mathfrak{g})/(S(\mathfrak{g})\mathfrak{h}))^{\mathfrak{h}} = S(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{\mathfrak{h}}$. Алгебра $S(\mathfrak{l})$ естественно вкладывается в $S(\mathfrak{g})$, причем вложение согласовано со скобкой Пуассона. Кроме того,

$$S(\mathfrak{l})\mathfrak{h} = S(\mathfrak{l}) \cap S(\mathfrak{g})\mathfrak{h}.$$

Поэтому имеется вложение

$$\mathbb{C}[T^*L/H]^L \simeq (S(\mathfrak{l})/(S(\mathfrak{l})\mathfrak{h}))^{\mathfrak{h}} \hookrightarrow (S(\mathfrak{g})/(S(\mathfrak{g})\mathfrak{h}))^{\mathfrak{h}} \simeq \mathbb{C}[T^*G/H]^G.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $\mathfrak{g}$ – произвольная алгебра Ли, $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}$ – некоторая подалгебра и $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ – такая подалгебра в $\mathfrak{g}$, что $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{l} = 0$. Тогда

$$\mathrm{rk}[[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]]_{\mathfrak{h}} = \mathrm{rk}[[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $\mathrm{rk}[[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]]_{\mathfrak{h}} \leq \mathrm{rk}[[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]]$. Теперь рассмотрим любой минор M порядка r матрицы $[[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]]_{\mathfrak{h}}$. Если $M = 0$, то соответствующий минор матрицы $[[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]]$ лежит в $S(\mathfrak{g})\mathfrak{h} \cap S(\mathfrak{l}) = 0$. Следовательно, $\mathrm{rk}[[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]]_{\mathfrak{h}} \geq \mathrm{rk}[[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]]$.

§ 4. Классификация геометрически коммутативных однородных пространств с одномерным стабилизатором

Сразу перейдем от алгебраических групп к их алгебрам Ли. Всюду без дополнительных уточнений будем считать, что подалгебра $\mathfrak{h}$ не содержит ненулевых идеалов алгебры $\mathfrak{g}$.

Если подалгебра $\mathfrak{h}$ одномерна, то геометрическая коммутативность пространства $X = G/H$ равносильна тому, что $\mathrm{rk}[[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]_{\mathfrak{h}} = 2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\mathfrak{g}$ – произвольная алгебра Ли, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ – произвольная подалгебра. Тогда $\mathrm{rk}[[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]_{\mathfrak{h}} = 2$, если и только если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- 1) в $\mathfrak{g}$ есть такое подпространство $\mathfrak{g}_1$ коразмерности 1, что $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] \subset \mathfrak{h}$;
- 2) в $\mathfrak{g}$ есть такое подпространство $\mathfrak{g}_1$ коразмерности 3, что $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1] \subset \mathfrak{h}$.

Для доказательства предложения 1 нам понадобятся три леммы.

ЛЕММА 4. Если матрица A с элементами из векторного пространства V имеет ранг 1 как матрица над $S(V)$, то либо ее строки пропорциональны над $\mathbb{C}$, либо ее столбцы пропорциональны над $\mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку матрица A имеет ранг 1 как матрица над $S(V)$, без ограничения общности можно считать, что все строки пропорциональны первой строке $(x_1, \dots, x_n)$ с коэффициентами из $\mathrm{Quot} S(V)$.

Предположим, что какая-либо строка $(y_1, \dots, y_n)$ пропорциональна первой с коэффициентом $p/q \in \mathrm{Quot} S(V)$, $p/q \notin \mathbb{C}$. Можно считать, что многочлены p и q взаимно просты. Тогда $y_i = (p/q)x_i$, следовательно, $qy_i = px_i$, откуда $x_i : q, y_i : p$ для каждого i . Значит, в каждой строке элементы пропорциональны над $\mathbb{C}$. Таким образом, для некоторых $v_1, \dots, v_n \in V$ и некоторой матрицы $\tilde{A} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ имеем

$$A = \mathrm{diag}(v_1, v_2, \dots, v_n) \cdot \tilde{A}.$$

Ранг матрицы $\tilde{A}$ также равен 1, следовательно, все ее столбцы пропорциональны некоторому столбцу с коэффициентами из $\mathbb{C}$, а значит, столбцы исходной матрицы A пропорциональны над $\mathbb{C}$.

ЛЕММА 5. Если кососимметрическая матрица A размера $n \times n$ с элементами из V имеет ранг 2 (как матрица над $S(V)$), то преобразованиями

из $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ (преобразованиями вида $A \mapsto C^\top AC$, $C \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$) она приводится к одному из двух видов:

- а) ненулевые элементы только в первой строке и первом столбце;
- б) ненулевые элементы только в левом верхнем угловом миноре порядка 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать утверждение индукцией по порядку n матрицы A .

Пусть $n = 4$. Матрицу A можно представить в виде

$$A = \sum_{i=1}^k A_i x_i,$$

где A_i – линейно независимые кососимметрические матрицы над $\mathbb{C}$, а $x_1, \dots, x_k \in V$ – линейно независимые векторы.

Кососимметрические матрицы A_i можно рассматривать как элементы $\Lambda^2 \mathbb{C}^4$. Рассмотрим матрицу A как матрицу над полем $\text{Quot } S(V)$. Поскольку ее ранг равен 2, то как элемент пространства $\Lambda^2(\text{Quot } S(V))^4$ она является разложимым бивектором и, значит,

$$A \wedge A = \left(\sum_{i=1}^k A_i x_i \right) \wedge \left(\sum_{j=1}^k A_j x_j \right) = \sum_{i,j=1}^k x_i x_j A_i \wedge A_j = 0.$$

Следовательно, $A_i \wedge A_j = 0$ при всех i и j . Из того, что $A_i \wedge A_i = 0$, следует, что бивектор A_i разложим, т.е. найдутся такие два вектора $v_i, w_i \in \mathbb{C}^4$, что $A_i = v_i \wedge w_i \in \Lambda^2 \mathbb{C}^4$. В силу того, что $A_i \wedge A_j = 0$, пространства $\langle v_i, w_i \rangle$ и $\langle v_j, w_j \rangle$ в $\mathbb{C}^4$ пересекаются по прямой. Таким образом, в $\mathbb{C}^4$ есть k двумерных подпространств, каждые два из которых пересекаются по прямой. Перейдем к проективизации $\mathbb{CP}^3$. Получаем k прямых, каждые две из которых пересекаются. Такое возможно, только если все прямые имеют общую точку или лежат в одной плоскости. В первом случае преобразованием из $\mathbf{GL}_4(\mathbb{C})$ матрица приводится к виду, в котором ненулевые элементы имеются только в первой строке и первом столбце, во втором – к виду, в котором ненулевые элементы имеются только в левом верхнем угловом миноре порядка 3.

Пусть теперь A – матрица порядка $n > 4$.

Применив к правому нижнему минору порядка $n - 1$ предположение индукции, преобразованиями из $\mathbf{GL}_{n-1}(\mathbb{C})$ приведем его либо к виду а), либо к виду б).

В случае а) матрица примет вид

$$\begin{pmatrix} * & B \\ -B^\top & 0 \end{pmatrix},$$

где B – матрица размера $2 \times (n - 2)$ с элементами из V . Очевидно, что $\text{rk } B \leq 1$. По лемме 4 либо строки, либо столбцы матрицы B пропорциональны над $\mathbb{C}$. Если пропорциональны строки, то всю матрицу можно привести к виду а). Если пропорциональны столбцы, то всю матрицу можно привести к виду б).

В случае б) ненулевые элементы находятся только в первой строке, в первом столбце и в левом верхнем миноре порядка 4. Можно считать, что существуют ненулевые элементы в верхнем левом миноре порядка 4, кроме первой строки и первого столбца, иначе матрица будет иметь вид а). Тогда в последних $n - 4$ строках и столбцах не может быть ненулевых элементов, иначе ранг матрицы будет больше 2.

В итоге матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где C – кососимметрическая матрица размера 4×4 с элементами из V . Осталось еще раз воспользоваться базой индукции для левого верхнего минора порядка 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Если одно из условий предложения выполнено, то $\text{rk}[[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]_{\mathfrak{h}} = 2$.

