Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Г. Лысёнок, Бесконечные бернсайдовы группы четного периода, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1996, том 60, выпуск 3, 3–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im77>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 13:01:06

И. Г. Лысёнок

Бесконечные бернсайдовы группы четного периода

Излагается модифицированный вариант теории Новикова–Адяна для свободных бернсайдовых групп периода $n = 16k \geq 8000$, на основе которого получено отрицательное решение проблемы Бернсайда для четных значений периода $n \geq 8000$ и доказан ряд утверждений о бернсайдовых группах периода $n = 16k \geq 8000$.

Библиография: 13 наименований.

§ 1. Введение и формулировка основных результатов

Свободная m -порожденная бернсайдова группа $\mathbf{B}(m, n)$ периода n по определению есть группа с заданием

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_m \mid X^n = 1 \text{ для всех слов } X \rangle,$$

или, другими словами, $\mathbf{B}(m, n)$ есть относительно свободная m -порожденная группа в многообразии всех групп периода n . Несмотря на простоту этого определения вопросы о строении и свойствах бернсайдовых групп $\mathbf{B}(m, n)$ оказались необычайно трудными. Среди них особое место занимает вопрос о конечности группы $\mathbf{B}(m, n)$ для данных $m, n \geq 2$, впервые сформулированный У. Бернсайдом [10] в 1902 г. и известный под названием *проблемы Бернсайда о периодических группах*. Другая естественная формулировка проблемы Бернсайда: верно ли, что любая m -порожденная группа периода n конечна? Конечность групп $\mathbf{B}(m, n)$ установлена в случаях $n = 2, 3$ [10], $n = 4$ [8], $m = 2$ [10] и $n = 6$ [11] для любого количества порождающих m . Отрицательное решение проблемы Бернсайда было получено в работе [5], в которой бесконечность $\mathbf{B}(m, n)$ доказана при любом $m \geq 2$ и нечетном $n \geq 4381$. Усовершенствованный вариант доказательства этого результата изложен в [1]. В той же работе [1] была понижена оценка для нечетного значения периода n до $n \geq 665$.

Для изучения бернсайдовых групп достаточно большого нечетного периода в работах [5], [1] была создана специальная теория преобразований слов. Ее характерной особенностью является построение для группы $\mathbf{B}(m, n)$ системы определяющих соотношений вида $X^n = 1$, разбитой на подмножества, индексированные натуральным параметром, называемым *рангом*. При этом изучение группы

Работа была выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда (грант № MUV000), Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 93-011-16015), Американского математического общества (исследовательский грант для математиков из бывшего Советского Союза), а также Международного фонда “Культурная инициатива” и Академии естественных наук России.

$\mathbf{B}(m, n)$ сводится к изучению последовательности групп $\mathbf{B}_\alpha(m, n)$, задаваемых всеми соотношениями ранга, не превосходящего α . Для анализа соотношений в группах $\mathbf{B}_\alpha(m, n)$ большое число утверждений доказывается одновременной индукцией по рангу α . Позднее теория Новикова–Адяна и ее различные модификации нашли многочисленные применения для решения других задач теории групп, в том числе и не связанных непосредственно с проблемой Бернсайда (см., например, обзоры [2], [9]). Более короткое по сравнению с [1] доказательство теоремы Новикова–Адяна для нечетных значений периода $n > 10^{10}$ было предложено А. Ю. Олшанским [6] (это доказательство вошло впоследствии в монографию [7]). Хотя его технической основой служит геометрический язык диаграмм Линдона–ван Кампена, системы понятий и ряд ключевых утверждений в [1] и в [6], [7] имеют глубокую аналогию (см. [9]). Таким образом, в настоящее время под теорией Новикова–Адяна, по-видимому, следует понимать некоторый общий подход, допускающий различные технические реализации.

До недавнего времени существенным ограничением применимости теории Новикова–Адяна являлось условие нечетности периода n . В частности, оставался открытым вопрос о существовании бесконечных бернсайдовых групп периода вида 2^k . Заметим, что из теоремы Новикова–Адяна следует бесконечность бернсайдовых групп $\mathbf{B}(m, n)$ для периодов n , делящихся на нечетное число $r \geq 665$, и, следовательно, из бесконечности бернсайдовых групп $\mathbf{B}(m, 2^k)$ при каком-нибудь k вытекает отрицательное решение проблемы Бернсайда для почти всех значений периода n . Трудности при переходе от нечетных значений n к четным связаны с тем, что при четном n группа $\mathbf{B}(m, n)$ содержит инволюции, отсутствие которых использовалось в доказательстве одного из утверждений теории (см. [1, лемма II.5.21] и [7, лемму 18.9]). Как показывает более глубокий анализ, в случае четного n возникает необходимость изучения строения конечных подгрупп групп $\mathbf{B}_\alpha(m, n)$.

Результат о бесконечности групп $\mathbf{B}(m, n)$ для четных значений периода n был объявлен независимо С. В. Ивановым [12] для $n \geq 2^{48}$ и автором [4] для $n \geq 2^{13}$. Подробное доказательство результата Иванова опубликовано в статье [13], в которой фактически разработан вариант теории, применимый к бернсайдовым группам периода $n \geq 2^{48}$, делящегося на 2^9 .

Цель настоящей работы – подробное изложение варианта теории Новикова–Адяна для значений периода $n = 16k \geq 8000$, на основе которого доказывается результат, объявленный в [4].

ТЕОРЕМА 1. *При любых $m \geq 2$ и $n \geq 8000$ группа $\mathbf{B}(m, n)$ бесконечна.*

Как и в случае нечетного периода, бесконечность группы $\mathbf{B}(m, n)$ по существу следует из утверждения о том, что любое непустое несократимое слово, равное 1 в $\mathbf{B}(m, n)$, должно содержать периодическое слово с достаточно большим числом периодов. Этот факт составляет содержание п. (i) следующей теоремы. Остальные утверждения теоремы также можно рассматривать как аналоги соответствующих утверждений для нечетного n (см. [1]).

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $n = 16k \geq 8000$ и $m \geq 2$.*

- (i) Если непустое несократимое в свободной группе слово X равно 1 в группе $\mathbf{B}(m, n)$, то X содержит непустое подслово вида $A^{n/2-1240}$.
- (ii) Группа $\mathbf{B}(m, n)$ имеет показательный рост.
- (iii) Группа $\mathbf{B}(m, n)$ не может быть задана конечной системой определяющих соотношений.
- (iiii) Любая конечная подгруппа группы $\mathbf{B}(m, n)$ изоморфно вкладывается в конечное прямое произведение $\mathbf{D}_n \times \mathbf{D}_{\bar{n}} \times \cdots \times \mathbf{D}_{\bar{n}}$, где $\mathbf{D}_r$ – диэдральная группа порядка $2r$ и $\bar{n}$ – наибольший делитель n вида 2^k .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Существуют (достаточно сложные) примеры соотношений в группах $\mathbf{B}(m, n)$ для значений периода $n = 4k + 2$, $n = 8k + 4$ и $n = 16k + 8$, показывающие, что такие группы существенно отличаются от остальных бернсайдовых групп. По-видимому, возникающие здесь трудности с применением теории Новикова–Адяна значительно превосходят те, которые были преодолены при переходе от нечетных значений n к значениям вида $n = 16k$. В этом смысле требование, чтобы число n делилось на 16, является существенным.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Можно доказать обращение п. (iii) теоремы 2: любое конечное прямое произведение вида $\mathbf{D}_n \times \mathbf{D}_{\bar{n}} \times \cdots \times \mathbf{D}_{\bar{n}}$ изоморфно вкладывается в группу $\mathbf{B}(m, n)$. Доказательство этого результата, а также ряда других результатов о подгруппах групп $\mathbf{B}(m, n)$ при $n = 16k \geq 8000$ планируется опубликовать в последующих работах автора.

