Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Туницкий, О контактной линеаризации уравнений Монжа–Ампера, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1996, том 60, выпуск 2, 195–220

DOI: <https://doi.org/10.4213/im76>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 16:39:05

УДК 517.95

Д. В. Туницкий

О контактной линеаризации уравнений Монжа–Ампера

Статья посвящена решению ряда проблем, связанных с контактной классификацией уравнений Монжа–Ампера с двумя независимыми переменными. В 70-х годах прошлого столетия Софус Ли сформулировал задачу о возможности локального сведения заданного уравнения Монжа–Ампера к некоторому более простому уравнению второго порядка (полулинейному, линейному относительно производных, уравнению с постоянными коэффициентами). В настоящей работе исследуются условия, позволяющие осуществить указанное сведение. В качестве объектов, служащих для формулировки этих условий, используются характеристические расслоения заданного уравнения Монжа–Ампера и их производные.

Библиография: 10 наименований.

1. Контактные эквивалентные уравнения. Уравнением Монжа–Ампера называется соотношение вида

$$A + Bz_{xx} + 2Cz_{xy} + Dz_{yy} + E(z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2) = 0. \quad (1.1)$$

Коэффициенты A, B, C, D, E зависят от x, y, p, q, z , где x и y – независимые переменные, $z = z(x, y)$ – неизвестная функция и использованы обозначения Монжа

$$p = z_x, \quad q = z_y. \quad (1.2)$$

Будем считать, что A, B, C, D, E – гладкие функции, т.е. бесконечно дифференцируемые по x, y, p, q, z , и что

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 \neq 0. \quad (1.3)$$

Известно, что левой части уравнения Монжа–Ампера (1.1) соответствует дифференциальная 2-форма

$$\omega_2 = A dx \wedge dy + B dp \wedge dy + C(dx \wedge dp + dq \wedge dy) + D dx \wedge dq + E dp \wedge dq \quad (1.4)$$

(см. [1, с. 140]). Положим

$$\begin{aligned} \omega_0 &= dz - p dx - q dy, \\ \omega_1 &= d\omega_0 = dx \wedge dp + dy \wedge dq. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Дифференциальная 2-форма (1.4) является *эффективной*, что означает выполнение условий

$$\frac{\partial}{\partial z} \lrcorner \omega_2 = 0, \quad \omega_2 \wedge \omega_1 = 0. \quad (1.6)$$

Работа выполнена при поддержке Международного Научного Фонда и Российского Правительства (грант R4300), а также РФФИ (грант 93-01-00454).

Ясно, что левые части уравнений вида (1.1) находятся во взаимно однозначном соответствии с дифференциальными 2-формами вида (1.4).

Локальным контактным диффеоморфизмом пространства $\mathbb{R}^5$ называется диффеоморфизм класса C^∞

$$f: U \rightarrow f(U) \quad (1.7)$$

произвольного открытого подмножества U пространства $\mathbb{R}^5$ такой, что

$$f^*(\omega_0) = a\omega_0 \quad (1.8)$$

для некоторой гладкой в U функции a .

Введем оператор проектирования Π , определенный для любой кососимметрической формы ω соотношением

$$\Pi(\omega) = \omega - \omega_0 \wedge \left(\frac{\partial}{\partial z} \lrcorner \omega \right). \quad (1.9)$$

Оператор (1.9) обладает следующим свойством.

ЛЕММА 1. *Рассмотрим контактный диффеоморфизм (1.7) и эффективную дифференциальную 2-форму ω на множестве $f(U)$. Тогда $\Pi(f^*\omega)$ является эффективной формой на множестве U .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО осуществляется путем непосредственной проверки. Подробности см. в [2].

Пусть наряду с уравнением (1.1) задано другое уравнение Монжа–Ампера

$$\tilde{A} + \tilde{B}z_{xx} + 2\tilde{C}z_{xy} + \tilde{D}z_{yy} + \tilde{E}(z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2) = 0, \quad (1.10)$$

которому соответствует эффективная 2-форма

$$\tilde{\omega}_2 = \tilde{A} dx \wedge dy + \tilde{B} dp \wedge dy + \tilde{C}(dx \wedge dp + dq \wedge dy) + \tilde{D} dx \wedge dq + \tilde{E} dp \wedge dq. \quad (1.11)$$

Фиксируем произвольную точку m пространства $\mathbb{R}^5$. Уравнения (1.1) и (1.10) называются *контактно эквивалентными в точке m* , если найдутся такой локальный диффеоморфизм (1.7) некоторой окрестности U точки m , оставляющий точку m неподвижной:

$$f(m) = m, \quad (1.12)$$

и такая гладкая функция c , что для форм (1.4) и (1.11) справедливо соотношение

$$\Pi(f^*\omega_2) = c\tilde{\omega}_2. \quad (1.13)$$

2. Характеристические расслоения и их производные. *Пфаффиан* уравнения (1.1) вычисляется по формуле

$$\text{Pf}(\omega_2) = -C^2 + BD - AE.$$

На протяжении всей статьи мы предполагаем, что во всей области определения уравнения (1.1) его пфаффиан или знакопостоянен или тождественно равен нулю. Иными словами, все рассматриваемые ниже уравнения Монжа–Ампера имеют постоянный тип.

Комплексным векторным характеристическим расслоением H_j , $j = 1, 2$, уравнения (1.1) называется подрасслоение комплексного касательного расслоения $T^C\mathbb{R}^5$, слой $H_j(m)$ которого в каждой точке $m \in \mathbb{R}^5$ определяется равенством

$$H_j(m) = \{\xi \in T_m^C\mathbb{R}^5 \mid \xi \lrcorner (\omega_2 - \lambda_j \omega_1) = 0, \xi \lrcorner \omega_0 = 0\}. \quad (2.1)$$

Здесь λ_j – корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + \text{Pf}(\omega_2) = 0. \quad (2.2)$$

Для тех точек $u \in \mathbb{R}^5$, в которых

$$\text{Pf}(\omega_2)(u) < 0 \quad (2.3)$$

либо

$$\text{Pf}(\omega_2)(u) = 0, \quad (2.4)$$

т.е. уравнение (1.1) неэллиплично, корни уравнения (2.2) вещественны:

$$\lambda_j = (-1)^{3-j} \Delta, \quad (2.5)$$

где $j = 1, 2$ и

$$\Delta = \sqrt{|\text{Pf}(\omega_2)|}. \quad (2.6)$$

Для тех точек $u \in \mathbb{R}^5$, в которых

$$\text{Pf}(\omega_2)(u) > 0, \quad (2.7)$$

т.е. уравнение (1.1) эллиплично, корни уравнения (2.2) комплексны:

$$\lambda_j = (-1)^{3-j} i \Delta, \quad (2.8)$$

где i – мнимая единица и $j = 1, 2$.

Можно показать, что характеристическое расслоение H_j порождается векторными полями

$$\begin{aligned} e_{j1} &= E \left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} \right) - D \frac{\partial}{\partial p} + (C - \lambda_j) \frac{\partial}{\partial q}, \\ e_{j2} &= E \left(\frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z} \right) + (C + \lambda_j) \frac{\partial}{\partial p} - B \frac{\partial}{\partial q}, \\ e_{j3} &= B \left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} \right) + (C - \lambda_j) \left(\frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z} \right) - A \frac{\partial}{\partial p}, \\ e_{j4} &= (C + \lambda_j) \left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} \right) + D \left(\frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z} \right) - A \frac{\partial}{\partial q}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

среди которых ровно два линейно независимых в каждой точке m пространства $\mathbb{R}^5$. Ясно, что если $\text{Pf}(\omega_2)(m) = 0$, то $H_1(m) = H_2(m)$.

Следуя работе Т. Моримото [3], рассмотрим производные $H_j^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots$, комплексных векторных подрасслоений H_j расслоения $T^C \mathbb{R}^5$. *Производная подрасслоения $H_j^{(k)}$* определяется следующим образом: $H_j^{(0)} = H_j$; слой $H_j^{(k)}(m)$ расслоения $H_j^{(k)}$ над точкой $m \in \mathbb{R}^5$ является векторным подпространством в $T_m^C \mathbb{R}^5$, порожденным векторами $X(m)$ и $[Y, Z](m)$, где X, Y – произвольные локальные сечения $H_j^{(k-1)}$, а Z – произвольное локальное сечение H_j . В каждой точке m ситуация исчерпывается следующими пятью случаями:

$$\begin{aligned}
 (0) \quad & H_j^{(1)}(m) = H_j(m); \\
 (1) \quad & H_j(m) \subsetneq H_j^{(1)}(m) = H_j^{(2)}(m), \quad \dim_C H_j^{(1)}(m) = 3; \\
 (2) \quad & H_j(m) \subsetneq H_j^{(1)}(m) \subsetneq H_j^{(2)}(m) = H_j^{(3)}(m), \\
 & \dim_C H_j^{(1)}(m) = 3, \quad \dim_C H_j^{(2)}(m) = 4; \\
 (3) \quad & H_j(m) \subsetneq H_j^{(1)}(m) \subsetneq H_j^{(2)}(m) \subsetneq H_j^{(3)}(m) = T_m^C \mathbb{R}^5, \\
 & \dim_C H_j^{(1)}(m) = 3, \quad \dim_C H_j^{(2)}(m) = 4; \\
 (4) \quad & H_j(m) \subsetneq H_j^{(1)}(m) \subsetneq H_j^{(2)}(m) = T_m^C \mathbb{R}^5, \quad \dim_C H_j^{(1)}(m) = 3.
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Будем говорить, что уравнение Монжа–Ампера (1.1) *принадлежит классу $H_{k,l}$ в точке m* ($k, l = 0, 1, 2, 3, 4$, $k \geq l$), если для одного из расслоений H_1 и H_2 имеет место случай (k) , а для другого – случай (l) .