Пусть теперь $\text{rk}[[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]_{\mathfrak{h}} = 2$, $\dim \mathfrak{g} = n$. Матрица $\text{rk}[[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]_{\mathfrak{h}}$ является кососимметрической $(n \times n)$ -матрицей ранга 2 с элементами из векторного пространства $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Применив к ней лемму 5, получим, что в некотором базисе алгебры $\mathfrak{g}$ матрица $[[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]_{\mathfrak{h}}$ имеет один из видов а) или б) леммы 5. Им соответствуют в точности два случая предложения.

ЛЕММА 6. Если $\text{codim } H < 2$ или $\text{codim } H = 2$ и подалгебра $\mathfrak{h}$ не является идеалом в алгебре $\mathfrak{g}$, то однородное пространство G/H всегда коммутативно, геометрически коммутативно, алгебраически коммутативно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\text{codim } H = 0$, то утверждение леммы очевидно. Если $\text{codim } H = 1$, то $\text{rk}[[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]_{\mathfrak{h}} = 2$, $\text{rk}[[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}]]_{\mathfrak{h}} = 1$, откуда однородное пространство G/H геометрически коммутативно. Группа G в этом случае действует на T^*X с открытой орбитой, откуда $\mathbb{C}[T^*X]^G = \mathbb{C}$. В силу того, что $\text{gr } \mathcal{D}(X)^G \subset \mathbb{C}[T^*X]^G = \mathbb{C}$, алгебра $\mathcal{D}(X)^G$ также тривиальна.

Пусть теперь $\text{codim } H = 2$ и подалгебра $\mathfrak{h}$ не является идеалом в $\mathfrak{g}$. Дополним базис подпространства $\mathfrak{h}$ элементами x и y до базиса алгебры $\mathfrak{g}$. Ясно, что $1 \leq \text{rk}[[\mathfrak{h}, \langle x, y \rangle]]_{\mathfrak{h}} \leq 2$.

Пусть сначала $\text{rk}[[\mathfrak{h}, \langle x, y \rangle]]_{\mathfrak{h}} = 1$. Тогда $\text{rk}[[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]_{\mathfrak{h}} = 2$ (так как любой минор порядка 4 равен нулю) и однородное пространство G/H геометрически коммутативно. Для алгебры $\mathfrak{g}$ воспользуемся предложением 1. В случае 1) предложения 1 найдется подпространство $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}$ коразмерности 1 такое, что $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] \subset \mathfrak{h}$. Без ограничения общности можно считать, что $y \in \mathfrak{g}_1 \setminus \mathfrak{h}$, $x \notin \mathfrak{g}_1$. Тогда $[x, \mathfrak{h}] \not\subset \mathfrak{h}$, так как иначе алгебра $\mathfrak{h}$ была бы идеалом. Поэтому x не может входить в ненулевой степени в инвариантный полином. Следовательно, $\mathbb{C}[T^*X]^G$ порождается единственным элементом y . Аналогично порождается единственным элементом y алгебра $\mathcal{D}(X)^G$. В случае 2) предложения 1 найдется подпространство $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}$ коразмерности 3 такое, что $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$. Пусть $a \in \mathfrak{h} \setminus \mathfrak{g}_1$. Можно считать, что оператор $\text{ad } a$ на $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ невырожденный, иначе выполнены условия случая 1). Тогда $\text{ad } a$ имеет собственный вектор $\tilde{x} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$

с ненулевым собственным значением. Возьмем в качестве x какой-нибудь прообраз $\tilde{x}$ гомоморфизма факторизации. Элемент x не может входить в инвариантный полином в ненулевой степени, следовательно, алгебра $\mathbb{C}[T^*X]^G$ порождается единственным элементом или вовсе тривиальна. Отсюда имеем, что порождается единственным элементом или тривиальна алгебра $\mathcal{D}(X)^G$.

Пусть теперь $\mathrm{rk}[[\mathfrak{h}, \langle x, y \rangle]]_{\mathfrak{h}} = 2$. Тогда $\mathrm{rk}[[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]_{\mathfrak{h}} = 4$ и однородное пространство G/H геометрически коммутативно. Группа G в этом случае действует на T^*X с открытой орбитой, откуда следует, что $\mathbb{C}[T^*X]^G = \mathbb{C}$. В силу того, что $\mathrm{gr} \mathcal{D}(X)^G \subset \mathbb{C}[T^*X]^G = \mathbb{C}$, алгебра $\mathcal{D}(X)^G$ также тривиальна. Лемма доказана.

Рассмотрим разложение Леви $G = N \ltimes L$ группы G . Если $H \subset N$ или $H \subset L$, то по лемме 2 соответственно либо однородное пространство N/H , либо L/H является геометрически коммутативным. Если группа H одномерна и не лежит ни в унитарной части N , ни в редуктивной части L , то в силу леммы 3 необходимым условием геометрической коммутативности является выполнение неравенств

$$\mathrm{rk}[[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]] \leq 2, \quad \mathrm{rk}[[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]] \leq 2,$$

налагающих жесткие требования на выбор алгебр $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{l}$.

4.1. Унипотентный случай. Рассмотрим сначала случаи, когда группа G унипотентна или редуктивна.

ТЕОРЕМА 2. Пусть G – унипотентная алгебраическая группа и H – ее одномерная подгруппа, не являющаяся нормальной в G . Предположим также, что однородное пространство G/H локально неразложимо. Однородное пространство G/H геометрически коммутативно тогда и только тогда, когда выполнено только одно из следующих условий:

- 1) в $\mathfrak{g}$ есть коммутативный идеал коразмерности 1;
- 2) центр алгебры $\mathfrak{g}$ имеет коразмерность 3, причем $\dim \mathfrak{g}' = 3$.

При этом если выполнено условие 2), то пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ является одной из следующих: $\{(\mathfrak{g}_{5,4}, \langle x_1 \rangle), (\mathfrak{g}_{5,4}, \langle x_3 \rangle), (\mathfrak{g}_{6,3}, \langle x_1 \rangle)\}$, где алгебры $\mathfrak{g}_{5,4}$ и $\mathfrak{g}_{6,3}$ описаны в табл. 1.

Если одно из условий 1), 2) теоремы 2 выполнено, то согласно предложению 1 имеем $\mathrm{rk}[[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]_{\mathfrak{h}} = 2$ и, следовательно, однородное пространство G/H является геометрически коммутативным. Для доказательства обратного утверждения нам понадобятся несколько лемм.

Заметим, что, так как все присоединенные операторы алгебры $\mathfrak{g}$ нильпотентны, нормализатор $\mathfrak{n}(\mathfrak{h})$ подалгебры $\mathfrak{h}$ совпадает с централизатором $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ подалгебры $\mathfrak{h}$ в алгебре $\mathfrak{g}$.

ЛЕММА 7. В предположениях теоремы 2 централизатор $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ подалгебры $\mathfrak{h}$ коммутативен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{h} = \langle h \rangle$. Докажем сначала, что $[\mathfrak{z}(\mathfrak{h}), \mathfrak{z}(\mathfrak{h})] \subset \mathfrak{h}$. Допустим противное. Тогда найдутся такие $\xi, \eta \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$, что $[\xi, \eta] \notin \mathfrak{h}$. Кроме

того, так как $\mathfrak{h}$ не является идеалом, найдется такой $\zeta \in \mathfrak{g}$, что $[h, \zeta] \notin \mathfrak{h}$. Ясно, что h, ξ, η, ζ линейно независимы. Рассмотрим следующий минор в матрице коммутаторов:

$$\det[h, \zeta, \xi; h, \zeta, \eta] = \det \begin{pmatrix} 0 & [h, \zeta] & 0 \\ -[h, \zeta] & 0 & [\zeta, \xi] \\ 0 & [\eta, \zeta] & [\eta, \xi] \end{pmatrix} = [h, \zeta]^2 \cdot [\xi, \eta].$$

Он должен делиться на h . Однако по предположению $[\xi, \eta]$ не лежит в $\mathfrak{h}$. Значит, $[h, \zeta] \in \mathfrak{h}$, что противоречит нильпотентности.