Мне приятно выразить благодарность С. И. Адяну за поддержку и А. А. Разброву за полезные обсуждения.

§ 2. Основные обозначения и соглашения. Периодические слова

На протяжении всей работы мы будем считать фиксированными значение периода $n = 16k \geq 8000$ и m -буквенный алфавит порождающих

$$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}.$$

Все слова рассматриваются в групповом алфавите

$$\mathcal{A}^{\pm 1} = \{a_1, a_2, \dots, a_m, a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_m^{-1}\}.$$

Мы будем использовать следующие обозначения для числовых параметров:

$$\begin{aligned} p &= 240, & q &= \frac{n}{2} - 2p - 178, & h &= 2p + 128 = 608, \\ q_0 &= p + 68 = 308, & q_1 &= q_0 + 2h = 1524, & q_2 &= q_1 + 2h = 2740, \\ q_3 &= q_2 + 9 = 2749, & q_4 &= q - 2p - 68 = \frac{n}{2} - 1206, \\ \zeta &= \frac{1}{50}, & \eta &= \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Для обозначения слов будут использоваться буквы латинского алфавита $A, B, \dots, Z, u, v, \dots, z$, для обозначения групп – заглавные жирные буквы $\mathbf{G}, \mathbf{H}, \dots$, для элементов групп – строчные жирные буквы $\mathbf{g}, \mathbf{h}, \dots$. Буквами $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \dots, \mathcal{Z}$ будут обозначаться вхождения в слова. Для обозначения геометрических объектов – вершин, ребер, путей и т.п., будут использоваться рубленые латинские буквы $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \dots, \mathbb{Z}, \mathbb{a}, \mathbb{b}, \dots, \mathbb{z}$. Запись $X \equiv Y$ обозначает “ X по определению равно Y ”, а выражение “при $X := Y$ ” является сокращением выражения “при подстановке Y вместо X ”.

Через $\lfloor x \rfloor$ и $\lceil x \rceil$ будем обозначать соответственно целую часть числа x и наименьшее целое $y \geq x$.

Длина слова X обозначается через $|X|$. Отношение графического равенства слов X и Y обозначается через $X \sqsubseteq Y$, а отношение “ Y есть циклический сдвиг слова X ” – через $X \approx Y$. Для обозначения пустого слова и единичного элемента группы будем использовать символ 1. Запись $P * E * Q$ обозначает данное вхождение слова E в слово PEQ . Говоря о подслове E данного слова X , мы обычно будем подразумевать некоторое фиксированное вхождение E в X (какое – ясно из контекста).

Мы будем использовать стандартные теоретико-групповые обозначения $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ для коммутатора $\mathbf{x}^{-1}\mathbf{y}^{-1}\mathbf{x}\mathbf{y}$ и $\mathbf{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{H})$ для нормализатора подгруппы $\mathbf{H}$ в группе $\mathbf{G}$. Записи $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{G}$ и $\mathbf{H} \trianglelefteq \mathbf{G}$ означают соответственно, что $\mathbf{H}$ – подгруппа $\mathbf{G}$ и $\mathbf{H}$ – нормальная подгруппа $\mathbf{G}$. Если $\mathbf{X}$ – некоторое множество элементов группы $\mathbf{G}$ и $t \in \mathbb{Z}$, то по определению $\mathbf{X}^t \equiv \{\mathbf{x}^t \mid \mathbf{x} \in \mathbf{X}\}$.

На протяжении всей основной части работы (§ 5–17) рассматривается последовательность групп – фрагментов группы $\mathbf{B}(m, n)$, обозначаемых через $\mathbf{B}_\alpha$ и определяемых заданием вида

$$\mathbf{B}_\alpha \equiv \langle A \mid A^n = 1 \ (A \in \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \dots \cup \mathcal{E}_\alpha) \rangle,$$

где, как и в [1], слова из множества $\mathcal{E}_\alpha$ называются *элементарными периодами ранга α* (определение будет дано в § 5). При этом $\mathbf{B}_0$ по определению есть свободная группа с базисом $\mathcal{A}$. Равенство слов X и Y в группе $\mathbf{B}_\alpha$ обозначается через $X \stackrel{\alpha}{=} Y$. Мы будем использовать специальное обозначение $[X]_\alpha$ для элемента группы $\mathbf{B}_\alpha$, представленного словом X . Таким образом, равенство $X \stackrel{\alpha}{=} Y$ обозначает то же самое, что и равенство $[X]_\alpha = [Y]_\alpha$. Для любых рангов α и β при $\beta \leq \alpha$ определен естественный эпиморфизм

$$\pi_{\beta, \alpha}: \mathbf{B}_\beta \rightarrow \mathbf{B}_\alpha, \quad [X]_\beta \mapsto [X]_\alpha.$$

Пусть A – непустое слово. Слово P называется *периодическим словом с периодом A* , если P входит в некоторое слово A^t при $t > 0$. Множество всех периодических слов с периодом A будем обозначать через $\text{Пер}(A)$. Множество периодических слов P с периодом A , удовлетворяющих условию $|P| \geq t|A|$, обозначим через $\text{Пер}(A, t)$. Очевидно, $\text{Пер}(A) = \text{Пер}(A')$ и $\text{Пер}(A, t) = \text{Пер}(A', t)$, если $A \approx A'$, а множества $\text{Пер}(A^{-1})$ и $\text{Пер}(A^{-1}, t)$ состоят в точности из всех слов, обратных

к словам из множеств $\text{Пер}(A)$ и $\text{Пер}(A, t)$. Как правило, в качестве периодов A будут рассматриваться простые слова, т.е. непредставимые в виде $A \sqsupseteq B^r$ при $r \geq 2$.

Нам понадобится следующая лемма, первые два утверждения которой представляют собой известные свойства периодических слов (см., например, [1, леммы I.2.2 и I.2.3]), а третье – легкое упражнение.

2.1. ЛЕММА. (i) Если A – простое слово и $A \sqsupseteq XY \sqsupseteq YX$, то хотя бы одно из слов X или Y пусто.

(ii) Если A, B – простые слова и $\text{Пер}(A, 2) \cap \text{Пер}(B, 2) \neq \emptyset$, то $A \approx B$.

(iii) Если для некоторого $t > 0$ выполнено $A^t \approx XY \approx XZ$ и $|X| \geq |A|$, то $Y \sqsupseteq Z$.