Для последующего изложения важно, что классы $H_{k,l}$ инвариантны относительно контактных диффеоморфизмов. Это вытекает из следующего утверждения.

ЛЕММА 2. *Пусть уравнения (1.1) и (1.10) контактно эквивалентны в точке m , и пусть эта эквивалентность осуществляется посредством диффеоморфизма (1.7). Если H_j и $\tilde{H}_j$ ($j = 1, 2$) – характеристические расслоения уравнений (1.1) и (1.10) соответственно, a – коэффициент из условия (1.8) и*

$$k(j) = \begin{cases} j, & \text{если } a > 0, \\ 3 - j, & \text{если } a < 0, \end{cases} \tag{2.11}$$

то

$$f_*(H_j(u)) = \tilde{H}_{k(j)}(f(u)) \tag{2.12}$$

и

$$f_*(H_1^{(l)}(u) \cap H_2^{(r)}(u)) = \tilde{H}_{k(1)}^{(l)}(f(u)) \cap \tilde{H}_{k(2)}^{(r)}(f(u)) \tag{2.13}$$

для всех $u \in U$ и $l \geq 0$, $r \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведено в п. 4.

3. Постановка задачи и формулировка основных результатов. Рассмотрим задачу о локальной контактной классификации уравнений Монжа–Ампера в следующей формулировке: *найти эффективно проверяемые условия, выполнение которых ведет к контактной эквивалентности заданных уравнений (1.1) и (1.10).*

Эта задача восходит к ряду работ Софуса Ли семидесятых–восемидесятых годов прошлого века: “Kurzes Résumé mehrerer neuer Theorien” [4, с. 1–4], “Neue Integrationsmethode der Monge–Ampèreschen Gleichung” [4, с. 287–294], “Untersuchungen üß Differentialgleichungen” [4, с. 537–547]. В частности, в этих работах поставлены вопросы о контактной эквивалентности уравнения (1.1) уравнению (1.10) с постоянными $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$, $\tilde{D}$, $\tilde{E}$, а также уравнению второго порядка, линейному относительно производных. Настоящая работа в основном посвящена решению этих вопросов. В ней доказано несколько классификационных результатов, в которых условия контактной линейаризуемости уравнений Монжа–Ампера формулируются в терминах характеристических расслоений и их производных.

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. *Пусть в некоторой окрестности точки $m \in \mathbb{R}^5$ уравнение (1.1) принадлежит классу $H_{k,l}$, где $0 < l < k < 2$. Тогда в этой точке уравнение (1.1) контактно эквивалентно уравнению Монжа–Ампера вида*

$$\tilde{A} + z_{xx} + \varepsilon z_{yy} = 0, \quad (3.1)$$

где $\varepsilon = \operatorname{sgn}(\operatorname{Pf}(\omega_2))$ и $\tilde{A} = \tilde{A}(x, y, z_x, z_y, z)$ – некоторая гладкая функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведено в п. 5.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть пфаффиан уравнения (1.1) равен нулю и принадлежит классу $H_{2,2}$ в некоторой окрестности точки $m \in \mathbb{R}^5$. Тогда уравнение (1.1) локально эквивалентно эволюционному уравнению второго порядка вида*

$$z_y = v(x, y, z, z_x, z_{xx}), \quad (3.2)$$

где v – некоторая гладкая функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведено в п. 5.

Положим

$$h_j^{(2)} = H_{3-j}^{(2)} \cap H_j \quad (3.3)$$

для $j = 1, 2$ и

$$h^{(1)} = H_1^{(1)} \cap H_2^{(1)}. \quad (3.4)$$

ЛЕММА 3. *Пусть в некоторой области $U \subseteq \mathbb{R}^5$ уравнение (1.1) принадлежит классу $H_{2,2}$ и имеет отличный от нуля пфаффиан. Тогда*

$$L_j = h^{(1)} \oplus h_j^{(2)} \quad (3.5)$$

является двумерным гладким комплексным векторным подрасслоением в $T^C U$ для $j = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведено в п. 4.

ТЕОРЕМА 1. Пусть в некоторой окрестности точки $t \in \mathbb{R}^5$ уравнение (1.1) принадлежит классу $H_{2,2}$ и имеет отличный от нуля пфаффиан. Уравнение (1.1) контактно эквивалентно в этой точке уравнению Монжа–Ампера вида (3.1) с

$$\tilde{A} = A_0(x, y, z) + A_1(x, y, z)z_x + A_2(x, y, z)z_y$$

тогда и только тогда, когда подрасслоения (3.5) инволютивны для $j = 1, 2$ в некоторой окрестности этой точки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведено в п. 6.

ТЕОРЕМА 2. Уравнение (1.1) контактно эквивалентно в точке t уравнению Монжа–Ампера вида

$$z_{xx} + \varepsilon z_{yy} = 0, \quad \varepsilon = \operatorname{sgn}(\operatorname{Pf}(\omega_2)), \quad (3.6)$$

тогда и только тогда, когда оно в некоторой окрестности этой точки принадлежит или классу $H_{1,1}$ (в случае ненулевого пфаффиана) или классу $H_{0,0}$ (в случае нулевого пфаффиана).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО в случае аналитических уравнений Монжа–Ампера изложено в работе [3]. В случае отрицательного и нулевого пфаффиана теорема фактически доказана в монографии [5, п. 36, 43]. В случае, когда уравнение имеет хотя бы одну контактную инфинитезимальную симметрию и отличный от нуля пфаффиан, теорема доказана в работах [6] и [7]. В общем случае доказательство проведено в п. 7.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Следует отметить, что условия всех сформулированных выше классификационных утверждений являются эффективно проверяемыми. Более того, в конечном итоге их проверка требует выполнения лишь конечного числа операций дифференцирования и обычных арифметических действий над комплексными числами. Этот факт позволяет автоматизировать проверку указанных условий, используя системы компьютерной алгебры (например, REDUCE 3.3 вместе с библиотекой EXCALC).

4. Свойства характеристических расслоений. Двойственным образом по отношению к определению (2.1) векторных расслоений H_j определяются ковекторные расслоения H_j^* . Комплексным ковекторным характеристическим расслоением H_j^* , $j = 1, 2$, уравнения (1.1) называется подрасслоение комплексного кокасательного расслоения $T^*C\mathbb{R}^5$, слои которого $H_j^*(m)$ в каждой точке $m \in \mathbb{R}^5$ определяются равенством

$$H_j^*(m) = \{\omega \in T_m^*C\mathbb{R}^5 \mid \omega \wedge (\omega_2 + \lambda_j \omega_1) = 0\}. \quad (4.1)$$

ЛЕММА 4. Пусть ω – произвольная эффективная 2-форма. Тогда для любых векторных полей g_1 и g_2 таких, что $g_1 \lrcorner \omega = g_2 \lrcorner \omega = 0$, в тех точках $m \in \mathbb{R}^5$, где ω отлична от нуля, справедливо равенство

$$\omega_1(g_1, g_2) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как форма ω эффективна, то по определению (1.6) $\omega \wedge \omega_1 = 0$. Умножим левую и правую части этого равенства внутренним образом на g_1 . По условию леммы получим

$$(g_1 \lrcorner \omega) \wedge \omega_1 + \omega \wedge (g_1 \lrcorner \omega_1) = \omega \wedge (g_1 \lrcorner \omega_1) = 0.$$

В свою очередь умножим внутренним образом левую и правую части полученного равенства на g_2 . Согласно условию доказываемой леммы

$$(g_2 \lrcorner \omega) \wedge (g_1 \lrcorner \omega_1) + \omega_1(g_1, g_2)\omega = \omega_1(g_1, g_2)\omega = 0.$$

Поскольку $\omega \neq 0$, то отсюда вытекает $\omega_1(g_1, g_2) = 0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Для векторных и ковекторных характеристических расслоений H_j и H_j^* справедливы следующие свойства:

- (a) H_j – двумерное комплексное подрасслоение в $T^C\mathbb{R}^5$ для $j = 1, 2$;
- (b) если линейные формы ω и $\tilde{\omega}$ независимы и принадлежат характеристическому расслоению H_j^* , то

$$\omega \wedge \tilde{\omega} = c(\omega_2 + \lambda_j \omega_1),$$

где c – отличный от нуля скаляр, а λ_j определено посредством (2.3)–(2.8);

- (c) векторы $g_1 \in H_1$ и $g_2 \in H_2$ косоортогональны относительно ω_1 , т.е.

$$\omega_1(g_1, g_2) = 0;$$

- (d) имеет место представление

$$H_j^*(m) = \left\{ \omega \in T_m^*C\mathbb{R}^5 \left| \frac{\partial}{\partial z} \lrcorner \omega = 0, \quad g \lrcorner \omega = 0 \quad \text{для любого } g \in H_{3-j}(m) \right. \right\};$$

- (e) H_j^* – двумерное комплексное подрасслоение в $T^*C\mathbb{R}^5$ для $j = 1, 2$;
- (f) отображение

$$\chi: H_j \ni g \mapsto g \lrcorner \omega_1 \in H_j^* \tag{4.2}$$

является изоморфизмом комплексных векторных расслоений H_j и H_j^* ;

- (g) ковекторы $\alpha_1 \in H_1^*$ и $\alpha_2 \in H_2^*$ косоортогональны относительно ω_1 , т.е.

$$\omega_1 \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 = 0;$$

- (h) если в точке $m \in \mathbb{R}^5$ выполнено неравенство $\text{Pf}(\omega_2) \big|_m \neq 0$, то

$$(H_1 \cap H_2) \big|_m = 0, \quad (H_1^* \cap H_2^*) \big|_m = 0;$$

- (i) если в точке $m \in \mathbb{R}^5$ выполнено неравенство (2.3) или равенство (2.4), то

$$\overline{H}_j \big|_m = H_j \big|_m, \quad \overline{H}_j^* \big|_m = H_j^* \big|_m$$

для $j = 1, 2$; если в точке $m \in \mathbb{R}^5$ выполнено неравенство (2.7), то

$$\overline{H}_j \big|_m = H_{3-j} \big|_m, \quad \overline{H}_j^* \big|_m = H_{3-j}^* \big|_m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) То, что H_j – двумерное векторное подрасслоение касательного расслоения $T^C\mathbb{R}^5$, вытекает из определения (2.1), ибо соответствующая покомпонентная запись этого определения в системе локальных координат представляет собой систему пяти линейных уравнений, среди которых ровно три независимых.