Далее, в $\mathfrak{g}$ найдется такой элемент x , что $\text{ad}(h)x \neq 0$, но $\text{ad}^2(h)x = 0$. Докажем, что $[x, \mathfrak{z}(\mathfrak{h})] \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$. Действительно, пусть $y \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$. Тогда

$$[h, [x, y]] = -[x, [y, h]] - [y, [h, x]] \in \mathfrak{h}$$

в силу того, что $[y, h] = 0$, $[h, x] \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ и $[\mathfrak{z}(\mathfrak{h}), \mathfrak{z}(\mathfrak{h})] \subset \mathfrak{h}$. Таким образом, $[x, y] \in \mathfrak{n}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$.

Рассмотрим алгебраическую подгруппу $G_1 = N(\mathfrak{z}(\mathfrak{h}))$ в группе G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}_1$. Поскольку $G \supset G_1 \supset H$, по лемме 2 однородное пространство G_1/H также является геометрически коммутативным. В алгебре $\mathfrak{g}_1$ подалгебра $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ является идеалом, $\mathfrak{g}_1 \neq \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$, так как $\mathfrak{g}_1 \ni x \notin \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$. По построению $\mathfrak{h}$ не является идеалом в $\mathfrak{g}_1$, но $[\mathfrak{z}(\mathfrak{h}), \mathfrak{z}(\mathfrak{h})] \subset \mathfrak{h}$. Следовательно, $[\mathfrak{z}(\mathfrak{h}), \mathfrak{z}(\mathfrak{h})] = 0$.

ЛЕММА 8. Пусть центр нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ имеет коразмерность 3. Тогда в $\mathfrak{g}$ можно выбрать идеал $\mathfrak{g}_1$ размерности не больше 6 и коммутативный идеал $\mathfrak{g}_2$ так, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через π проекцию, $\pi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Факторалгебра $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ является некоторой нильпотентной трехмерной алгеброй $\tilde{\mathfrak{g}} = \langle \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} \rangle$. Она либо коммутативна, либо изоморфна алгебре Гейзенберга. В последнем случае будем считать, что $[\tilde{a}, \tilde{b}] = \tilde{c}$.

В любом случае возьмем какие-нибудь прообразы a, b, c элементов $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$. Тогда в качестве $\mathfrak{g}_1$ можно взять $\langle a, b, c, [a, b], [b, c], [c, a] \rangle$. Действительно, $[b, c], [c, a] \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, а $[a, b] \in c + \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, откуда $[[a, b], \mathfrak{g}_1] \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Значит, $\mathfrak{g}_1$ является подалгеброй. Идеал $\mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ можно получить, произвольно дополнив подпространство $\langle a, b, c, [a, b], [b, c], [c, a] \rangle$ до всей алгебры $\mathfrak{g}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если в условиях леммы 8 предположить, что $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ — одномерная подалгебра, не являющаяся идеалом, то элементы $a, b, c \in \mathfrak{g}$ можно выбрать так, чтобы $\mathfrak{h} \subset \langle a, b, c \rangle \subset \mathfrak{g}_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Докажем сначала, что если центр алгебры Ли $\mathfrak{g}$ имеет коразмерность 3, то пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ является одной из перечисленных в п. 2) теоремы.

По лемме 8 алгебру $\mathfrak{g}$ в рассматриваемом случае можно разложить в прямую сумму идеала $\mathfrak{g}_1$ размерности не больше 6 и коммутативного идеала $\mathfrak{g}_2$. При этом в силу того, что подалгебра $\mathfrak{h}$ не является идеалом, можно выбрать $\mathfrak{g}_1$

так, чтобы $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_1$. Поскольку по предположению однородное пространство локально неразложимо, то $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1$ и $\dim \mathfrak{g} \leq 6$.

В работе [10] получена полная классификация неразложимых нильпотентных алгебр Ли размерности не более 6. Выберем из всех алгебр размерности не более 6 в классификации те, центр которых имеет коразмерность 3:

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_{5,4} : \quad & [x_1, x_2] = x_3, \quad [x_1, x_3] = x_4, \quad [x_2, x_3] = x_5, \\ \mathfrak{g}_{6,3} : \quad & [x_1, x_2] = x_6, \quad [x_1, x_3] = x_4, \quad [x_2, x_3] = x_5.\end{aligned}$$

При этом разложимых алгебр размерности не более 6 с центром коразмерности 3 не существует, так как единственная нетривиальная алгебра размерности не более 3 является алгеброй Гейзенберга, а прямая сумма двух алгебр Гейзенберга имеет центр коразмерности 2.

Если подалгебра $\mathfrak{h}$ лежит в коммутанте $\mathfrak{g}'_{5,4}$, то можно считать, что $\mathfrak{h} = \langle x_3 \rangle$, иначе – что $\mathfrak{h} = \langle x_1 \rangle$.

Для алгебры $\mathfrak{g}_{6,3}$ можно считать, что $\mathfrak{h} = \langle x_1 \rangle$.

Теперь воспользуемся предложением 1. Разберем два случая, соответствующих условиям предложения 1.

1. В $\mathfrak{g}$ существует такое подпространство $\mathfrak{g}_1$ коразмерности 1, что $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] \subset \mathfrak{h}$.

Пусть сначала $h \in \mathfrak{g}_1$. Тогда $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{n}(\mathfrak{h})$, откуда $\mathfrak{n}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ – идеал. По лемме 7 подалгебра $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ коммутативна, откуда $\mathfrak{g}_1$ – коммутативный идеал коразмерности 1.

Пусть теперь $h \notin \mathfrak{g}_1$. Докажем сначала, что $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_1] \subset \mathfrak{g}_1$. Выберем в $\mathfrak{g}_1$ базис $\{a_1, \dots, a_k\}$. Для каждого $a \in \mathfrak{g}_1$ рассмотрим оператор $\text{ad } a$. В силу того, что $\text{ad } a(\mathfrak{g}_1) \subset \mathfrak{h}$, в базисе $\{h, a_1, \dots, a_k\}$ пространства $\mathfrak{g}$ в матрице оператора $\text{ad } a$ ненулевые элементы существуют только в первой строке и первом столбце. Поскольку $\text{tr}(\text{ad } a) = 0$, то $\text{ad } a(h) \in \mathfrak{g}_1$. Таким образом, оператор $\text{ad } h$ действует на подпространстве $\mathfrak{g}_1$, и можно выбрать жорданов базис $\{a_1, \dots, a_k\}$ оператора $\text{ad } h$ такой, что $[h, a_i] \in \langle a_{i-1} \rangle$.

Если $\text{codim } \mathfrak{z}(\mathfrak{h}) = 1$, то в качестве $\mathfrak{g}_1$ из утверждения теоремы можно взять коммутативный идеал $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$.

Если $\text{codim } \mathfrak{z}(\mathfrak{h}) \geq 2$, то без ограничения общности можно считать, что $[h, a_k] \neq 0$ и $[h, a_l] \neq 0$ для некоторых $0 < l < k$. Выпишем тождество Якоби для a_k, a_i и a_j , где числа i, j, k различны,

$$\underbrace{[a_k, \underbrace{[a_i, a_j]}_{\in \mathfrak{h}}]}_{\in \langle a_{k-1} \rangle} + \underbrace{[a_i, \underbrace{[a_j, a_k]}_{\in \mathfrak{h}}]}_{\in \langle a_{i-1} \rangle} + \underbrace{[a_j, \underbrace{[a_k, a_i]}_{\in \mathfrak{h}}]}_{\in \langle a_{j-1} \rangle} = 0,$$

откуда $[a_i, a_j] = 0$ при $i, j \neq k$. Аналогично, из тождества Якоби для a_k, a_l и a_i , где числа i, l, k различны, следует, что $[a_i, a_k] = 0$ при $i \neq l$. Если найдется такой $r \neq k, l$, что $[h, a_r] \neq 0$, то из тождества Якоби для a_k, a_l и a_r получаем, что $[a_k, a_l] = 0$ и $\mathfrak{g}_1$ – коммутативный идеал коразмерности 1. Если же $[h, a_i] = 0$ при $i \neq k, l$, то $\text{codim } \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 3$.