§ 3. Граф Кэли группы

Пусть $\mathbf{G}$ – некоторая группа и $\mathcal{A}$ – алфавит порождающих для $\mathbf{G}$. Тем самым мы подразумеваем, что задан эпиморфизм свободной группы $\mathbf{F}_{\mathcal{A}}$ с базисом $\mathcal{A}$ на $\mathbf{G}$, сопоставляющий каждому слову X в групповом алфавите $\mathcal{A}^{\pm 1}$ элемент $[X]_{\mathbf{G}} \in \mathbf{G}$. Граф Кэли $\Gamma(\mathbf{G}, \mathcal{A})$ группы $\mathbf{G}$ относительно $\mathcal{A}$ есть ориентированный граф с множеством вершин $\mathbf{G}$ и множеством ориентированных ребер $\mathbf{G} \times \mathcal{A}^{\pm 1}$, где по определению ребро $(\mathbf{g}, a^{\epsilon})$ соединяет вершины $\mathbf{g}$ и $\mathbf{g}[a^{\epsilon}]_{\mathbf{G}}$. При этом ориентированные ребра $(\mathbf{g}, a^{\epsilon})$ и $(\mathbf{g}[a^{\epsilon}]_{\mathbf{G}}, a^{-\epsilon})$ считаются взаимно обратными.

Буква a^{ϵ} группового алфавита $\mathcal{A}^{\pm 1}$ называется *меткой ребра* $e = (\mathbf{g}, a^{\epsilon})$ и будет обозначаться через $\mathcal{L}(e)$. Если $X = e_1 e_2 \dots e_r$ – непустой путь на графе $\Gamma(\mathbf{G}, \mathcal{A})$, то слово $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(e_1) \mathcal{L}(e_2) \dots \mathcal{L}(e_r)$ называется *меткой пути* X , а путь $X^{-1} = e_r^{-1} e_{r-1}^{-1} \dots e_1^{-1}$ – *обратным* к X . Начальную вершину и конечную вершину пути X на графе $\Gamma(\mathbf{G}, \mathcal{A})$ будем обозначать через $\iota(X)$ и $\tau(X)$ соответственно. Очевидно, имеем $(X^{-1})^{-1} = X$, $\iota(X^{-1}) = \tau(X)$, $\tau(X^{-1}) = \iota(X)$ и $\mathcal{L}(X^{-1}) \sqsupseteq (\mathcal{L}(X))^{-1}$. В качестве путей на $\Gamma(\mathbf{G}, \mathcal{A})$ мы будем рассматривать также *пустые пути*, состоящие из одной вершины $\mathbf{g}$ графа $\Gamma(\mathbf{G}, \mathcal{A})$. При этом по определению $\iota(\mathbf{g}) = \tau(\mathbf{g}) = \mathbf{g}$ и $\mathcal{L}(\mathbf{g}) \sqsupseteq 1$. Обратным к пустому пути X будем считать сам путь X . Через $|X|$ будет обозначаться длина пути X , которая, очевидно, равна длине слова $\mathcal{L}(X)$.

На множестве пар путей X и Y на $\Gamma(\mathbf{G}, \mathcal{A})$ с условием $\tau(X) = \iota(Y)$ естественным образом определена операция *произведения* XY путей X и Y , для которой пустые пути играют роль единиц. При этом, очевидно, $\mathcal{L}(XY) \sqsupseteq \mathcal{L}(X)\mathcal{L}(Y)$. Путь Y есть *подпуть* пути X , если $X = UYV$ для некоторых путей U и V . Если при этом U или V – пустой путь, то будем говорить, что Y есть *начало* или соответственно *конец* пути X . Если Y есть подпуть пути X , то будем также говорить, что Y *содержится в* X . Вершина $\mathbf{g}$ графа $\Gamma(\mathbf{G}, \mathcal{A})$ *лежит* на пути X , если либо X – пустой путь и $\mathbf{g} = X$, либо $\mathbf{g} = \iota(e)$ или $\mathbf{g} = \tau(e)$ для некоторого ребра e , входящего в X . Путь X называется *простым*, если на X лежит ровно $|X| + 1$ вершин, т.е. X не проходит ни через одну вершину дважды.

Так как для любой вершины $\mathbf{g} \in \mathbf{G}$ графа $\Gamma(\mathbf{G}, \mathcal{A})$ и любой буквы $a^{\epsilon} \in \mathcal{A}^{\pm 1}$ из $\mathbf{g}$ выходит ровно одно ребро с меткой a^{ϵ} , то для любой вершины $\mathbf{g} \in \mathbf{G}$ и лю-

бого слова X существует единственный путь X на $\Gamma(\mathbf{G}, \mathcal{A})$, для которого $\iota(X) = \mathbf{g}$ и $\mathcal{L}(X) \sqsupseteq X$. Неформально говоря, путь X можно рассматривать как “геометрическое изображение” слова X , при этом начало пути X можно поместить в любую заданную наперед вершину $\mathbf{g}$ графа $\Gamma(\mathbf{G}, \mathcal{A})$. Если при этом X – простой путь, то имеется естественное взаимно однозначное соответствие между непустыми подпутями пути X и подсловами слова X : если $X = USV$, то подпути S соответствует вхождение $\mathcal{L}(U) * \mathcal{L}(S) * \mathcal{L}(V)$ слова $\mathcal{L}(S)$ в слово X^1 . Если U – вхождение некоторого слова в слово X , то через $\psi_X(U)$ будем обозначать соответствующий подпуть пути X . Очевидно, вхождения U и V в слово X не пересекаются тогда и только тогда, когда пути $\psi_X(U)$ и $\psi_X(V)$ не имеют общих ребер.

На множестве непустых подпутей простого пути X будем рассматривать два отношения: $S <_X T$ и $S \ll_X T$, соответствующие использованным в [1] отношениям “вхождение U расположено левее вхождения V ” и “вхождение U расположено строго левее вхождения V ”. Если $X = USV = W TZ$, то по определению $S <_X T$ тогда и только тогда, когда $|U| < |W|$ и $|V| > |Z|$, и $S \ll_X T$ тогда и только тогда, когда $|US| \leq |W|$. Если ни один из подпутей S и T пути X не содержится в другом, то, очевидно, истинно ровно одно из отношений $S <_X T$ или $T <_X S$, а если при этом S и T не имеют общих ребер, то имеем либо $S \ll_X T$, либо $T \ll_X S$.

Очевидно, если X – подпуть простого пути Y и S, T – подпути X , то $S <_X T \Leftrightarrow S <_Y T$ и $S \ll_X T \Leftrightarrow S \ll_Y T$. Если S, T, U, X – подпути Y , пути S, T содержатся в X и $S <_Y U <_Y T$, то и U содержится в X .

Если S, T – непустые подпути простого пути X , то через $S \cup_X T$ будем обозначать подпуть пути X наименьшей длины, содержащий S и T в качестве подпутей (это соответствует операции объединения двух вхождений в данное слово X).

Легко видеть, что для любого пути X на графе $\Gamma(\mathbf{G}, \mathcal{A})$ имеет место равенство

$$\tau(X) = \iota(X) [\mathcal{L}(X)]_{\mathbf{G}}. \quad (3.1)$$

В частности, отсюда следует, что элемент $[\mathcal{L}(X)]_{\mathbf{G}}$ группы $\mathbf{G}$, представленный словом $\mathcal{L}(X)$, определяется только начальной и конечной вершинами пути X . В качестве еще одного следствия формулы (3.1) получаем, что путь X на графе Γ является замкнутым тогда и только тогда, когда $[\mathcal{L}(X)]_{\mathbf{G}} = 1$, и простым тогда и только тогда, когда $[Y]_{\mathbf{G}} \neq 1$ для любого непустого подслова Y слова $\mathcal{L}(X)$.