(б) Это свойство вытекает из определения (4.1) и известного признака делимости кососимметрических форм [8, § 14].

(с) Рассмотрим два случая: $\Delta \neq 0$ и $\Delta = 0$ (см. (2.6)).

В случае $\Delta \neq 0$ по определению (2.1) имеем, с одной стороны,

$$\lambda_1\omega_1(g_1, g_2) = \lambda_1g_2 \lrcorner (g_1 \lrcorner \omega_1) = \omega_2(g_1, g_2),$$

а с другой стороны,

$$\lambda_2\omega_1(g_1, g_2) = -\lambda_2g_1 \lrcorner (g_2 \lrcorner \omega_1) = -\omega_2(g_2, g_1) = \omega_2(g_1, g_2).$$

Следовательно, $(\lambda_1 - \lambda_2)\omega_1(g_1, g_2) = 0$ и $\omega_1(g_1, g_2) = 0$ согласно (2.3)–(2.8).

В случае $\Delta = 0$ H_1 и H_2 совпадают. Если g_1 и g_2 лежат в H_1 , то по определению (2.1) $g_1 \lrcorner \omega_2 = g_2 \lrcorner \omega_2 = 0$. Так как форма ω_2 эффективна и отлична от нуля, то по лемме 4 $\omega_1(g_1, g_2) = 0$.

(д) Пусть $\omega \in H_j^*(m)$. Очевидно, что $\frac{\partial}{\partial z} \lrcorner (\omega_2 + \lambda_j\omega_1) = 0$. Отсюда и из определения (4.1) получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \lrcorner \omega \right) (\omega_2 + \lambda_j\omega_1) = 0.$$

Так как $\omega_2 + \lambda_j\omega_1 \neq 0$, то

$$\frac{\partial}{\partial z} \lrcorner \omega = 0. \quad (4.3)$$

По определению (2.1) для $g \in H_{3-j}(m)$ имеем $g \lrcorner (\omega_2 + \lambda_j\omega_1) = 0$. Поэтому если $\omega \in H_j^*(m)$, то согласно (4.1) отсюда выводим $(g \lrcorner \omega)(\omega_2 + \lambda_j\omega_1) = 0$. Так как $\omega_2 + \lambda_j\omega_1 \neq 0$, то

$$g \lrcorner \omega = 0. \quad (4.4)$$

Таким образом, из (4.4) и (4.3) вытекает включение

$$H_j^*(m) \subseteq \left\{ \omega \in T_m^*C\mathbb{R}^5 \mid \frac{\partial}{\partial z} \lrcorner \omega = 0, g \lrcorner \omega = 0 \text{ для любого } g \in H_{3-j}(m) \right\}. \quad (4.5)$$

Пусть ω является элементом правой части включения (4.5). Тогда согласно (2.1)

$$h \lrcorner (\omega \wedge (\omega_2 + \lambda_j\omega_1)) = 0 \quad (4.6)$$

для всех $h \in (H_{3-j} \oplus \mathbb{R}^1 \frac{\partial}{\partial z})(m)$. По свойству (а) расслоение $H_{3-j} \oplus \mathbb{R}^1 \frac{\partial}{\partial z}$ трехмерно. Следовательно, для 3-формы из левой части (4.6) получаем $\omega \wedge (\omega_2 + \lambda_j\omega_1) = 0$ в силу пятимерности слоя касательного расслоения $T^C\mathbb{R}^5$. Таким образом, справедливо обратное по отношению к (4.5) включение

$$H_j^*(m) \supseteq \left\{ \omega \in T_m^*C\mathbb{R}^5 \mid \frac{\partial}{\partial z} \lrcorner \omega = 0, g \lrcorner \omega = 0 \text{ для любого } g \in H_{3-j}(m) \right\}.$$

(е) То, что H_j^* – двумерное подрасслоение кокасательного расслоения $T^*C\mathbb{R}^5$, вытекает из представления (d), ибо покомпонентная запись в локальной системе координат определения множества в правой части этого представления является системой трех независимых линейных уравнений.

(f) Если $g \in H_j$, то по свойствам (d) и (с) $g \mapsto \omega_1 \in H_j^*$, т.е. рассматриваемое отображение определено корректно. Это отображение является мономорфизмом, так как согласно определению (2.1) H_j принадлежит $\ker(\omega_0)$, а форма ω_1 на $\ker(\omega_0)$ невырождена. Поскольку согласно свойствам (а) и (е) как H_j , так и H_j^* двумерны, то это отображение является изоморфизмом векторных расслоений.

(g) В силу (f) найдутся векторы $g_1 \in H_1$ и $g_2 \in H_2$, для которых $\alpha_1 = g_1 \mapsto \omega_1$, $\alpha_2 = g_2 \mapsto \omega_1$. Поскольку пространство $\mathbb{R}^5$ пятимерно, то $\omega_1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_1 = 0$. Домножив это равенство внутренним образом на $g_1 \wedge g_2$, согласно (с) получим

$$\omega_1 \wedge (g_1 \mapsto \omega_1) \wedge (g_2 \mapsto \omega_1) = 0.$$

(h) Сначала докажем рассматриваемое свойство для H_1 и H_2 . Пусть $g_1 \in H_1$, $g_2 \in H_2$ и $g_1 = g_2$. Тогда по определению (2.1) характеристических векторов

$$0 = g_1 \mapsto \omega_2 - g_2 \mapsto \omega_2 = \lambda_1 g_1 \mapsto \omega_1 - \lambda_2 g_2 \mapsto \omega_1,$$

откуда выводим $(\lambda_1 - \lambda_2)g_2 \mapsto \omega_1 = 0$. В силу (2.3)–(2.8) $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$. Согласно определению (2.1) H_2 принадлежит $\ker(\omega_0)$, а форма ω_1 на $\ker(\omega_0)$ невырождена, откуда заключаем, что $g_2 = 0$, а следовательно, и $g_1 = 0$.

Для H_1^* и H_2^* справедливость свойства (g) вытекает из справедливости этого свойства для H_1 , H_2 и свойства (f).

(i) По определению (2.1) для $\xi \in H_j(m)$ имеем

$$0 = \overline{\xi \mapsto \omega_0} = \bar{\xi} \mapsto \bar{\omega}_0 = \bar{\xi} \mapsto \omega_0$$

и

$$0 = \overline{\xi \mapsto (\omega_2 - \lambda_j \omega_1)} = \bar{\xi} \mapsto \overline{(\omega_2 - \lambda_j \omega_1)} = \bar{\xi} \mapsto (\omega_2 - \bar{\lambda}_j \omega_1).$$

Согласно (2.5) в случае (2.3), (2.4) имеем $\bar{\lambda}_j = \lambda_j$ и, следовательно, $\bar{\xi} \in H_j(m)$. Согласно (2.8) в случае (2.7) имеем $\bar{\lambda}_j = \lambda_{3-j}$ и, следовательно, $\bar{\xi} \in H_{3-j}(m)$. Тем самым свойство (i) доказано для векторных характеристических расслоений. Справедливость этого свойства для ковекторных характеристических расслоений вытекает теперь из свойства (f). Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Пусть пфаффиан уравнения (1.1) отличен от нуля в области $U \subseteq \mathbb{R}^5$. Тогда для всех точек $m \in U$ и $j = 1, 2$

$$\dim_C H_j^{(1)}(m) = 3, \quad (4.7)$$

причем

$$\omega_0 \mid H_j^{(1)}(m) \neq 0. \quad (4.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению (2.1) характеристического векторного расслоения H_j

$$\omega_0 \big|_{H_j} = 0. \quad (4.9)$$

Пусть ξ_{j1}, ξ_{j2} – базисные векторные поля этого расслоения в некоторой подобласти V из U . Тогда по свойству скобки Ли [9, п. 2.25 (f)] в силу (4.9) и (1.5)

$$[\xi_{j1}, \xi_{j2}] \lrcorner \omega_0 = -d\omega_0(\xi_{j1}, \xi_{j2}) = \omega_1(\xi_{j1}, \xi_{j2}).$$

Поскольку ограничение формы ω_1 на $\ker(\omega_0)$ невырождено, то в силу леммы 5, (с) и (h), заключаем, что $\omega_1(\xi_{j1}, \xi_{j2}) \neq 0$, ибо в противном случае для ω_1 существовало бы трехмерное изотропное пространство. Поэтому

$$\omega_0([\xi_{j1}, \xi_{j2}]) \neq 0. \quad (4.10)$$

Отсюда вытекает неравенство (4.8). Из (4.10) и (4.9) заключаем, что

$$[\xi_{j1}, \xi_{j2}](m) \notin H_j(m) \quad (4.11)$$

для всех $m \in V$. В силу того, что по определению $H_j^{(1)}$

$$\dim_C H_j^{(1)}(m) \leq 3,$$

из (4.11) выводим, что равенство (4.7) справедливо для всех $m \in V$. Подобласть $V \subseteq U$ выбрана произвольно, поэтому (4.7) выполнено и для всех $m \in U$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. В условиях леммы 6 для всех точек $m \in U$ и $j = 1, 2$

$$T_m^C \mathbb{R}^5 = H_j^{(1)}(m) \oplus H_{3-j}(m).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из лемм 6 и 5 (h).