2. В $\mathfrak{g}$ существует такое подпространство $\mathfrak{g}_1$ коразмерности 3, что $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1] \subset \mathfrak{h}$.

Поскольку $\mathfrak{h}$ не является идеалом, то $\mathfrak{h}$ не лежит в $\mathfrak{g}_1$. Кроме того, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_1] = 0$ в силу нильпотентности $\mathfrak{h}$. Дополним базис пространства $\langle h, \mathfrak{g}_1 \rangle$ до базиса всего пространства $\mathfrak{g}$ элементами $a, b \in \mathfrak{g}$. Элементы $[h, a]$ и $[h, b]$ можно считать линейно независимыми по модулю $\mathfrak{h}$, так как иначе $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ – коммутативный идеал коразмерности 1 и выполнено условие 1) теоремы.

Очевидно, что $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$, поэтому по лемме 7 имеем $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] = 0$.

Пусть $x \in \mathfrak{g}_1$, $[x, a] = \alpha h$, $[x, b] = \beta h$. Выпишем для a, b, x тождество Якоби

$$[b, [x, a]] + [x, [a, b]] + [a, [b, x]] = \beta[h, a] - \alpha[h, b] + \underbrace{[x, [a, b]]}_{\in \mathfrak{h}} = 0.$$

Поскольку $[h, a]$ и $[h, b]$ линейно независимы по модулю $\mathfrak{h}$, то $\alpha = \beta = 0$.

Значит, $\mathfrak{g}_1$ является центром алгебры $\mathfrak{g}$ и имеет коразмерность 3.

4.2. Редуктивный случай. Рассмотрим теперь противоположный унипотентному, редуктивный случай.

ТЕОРЕМА 3. Пусть G – некоммутативная комплексная редуктивная алгебраическая группа, H – ее одномерная подгруппа. Предположим также, что однородное пространство G/H локально неразложимо. Тогда пространство G/H геометрически коммутативно лишь в двух следующих случаях:

- 1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$;
- 2) $\mathfrak{g} = \mathbb{C} \oplus \mathfrak{sl}_2$, $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{sl}_2, \mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что однородное пространство редуктивной группы Ли геометрически коммутативно тогда и только тогда, когда оно сферично, т. е. соответствующее действие $G : X$ сферическое [1]. Таким образом, если однородное пространство G/H геометрически коммутативно, то борелевская подгруппа $B \subset G$ имеет в X открытую орбиту и $\dim B \geq \dim X$. Поскольку $\dim X = \dim G - 1$, количество положительных корней в корневом разложении алгебры $\mathfrak{g}$ не должно превосходить 1, откуда $\mathfrak{g} = \mathbb{C}^k \oplus \mathfrak{sl}_2$ для некоторого k .

Очевидно, что $\mathrm{rk}[[\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{sl}_2]]_{\mathfrak{h}} = \mathrm{rk}[[\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{sl}_2]] = 2$ для любой одномерной подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{sl}_2$, а в силу леммы 3 – для любой одномерной подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Значит, для того чтобы G/H было геометрически коммутативно, необходимо и достаточно, чтобы подалгебра $\mathfrak{h}$ не была идеалом, т. е. чтобы $\mathfrak{h}$ не лежала в $\mathbb{C}^k$. Если $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{sl}_2$, то $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$, а если $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{sl}_2$, то в силу неразложимости $\mathfrak{g} = \mathbb{C} \oplus \mathfrak{sl}_2$.

ТЕОРЕМА 4. 1) Пусть $\mathfrak{g}$ – произвольная алгебра Ли. Тогда $\mathrm{rk}[[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] = 2$, если и только если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- i) в $\mathfrak{g}$ существует коммутативный идеал $\mathfrak{g}_1$ коразмерности 1;
- ii) центр $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ алгебры $\mathfrak{g}$ имеет коразмерность 3.

2) Если алгебра $\mathfrak{g}$ нильпотентна, неразложима и центр $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ алгебры $\mathfrak{g}$ имеет коразмерность 3, то $\mathrm{rk}[[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] = 2$ только в следующих двух случаях: $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{5,4}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,3}$ (алгебры $\mathfrak{g}_{5,4}$ и $\mathfrak{g}_{6,3}$ описаны в табл. 1).

3) Если алгебра $\mathfrak{g}$ редуктивна, то $\mathrm{rk}[[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] = 2$, только если $\mathfrak{g} = \mathbb{C}^k \oplus \mathfrak{sl}_2$ для некоторого k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) теоремы следует непосредственно из предложения 1 для $\mathfrak{h} = 0$.

Для доказательства утверждения 2) заметим, что по лемме 8 можно считать, что $\dim \mathfrak{g} \leq 6$. Далее воспользуемся полной классификацией [10] неразложимых нильпотентных алгебр Ли размерности не более 6.

Для доказательства утверждения 3) рассмотрим какую-либо одномерную подалгебру $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, не являющуюся идеалом алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ слабо коммутативна. Далее действуем точно так же, как и в доказательстве теоремы 3.

4.3. Общий случай. Завершаем классификацию в общем случае.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $G = N \rtimes L$ – разложение Леви комплексной алгебраической группы G в полупрямое произведение унитарного радикала N и редуктивной подгруппы L . Пусть H – одномерная подгруппа в G , подалгебра $\mathfrak{h}$ не является идеалом в $\mathfrak{g}$. Предположим также, что однородное пространство G/H локально неразложимо. Тогда пространство G/H геометрически коммутативно только в следующих трех случаях:

- 1) $\dim \mathfrak{l} = 1$ и $\mathfrak{n}$ – коммутативный идеал;
- 2) $\dim \mathfrak{l} = 1$, $\mathfrak{l} = \langle l \rangle$, $\mathfrak{n} = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$, $[x_1, x_2] = x_3$, $[l, x_1] = x_1$, $[l, x_2] = -x_2$;
- 3) $\mathfrak{l} = \mathfrak{sl}_2$, $\mathfrak{n} = \mathbb{C}$, $\mathfrak{h} \not\subset \mathbb{C}$, $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{sl}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если выполнены условия одного из случаев 1), 2), 3) теоремы, то геометрическая коммутативность пространства G/H очевидна.

Если произведение $G = N \rtimes L$ является прямым, то в силу локальной неразложимости однородного пространства G/H подалгебра $\mathfrak{h}$ не лежит ни в идеале $\mathfrak{n}$, ни в подалгебре $\mathfrak{l}$. Следовательно, по лемме 3

$$\mathrm{rk}[[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]]_{\mathfrak{h}} = \mathrm{rk}[[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]], \quad \mathrm{rk}[[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]]_{\mathfrak{h}} = \mathrm{rk}[[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]].$$

Однако $\mathrm{rk}[[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]] + \mathrm{rk}[[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]] \leq 2$, откуда либо подалгебра $\mathfrak{n}$, либо подалгебра $\mathfrak{l}$ коммутативна. Пусть сначала алгебра $\mathfrak{l}$ коммутативна. Тогда можно считать, что $\mathfrak{h}$ лежит в $\mathfrak{n}$, либо (при подходящем выборе $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}$) лежит в $\mathfrak{l}$, откуда следует разложимость пространства $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Пусть теперь алгебра $\mathfrak{n}$ коммутативна. Тогда по теореме 4 имеем $\mathfrak{l} = \mathbb{C}^k \oplus \mathfrak{sl}_2$. Можно считать, что $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{sl}_2$. В силу неразложимости имеем $k = 0$, т. е. $\mathfrak{l} = \mathfrak{sl}_2$ и $\dim \mathfrak{n} = 1$. Таким образом, выполнен случай 3) теоремы.

Далее в этом параграфе считаем, что условия теоремы выполнены и произведение $G = N \rtimes L$ не является прямым. Для доказательства прямой импликации будем использовать следующие леммы.