Так как $\mathcal{A}$ есть множество порождающих для $\mathbf{G}$, то из (3.1) следует, что граф $\Gamma(\mathbf{G}, \mathcal{A})$ связан, т.е. любые две его вершины $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$ могут быть соединены некоторым путем.

Еще один способ перехода от языка слов к языку путей на графе $\Gamma(\mathbf{G}, \mathcal{A})$ основан на том, что слова, равные 1 в группе $\mathbf{G}$, изображаются замкнутыми путями на $\Gamma(\mathbf{G}, \mathcal{A})$. Например, пусть в группе $\mathbf{G}$ имеют место соотношения $X_1 = X_2 X_3 X_4$ и $X_5 = X_4^{-1} X_6 X_7$. Тогда существуют пути X_i ($i = 1, 2, \dots, 7$) на графе $\Gamma(\mathbf{G}, \mathcal{A})$

¹На самом деле требование простоты пути X здесь несущественно. Можно было бы определить понятие подпути Y пути X как “вхождения” Y в X . Однако в этом случае возникают неудобства технического характера, например, если Y – подпуть пути X , Z – подпуть пути Y , то формально Z не есть подпуть пути X и т.п.

с $\mathcal{L}(X_i) \subseteq X_i$, расположенные как на рис. 1. Здесь формально подразумевается, что $\iota(X_1) = \iota(X_2)$, $\tau(X_2) = \iota(X_3)$, $\tau(X_3) = \iota(X_4) = \iota(X_6)$, $\tau(X_1) = \tau(X_4) = \iota(X_5)$, $\tau(X_6) = \iota(X_7)$ и $\tau(X_5) = \tau(X_7)$ (но не обязательно пути X_i не имеют общих вершин, отличных от указанных). Заметим, что какая-нибудь одна из вершин $\iota(X_i)$ или $\tau(X_i)$ может быть помещена в любой заданной наперед вершине графа $\Gamma(\mathbf{G}, \mathcal{A})$. Такой способ изображения соотношений в группе $\mathbf{G}$ с помощью путей на графе $\Gamma(\mathbf{G}, \mathcal{A})$ будет широко использоваться.

Рис. 1

В дальнейшем мы будем свободно переходить от языка слов и вхождений к языку путей на графе $\Gamma(\mathbf{G}, \mathcal{A})$ и обратно.

На графе $\Gamma(\mathbf{G}, \mathcal{A})$ определено естественным образом действие группы $\mathbf{G}$ левыми сдвигами: если $e = (g, a^e)$ – ребро графа $\Gamma(\mathbf{G}, \mathcal{A})$, то по определению $he = (hg, a^e)$. Это действие распространяется на множество всех путей на $\Gamma(\mathbf{G}, \mathcal{A})$, при этом сохраняются отображения ι , τ , $^{-1}$, $\mathcal{L}$ и операция произведения путей: для любых путей X , Y и любого элемента $h \in \mathbf{G}$ имеем $\iota(hX) = h\iota(X)$, $\tau(hX) = h\tau(X)$, $(hX)^{-1} = h(X^{-1})$, $\mathcal{L}(hX) \subseteq \mathcal{L}(X)$ и $h(XY) = hX \cdot hY$, если $\iota(Y) = \tau(X)$. В частности, из равенства $\iota(hX) = h\iota(X)$ следует, что $\mathbf{G}$ действует транзитивно и свободно (т.е. с тривиальными стабилизаторами) на множестве путей на $\Gamma(\mathbf{G}, \mathcal{A})$, имеющих одну и ту же метку. Очевидно, Y есть подпуть, начало или конец пути X тогда и только тогда, когда hY есть соответственно подпуть, начало или конец пути hX .

Если $\mathbf{G}$ и $\mathbf{H}$ – две группы с одним и тем же множеством порождающих $\mathcal{A}$ и отображение $\pi : [X]_{\mathbf{G}} \mapsto [X]_{\mathbf{H}}$ является эпиморфизмом $\mathbf{G}$ на $\mathbf{H}$, то π естественным образом продолжается до отображения графа $\Gamma(\mathbf{G}, \mathcal{A})$ в $\Gamma(\mathbf{H}, \mathcal{A})$ (которое является накрытием графов при естественной геометрической интерпретации). Это отображение индуцирует отображение множества путей на графе $\Gamma(\mathbf{G}, \mathcal{A})$ на множество путей на графе $\Gamma(\mathbf{H}, \mathcal{A})$, которое будет обозначаться тем же символом π . Очевидно, $\pi(gX) = \pi(g)\pi(X)$, и, следовательно, $\pi(X) = \pi(Y)$ в том и только том случае, если $X = gY$ для некоторого $g \in \ker \pi$. Если Y есть подпуть (начало, конец) пути X , то $\pi(Y)$ есть подпуть (соответственно, начало, конец) пути $\pi(X)$. Обратно, если $\pi(X) = \tilde{X}$ и $\tilde{X} = \tilde{U}\tilde{Y}\tilde{Z}$, то, положив $X = UYV$, где $\mathcal{L}(\tilde{U}) \subseteq \mathcal{L}(\tilde{U})$, $\mathcal{L}(\tilde{Y}) \subseteq \mathcal{L}(\tilde{Y})$, $\mathcal{L}(\tilde{V}) \subseteq \mathcal{L}(\tilde{V})$, получим подпуть Y пути X , для которого $\pi(Y) = \tilde{Y}$. Ясно, что если $\tilde{X}$ – простой путь, то подпуть Y пути X однозначно определяется условием $\pi(Y) = \tilde{Y}$.

Путь P на графе $\Gamma(\mathbf{G}, A)$ с $\mathcal{L}(P) \in \text{Пер}(A)$ будем называть *периодическим отрезком с периодом A* . Множество периодических отрезков с периодом A на графе $\Gamma \Rightarrow \Gamma(\mathbf{G}, A)$ обозначим через $\text{Пер}(\Gamma, A)$. Для множества периодических отрезков $P \in \text{Пер}(\Gamma, A)$ с условием $|P| \geq t|A|$ (т.е. $\mathcal{L}(P) \in \text{Пер}(A, t)$) будем использовать обозначение $\text{Пер}(\Gamma, A, t)$. Если P – подпуть пути Q , где $P, Q \in \text{Пер}(\Gamma, A, 2)$ для некоторого A , то Q будем называть *периодическим продолжением* пути P .

3.1. ЛЕММА. (i) Если Q есть периодическое продолжение P , то Q^{-1} есть периодическое продолжение P^{-1} .

(ii) Если Q есть периодическое продолжение P , то для любого $h \in \mathbf{G}$ путь hQ есть периодическое продолжение hP .

(iii) Если Q есть периодическое продолжение P и R есть периодическое продолжение Q , то R есть периодическое продолжение P .

(iv) Любые два периодических продолжения одного пути имеют общее периодическое продолжение.