СЛЕДСТВИЕ 3. В условиях леммы 6 пересечение (3.4) является гладким одномерным комплексным векторным расслоением над U , для которого

$$\omega_0(\xi) \neq 0 \quad (4.12)$$

во всех точках $m \in U$ и $\xi \in h^{(1)}(m)$, $\xi \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку по теореме о размерности суммы линейных подпространств

$$\dim_C h^{(1)} = \dim_C H_1^{(1)} + \dim_C H_2^{(1)} - \dim_C (H_1^{(1)} + H_2^{(1)}),$$

то одномерность $h^{(1)}$ вытекает из леммы 6, следствия 2 и пятимерности пространства $\mathbb{R}^5$. Неравенство (4.12) вытекает из (4.8) и (2.1). Следствие доказано.

Рассмотрим два вещественных многообразия, N_1 и N_2 , для которых существует диффеоморфизм

$$f: N_1 \rightarrow N_2. \quad (4.13)$$

Пусть на N_1 задано гладкое комплексное векторное подрасслоение H комплексного касательного расслоения $T^C N_1$. Справедлива

ЛЕММА 7. Для всех точек $m \in N_1$

$$f_*(H^{(k)}(m)) = (f_*(H))^{(k)}(f(m)) \quad (4.14)$$

при $k = 0, 1, 2, \dots$. Иными словами, образ любой производной подрасслоения H совпадает с соответствующей производной образа этого подрасслоения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится индукцией по порядку производной k . При $k = 0$ равенство (4.14) тривиально. Пусть это равенство выполнено для всех $m \in N_1$ при некотором $k \geq 0$. Предположим, что в некоторой окрестности U точки m определены комплексные векторные поля ξ и η такие, что

$$\xi(u) \in H(u), \quad \eta(u) \in H^{(k)}(u) \quad (4.15)$$

для всех $u \in U$. Тогда по свойству скобки Ли [9, п. 1.55]

$$f_*([\xi, \eta](m)) = [f_*(\xi), f_*(\eta)](f(m)). \quad (4.16)$$

В силу предположения индукции

$$f_*(\xi)(f(m)) \in f_*(H)(f(m)), \quad f_*(\eta)(f(m)) \in f_*(H^{(k)})(f(m)).$$

Отсюда по определению производной распределения порядка $k + 1$

$$[\xi, \eta](m) \in H^{(k+1)}(m), \quad (4.17)$$

$$[f_*(\xi), f_*(\eta)](f(m)) \in (f_*(H))^{(k+1)}(f(m)). \quad (4.18)$$

Из (4.18) и (4.16) заключаем, что

$$f_*([\xi, \eta](m)) \in (f_*(H))^{(k+1)}(f(m)) \quad (4.19)$$

для любых векторных полей ξ и η , удовлетворяющих включениям (4.15). Поскольку отображение (4.13) является диффеоморфизмом, то из (4.19) и (4.17) по определению производной распределения порядка $k + 1$ заключаем, что

$$f_*(H^{(k+1)}(m)) = (f_*(H))^{(k+1)}(f(m))$$

для всех $m \in N_1$. Следовательно, по принципу математической индукции (4.14) справедливо для всех $k \geq 0$. Лемма доказана.

Для любого комплексного распределения H на вещественном многообразии N имеют место две следующие леммы.

ЛЕММА 8. Для всех $m \in N$ и $k \geq 0$

$$\overline{H}^{(k)}(m) = \overline{H^{(k)}}(m).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из определения производных подрасслоения и того, что для любых векторных полей ξ и η на многообразии N $[\bar{\xi}, \bar{\eta}] = \overline{[\xi, \eta]}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 9. Если $\dim_C H = l$ и $\overline{H} = H$, то в некоторой окрестности всякой точки $m \in N$ найдется l линейно независимых вещественных векторных полей $e_1, \dots, e_l$, являющихся базисными для ограничения H на эту окрестность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $e_1, \dots, e_l$ – комплексные векторные поля, порождающие H над некоторой окрестностью точки m и лежащие в H , то по условию леммы векторные поля $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_l$ также порождают H и лежат в нем. Но тогда и векторные поля

$$\xi_{2k} = \frac{e_k + \bar{e}_k}{2}, \quad \xi_{2k+1} = \frac{e_k - \bar{e}_k}{2i}, \quad k = 1, \dots, l,$$

тоже порождают распределение H и лежат в нем. Кроме того, по определению комплексного сопряжения ясно, что эти векторные поля вещественны. А так как H l -мерно, то среди $2l$ векторных полей ξ_k не более l полей могут быть независимы одновременно. Лемма доказана.

Вернемся к уравнению Монжа–Ампера (1.1) и его векторным комплексным характеристическим расслоением H_j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Доказательство равенства (2.12) см. в [2, теорема 4]. Докажем равенство (2.13).

Отображение f_* является изоморфизмом касательных пространств, поэтому

$$f_* \left(H_1^{(l)}(u) \cap H_2^{(r)}(u) \right) = f_* \left(H_1^{(l)}(u) \right) \cap f_* \left(H_2^{(r)}(u) \right)$$

для всех $u \in U$. В силу леммы 7

$$f_* \left(H_j^{(l)}(u) \right) = \left(f_*(H_j) \right)^{(l)}(f(u)).$$

Сопоставляя два этих соотношения с (2.12), получаем (2.13). Лемма доказана.

ЛЕММА 10. Пусть в некоторой области $U \in \mathbb{R}^5$ уравнение (1.1) принадлежит классу $H_{2,2}$ и имеет отличный от нуля пфаффиан. Тогда пересечение (3.3) является гладким одномерным комплексным векторным расслоением над U для $j = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию 2

$$T_m^C \mathbb{R}^5 = H_j(m) + H_{3-j}^{(2)}(m).$$

Следовательно, по теореме о размерности суммы линейных подпространств

$$\dim_C h_j^{(2)}(m) = \dim_C H_{3-j}^{(2)} + \dim_C H_j - 5. \quad (4.20)$$

По определению класса $H_{2,2}$ первое слагаемое в правой части (4.20) равно четырем, а второе равно двум по лемме 5 (а). Поэтому левая часть в (4.20) равна единице. Очевидно, что пересечение двух векторных гладких подрасслоений касательного комплексного расслоения, имеющее в каждой точке одну и ту же размерность 1, является гладким векторным подрасслоением размерности один. Лемма доказана.

ЛЕММА 11. Пусть в некоторой области $U \in \mathbb{R}^5$ уравнение (1.1) имеет отличный от нуля пфаффиан. Тогда для всех точек $m \in U$ справедливо разложение

$$T_m^C \mathbb{R}^5 = H_1(m) \oplus H_2(m) \oplus h^{(1)}(m). \quad (4.21)$$

Здесь H_1 и H_2 определены посредством (2.1), а $h^{(1)}$ – посредством (3.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 5 (h)

$$H_1 \cap H_2 = 0, \quad (4.22)$$

а в силу неравенства (4.12) и определений (2.1) и (3.4) для $j = 1, 2$

$$H_j \cap h^{(1)} = 0. \quad (4.23)$$

Поскольку $\mathbb{R}^5$ пятимерно, то из (4.22) и (4.23) по лемме 5 (a) и следствию 3 вытекает (4.21). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Пусть уравнение (1.1) принадлежит классу $H_{2,2}$ в области U . В силу (3.3) и (4.23) для $j = 1, 2$

$$h^{(1)} \cap h_j^{(2)} = 0.$$

Следовательно, по лемме 10 и следствию 3 сумма (3.5) является двумерным гладким комплексным векторным подрасслоением в $T^C U$ для $j = 1, 2$. Лемма доказана.

5. Доказательство основной леммы. Прежде чем приступить к непосредственному доказательству основной леммы, установим ряд вспомогательных результатов.

ЛЕММА 12. Пусть в некоторой окрестности V точки $m \in \mathbb{R}^5$ определены две вещественные гладкие функции, F_1 и F_2 , такие, что

$$dF_1 \wedge dF_2 \wedge \omega_0 \big|_m \neq 0, \quad (5.1)$$

$$dF_1 \wedge dF_2 \wedge \omega_1 \wedge \omega_0 \big|_u = 0 \quad (5.2)$$

для всех $u \in V$.

Тогда в некоторой окрестности U точки m определен контактный диффеоморфизм (1.7), для которого справедливо свойство (1.12) и

$$f^*(dF_1) = dx, \quad f^*(dF_2) = dy. \quad (5.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим идеал кольца дифференциальных форм на V , порожденный формами dF_1 , dF_2 и ω_0 . Поскольку по определению (1.5) $d\omega_0 = \omega_1$, то из (5.2) вытекает, что этот идеал замкнут относительно операции внешнего дифференцирования. По теореме Фробениуса [9, п. 1.60, п. 2.30] в некоторой окрестности точки m определена гладкая функция F_0 такая, что

$$\omega_0 = a_0 dF_0 + a_1 dF_1 + a_2 dF_2$$

в этой окрестности.

Из (5.1) следует, что $a_0 \neq 0$ в некоторой окрестности точки m , поэтому

$$dF_0 - F_3 dF_1 - F_4 dF_2 = a\omega_0, \quad (5.4)$$

где

$$a = \frac{1}{a_0}, \quad F_3 = -\frac{a_1}{a_0}, \quad F_4 = -\frac{a_2}{a_0}.$$

Равенство (5.4) позволяет заключить, что функции $F_0, \dots, F_4$ независимы в некоторой окрестности точки m [8, с. 237].

Определим отображение f_1 соотношениями

$$\begin{aligned} f_1^*(z) &= F_0, & f_1^*(x) &= F_1, & f_1^*(y) &= F_2, \\ f_1^*(p) &= F_3, & f_1^*(q) &= F_4. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Отображение f_1 является диффеоморфизмом некоторой окрестности точки m в силу независимости $F_0, \dots, F_4$. Этот диффеоморфизм является контактным согласно (5.4).