ЛЕММА 9. Если $\mathfrak{h}$ является идеалом в $\mathfrak{n}$, то подалгебра $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}$ коммутативна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2 однородное пространство N/H геометрически коммутативно, следовательно, $\mathfrak{n}' \subset \mathfrak{h}$. Далее, если подалгебра $\mathfrak{n}$ некоммутативна, то $\mathfrak{n}' = \mathfrak{h}$, откуда подалгебра $\mathfrak{h}$ является идеалом в $\mathfrak{g}$, что противоречит условиям. Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}$ – некоторая подалгебра в $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{v} = \mathfrak{g}$ как векторное пространство. Пусть P_1 – проектор на $\mathfrak{g}_1$ вдоль $\mathfrak{v}$, а P_2 – проектор на $\mathfrak{v}$ вдоль $\mathfrak{g}_1$. Рассмотрим оператор $A_t = P_1 + tP_2$. Определим новую скобку Ли $[\cdot, \cdot]^{\mathfrak{g}_1}$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ следующим образом:

$$[x, y]^{\mathfrak{g}_1} = \lim_{t \rightarrow 0} A_t^{-1}[A_t(x), A_t(y)].$$

Докажем, что для любых $x, y \in \mathfrak{g}$ предел существует (и, следовательно, определение корректно). Пусть $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, где $x_1, y_1 \in \mathfrak{g}_1$, $x_2, y_2 \in \mathfrak{v}$. Тогда

$$\begin{aligned} A_t^{-1} &= P_1 + t^{-1}P_2, \\ A_t^{-1}[A_t(x), A_t(y)] &= [x_1, y_1] + tA_t^{-1}([x_2, y_1] + [x_1, y_2]) + t^2A_t^{-1}[x_2, y_2], \\ [x, y]^{\mathfrak{g}_1} &= [x_1, y_1] + P_2([x_2, y_1] + [x_1, y_2]). \end{aligned}$$

Будем говорить, что скобка $[\cdot, \cdot]^{\mathfrak{g}_1}$ получена *стягиванием скобки вдоль $\mathfrak{g}_1$* . Новая скобка Ли $[\cdot, \cdot]^{\mathfrak{g}_1}$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ обладает следующими свойствами:

- (i) полученная алгебра Ли не зависит от выбора дополнительного подпространства $\mathfrak{v}$ и есть просто $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{g}_1$, где $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1$ – коммутативный идеал;
- (ii) при ограничении на $\mathfrak{g}_1$ скобки совпадают: $[\cdot, \cdot]^{\mathfrak{g}_1} = [\cdot, \cdot]$;
- (iii) ограничение на $\mathfrak{v}$ скобки $[\cdot, \cdot]^{\mathfrak{g}_1}$ равно нулю;
- (iv) если $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{v}] \subset \mathfrak{v}$, то $[x_1, y_2] = [x_1, y_2]^{\mathfrak{g}_1}$ для всех $x_1 \in \mathfrak{g}_1$ и $y_2 \in \mathfrak{v}$.

Обозначим полученную алгебру Ли через $\check{\mathfrak{g}}$. Пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ – некоторая подалгебра. Тогда дополнительное подпространство $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{g}$ можно выбрать так, чтобы $\mathfrak{h} = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1) \oplus (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{v})$ как векторное пространство. Следовательно, алгебре $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ будет соответствовать алгебра $\check{\mathfrak{h}} = (\mathfrak{h}/(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1)) \ltimes (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1) \subset \check{\mathfrak{g}}$. Для любых векторных пространств $\mathfrak{v}, \mathfrak{w} \subset \mathfrak{g}$ выполнены неравенства

$$\mathrm{rk}[[\mathfrak{v}, \mathfrak{w}]] \geq \mathrm{rk}[[\check{\mathfrak{v}}, \check{\mathfrak{w}}]]^{\mathfrak{g}_1}, \quad \mathrm{rk}[[\mathfrak{v}, \mathfrak{w}]]_{\mathfrak{h}} \geq \mathrm{rk}[[\check{\mathfrak{v}}, \check{\mathfrak{w}}]]_{\check{\mathfrak{h}}}^{\mathfrak{g}_1}. \quad (3)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Редуктивная часть $\mathfrak{l}$ алгебры $\mathfrak{g}$ коммутативна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\mathrm{rk}[[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]_{\mathfrak{h}} \geq \mathrm{rk}[[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]]_{\mathfrak{h}}$, необходимым условием геометрической коммутативности пространства G/H является выполнение неравенства $\mathrm{rk}[[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]]_{\mathfrak{h}} \leq 2$. В силу теорем 3, 4, а также леммы 3 алгебра $\mathfrak{l}$ либо коммутативна, либо изоморфна $\mathbb{C}^k \oplus \mathfrak{sl}_2$.

Допустим, что $\mathfrak{l} \supset \mathfrak{sl}_2$. Предположим сначала, что $[\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{n}] = 0$. Тогда если $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{sl}_2$ или $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{n} \ltimes \mathbb{C}^k$, то пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ разложима, в противном случае имеем $[\mathfrak{n} \ltimes \mathbb{C}^k, \mathfrak{n} \ltimes \mathbb{C}^k] = 0$ и сумма $\mathfrak{n} \ltimes \mathfrak{l}$ является прямой.

Следовательно, $[\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{n}] \neq 0$, и в идеале $\mathfrak{n}$ найдется неприводимое нетривиальное k -мерное $\mathfrak{sl}_2$ -представление $\mathfrak{n}_1$. Выберем в $\mathfrak{sl}_2$ стандартный базис $\{H, E, F\}$ и базис $\{x_1, \dots, x_k\}$ пространства $\mathfrak{n}_1$ такой, что $[E, x_i] = (i-1)x_{i-1}$ и $[F, x_i] = (k-i)x_{i+1}$.

Стянем скобку Ли вдоль $\mathfrak{l}$. Поскольку $\mathfrak{n}$ является идеалом, новая скобка Ли $[\cdot, \cdot]^{\mathfrak{l}}$ равна нулю на $\mathfrak{n}$ и совпадает со старой во всех остальных случаях. Докажем, что $\mathrm{rk}[[\mathfrak{n}_1 \ltimes \mathfrak{sl}_2, \mathfrak{n}_1 \ltimes \mathfrak{sl}_2]]_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{l}} > 2$, откуда в силу второго неравенства в (3)

будет следовать, что однородное пространство $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ не может быть геометрически коммутативным.

Рассмотрим следующие (3×3) -миноры в матрице коммутаторов после стягивания:

$$\begin{aligned} \det[F, x_1, x_k; E, F, x_1] &= \det \begin{pmatrix} H & 0 & (k-1)x_{k-1} \\ 0 & (k-1)x_2 & 0 \\ -(k-1)x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (k-1)^3 x_2^2 x_{k-1}, \\ \det[E, F, x_1; H, E, F] &= \det \begin{pmatrix} 2E & -2F & (k-1)x_1 \\ 0 & H & 0 \\ -H & 0 & (k-1)x_2 \end{pmatrix} = (k-1)H(2Ex_2 + Hx_1). \end{aligned}$$

В $\mathbb{C}[H, E, F, x_1, \dots, x_k]$ эти миноры не имеют общих делителей и, следовательно, не могут одновременно лежать в $S(\tilde{\mathfrak{g}})\check{\mathfrak{h}}$ ни для какой одномерной подалгебры $\check{\mathfrak{h}}$. Таким образом, $\text{rk}[[\mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{sl}_2, \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{sl}_2]]_{\check{\mathfrak{h}}}^{\mathfrak{l}} > 2$.