(v) Если $P, Q \in \text{Пер}(\Gamma, A, 2)$, то найдется элемент $h \in \mathbf{G}$ такой, что пути hP и Q имеют общее периодическое продолжение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения (i) и (ii) очевидны. Утверждение (iii) вытекает из леммы 2.1, (ii). Докажем (iv). Пусть $P \in \text{Пер}(\Gamma, A_1, 2) \cap \text{Пер}(\Gamma, A_2, 2)$ и $Q = U_1PV_1 \in \text{Пер}(\Gamma, A_1, 2)$, $R = U_2PV_2 \in \text{Пер}(\Gamma, A_2, 2)$ – периодические продолжения P . Без ограничения общности можно считать, что A_i – простые слова. По лемме 2.1, (ii) имеем $A_1 \approx A_2$, откуда легко следует, что одно из слов $\mathcal{L}(U_1)$, $\mathcal{L}(U_2)$ есть конец другого, а одно из слов $\mathcal{L}(V_1)$, $\mathcal{L}(V_2)$ есть начало другого. Тогда один из путей U_1, U_2 – конец другого, один из путей V_1, V_2 – начало другого, и в качестве общего периодического продолжения путей Q и R можно взять UPV , где каждый из путей U и V есть один из путей U_i или соответственно V_i , имеющий максимальную длину. Для доказательства (v) нужно рассмотреть периодические продолжения $\bar{P}$, $\bar{Q}$ для P и Q такие, что $\mathcal{L}(\bar{P}) = \mathcal{L}(\bar{Q})$, и положить $h = \iota(\bar{Q})(\iota(\bar{P}))^{-1}$.

Пусть $P \in \text{Пер}(\Gamma, A, 2)$, и пусть $P = UXV$, где $|V| \geq |A|$. Тогда по аналогии с вхождением слов определен результат *сдвига пути X вдоль P на период A* , т.е. такой подпуть X_1 пути P , что $P = U_1X_1V_1$, где $|U_1| = |U| + |A|$ и $|V_1| = |V| - |A|$. При этом, очевидно, имеем $\mathcal{L}(X_1) \supseteq \mathcal{L}(X)$. Используя формулу (3.1), получаем

$$\iota(X_1)(\iota(X))^{-1} = \iota(P)[\mathcal{L}(U_1)]_{\mathbf{G}}[\mathcal{L}(U)]_{\mathbf{G}}^{-1}(\iota(P))^{-1}.$$

Так как $\mathcal{L}(U_1) \supseteq A_1\mathcal{L}(U)$, где A_1 – начало слова $\mathcal{L}(U_1)$ длины $|A_1| = |A|$, то отсюда следует, что X_1 получается из X умножением слева на элемент группы $\mathbf{G}$

$$s_{A,P} = \iota(P)[A_1]_{\mathbf{G}}(\iota(P))^{-1}, \quad (3.2)$$

где A_1 – циклический сдвиг A , с которого начинается $\mathcal{L}(P)$.

Таким образом, сдвиг пути X на период A вдоль P есть умножение слева на $s_{A,P}$, и тем самым мы можем рассматривать эту операцию для произвольного пути X на графе Γ . Сдвиг пути X на t периодов A вдоль P (это соответствует сдвигу подслова

периодического слова $P \in \text{Пер}(A, 2)$ на t периодов A вправо) есть умножение слева на элемент $s_{A,P}^t$. Следующая лемма легко вытекает из определений и формул (3.1), (3.2) (для доказательства п. (vii) нужно воспользоваться еще леммой 2.1, (i)) и будет часто использоваться в дальнейшем.

3.2. ЛЕММА. Пусть $P \in \text{Пер}(\Gamma, A, 2)$, где $\Gamma \rightleftharpoons \Gamma(\mathbf{G}, A)$. Тогда:

- (i) если $S, s_{A,P}S$ – подпути P , то $S <_P s_{A,P}S$, а если при этом $|S| \leq |A|$, то $S \ll_P s_{A,P}S$;
- (ii) если вершина g графа Γ лежит на P , то для любого $t \in \mathbb{Z}$ вершина $s_{A,P}^t g$ лежит на некотором периодическом продолжении P ; если S – подпути пути P , то для любого $t \in \mathbb{Z}$ путь $s_{A,P}^t S$ содержится в некотором периодическом продолжении P ;
- (iii) если P и Q имеют общее периодическое продолжение, то $s_{A,P} = s_{A,Q}$;
- (iv) $s_{A,gP} = g s_{A,P} g^{-1}$;
- (v) $s_{A^{-1}, P^{-1}} = (s_{A,P})^{-1}$;
- (vi) если $\pi: [X]_{\mathbf{G}} \mapsto [X]_{\mathbf{H}}$ – эпиморфизм $\mathbf{G}$ на $\mathbf{H}$, то $s_{A, \pi(P)} = \pi(s_{A,P})$;
- (vii) если A – простое слово и пути P, gP имеют общее периодическое продолжение, то $g = s_{A,P}^t$ для некоторого $t \in \mathbb{Z}$.

3.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Периодические отрезки $P \in \text{Пер}(\Gamma, A, 2)$ и $Q \in \text{Пер}(\Gamma, B, 2)$ назовем *согласованными*, если для некоторого $t > 0$ выполнено $s_{A,P}^t = s_{B,Q}^t$, или, эквивалентно, $[A]_{\mathbf{G}}^t = x[B]_{\mathbf{G}}^t x^{-1}$, где $x = (\iota(P))^{-1} \iota(Q)$. Отношение согласованности периодических отрезков P и Q обозначим через $\text{Согл}(P, Q)$.

Вообще говоря, отношение $\text{Согл}(P, Q)$ зависит от выбора периодов A и B , для которых $P \in \text{Пер}(\Gamma, A, 2)$ и $Q \in \text{Пер}(\Gamma, B, 2)$. В дальнейшем мы будем предполагать, что A и B – простые слова и, следовательно, определены с точностью до циклического сдвига. В этом случае истинность отношения $\text{Согл}(P, Q)$ зависит только от P и Q .

Следующие свойства этого отношения легко вытекают из определения и леммы 3.2.

- 3.4. ЛЕММА.** (i) $\text{Согл}(P, Q)$ есть отношение эквивалентности на множестве $\bigcup_A \text{Пер}(\Gamma, A, 2)$.
- (ii) Для любого $g \in \mathbf{G}$ имеем $\text{Согл}(P, Q) \Leftrightarrow \text{Согл}(gP, gQ)$.
 - (iii) $\text{Согл}(P, Q) \Leftrightarrow \text{Согл}(P^{-1}, Q^{-1})$.
 - (iv) Если P и Q имеют общее периодическое продолжение, то $\text{Согл}(P, Q)$.