Пусть

$$\begin{aligned} m &= (x_0, y_0, p_0, q_0, z_0), \\ f_1(m) &= (x_1, y_1, p_1, q_1, z_1). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Определим отображение f_2 соотношениями

$$\begin{aligned} f_2^*(x) &= x - x_1 + x_0, & f_2^*(y) &= y - y_1 + y_0, \\ f_2^*(p) &= p - p_1 + p_0, & f_2^*(q) &= q - q_1 + q_0, \\ f_2^*(z) &= z - z_1 + z_0 + (x - x_1)(p_0 - p_1) + (y - y_1)(q_0 - q_1). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Это отображение является контактным диффеоморфизмом:

$$f_2^*(\omega_0) = dz + (p_0 - p_1) dx + (q_0 - q_1) dy - (p - p_1 + p_0) dx - (q - q_1 + q_0) dy = \omega_0,$$

и в соответствии с (5.6) и (5.7)

$$f_2 \circ f_1(m) = m. \quad (5.8)$$

Положим

$$f = (f_2 \circ f_1)^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1}.$$

Это отображение – контактный диффеоморфизм, так как является композицией контактных диффеоморфизмов. Из (5.7) и (5.5) вытекает (5.3), а из (5.8) вытекает (1.12). Лемма доказана.

ЛЕММА 13 (теорема Фробениуса–Ниренберга [10, с. 133]). *Пусть в некоторой окрестности U точки $m \in \mathbb{R}^5$ определено гладкое комплексное подрасслоение H касательного расслоения $T^C U$, $\dim_C H = n$. Если H и $H + \bar{H}$ инволютивны, а*

$$\dim_C (H(u) \cap \bar{H}(u)) = \text{const}$$

во всех точках этой окрестности, то в некоторой окрестности m определено $5 - n$ независимых комплекснозначных гладких функций $G_1, \dots, G_{5-n}$, дифференциалы которых обращаются в нуль на подрасслоении H .

ЛЕММА 14. Для произвольного контактного диффеоморфизма (1.7) справедливо равенство

$$\Pi \circ f^* \circ \Pi = \Pi \circ f^*.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всякой формы $\omega \in \Lambda^*(\mathbb{R}^5)$ по определению (1.9)

$$\Pi \circ f^* \circ \Pi(\omega) = \Pi \circ f^* \left(\omega - \omega_0 \wedge \left(\frac{\partial}{\partial z} \lrcorner \omega \right) \right) = \Pi \left(f^* \omega - f^* \omega_0 \wedge f^* \left(\frac{\partial}{\partial z} \lrcorner \omega \right) \right),$$

откуда согласно (1.8) и (1.9) выводим

$$\Pi \circ f^* \circ \Pi(\omega) = \Pi \circ f^*(\omega).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 15. Пусть заданы контактный диффеоморфизм (1.7), (1.8) и эффективная дифференциальная 2-форма ω_2 на U . Тогда

$$\text{Pf}(\Pi(f^* \omega_2)) = a^2 f^*(\text{Pf}(\omega_2)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению пфаффиана 2-формы $\Pi(f^* \omega_2)$

$$\Pi(f^* \omega_2) \wedge \Pi(f^* \omega_2) = \text{Pf}(\Pi(f^* \omega_2)) \omega_1 \wedge \omega_1,$$

где согласно (1.5) $\omega_1 = d\omega_0$ – дифференциал контактной формы ω_0 на $\mathbb{R}^5$. Следовательно, по определению (1.9)

$$f^* \omega_2 \wedge f^* \omega_2 \wedge \omega_0 = \text{Pf}(\Pi(f^* \omega_2)) \omega_1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_0,$$

откуда в силу (1.8) получаем

$$a^2 f^*(\omega_2 \wedge \omega_2 \wedge \omega_0) = \text{Pf}(\Pi(f^* \omega_2)) f^*(\omega_1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_0).$$

Поскольку по определению пфаффиана 2-формы ω_2

$$\omega_2 \wedge \omega_2 = \text{Pf}(\omega_2) \omega_1 \wedge \omega_1,$$

то окончательно выводим

$$a^2 f^*(\text{Pf}(\omega_2)) f^*(\omega_1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_0) = \text{Pf}(\Pi(f^* \omega_2)) f^*(\omega_1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_0).$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ЛЕММЫ. По условию доказываемой леммы и по определению (2.10) классов $H_{k,l}$ в некоторой окрестности V точки m определены инволютивные комплексные подрасслоения $H_j^{(2)}$, $j = 1, 2$, касательного расслоения $T^C V$, размерность которых не превосходит четырех. Следовательно, по лемме 13 для $j = 1, 2$ найдется комплекснозначная функция G_j , дифференциал которой отличен от нуля во всех точках $u \in V$:

$$dG_j \neq 0, \quad (5.9)$$

и обращается в нуль на векторах подрасслоения $H_j^{(2)}$:

$$dG_j \mid H_j^{(2)} = 0. \quad (5.10)$$

По лемме 5 (d) и определению (1.9) оператора Π из (5.10) вытекает, что для всех $u \in V$

$$\Pi(dG_j(u)) \in H_{3-j}^*(u). \quad (5.11)$$

В силу (5.11) и леммы 5 (b) существуют такая гладкая отличная от нуля на V функция c_j и сечение β_j расслоения $H_{3-j}^* \mid V$, что

$$\Pi(dG_j) \wedge \beta_j = c_j(\omega_2 + \lambda_j \omega_1). \quad (5.12)$$

А в силу леммы 5 (g) из (5.11) выводим

$$\omega_1 \wedge \Pi(dG_1) \wedge \Pi(dG_2) = 0,$$

откуда по определению (1.9)

$$dG_1 \wedge dG_2 \wedge \omega_1 \wedge \omega_0 \mid_u = 0. \quad (5.13)$$

В случае (2.3), (2.4) из лемм 5 (i) и 9 вытекает, что подрасслоение $H_j^{(2)}$ порождается вещественными векторными полями. Поэтому в силу (5.10) как вещественная, так и мнимая части функции G_j имеют дифференциалы, обращающиеся в нуль на подрасслоении $H_j^{(2)}$. Согласно (5.9), не ограничивая общности, можно считать, что вещественная часть dG_j отлична от нуля. Положив в рассматриваемом случае

$$F_j = \operatorname{Re} G_j, \quad j = 1, 2, \quad (5.14)$$

мы получим вещественную функцию, обладающую свойствами

$$dF_j \neq 0, \quad (5.15)$$

$$\Pi(dF_j(u)) \in H_{3-j}^*(u). \quad (5.16)$$

В случае (2.3) из (5.16) по лемме 5 (g) вытекает равенство

$$\omega_1 \wedge \Pi(dF_1) \wedge \Pi(dF_2) = 0,$$

из которого вытекает справедливость свойства (5.2). Справедливость неравенства (5.1) следует из (5.15), (5.16) и леммы 5 (h).

В случае (2.4) функции F_1 и F_2 , определенные в соответствии с (5.14), вообще говоря, независимыми не являются. Поэтому в этом случае определим функцию F_2 посредством (5.14), а функцию F_1 найдем из соотношения (5.2). Это соотношение представляет собой одно скалярное линейное уравнение первого порядка с одной неизвестной функцией F_1 . Известно, что такое уравнение имеет гладкое решение в некоторой окрестности точки m , причем за счет выбора начальных значений его можно выбрать так, чтобы выполнялось свойство (5.1).

Ясно, что для построенных описанным образом функций F_j , подобно (5.12), имеет место представление

$$\Pi(dF_j) \wedge \gamma_j = b_j(\omega_2 + \lambda_j \omega_1) \quad (5.17)$$

при $j = 1, 2$ в случае (2.3) и при $j = 2$ в случае (2.4). Здесь b_j – отличная от нуля на V вещественная функция, а γ_j – некоторое вещественное сечение расслоения $H_{3-j}^* \mid V$.

В случае (2.7) из леммы 5 (i) и свойства (5.10) вытекает

$$d\bar{G}_j \mid H_{3-j}^{(2)} = 0.$$

Это позволяет выбрать функции G_j таким образом, чтобы

$$\bar{G}_1 = G_2.$$

Положим

$$F_1 = \operatorname{Re} G_1, \quad F_2 = \operatorname{Im} G_1, \quad (5.18)$$

так что

$$G_1 = F_1 + iF_2, \quad G_2 = F_1 - iF_2. \quad (5.19)$$

Из (5.9), (5.11) и леммы 5 (h) следует неравенство

$$dG_1 \wedge dG_2 \wedge \omega_0 \mid_m \neq 0. \quad (5.20)$$

Подставив (5.19) в (5.20), получим, что для функций (5.18) справедливо свойство (5.1).

Таким образом, во всех трех случаях – (2.3), (2.4) и (2.7) – для указанных образом выбранных функций F_1 и F_2 выполнены все условия леммы 12. Согласно ей в некоторой окрестности U точки m определен такой контактный диффеоморфизм (1.7), для которого справедливы свойства (1.12) и (5.3).

В случае (2.3) из (5.17), (5.3) и (1.8) по лемме 14 вытекает

$$\begin{aligned} dx \wedge \Pi(f^* \gamma_1) &= f^* b_1 (\Pi(f^* \omega_2) + a f^* \lambda_1 \omega_1), \\ \Pi(f^* \gamma_2) \wedge dy &= f^* b_2 (\Pi(f^* \omega_2) + a f^* \lambda_2 \omega_1). \end{aligned} \quad (5.21)$$

По лемме 1 форма $\Pi(f^* \omega_2)$ эффeктивна. Поэтому из (5.21) и (1.6) выводим выражение

$$\Pi(f^* \omega_2) = s dx \wedge dy + t(dx \wedge dp + dq \wedge dy),$$

где s и t – некоторые вещественные гладкие коэффициенты. В силу (2.3) по лемме 15 заключаем, что $t \neq 0$. Следовательно,

$$\Pi(f^* \omega_2) = t(\tilde{A} dx \wedge dy + dx \wedge dp + dq \wedge dy), \quad (5.22)$$

где $\tilde{A} = s/t$.