ЛЕММА 10. Пусть $[\mathfrak{l}, \mathfrak{n}] \not\subset \mathfrak{h}$. Тогда $[\mathfrak{z}(\mathfrak{l}), \mathfrak{z}(\mathfrak{l})] \subset \mathfrak{h}$. Если, кроме того, $[\mathfrak{l}, \mathfrak{h}] \neq 0$, то $[\mathfrak{z}(\mathfrak{l}), \mathfrak{z}(\mathfrak{l})] = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Алгебра $\mathfrak{l}$ коммутативна, следовательно, $\mathfrak{z}(\mathfrak{l}) = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{z}_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{l})$. Выберем в $\mathfrak{n}$ дополнительное к $\mathfrak{z}_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{l})$ $\mathfrak{l}$ -инвариантное подпространство $\mathfrak{m}$. Тогда $\text{rk}[[\mathfrak{l}, \mathfrak{m}]]_{\mathfrak{h}} > 0$, так как иначе $[\mathfrak{l}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{h}$. Заметим, что

$$\text{rk}[[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]_{\mathfrak{h}} \geq \text{rk}[[\mathfrak{m}, \mathfrak{l}]]_{\mathfrak{h}} + \text{rk}[[\mathfrak{z}_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{l}), \mathfrak{z}_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{l})]]_{\mathfrak{h}} + \text{rk}[[\mathfrak{l}, \mathfrak{m}]]_{\mathfrak{h}} \geq 2 + \text{rk}[[\mathfrak{z}_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{l}), \mathfrak{z}_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{l})]]_{\mathfrak{h}},$$

откуда $[\mathfrak{z}_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{l}), \mathfrak{z}_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{l})] \subset \mathfrak{h}$. Если же $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{z}_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{l})$, то $[\mathfrak{z}_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{l}), \mathfrak{z}_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{l})] = 0$. Лемма доказана.

Если алгебра $\mathfrak{l}$ коммутативна и $\dim \mathfrak{l} > 1$, то можно выбрать одномерное подпространство $\mathfrak{l}_1 \subset \mathfrak{l}$ такое, что $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{l}_1 = \mathfrak{g}_1$. По лемме 2 пара $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h})$ геометрически коммутативна. Разберем сначала случай, когда $\dim \mathfrak{l} = 1$.

Выберем собственный для $\mathfrak{l} = \langle l \rangle$ базис $\{x_1, \dots, x_n\}$ в $\mathfrak{n}$ так, чтобы $[l, x_i] = \lambda_i x_i \neq 0$ при $1 \leq i \leq k = \dim[\mathfrak{l}, \mathfrak{n}]$ и $[l, x_i] = 0$ при $i > k$. Обозначим через $\mathfrak{n}_{\lambda}$ пространство векторов веса λ полупростого оператора $\text{ad } l$. Тогда $[\mathfrak{n}_{\lambda}, \mathfrak{n}_{\mu}] \subset \mathfrak{n}_{\lambda+\mu}$.

ЛЕММА 11. Пусть $\dim \mathfrak{l} = 1$ и $k = \dim[\mathfrak{l}, \mathfrak{n}] = 1$. Тогда идеал $\mathfrak{n}$ коммутативен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{l}) = \mathfrak{n}_0$. Тогда $[x_1, x] \in \mathfrak{n}_{\lambda_1} = \langle x_1 \rangle$, откуда в силу нильпотентности имеем $[x_1, x] = 0$. Следовательно, $[x_1, \mathfrak{z}_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{l})] = 0$. По лемме 10 имеем $[\mathfrak{z}_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{l}), \mathfrak{z}_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{l})] \subset \mathfrak{h}$, откуда либо $\mathfrak{h}$ является идеалом в $\mathfrak{n}$ и по лемме 9 идеал $\mathfrak{n}$ коммутативен, либо $[\mathfrak{z}_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{l}), \mathfrak{z}_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{l})] = 0$ и идеал $\mathfrak{n}$ также коммутативен.

ЛЕММА 12. Пусть $\dim \mathfrak{l} = 1$ и $k = \dim[\mathfrak{l}, \mathfrak{n}] \geq 2$. Тогда $[\mathfrak{l}, \mathfrak{h}] \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим обратное. Тогда можно считать, что $\mathfrak{h} \subset \langle x_n, l \rangle$. Ранг $\text{rk}[[\langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle, \langle l, h \rangle]]_{\mathfrak{h}}$ не больше 1, откуда по лемме 4 либо

строки, либо столбцы матрицы

$$[[\langle l, h \rangle, \langle x_1, \dots, x_k, \dots, x_{n-1} \rangle]] = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 & \dots & \lambda_k x_k & 0 & \dots & 0 \\ [h, x_1] & \dots & [h, x_k] & [h, x_{k+1}] & \dots & [h, x_{n-1}] \end{pmatrix}$$

пропорциональны над $\mathbb{C}$ по модулю $\mathfrak{h}$. Однако столбцы не могут быть пропорциональны по модулю $\mathfrak{h}$, следовательно, пропорциональны строки. Отсюда $[h, x_i] \in \langle h, x_i \rangle$ при $i = 1, \dots, n-1$ и в силу нильпотентности имеем $[x_i, h] = 0$. Кроме того, $[x_n, h] = 0$, откуда $\mathfrak{h}$ является идеалом в $\mathfrak{g}$, что противоречит условиям.

ЛЕММА 13. Пусть $\dim \mathfrak{l} = 1$, $k = \dim[\mathfrak{l}, \mathfrak{n}] = 2$. Тогда либо идеал $\mathfrak{n}$ коммутативен, либо алгебра $\mathfrak{g}$ такая, как в случае 2) теоремы 5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По леммам 10, 12 централизатор $\mathfrak{z}_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{l})$ подалгебры $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{n}$ коммутативен и $[l, h] \neq 0$. Кроме того, $[x_1, x_2] \in \mathfrak{n}_{\lambda_1 + \lambda_2}$.

Пусть сначала $\lambda_2 = -\lambda_1$. Подходящим выбором $l \in \mathfrak{l}$ добьемся того, чтобы $\lambda_1 = 1$. Поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $[x_{1,2}, x_j] \in \mathfrak{n}_{\pm 1} = \langle x_{1,2} \rangle$, откуда $[\langle x_1, x_2 \rangle, \mathfrak{z}_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{l})] = 0$. Если $[x_1, x_2] = 0$, то идеал $\mathfrak{n}$ коммутативен, иначе $\langle l, x_1, x_2, [x_1, x_2] \rangle$ является подалгеброй в $\mathfrak{g}$, причем при подходящем выборе x_1 и x_2 получим $\mathfrak{h} \subset \langle l, x_1, x_2, [x_1, x_2] \rangle$. В силу локальной неразложимости пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ алгебра $\mathfrak{g}$ совпадает с $\langle l, x_1, x_2, [x_1, x_2] \rangle$ и является алгеброй из случая 2) теоремы 5.

Пусть теперь $\lambda_2 = \lambda_1$. Подходящим выбором $l \in \mathfrak{l}$ добьемся того, чтобы $\lambda_1 = 1$. В этом случае $[x_1, x_2] \in \mathfrak{n}_2 = 0$. Можно считать, что идеал $\mathfrak{n}$ не является коммутативным и что $[x_1, x_3] \neq 0$. При этом $[x_i, x_3] \in \mathfrak{n}_1 = \langle x_1, x_2 \rangle$, $i = 1, 2$. Базис $\{x_1, x_2\}$ можно выбрать в $\langle x_1, x_2 \rangle$ так, чтобы $x_2 \in \ker \text{ad } x_3$ и $[l, x_i] = x_i$. Тогда $[x_1, x_3] = x_2$. Далее, $\det[l, x_3, x_2; x_3, x_1, x_2] = x_2^3$, откуда $\mathfrak{h} = \langle x_2 \rangle$. При $i > 3$

$$\det[l, x_1, x_2; l, x_1, x_i] = x_1(x_1[x_2, x_i] - x_2[x_1, x_i]) \in x_2,$$

откуда $[x_2, x_i] = 0$. Следовательно, $\mathfrak{h} = \langle x_2 \rangle$ является идеалом в $\mathfrak{g}$, что противоречит условиям.

Наконец, если $\lambda_2 \neq \pm \lambda_1$, то $[x_1, x_i] = 0$, $[x_2, x_i] = 0$ и идеал $\mathfrak{n}$ коммутативен.