3.5. ЛЕММА. Пусть $\mathbf{G}$ – свободная группа с базисом A . Если A, B – циклически несократимые слова, $P \in \text{Пер}(\Gamma, A, 2)$, $Q \in \text{Пер}(\Gamma, B, 2)$ и $s_{A,P}^r = s_{B,Q}^t$ для некоторых $r, t > 0$, то P и Q имеют общее периодическое продолжение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как для любых C и $R \in \text{Пер}(\Gamma, C, 2)$ из $C \sqsubseteq D^k$ при $k > 0$ в силу (3.2) следует $s_{C,R} = s_{D,R}^k$, то достаточно ограничиться рассмотрением случая, когда A, B – простые слова. Выберем путь X , соединяющий начальные вершины путей P и Q , метка которого является несократимым в свободной группе $\mathbf{G}$ словом. Можно считать, что слова $\mathcal{L}(P)$ и $\mathcal{L}(Q)$ начинаются соответственно

с A и B . Согласно (3.2) имеем $\iota(P)[A]_{\mathbf{G}}^r(\iota(P))^{-1} = \iota(Q)[B]_{\mathbf{G}}^t(\iota(Q))^{-1}$, что в силу формулы (3.1) можно переписать в виде

$$A^r = \mathcal{L}(X) B^t (\mathcal{L}(X))^{-1}. \quad (3.3)$$

Так как слова A и B циклически несократимы, то из (3.3) в силу хорошо известных свойств свободных групп следует $r = t$ и $A \approx B$. Заменяя P и Q на некоторые их периодические продолжения в силу леммы 3.4, (iv), можно считать $A \sqsubseteq B$ и $\mathcal{L}(P) \sqsubseteq \mathcal{L}(Q)$. Так как централизатор элемента $[A]_{\mathbf{G}}^r$ в $\mathbf{G}$ есть циклическая подгруппа, порожденная $[A]_{\mathbf{G}}$, то в этом случае из (3.3) вытекает $\mathcal{L}(X) = A^k$ в $\mathbf{G}$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$. В силу несократимости слова $\mathcal{L}(X)$ имеем $\mathcal{L}(X) \sqsubseteq A^k$. Тогда в зависимости от знака k один из путей $X^{-1}P$ или XQ есть общее периодическое продолжение путей P и Q .

§ 4. Карты и диаграммы

Картой мы называем конечный двумерный топологический клеточный комплекс, гомеоморфно вложенный в плоскость $\mathbb{R}^2$. Эквивалентное определение состоит в том, что карта Δ представляет собой набор попарно непересекающихся ограниченных подмножеств $\mathbb{R}^2$, разбитых на три типа – *вершины*, *ребра* и *области* карты Δ – и удовлетворяющих следующим условиям: вершины являются одноточечными множествами; ребра и области гомеоморфны соответственно открытому интервалу $(0, 1)$ и открытому 2-диску; топологическое замыкание каждого ребра e карты Δ есть объединение e и одной или двух вершин карты Δ , а топологическое замыкание каждой области A есть объединение A и конечного числа вершин и ребер карты Δ . Множества вершин, ребер и областей карты Δ будем обозначать через $\mathbf{V}(\Delta)$, $\mathbf{E}(\Delta)$ и $\mathbf{R}(\Delta)$ соответственно. Обозначение Δ будем использовать также для теоретико-множественного объединения всех вершин, ребер и областей карты Δ . Карта Δ называется *связной*, если она связна как подмножество $\mathbb{R}^2$, и *односвязной*, если дополнение $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ связно. В дальнейшем, если не оговаривается обратное, все карты предполагаются связными. Ребро e карты Δ назовем *границным*, если e принадлежит границе $\partial\Delta$ карты Δ , и *внутренним* в противном случае.

Ребро карты Δ вместе с фиксированным для него одним из двух возможных направлений движения вдоль этого ребра называется *ориентированным ребром* карты Δ . Множество всех ориентированных ребер карты Δ обозначим через $\vec{\mathbf{E}}(\Delta)$. Если $e \in \vec{\mathbf{E}}(\Delta)$, то через e^{-1} будем обозначать противоположно ориентированное ребро, а через $\iota(e)$ и $\tau(e)$ – соответственно *начальную вершину* и *конечную вершину* ориентированного ребра e . Понятие *пути* (пустого или непустого) *на карте* Δ , *начальной вершины* $\iota(X)$ *пути* X , *конечной вершины* $\tau(X)$ *пути* X , *обратного к* X *пути* X^{-1} , *произведения* XY *путей* X и Y *на* Δ , *простого пути* и *подпути* пути X *на карте* Δ определяются точно так же, как и для графа $\Gamma(\mathbf{G}, \mathcal{A})$. *Простой замкнутый путь* *на карте* Δ – путь X *на* Δ , не проходящий ни через одну вершину дважды, за исключением вершины $\iota(X) = \tau(X)$. Если X и Y – замкнутые пути

на карте Δ и X есть некоторый циклический сдвиг Y (т.е. Y получается некоторой циклической перестановкой ориентированных ребер, образующих путь X), то в этом случае пишем $X \approx Y$. Для любого пути X на карте Δ через $\text{supp } X$ обозначим подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$, покрываемое X , т.е. теоретико-множественное объединение всех ребер, входящих в X , и всех вершин, лежащих на X . Если X – простой (замкнутый) путь, то $\text{supp } X$ есть отрезок кривой (соответственно замкнутая кривая) без самопересечений.

Мы предполагаем фиксированной некоторую ориентацию плоскости $\mathbb{R}^2$. Тем самым для каждой области карты Δ и каждой связной компоненты дополнения $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ определено положительное направление обхода их границы. При обходе границы области A карты Δ в положительном направлении последовательность проходимых ориентированных ребер карты Δ образует замкнутый путь на карте Δ , который мы будем называть *граничным циклом области A* и обозначать δA . При обходе границы связных компонент дополнения $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ получается конечное число замкнутых путей на Δ , которые будем называть *граничными циклами карты Δ* . Граничные циклы карты Δ и ее областей определены с точностью до циклического сдвига замкнутого пути. Граничный цикл карты Δ , образуемый при обходе неограниченной связной компоненты дополнения $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$, будем называть *внешним граничным циклом карты Δ* , а остальные граничные циклы карты Δ – *внутренними* (в силу предположения о связности карты Δ она имеет ровно один внешний граничный цикл). Если карта Δ односвязна, то она имеет единственный (с точностью до циклического сдвига) граничный цикл, который мы обозначаем $\delta \Delta$. При изображении на рисунках положительным направлением обхода будет считаться то, при котором внешний граничный цикл карты обходится против часовой стрелки, а внутренние граничные циклы и граничные циклы областей – по часовой стрелке.

Если X, Y – пути на карте Δ и $\text{supp } X \cap \text{supp } Y = \emptyset$, то будем говорить, что X и Y не пересекаются. Карту Δ назовем *неособой*, если ее граничные циклы – попарно непересекающиеся простые замкнутые пути. В этом случае как подмножество $\mathbb{R}^2$ карта Δ гомеоморфна диску с $r - 1$ “дырками”, где r – число связных компонент границы (или число граничных циклов) карты Δ .

Неособую односвязную карту будем называть *дисковой*, а неособую карту с двумя граничными циклами – *кольцевой*.

Эйлерова характеристика $\chi(\Delta)$ (не обязательно связной) карты Δ определяется равенством

$$\chi(\Delta) = 2 \cdot \text{число связных компонент } \Delta - \text{число граничных циклов } \Delta. \quad (4.1)$$

Очевидно, для любой связной карты Δ выполнено $\chi(\Delta) \leq 1$, а если Δ – неособая связная карта, то число $\chi(\Delta)$ однозначно определяет топологический тип Δ (как подмножества $\mathbb{R}^2$). В частности, для неособой связной карты Δ имеем $\chi(\Delta) = 1$ тогда и только тогда, когда Δ – дисковая карта, и $\chi(\Delta) = 0$ тогда и только тогда, когда Δ – кольцевая карта.