Применив к левой и правой частям равенства (5.22) контактный диффеоморфизм g :

$$\begin{aligned} g^*x &= \frac{x - y + x_0 + y_0}{2}, & g^*y &= \frac{x + y - x_0 + y_0}{2}, \\ g^*p &= p - q + q_0, & g^*q &= p + q - p_0, \\ g^*z &= z - (x - x_0)\frac{p_0 - q_0}{2} - (y - y_0)\frac{p_0 + q_0}{2}, \end{aligned}$$

где $m = (x_0, y_0, p_0, q_0, z_0)$, по лемме 14 получим

$$\Pi(g^*(f^*\omega_2)) = g^*(t)\tilde{\omega}_2.$$

Здесь

$$\tilde{\omega}_2 = dp \wedge dy + \varepsilon dx \wedge dq + \tilde{A} dx \wedge dy \quad (5.23)$$

с $\varepsilon = -1$. Тем самым основная лемма в случае (2.3) доказана.

В случае (2.4) аналогичным образом получаем

$$\Pi(f^*\gamma_2) \wedge dy = f^*b_2\Pi(f^*\omega_2),$$

откуда по лемме 1 выводим выражение

$$\Pi(f^*\omega_2) = s dx \wedge dy + t dp \wedge dy, \quad (5.24)$$

где s и t – некоторые вещественные гладкие коэффициенты.

Не ограничивая общности, можно считать, что $t(m) \neq 0$. Действительно, если $t(m) = 0$, то в силу оценки (1.3) $s(m) \neq 0$. Применив к левой и правой частям (5.24) контактный диффеоморфизм g :

$$\begin{aligned} g^*x &= p - p_0 + x_0, & g^*y &= y, \\ g^*p &= x - x_0 + p_0, & g^*q &= q, \\ g^*z &= z + (x - x_0 + p_0)p, \end{aligned} \quad (5.25)$$

добьемся желаемого. Поэтому из (5.24) выводим (1.13), где $\tilde{A} = s/t$, $c = t$ и $\tilde{\omega}_2$ определено посредством (5.23) с $\varepsilon = 0$. Тем самым основная лемма в случае (2.4) доказана.

В случае (2.7) из (5.12), (5.19), (5.3) и (1.8) по лемме 14 вытекает

$$(dx + i dy) \wedge \Pi(f^*\beta_1) = f^*c_1(\Pi(f^*\omega_2) + af^*\lambda_1\omega_1),$$

откуда в силу вещественности $\Pi(f^*\omega_2)$ по лемме 1 выводим выражение

$$\Pi(f^*\omega_2) = s dx \wedge dy + t(dp \wedge dy + dx \wedge dq), \quad (5.26)$$

где s и t – некоторые вещественные гладкие коэффициенты. В силу (2.7) по лемме 15 заключаем, что $t \neq 0$. Следовательно, из (5.26) получаем (1.13), где $\tilde{A} = s/t$, $c = t$ и $\tilde{\omega}_2$ определено посредством (5.23) с $\varepsilon = 1$. Тем самым основная лемма полностью доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. По основной лемме в рассматриваемом случае уравнение (1.1) контактно эквивалентно в точке m уравнению вида

$$\tilde{A} + z_{xx} = 0, \quad (5.27)$$

где $\tilde{A} = \tilde{A}(x, y, p, q, z)$ (см. (1.2)). По условию это уравнение принадлежит классу $H_{2,2}$. В соответствии с (2.9) характеристическое расслоение $H = H_1 = H_2$ уравнения (5.27) порождается векторными полями

$$\frac{\partial}{\partial q}, \quad \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} - \tilde{A} \frac{\partial}{\partial p}. \quad (5.28)$$

В силу определения (2.10) принадлежность уравнения (5.27) классу $H_{2,2}$ равносильна неинволютивности системы векторных полей (5.28), что в свою очередь равносильно неравенству $\tilde{A}_q \neq 0$. Поэтому утверждение следствия 1 вытекает из теоремы о неявной функции.

6. Доказательство теоремы 1. Прежде чем приступить к непосредственному доказательству теоремы 1, проведем ряд подготовительных рассуждений.

Предположим, что во всех точках из некоторой окрестности рассматриваемой точки m уравнение (1.1) имеет отличный от нуля пфаффиан и принадлежит классу $H_{2,2}$. Тогда по основной лемме в точке m это уравнение контактно эквивалентно уравнению вида (3.1). Пусть функция $\tilde{A}$ определена в некоторой окрестности U точки m . Рассмотрим форму (5.23), где

$$\varepsilon = \operatorname{sgn}(\operatorname{Pf}(\omega_2)). \quad (6.1)$$

Из (2.9) вытекает, что векторное характеристическое расслоение $\tilde{H}_j$ уравнения (3.1) порождается векторными полями

$$\tilde{\xi}_{j1} = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} - \tilde{\lambda}_j \left(\frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z} \right) - \tilde{A} \frac{\partial}{\partial p}, \quad (6.2)$$

$$\tilde{\xi}_{j2} = -\tilde{\lambda}_j \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q}. \quad (6.3)$$

Здесь в соответствии с (2.3)–(2.8)

$$\tilde{\lambda}_j = (-1)^{3-j} \quad (6.4)$$

в случае $\operatorname{sgn}(\operatorname{Pf}(\omega_2)) = -1$ и

$$\tilde{\lambda}_j = (-1)^{3-j} i \quad (6.5)$$

в случае $\operatorname{sgn}(\operatorname{Pf}(\omega_2)) = 1$, где i – мнимая единица.

В каждой точке $u \in U$ производная $\tilde{H}_j^{(1)}$ порождена векторными полями (6.2), (6.3) и векторным полем

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_3 &= \tilde{\lambda}_j [\tilde{\xi}_{j1}, \tilde{\xi}_{j2}] + \tilde{A}_q \tilde{\xi}_{j2} \\ &= \tilde{\lambda}_j \left(2\tilde{\lambda}_j \frac{\partial}{\partial z} + (\tilde{A}_q - \tilde{\lambda}_j \tilde{A}_p) \frac{\partial}{\partial p} \right) + \tilde{A}_q \left(\frac{\partial}{\partial q} - \tilde{\lambda}_j \frac{\partial}{\partial p} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, поскольку в силу (6.4) и (6.5)

$$\tilde{\lambda}_j^2 = -\operatorname{sgn}(\operatorname{Pf}(\omega_2)), \quad (6.6)$$

то

$$\tilde{\xi}_3 = -2\varepsilon \frac{\partial}{\partial z} + \varepsilon p \tilde{A}_p \frac{\partial}{\partial p} + q \tilde{A}_q \frac{\partial}{\partial q}, \quad (6.7)$$

где ε определено посредством выражения (6.1).

По следствию 3 пересечение

$$\tilde{h}^{(1)} = \tilde{H}_1^{(1)} \cap \tilde{H}_2^{(1)} \quad (6.8)$$

является одномерным векторным расслоением. Векторное поле (6.7) принадлежит этому пересечению и отлично от нуля во всех точках u из U . Следовательно, векторное поле (6.7) служит базисным сечением для расслоения (6.8).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае уравнения (3.1) расслоение (6.8) порождено вещественным векторным полем (6.7). В общем случае уравнения (1.1) расслоения (3.4) из лемм 5 (i), 8 и 9 следует, что расслоение (3.4) также порождается вещественными векторными полями.

Исследуем частный случай уравнения (3.1), а именно

$$\tilde{A}(x, y, p, q, z) = A_0 + pA_1 + qA_2 + (p^2 + \varepsilon q^2)A_3, \quad (6.9)$$

где $A_k = A_k(x, y, z)$ для $k = 0, 1, 2, 3$ и ε определено в (6.1). Справедлива

ЛЕММА 16. Уравнение (3.1), (6.9) в любой точке $m \in \mathbb{R}^5$ контактно эквивалентно уравнению (3.1) с

$$\tilde{A}(x, y, p, q, z) = a_0 + pa_1 + qa_2, \quad (6.10)$$

где $a_k = a_k(x, y, z)$ для $k = 0, 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольную точку

$$m = (x_0, y_0, p_0, q_0, z_0), \quad (6.11)$$

лежащую в $\mathbb{R}^5$. Определим контактный диффеоморфизм (1.7) посредством выражений

$$f^*x = x, \quad f^*y = y, \quad f^*p = Z_x + pZ_z, \quad f^*q = Z_y + qZ_z, \quad f^*z = Z, \quad (6.12)$$

где $Z = Z(x, y, z)$ – некоторая функция (искомая). Отвечающая уравнению (3.1) форма (5.23) преобразуется под действием диффеоморфизма (6.12) следующим образом:

$$\Pi(f^*\tilde{\omega}_2) = \Pi(d(Z_x + pZ_z)) \wedge dy + \varepsilon dx \wedge \Pi(d(Z_y + qZ_z)) + f^*A dx \wedge dy,$$