ЛЕММА 14. Пусть $\dim \mathfrak{l} = 1$. Тогда если $k = \dim[\mathfrak{l}, \mathfrak{n}] \geq 3$, то либо $[\mathfrak{l}, \mathfrak{h}] \not\subset \mathfrak{h}$, либо $\mathfrak{n}$ – коммутативный идеал.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $[\mathfrak{l}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$. По лемме 12 имеем $[l, h] \neq 0$, поэтому можно считать, что $h = x_1$. Ранг $\text{rk}[[\langle x_2, \dots, x_n \rangle, \langle l, h \rangle]]_{\mathfrak{h}}$ не больше 1, откуда по лемме 4 либо строки, либо столбцы матрицы

$$[[\langle l, h \rangle, \langle x_2, \dots, x_k, \dots, x_n \rangle]] = \begin{pmatrix} \lambda_2 x_2 & \dots & \lambda_k x_k & 0 & \dots & 0 \\ [h, x_2] & \dots & [h, x_k] & [h, x_{k+1}] & \dots & [h, x_n] \end{pmatrix}$$

пропорциональны над $\mathbb{C}$ по модулю $\mathfrak{h}$. Однако столбцы не могут быть пропорциональны по модулю $\mathfrak{h}$, следовательно, пропорциональны строки. Отсюда $[x_i, h] \in \langle x_i, h \rangle$ при $i = 2, \dots, n-1$ и в силу нильпотентности имеем $[x_i, h] = 0$.

Кроме того, $[x_1, h] = [x_1, x_1] = 0$, откуда $\mathfrak{h}$ является идеалом в $\mathfrak{n}$, следовательно, по лемме 9 идеал $\mathfrak{n}$ коммутативен.

ЛЕММА 15. Пусть $\dim \mathfrak{l} = 1$, $k = \dim[\mathfrak{l}, \mathfrak{n}] > 2$. Тогда идеал $\mathfrak{n}$ коммутативен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 14 имеем $[\mathfrak{l}, \mathfrak{h}] \not\subseteq \mathfrak{h}$. Далее, по лемме 10 централизатор $\mathfrak{z}_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{l})$ подалгебры $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{n}$ коммутативен. Для каждого $i = 1, \dots, n$ ранг по модулю $\mathfrak{h}$ подматрицы

$$\text{rk}[[\langle l, x_i \rangle, \langle x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_k, \dots, x_n \rangle]] = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 & \dots & \lambda_k x_k & \dots & 0 \\ [x_i, x_1] & \dots & [x_i, x_k] & \dots & [x_i, x_n] \end{pmatrix}$$

не превосходит 1, откуда по лемме 4 либо ее строки, либо ее столбцы пропорциональны над $\mathbb{C}$ по модулю $\mathfrak{h}$. Столбцы не могут быть пропорциональны, следовательно, пропорциональны строки. Значит, $[x_i, x_j] \in \langle x_i, h \rangle \cap \mathfrak{n}_{\lambda_i + \lambda_j}$. По предположению имеем $h \notin \mathfrak{n}_{\lambda_i + \lambda_j}$, следовательно, $[x_i, x_j] = 0$. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы 5. В силу предложения 2 алгебра $\mathfrak{l}$ коммутативна и $\mathfrak{l} = \mathbb{C}^k$. При этом можно считать, что $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{l} = 0$, иначе при подходящем выборе дополнения к $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{l}$ пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ разложится в прямую сумму.

В алгебре $\mathfrak{l}$ можно выбрать такую одномерную подалгебру $\mathfrak{l}_1 = \langle l_1 \rangle$, что $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{l}_1$. По лемме 2 пара $(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{l}_1, \mathfrak{h})$ геометрически коммутативна. Из лемм 11–15 следует, что алгебра $\mathfrak{n}$ либо коммутативна, либо изоморфна трехмерной алгебре Гейзенберга. Выберем в $\mathfrak{n}$ собственный для $\mathfrak{l}$ базис $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Пусть сначала алгебра $\mathfrak{n}$ коммутативна. Если $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq 0$, то при подходящем выборе дополнения к $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ в $\mathfrak{g}$ пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ разложится в прямую сумму. Значит, можно считать, что $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$ и $\mathfrak{z}_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{l}) = 0$. Следовательно, $l_1 \in \mathfrak{l}$ можно выбрать так, что $\mathfrak{z}_{\mathfrak{n}}(l_1) = 0$. Выберем какой-нибудь $l_2 \in \mathfrak{l}$ так, чтобы $l_2 \neq l_1$. Тогда операторы $\text{ad } l_1$ и $\text{ad } l_2$ не могут быть пропорциональны, иначе $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq 0$. Пусть $[l_1, x_i] = \alpha_i x_i \neq 0$ и $[l_2, x_i] = \beta_i x_i$; тогда должно быть

$$\text{rk}[[\langle l_1, l_2 \rangle, \langle x_1, \dots, x_n \rangle]]_{\mathfrak{h}} = \text{rk} \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 & \alpha_2 x_2 & \dots & \alpha_n x_n \\ \beta_1 x_1 & \beta_2 x_2 & \dots & \beta_n x_n \end{pmatrix} = 1,$$

что возможно, только если $h = x_i$. Без ограничения общности можно считать, что $h = x_1$ и $[l_2, h] = 0$. Далее,

$$\text{rk}[[\langle l_1, l_2 \rangle, \langle x_2, \dots, x_n \rangle]] = \text{rk} \begin{pmatrix} \alpha_2 x_2 & \dots & \alpha_n x_n \\ \beta_2 x_2 & \dots & \beta_n x_n \end{pmatrix} = 1,$$

следовательно, либо строки, либо столбцы этой матрицы пропорциональны. Столбцы не могут быть пропорциональны при $n > 2$, следовательно, пропорциональны строки. Осталось «подправить» l_1 так, чтобы $[l_1, \mathfrak{n}] = \mathfrak{h}$, тогда из пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ выделится прямое слагаемое $(\langle l_1 \rangle, \mathfrak{h})$, что будет противоречить условиям.

Пусть теперь алгебра $\mathfrak{n} = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ изоморфна алгебре Гейзенберга и $l_2 \in \mathfrak{l}$. Операторы $\text{ad } l_1$, $\text{ad } l_2$ сохраняют центр алгебры $\mathfrak{n}$, поэтому можно считать,

что $x_3 \in \mathfrak{z}(\mathfrak{n})$. Тогда $[x_1, x_2] \in \langle x_3 \rangle$ и можно считать, что $[x_1, x_2] = x_3$. Пусть $[l_i, x_j] = \alpha_{ij}x_j$. Используя тождество Якоби для x_1, x_2 и l_i , получим

$$\begin{aligned} [l_i, [x_1, x_2]] + [x_1, [x_2, l_i]] + [x_2, [l_i, x_1]] &= [l_i, x_3] + [x_1, -\alpha_{i2}x_2] + [x_2, \alpha_{i1}x_1] \\ &= (-\alpha_{i2} - \alpha_{i1})x_3 = 0, \end{aligned}$$

откуда $\alpha_{i2} = -\alpha_{i1}$ и операторы $\text{ad } l_1$ и $\text{ad } l_2$ пропорциональны. Следовательно, подходящая их линейная комбинация l'_2 лежит в $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, что противоречит предположению.

Таким образом, теорема полностью доказана.

Объединяя результаты теорем 2, 3, 5 получаем классификацию всех локально неразложимых геометрически коммутативных однородных пространств с одномерным стабилизатором.

§ 5. Коммутативность геометрически коммутативных однородных пространств с одномерным стабилизатором

ТЕОРЕМА 6. Пусть G – комплексная алгебраическая группа, H – ее одномерная подгруппа. Тогда из геометрической коммутативности однородного пространства $X = G/H$ следует его коммутативность.

Для доказательства теоремы 6 нам потребуется сформулировать и доказать несколько лемм.

Для алгебры Ли $\mathfrak{g}$ определено отображение моментов $\Phi: T^*X \rightarrow \mathfrak{g}^*$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть G – комплексная алгебраическая группа, H – ее подгруппа. Предположим, что образ отображения моментов $\Phi: T^*X \rightarrow \mathfrak{g}^*$ плотен в $\mathfrak{g}^*$, однородное пространство G/H геометрически коммутативно и орбиты общего положения действия $G: \mathfrak{g}^*$ разделяются регулярными инвариантами. Тогда однородное пространство G/H коммутативно.