Подкартой карты Δ называется карта Θ , для которой $V(\Theta) \subseteq V(\Delta)$, $E(\Theta) \subseteq E(\Delta)$ и $R(\Theta) \subseteq R(\Delta)$. Если Θ_1 и Θ_2 – подкарты карты Δ , то подкарту Θ карты Δ ,

для которой $\mathbf{R}(\Theta) = \mathbf{R}(\Theta_1) \cup \mathbf{R}(\Theta_2)$, $\mathbf{E}(\Theta) = \mathbf{E}(\Theta_1) \cup \mathbf{E}(\Theta_2)$ и $\mathbf{V}(\Theta) = \mathbf{V}(\Theta_1) \cup \mathbf{V}(\Theta_2)$, будем называть *объединением* подкарт Θ_1 и Θ_2 и обозначать $\Theta_1 \cup \Theta_2$. Если Θ – подкарта карты Δ , то не обязательно связную подкарту карты Δ , состоящую из вершин, ребер и областей карты Δ , содержащихся в топологическом замыкании дополнения $\Delta \setminus \Theta$, будем называть результатом *удаления подкарты Θ из карты Δ* и обозначать $\Delta - \Theta$. Если вместо $\Delta \setminus \Theta$ рассмотрим $\Delta \setminus \text{int } \Theta$, где $\text{int } X$ обозначает внутренность подмножества $X \subseteq \mathbb{R}^2$, то соответствующую подкарту карты Δ будем называть результатом *удаления внутренности подкарты Θ из карты Δ* и обозначать $\Delta - \text{int } \Theta$. Подкарты $\Delta - \Theta$ и $\Delta - \text{int } \Theta$ различаются только в случае, когда Δ и Θ имеют общие граничные ребра. В этом случае если e – такое ребро, то e принадлежит карте $\Delta - \text{int } \Theta$, но не принадлежит карте $\Delta - \Theta$. Заметим, что граничные циклы карты $\Delta - \text{int } \Theta$ состоят из граничных циклов карты Δ и замкнутых путей, обратных к граничным циклам карты Θ .

Пути X, Y на карте Δ называются *гомотопными*, если от X к Y можно перейти конечной (возможно, пустой) последовательностью преобразований следующих двух видов:

- (i) вставка или удаление подпутей вида ee^{-1} , где $e \in \vec{\mathbf{E}}(\Delta)$;
- (ii) вставка или удаление граничных циклов областей карты Δ .

Иногда, чтобы указать явно карту Δ , на которой рассматривается отношение гомотопии, мы будем говорить о *гомотопных на Δ* путях X и Y . Ясно, что пути, гомотопные на подкарте Θ карты Δ , гомотопны также и на Δ . Замкнутый путь X на Δ называется *стягиваемым*, если X гомотопен пустому пути. Так как преобразования (i) и (ii) не изменяют начальной и конечной вершин пути, то для гомотопных путей X и Y имеем $\iota(X) = \iota(Y)$ и $\tau(X) = \tau(Y)$. Из определения легко следует, что пути X и Y на карте Δ гомотопны тогда и только тогда, когда путь XY^{-1} стягиваем. Известно, что простой непустой замкнутый путь X на карте Δ стягиваем тогда и только тогда, когда X или X^{-1} есть граничный цикл некоторой дисковой подкарты карты Δ . Класс эквивалентности гомотопных путей на карте Δ , содержащий путь X , мы обозначаем через $[X]_\Delta$. Множество классов гомотопных замкнутых путей на карте Δ с фиксированной начальной и конечной вершиной $a \in \mathbf{V}(\Delta)$ с операцией умножения $[X]_\Delta \cdot [Y]_\Delta = [XY]_\Delta$ образует (комбинаторную) *фундаментальную группу $\pi_1(\Delta, a)$ карты Δ в вершине a* . Группа $\pi_1(\Delta, a)$ есть свободная группа ранга $r - 1$, где r – число граничных циклов карты Δ . Если Δ – односвязная карта, то из тривиальности группы $\pi_1(\Delta, a)$ следует, что любой замкнутый путь на Δ стягиваем и любые два пути на Δ с общими начальными и конечными вершинами гомотопны.

Пусть Δ – некоторая карта. Отображение $\mathcal{L}: \vec{\mathbf{E}}(\Delta) \rightarrow \mathcal{A}^{\pm 1} \cup \{1\}$ (1 обозначает пустое слово) будем называть *размечающей функцией на карте Δ над алфавитом $\mathcal{A}$* , если для любого ориентированного ребра $e \in \vec{\mathbf{E}}(\Delta)$ выполнено $\mathcal{L}(e^{-1}) \sqsubseteq (\mathcal{L}(e))^{-1}$. Размечающая функция $\mathcal{L}$ на карте Δ естественным образом распространяется на множество путей на карте Δ , принимая значения в множестве слов в групповом алфавите $\mathcal{A}^{\pm 1}$. Очевидно, функция $\mathcal{L}$ согласуется с операциями взятия обратного пути и произведения путей: для любого пути X на Δ выполнено $\mathcal{L}(X^{-1}) \sqsubseteq (\mathcal{L}(X))^{-1}$ и для любых путей X, Y при $\tau(X) = \iota(Y)$ выполнено

$\mathcal{L}(XY) \triangleq \mathcal{L}(X)\mathcal{L}(Y)$. Значение функции $\mathcal{L}(X)$ называется *меткой* пути X .

Пусть

$$\mathcal{P} = \langle \mathcal{A} \mid R = 1 \ (R \in \mathcal{D}) \rangle$$

– задание некоторой группы $\mathbf{G}$. Карта Δ называется *диаграммой над заданием* $\mathcal{P}$, если на Δ задана размечающая функция $\mathcal{L}_\Delta$ над алфавитом $\mathcal{A}$ такая, что для любой области A карты Δ слово $\mathcal{L}_\Delta(\delta A)$ либо пусто, либо имеет вид $a^\epsilon a^{-\epsilon}$ для некоторой буквы $a^\epsilon \in \mathcal{A}^{\pm 1}$, либо есть циклический сдвиг слова вида $R^{\pm 1}$, где $R \in \mathcal{D}$. (это один из вариантов определения диаграммы Линдона–ван Кампена, по-видимому, впервые использованный в [7]). В дальнейшем индекс Δ в записи $\mathcal{L}_\Delta$ будет обычно опускаться.

Следующее известное утверждение устанавливает связь между соотношениями равенства и сопряженности в группе $\mathbf{G}$ и диаграммами над заданием $\mathcal{P}$ (см. [3, гл. V, теорема 1.1, лемма 5.2], [7, леммы 11.1 и 11.2]).

4.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (i) Для любого слова X , равного 1 в группе $\mathbf{G}$, существует дисковая диаграмма Δ над заданием $\mathcal{P}$ с $\mathcal{L}(\delta\Delta) \approx X$.

(ii) Если слова X и Y сопряжены в $\mathbf{G}$, то существует кольцевая диаграмма над заданием $\mathcal{P}$ с внешним граничным циклом C и внутренним граничным циклом D такая, что $\mathcal{L}(C) \approx X$ и $(\mathcal{L}(D))^{-1} \approx Y$.

Из определения гомотопных путей на карте непосредственно вытекает

4.2. ЛЕММА. Если X и Y – гомотопные пути на диаграмме Δ над заданием $\mathcal{P}$, то слова $\mathcal{L}(X)$ и $\mathcal{L}(Y)$ равны в группе $\mathbf{G}$.