где оператор Π определен соотношением (1.9). Таким образом,

$$\begin{aligned} \Pi(f^*(\tilde{\omega}_2)) &= Z_z(dp \wedge dy + \varepsilon dx \wedge dq) \\ &\quad + (Z_{xx} + \varepsilon Z_{yy} + 2pZ_{xz} + 2\varepsilon qZ_{yz} + (p^2 + \varepsilon q^2)Z_{zz} + f^*A) dx \wedge dy. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Используя (6.9) и (6.12), вычислим

$$f^* A = f^* A_0 + (Z_x + pZ_z)f^* A_1 + (Z_y + qZ_z)f^* A_2 + ((Z_x + pZ_z)^2 + \varepsilon(Z_y + qZ_z)^2)f^* A_3.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f^* A = f^* A_0 + Z_x f^* A_1 + Z_y f^* A_2 + (Z_x^2 + \varepsilon Z_y^2)f^* A_3 + pZ_z(f^* A_1 + 2Z_x f^* A_3) \\ + qZ_z(f^* A_2 + 2\varepsilon Z_y f^* A_3) + (p^2 + \varepsilon q^2)Z_z^2 f^* A_3. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Подставим (6.14) в правую часть (6.13):

$$\begin{aligned} \Pi(f^*(\tilde{\omega}_2)) = Z_z(dp \wedge dy + \varepsilon dx \wedge dq) \\ + (Z_{xx} + \varepsilon Z_{yy} + f^* A_0 + Z_x f^* A_1 + Z_y f^* A_2 + (Z_x^2 + \varepsilon Z_y^2)f^* A_3 \\ + p(2Z_{xz} + Z_z f^* A_1 + 2Z_z Z_x f^* A_3) + q(2\varepsilon Z_{yz} + Z_z f^* A_2 \\ + 2\varepsilon Z_z Z_y f^* A_3) + (p^2 + \varepsilon q^2)(Z_{zz} + Z_z^2 f^* A_3)) dx \wedge dy. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Для того чтобы коэффициент при мономе $dx \wedge dy$ в правой части (6.15) отвечал структуре правой части выражения (6.10), нужно, чтобы

$$Z_{zz} + Z_z^2 A_3(x, y, Z) = 0. \quad (6.16)$$

Для уравнения (6.16) зададим начальные значения на плоскости $z = z_0$:

$$Z(x, y, z_0) = z_0, \quad Z_z(x, y, z_0) = 1, \quad (6.17)$$

которые согласно (6.12) и (6.11) обеспечивают выполнение для f свойства (1.12). Существование в окрестности точки (6.11) функции $Z = Z(x, y, z)$, являющейся решением задачи (6.16), (6.17), вытекает из известных теорем существования для обыкновенных дифференциальных уравнений. Лемма доказана.

ЛЕММА 17. Для уравнения (3.1) расслоение

$$\tilde{h}_j^{(2)} = \tilde{H}_{3-j}^{(2)} \cap \tilde{H}_j \quad (6.18)$$

порождается векторным полем (6.3) для $j = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим явно расслоения (6.18) в случае уравнения (3.1). Исходя из выражений (6.2), (6.3) и (6.7), по определению второй производной расслоения $\tilde{H}_j$ ясно, что $\tilde{H}_j^{(2)}$ порождается векторными полями

$$\frac{\partial}{\partial x} - \tilde{\lambda}_j \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial p}, \quad \frac{\partial}{\partial q}, \quad \frac{\partial}{\partial z}. \quad (6.19)$$

Действительно, подрасслоение, порожденное этими векторными полями, инволютивно и содержит $\tilde{H}_j$ в качестве подрасслоения, поскольку векторы (6.2) и (6.3) выражаются через векторы (6.19). Отсюда по определению (3.3) находим, что $\tilde{h}_j^{(2)}$ порождается векторным полем (6.3) для $j = 1, 2$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть уравнение (1.1) контактно эквивалентно в точке m уравнению (3.1), (6.10). Это означает, что в некоторой окрестности U этой точки определен диффеоморфизм (1.7), обладающий свойствами (1.8), (1.12) и (1.13). По лемме 2

$$f_*(h^{(1)}(m)) = \tilde{h}^{(1)}(f(m)) \quad (6.20)$$

для подрасслоения (3.4) и

$$f_*(h_j^{(2)}(m)) = \tilde{h}_{k(j)}^{(2)}(f(m)) \quad (6.21)$$

при $j = 1, 2$ и $m \in U$ для подрасслоений (3.3), где $k(j)$ задано выражением (2.11).

В силу замечания 2 расслоение $\tilde{h}^{(1)}$ порождается векторным полем (6.7), а согласно лемме 17 расслоение $\tilde{h}_j^{(2)}$ порождается векторным полем (6.3). Поскольку

$$[\tilde{\xi}_{j2}, \tilde{\xi}_3] = \varepsilon \left(\tilde{A}_{pq} - \tilde{\lambda}_j \tilde{A}_{pp} \right) \frac{\partial}{\partial p} + \left(\tilde{A}_{qq} - \tilde{\lambda}_j \tilde{A}_{pq} \right) \frac{\partial}{\partial q}, \quad (6.22)$$

то из (6.10) вытекает, что

$$[\tilde{\xi}_{j2}, \tilde{\xi}_3] = 0,$$

т.е. расслоения

$$\tilde{L}_j = \tilde{h}^{(1)} \oplus \tilde{h}_j^{(2)} \quad (6.23)$$

инволютивны для $j = 1, 2$.

Инволютивность расслоения (6.23) и равенства (6.20), (6.21) по лемме 7 влекут за собой инволютивность подрасслоений (3.5) в окрестности U для $j = 1, 2$. Необходимость доказана.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть отвечающие рассматриваемому уравнению (1.1) подрасслоения (3.5) инволютивны в некоторой окрестности U точки m для $j = 1, 2$. Рассматриваемое уравнение в точках окрестности U принадлежит классу $H_{2,2}$. Поэтому по основной лемме это уравнение контактно эквивалентно в точке m уравнению (3.1), где коэффициент

$$\tilde{A} = \tilde{A}(x, y, p, q, z) \quad (6.24)$$

— гладкая функция в некоторой окрестности точки m .

Выше было установлено, что отвечающие уравнению (1.1) подрасслоения (3.3) и (3.4) связаны с отвечающими уравнению (3.1) подрасслоениями (6.18) и (6.8) равенствами (6.20) и (6.21). Следовательно, по лемме 7 из инволютивности подрасслоения (3.5) вытекает инволютивность подрасслоения (6.23). Последнее подрасслоение по лемме 17 и замечанию 2 порождено двумя векторными полями: (6.3) и (6.7). Значит,

$$[\tilde{\xi}_{j2}, \tilde{\xi}_3] \wedge \tilde{\xi}_{j2} \wedge \tilde{\xi}_3 = 0$$

для $j = 1, 2$. В силу выражений (6.2), (6.3), (6.22) и соотношений (6.6) и (6.1) эти равенства эквивалентны уравнениям

$$\varepsilon(\tilde{A}_{pq} - \tilde{\lambda}_j \tilde{A}_{pp}) + \tilde{\lambda}_j \tilde{A}_{qq} + \varepsilon \tilde{A}_{pq} = 0,$$

где $j = 1, 2$. Согласно (6.4) и (6.5) эта система уравнений эквивалентна системе

$$\tilde{A}_{pq} = 0, \quad (6.25)$$

$$\tilde{A}_{qq} - \varepsilon \tilde{A}_{pp} = 0. \quad (6.26)$$

Из (6.25) находим, что для функции (6.24) имеет место представление

$$\tilde{A} = w(x, y, z, p) + b(x, y, z, q). \quad (6.27)$$

Подставляя полученный результат в (6.26), имеем

$$b_{qq}(x, y, z, q) = \varepsilon w_{pp}(x, y, z, p). \quad (6.28)$$

Из (6.28) и (6.27) заключаем, что для функции (6.24) справедливо представление (6.9).

Таким образом, установлено, что уравнение (1.1) в точке m контактно эквивалентно уравнению (3.1), (6.9). По лемме 16 такое уравнение контактно эквивалентно в точке m уравнению (3.1), (6.10). Теорема 1 доказана.

7. Доказательство теоремы 2. Прежде чем приступить к непосредственному доказательству теоремы 2, исследуем частный случай уравнения (3.1), а именно

$$\tilde{A} = b + \varepsilon p a_x + q a_y + z \frac{a_x^2 + \varepsilon a_y^2 + 2(a_{yy} + \varepsilon a_{xx})}{4}, \quad (7.1)$$

где $a = a(x, y)$, $b = b(x, y)$ – некоторые гладкие функции и ε – произвольное вещественное число. Справедлива

ЛЕММА 18. Уравнение (3.1), (7.1) в любой точке $m \in \mathbb{R}^5$ контактно эквивалентно уравнению (3.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольную точку (6.11), лежащую в $\mathbb{R}^5$. Определим контактный диффеоморфизм (1.7) посредством выражений

$$\begin{aligned} f^*x &= x, & f^*y &= y, & f^*z &= b_0 + z b_1, \\ f^*p &= b_{0x} + z b_{1x} + p b_1, & f^*q &= b_{0y} + z b_{1y} + q b_1, \end{aligned} \quad (7.2)$$

где $b_0 = b_0(x, y)$ и $b_1 = b_1(x, y)$ – некоторые гладкие функции (искомые).

Отвечающая уравнению (3.1), (7.1) форма (5.23) преобразуется под действием диффеоморфизма (7.2) следующим образом:

$$\begin{aligned} \Pi(f^*\tilde{\omega}_2) &= b_1(dp \wedge dy + \varepsilon dx \wedge dq) + \left(p(2b_{1x} + \varepsilon b_{1x}a_x) + q(2\varepsilon b_{1y} + b_{1y}a_y) \right. \\ &\quad + z \left(b_{1xx} + \varepsilon b_{1yy} + b_1 \frac{a_x^2 + \varepsilon a_y^2 + 2(a_{yy} + \varepsilon a_{xx})}{4} + \varepsilon b_{1x}a_x + b_{1y}a_y \right) \\ &\quad + b_{0xx} + \varepsilon b_{0yy} + b + b_0 \frac{a_x^2 + \varepsilon a_y^2 + 2(a_{yy} + \varepsilon a_{xx})}{4} \\ &\quad \left. + \varepsilon b_{0x}a_x + b_{0y}a_y \right) dx \wedge dy. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Для b_1 положим

$$b_1(x, y) = e^{-\frac{\varepsilon}{2}a(x, y)}, \quad (7.4)$$

а в качестве b_0 возьмем произвольное гладкое решение линейного уравнения второго порядка

$$b_{0xx} + \varepsilon b_{0yy} = -\varepsilon b_{0x}a_x - b_{0y}a_y - b - b_0 \frac{a_x^2 + \varepsilon a_y^2 + 2(a_{yy} + \varepsilon a_{xx})}{4}. \quad (7.5)$$

Подставляя выражения (7.4) и (7.5) в правую часть (7.3), убеждаемся, что сомножитель при мономе $dx \wedge dy$ обращается в нуль. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть уравнение (1.1) контактно эквивалентно в точке m уравнению (3.6). Это означает, что в некоторой окрестности U этой точки определен диффеоморфизм (1.7), обладающий свойствами (1.8), (1.12) и (1.13), где

$$\tilde{\omega}_2 = dp \wedge dy + \varepsilon dx \wedge dq \quad (7.6)$$

– отвечающая левой части уравнения (3.6) эффективная 2-форма. Здесь ε определено равенством (6.1). Ясно, что уравнение (3.6) принадлежит классу $H_{1,1}$ в случае $\varepsilon \neq 0$ и классу $H_{0,0}$ в случае $\varepsilon = 0$. Следовательно, по лемме 2 этому же классу принадлежит и контактно эквивалентное уравнению (3.6) уравнение (1.1).