ЛЕММА 16. В условиях предложения 3 вложение $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]^G \hookrightarrow \mathbb{C}[T^*X]^G$ является алгебраическим расширением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку образ отображения моментов плотен в $\mathfrak{g}^*$, отображение $\Phi^*: \mathbb{C}(\mathfrak{g}^*) \rightarrow \mathbb{C}(T^*X)$ является вложением. Известно, что слои отображения моментов ортогональны орбитам в T^*X , причем касательное пространство слоя есть ортогональное дополнение к касательному пространству орбиты. Если однородное пространство G/H геометрически коммутативно, то касательное пространство к общей G -орбите коизотропно относительно стандартной симплектической формы. Значит, связные компоненты слоев лежат в орбитах. Следовательно, поле рациональных инвариантов на T^*X алгебраично над образом поля рациональных инвариантов на $\mathfrak{g}^*$. Любой рациональный инвариант на $\mathfrak{g}^*$ является отношением двух регулярных инвариантов в силу того, что орбиты действия $G: \mathfrak{g}^*$ разделяются регулярными инвариантами. Следовательно, алгебра $\mathbb{C}[T^*X]^G$ является алгебраическим расширением коммутативной алгебры $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]^G$.

В работе [2] доказана следующая

ЛЕММА 17. Пусть $\mathcal{A}$ – фильтрованная ассоциативная алгебра, а $\mathcal{B}$ – ее коммутативная подалгебра, причем:

- 1) $\text{gr } \mathcal{A}$ – целостная коммутативная алгебра;
- 2) $\text{gr } \mathcal{A} \subseteq \text{gr } \mathcal{B}$ – алгебраическое расширение.

Тогда алгебра $\mathcal{A}$ коммутативна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3. Каждому элементу $\xi \in \mathfrak{g}$ можно сопоставить инвариантный дифференциальный оператор первого порядка на группе G – дифференцирование вдоль левоинвариантного векторного поля ξ_* , равного ξ в единице группы. Это отображение продолжается до изоморфизма универсальной обертывающей алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ на алгебру $\mathcal{D}(G)^G$ левоинвариантных дифференциальных операторов на G .

Рассмотрим в качестве $\mathcal{A}$ фильтрованную ассоциативную алгебру $\mathcal{D}(X)^G$, в качестве $\mathcal{B}$ – коммутативную подалгебру $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Тогда их ассоциированными градуированными алгебрами будут в точности $\mathbb{C}[T^*X]^G$ и $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]^G$. По лемме 16 вложение $\mathbb{C}(\mathfrak{g}^*)^G \rightarrow \mathbb{C}(T^*X)^G$ является алгебраическим расширением. Значит, алгебра $\mathcal{D}(X)^G$ коммутативна.

ЛЕММА 18. Если алгебра $\mathfrak{g}$ является нетривиальным полупрямым произведением алгебры Гейзенберга и одномерного тора, то орбиты действия $G : \mathfrak{g}^*$ разделяются регулярными инвариантами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Размерность общей орбиты действия $G : \mathfrak{g}^*$ равна полному рангу матрицы коммутаторов. Размерность общей орбиты равна 2. Пусть $\{x_1, x_2, x_3, l\}$ – базис алгебры $\mathfrak{g}$, в котором $[x_1, x_2] = x_3$ и $[l, x_1] = x_1$, $[l, x_2] = -x_2$. Тогда многочлены x_3 и x_1x_2 являются независимыми регулярными инвариантами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Очевидно, что однородное пространство G/H можно считать локально неразложимым и что алгебра $\mathfrak{h}$ не является идеалом в $\mathfrak{g}$. Поскольку $\dim H = 1$, образ отображения моментов плотен. Если группа G унипотентна, редуктивна или выполнены условия леммы 18, то орбиты действия $G : \mathfrak{g}^*$ разделяются регулярными инвариантами. Далее, по предложению 3 однородное пространство G/H в этих случаях коммутативно.

Если алгебра $\mathfrak{g}$ является полупрямым произведением одномерного тора $\mathfrak{l} = \langle l \rangle$ и коммутативного нильпотентного радикала $\mathfrak{n}$, то орбиты действия $G : \mathfrak{g}^*$ не всегда разделяются регулярными инвариантами (например, если все собственные значения оператора $\text{ad } l$ строго положительны). Однако в этом случае однородное пространство G/H является коммутативным по следующим тривиальным причинам.

Пусть сначала $\mathfrak{h}$ не лежит в $\mathfrak{n}$. Тогда можно считать, что $h = l$. Следовательно, $\mathbb{C}[T^*X]^G = S(\mathfrak{n})^{\mathfrak{l}}$ и $\mathcal{D}(X)^G = \mathcal{U}(\mathfrak{n})^{\mathfrak{l}}$, и однородное пространство G/H коммутативно.

Пусть теперь $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{n}$. Заметим, что если оператор $\text{ad } l$ имеет в $\mathfrak{n}$ собственные векторы с ненулевым собственным значением, то l не может входить в инвариантный полином ни в какой положительной степени. Значит, $\mathbb{C}[T^*X]^G = S(\mathfrak{n})/S(\mathfrak{n})\mathfrak{h}$ и $\mathcal{D}(X)^G = \mathcal{U}(\mathfrak{n})/\mathcal{U}(\mathfrak{n})\mathfrak{h}$. Таким образом, однородное пространство G/H также коммутативно.

Теорема полностью доказана.

Список литературы

1. Э.Б. Винберг, “Коммутативные однородные пространства и коизотропные симплектические действия”, *УМН*, **56**:1 (2001), 3–62; англ. пер.: E. B. Vinberg, “Commutative homogeneous spaces and co-isotropic symplectic actions”, *Russian Math. Surveys*, **56**:1 (2001), 1–60.
2. Л.Г. Рыбников, “О коммутативности слабо коммутативных римановых однородных пространств”, *Функц. анализ и его прил.*, **37**:2 (2003), 41–51; англ. пер.: L. G. Rybnikov, “On the commutativity of weakly commutative Riemannian homogeneous spaces”, *Funct. Anal. Appl.*, **37**:2 (2003), 114–122.
3. L. Corwin, F. P. Greenleaf, “Commutativity of invariant differential operators on nilpotent homogeneous spaces with finite multiplicity”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **45**:6 (1992), 681–748.
4. Н. Fujiwara, G. Lion, B. Magneron, S. Mehdi, “A commutativity criterion for certain algebras of invariant differential operators on nilpotent homogeneous spaces”, *Math. Ann.*, **327**:3 (2003), 513–544.
5. О. С. Якимова, *Gelfand pairs*, Bonner Math. Schriften, **374**, Universität Bonn, Bonn, 2005.
6. И. В. Лосев, “Коизотропные представления редуктивных групп”, Тр. ММО, **66**, УРСС, М., 2005, 156–183; англ. пер.: I. V. Losev, “Co-isotropic representations of reductive groups”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 2005, 143–168.
7. И. В. Лосев, “О комплексных слабо коммутативных однородных пространствах”, Тр. ММО, **67**, УРСС, М., 2006, 228–255; англ. пер.: I. V. Losev, “On complex weakly commutative homogeneous spaces”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 2006, 199–223.
8. И. В. Лосев, “Классификация слабо коммутативных комплексных однородных пространств”, *УМН*, **62**:2 (2007), 181–182; англ. пер.: I. V. Losev, “Classification of weakly commutative complex homogeneous spaces”, *Russian Math. Surveys*, **62**:2 (2007), 390–392.
9. Э.Б. Винберг, “Инвариантные линейные связности в однородном пространстве”, Тр. ММО, **9**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1960, 191–210.
10. В. В. Морозов, “Классификация нильпотентных алгебр Ли шестого порядка”, *Изв. вузов. Матем.*, 1958, № 4, 161–171.

С. А. Шашков (S. A. SHASHKOV)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова,
 механико-математический факультет
E-mail: sergey.a.shashkov@gmail.com

Поступило в редакцию
 31.03.2011
 12.08.2011