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть в некоторой окрестности точки $m \in \mathbb{R}^5$ уравнение (1.1) принадлежит или классу $H_{1,1}$ в случаях (2.3) и (2.7) или классу $H_{0,0}$ в случае (2.4).

Рассмотрим сначала случай $H_{1,1}$. По основной лемме в этом случае уравнение (1.1) контактно эквивалентно в точке m уравнению (3.1), где коэффициент (6.24) – гладкая функция в некоторой окрестности точки m . Характеристическое расслоение $\tilde{H}_j$, $j = 1, 2$, уравнения (3.1) порождается векторными полями (6.2), (6.3). Вычислим:

$$[\tilde{\xi}_{j1}, \tilde{\xi}_{j2}] = \tilde{\xi}_{j2}(\tilde{A}) \frac{\partial}{\partial p} + 2\tilde{\lambda}_j \frac{\partial}{\partial z}, \quad (7.7)$$

$$[\tilde{\xi}_{j2}, [\tilde{\xi}_{j1}, \tilde{\xi}_{j2}]] = (\tilde{A}_{qq} - 2\tilde{\lambda}_j \tilde{A}_{pq} - \varepsilon \tilde{A}_{qq}) \frac{\partial}{\partial p}, \quad (7.8)$$

где $\tilde{\lambda}_j$ заданы выражениями (6.4), (6.5). Следовательно, согласно (6.1) и (6.6)

$$\tilde{\lambda}_j^2 = -\varepsilon. \quad (7.9)$$

По определению (2.10) класса $H_{1,1}$ векторные поля (6.2), (6.3), (7.7) и (7.8) линейно зависимы. Это эквивалентно выполнению соотношений

$$\tilde{A}_{qq} - 2\tilde{\lambda}_j \tilde{A}_{pq} - \varepsilon \tilde{A}_{qq} = 0$$

для $j = 1, 2$, откуда выводим справедливость равенств (6.25) и (6.26). Эти равенства обеспечивают выполнение представления (6.9).

По лемме 16 уравнение (3.1), (6.9) в любой точке $m \in \mathbb{R}^5$ контактно эквивалентно уравнению (3.1), (6.10). Вычислим:

$$[\tilde{\xi}_{j1}, [\tilde{\xi}_{j1}, \tilde{\xi}_{j2}]] = (\tilde{\xi}_{j1} \circ \tilde{\xi}_{j2} + [\tilde{\xi}_{j1}, \tilde{\xi}_{j2}])(\tilde{A}) \frac{\partial}{\partial p} - \tilde{\xi}_{j2}(\tilde{A}) \frac{\partial}{\partial z}. \quad (7.10)$$

По определению (2.10) класса $H_{1,1}$ векторные поля (6.2), (6.3), (7.7) и (7.10) линейно зависимы. Это эквивалентно выполнению соотношений

$$(\tilde{\xi}_{j2}(\tilde{A}))^2 + 2\tilde{\lambda}_j(\tilde{\xi}_{j1} \circ \tilde{\xi}_{j2} + [\tilde{\xi}_{j1}, \tilde{\xi}_{j2}])(\tilde{A}) = 0 \quad (7.11)$$

для $j = 1, 2$. Подставим в левую часть уравнения (7.11) выражение (6.10). В результате, учитывая (7.9), для $j = 1, 2$ получим

$$\begin{aligned} a_2^2 + \varepsilon a_1^2 + 2\varepsilon(a_{1x} + pa_{1z} + a_{2y} + qa_{2z} - 2a_{0z} - 2pa_{1z} - 2qa_{2z} \\ + 2\tilde{\lambda}_j(a_{2x} + pa_{2z} - \varepsilon(a_{1y} + qa_{1z}))) = 0, \end{aligned}$$

что равносильно выполнению равенств

$$a_2^2 + \varepsilon a_1^2 + 2\varepsilon(a_{1x} + pa_{1z} + a_{2y} + qa_{2z} - 2a_{0z} - 2pa_{1z} - 2qa_{2z}) = 0, \quad (7.12)$$

$$a_{2x} + pa_{2z} - \varepsilon(a_{1y} + qa_{1z}) = 0. \quad (7.13)$$

Поскольку $a_k = a_k(x, y, z)$ для $k = 1, 2$, то из (7.13) в силу произвольности p и q получаем

$$a_1 = a_1(x, y), \quad a_2 = a_2(x, y), \quad a_{2x} - \varepsilon a_{1y} = 0,$$

откуда вытекает существование такой функции $a = a(x, y)$, что

$$a_1 = \varepsilon a_x(x, y), \quad a_2 = a_y(x, y). \quad (7.14)$$

Равенство (7.12) вместе с представлением (7.14) позволяет вывести выражение

$$a_{0z} = \frac{a_x^2 + \varepsilon a_y^2 + 2(a_{yy} + \varepsilon a_{xx})}{4}.$$

Тем самым установлено существование такой функции $b = b(x, y)$, что

$$a_0(x, y, z) = b + z \frac{a_x^2 + \varepsilon a_y^2 + 2(a_{yy} + \varepsilon a_{xx})}{4}. \quad (7.15)$$

Полученные представления (7.14) и (7.15) при подстановке в (6.10) дают выражение (7.1). Следовательно, по лемме 18 теорема 2 справедлива в случаях (2.3) и (2.7).

Теперь рассмотрим случай (2.4). В этом случае по определению (2.10) класса $H_{0,0}$ и по лемме 13 в некоторой окрестности V точки m найдутся комплекснозначные функции F_1 и F_2 , дифференциалы которых во всех точках $u \in V$ независимы с контактной формой ω_0 :

$$\omega_0 \wedge dF_1 \wedge dF_2 \neq 0, \quad (7.16)$$

и обращается в нуль на векторах подрасслоения $H = H_1 = H_2$:

$$dF_1 \mid H = dF_2 \mid H = 0. \quad (7.17)$$

По лемме 5 (d) и определению (1.9) оператора Π из (7.17) вытекает, что для всех $u \in V$

$$\Pi(dF_j(u)) \in H_{3-j}^*(u). \quad (7.18)$$

В силу (7.18), (7.16) и леммы 5 (b) существует такая гладкая отличная от нуля на V функция c , что

$$\Pi(dF_1) \wedge \Pi(dF_2) = c\omega_2. \quad (7.19)$$

А в силу леммы 5 (g) и определения (1.9) из (7.18) выводим

$$\omega_1 \wedge \Pi(dF_1) \wedge \Pi(dF_2) = 0,$$

откуда

$$dF_1 \wedge dF_2 \wedge \omega_1 \wedge \omega_0 \big|_u = 0. \quad (7.20)$$

Из лемм 5 (i) и 9 вытекает, что подрасслоение H порождается вещественными векторными полями. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что F_1 и F_2 вещественны. Таким образом, в силу (7.16) и (7.20) для функций F_1 и F_2 выполнены все условия леммы 12. Согласно ей в некоторой окрестности U точки m определен такой контактный диффеоморфизм (1.7), для которого справедливы свойства (1.12) и (5.3). Из (7.19) по лемме 14 вытекает

$$dx \wedge dy = f^*c(\Pi(f^*\omega_2)).$$

Применив к левой и правой частям этого равенства контактный диффеоморфизм g , заданный формулами (5.25), по лемме 14 получим

$$g^*(f^*c)\Pi(g^*(f^*\omega_2)) = \tilde{\omega}_2,$$

где $\tilde{\omega}_2$ — это форма (7.6) с $\varepsilon = 0$. Теорема 2 доказана.

Список литературы

1. *Лычагин В. В.* Контактная геометрия и нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка // УМН. 1979. Т. 34, вып. 1(205). С. 137–165.
2. *Тунницкий Д. В.* Задача Коши для гиперболических уравнений Монжа–Ампера // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. №4. С. 174–191.
3. *Morimoto T.* La géométrie des équations Monge–Ampère // C. R. Acad. Sc. Paris. Série A. 1979. V. 289. P. 25–28.
4. *Lie S.* Gesammelte Abhandlungen. Bd.3. Leipzig: B. G. Teubner – Oslo: H. Aschehoug & Co, 1922.
5. *Goursat E.* Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. V.1. Paris: Hermann, 1896.
6. *Лычагин В. В., Рубцов В. Н.* О теоремах Софуса Ли для уравнений Монжа–Ампера // ДАН БССР. 1983. Т. 27. №5. С. 396–398.
7. *Lychagin V. V., Rubtsov V. N., Chekalov I. V.* A classification of Monge–Ampère equations // Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4 série. 1993. V. 26. P. 281–308.
8. *Рашиевский П. К.* Геометрическая теория уравнений с частными производными. М.-Л.: Гостехиздат, 1947.
9. *Уорнер Ф.* Основы теории гладких многообразий и групп Ли. М.: Мир, 1987.
10. *Харт Н.* Геометрическое квантование в действии. М.: Мир, 1985.