Из леммы 4.2 вытекает следующее обращение п. (i) предложения 4.1: для любой односвязной (в частности, дисковой) диаграммы Δ в $\mathbf{G}$ имеет место равенство $\mathcal{L}(\delta\Delta) = 1$. Нам понадобится также следующее обращение п. (ii) этого предложения.

4.3. ЛЕММА. Если Δ – диаграмма над заданием $\mathcal{P}$ с двумя граничными циклами, C и D , то слова $\mathcal{L}(C)$ и $(\mathcal{L}(D))^{-1}$ сопряжены в группе $\mathbf{G}$. Более того, для любого пути T на Δ , соединяющего вершины $\iota(C)$ и $\iota(D)$, в $\mathbf{G}$ истинно равенство $\mathcal{L}(C) = \mathcal{L}(T)(\mathcal{L}(D))^{-1}(\mathcal{L}(T))^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S – путь на Δ наименьшей длины (т.е. содержащий наименьшее возможное число ориентированных ребер), соединяющий некоторую вершину, лежащую на C , с некоторой вершиной, лежащей на D . Ясно, что S – простой путь, не содержащий отличных от $\iota(S)$ и $\tau(S)$ вершин в пересечении с границей диаграммы Δ .

Пусть $C = C_1 C_2$ и $D = D_1 D_2$, где $\tau(C_1) = \iota(S)$ и $\tau(D_1) = \tau(S)$ (рис. 2). Разрезав диаграмму Δ вдоль S , получим односвязную диаграмму Δ^* с граничным циклом $C_2^* C_1^* S^* D_2^* D_1^* S'^{-1}$, где метки путей C_i^* , D_i^* , S^* и S' равны меткам соответствующих путей C_i , D_i и S . Тогда по предложению 4.1, (i) в $\mathbf{G}$ имеет место равенство

$$\mathcal{L}(C_2 C_1 S D_2 D_1 S^{-1}) = 1,$$

Рис. 2

откуда, обозначив $R \doteq C_1 S D_2^{-1}$, выводим

$$\mathcal{L}(C) = \mathcal{L}(R) (\mathcal{L}(D))^{-1} (\mathcal{L}(R))^{-1} \text{ в } \mathbf{G}, \quad (4.2)$$

что и доказывает первое утверждение.

Пусть теперь T – произвольный путь, соединяющий вершины $\iota(C)$ и $\iota(D)$. Так как $\pi_1(\Delta, \iota(C_1))$ – циклическая группа, порожденная классом $[C]_\Delta$, то путь TR^{-1} гомотопен пути C^t при некотором t . Следовательно, с учетом леммы 4.2 имеем

$$\mathcal{L}(T) = (\mathcal{L}(C))^t \mathcal{L}(R) \text{ в } \mathbf{G},$$

что вместе с (4.2) влечет искомое равенство

$$\mathcal{L}(C) = \mathcal{L}(T) (\mathcal{L}(D))^{-1} (\mathcal{L}(T))^{-1} \text{ в } \mathbf{G}.$$

Диаграмма Θ называется *поддиаграммой* диаграммы Δ , если карта Θ есть подкарта карты Δ и $\mathcal{L}_\Theta = \mathcal{L}_\Delta|_{\vec{\mathbf{E}}(\Theta)}$. Если Θ и Θ' – поддиаграммы диаграммы Δ , то карты $\Theta \cup \Theta'$, $\Delta - \Theta$ и $\Delta - \text{int } \Theta$ естественным образом можно рассматривать как поддиаграммы диаграммы Δ .

Пусть Δ – диаграмма над заданием $\mathcal{P}$. Опишем два типа преобразований, переводящих Δ в некоторую новую диаграмму Δ' над заданием $\mathcal{P}$, которые будем называть *элементарными измельчениями диаграммы Δ* . Если e – неориентированное (т.е. геометрическое) ребро диаграммы, то через $\bar{e}$ временно условимся обозначать соответствующее ориентированное ребро (при необходимости направление $\bar{e}$ будет явно указываться).

Рис. 3

(i) Пусть e – ребро диаграммы Δ . Пусть диаграмма Δ' получена из Δ добавлением новой вершины $v \subset e$ и заменой e на два новых ребра, e_1 и e_2 , на которые e разбивается вершиной v (см. рис. 3), причем для соответствующих одинаково направленных ориентированных ребер $\bar{e}$, $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ выполнено

$$\mathcal{L}_{\Delta'}(\bar{e}_1) \mathcal{L}_{\Delta'}(\bar{e}_2) \equiv \mathcal{L}_{\Delta}(\bar{e})$$

(отсюда следует, в частности, что метка по крайней мере одного из ориентированных ребер $\bar{e}_i$ есть пустое слово). Диаграмму Δ' будем называть результатом добавления вершины v к диаграмме Δ .

Рис. 4

(ii) Пусть A – область диаграммы Δ и X – простой непустой путь на Δ , входящий в качестве подпути в граничный цикл области A . Предположим, $\mathcal{L}(X)$ есть буква алфавита $\mathcal{A}^{\pm 1}$ или пустое слово. Рассмотрим карту Δ' , полученную из Δ добавлением нового ребра $e \subseteq A$, соединяющего начальную и конечную вершины пути X , и заменой A на две новых образовавшихся области, A_1 и A_2 (см. рис. 4). Превратим Δ' в диаграмму над заданием $\mathcal{P}$, полагая $\mathcal{L}_{\Delta'}(\bar{e}) \equiv \mathcal{L}_{\Delta}(X)$, где ориентация ребра $\bar{e}$ та же, что и у пути X , т.е. $\iota(\bar{e}) = \iota(X)$ и $\tau(\bar{e}) = \tau(X)$. Диаграмму Δ' будем называть *результатом добавления ребра e к диаграмме Δ вдоль пути X* .

Если диаграмма Δ' получена из Δ некоторой (возможно, пустой) последовательностью элементарных измельчений, то будем говорить, что Δ' есть *результат измельчения диаграммы Δ* .

Отметим ряд свойств этого понятия, легко вытекающих из определения.

Если диаграмма Δ' есть результат измельчения диаграммы Δ , то Δ и Δ' совпадают как подмножества $\mathbb{R}^2$.

Каждому пути X на диаграмме Δ естественным образом соответствует путь X' на диаграмме Δ' , который будем называть *образом на диаграмме Δ' пути X* . Для этого в случае, когда Δ' получена из Δ добавлением ребра, положим $X' \equiv X$, а в случае, когда Δ' получена из Δ добавлением вершины, в качестве X' возьмем результат замены в X всех вхождений ориентированного ребра $\bar{e}^{\pm 1}$ на $(\bar{e}_1 \bar{e}_2)^{\pm 1}$ (в обозначениях из (i)). В общем случае, когда Δ' получена из Δ некоторой последовательностью элементарных измельчений, понятие образа пути определяется естественным образом по индукции. Очевидно, если путь X' есть образ на диаграмме Δ'

пути X , то $\mathcal{L}(X) \cong \mathcal{L}(X')$ и $\text{supp } X = \text{supp } X'$. Отображение “ $X \mapsto$ образ X на Δ' ” сохраняет начальную и конечную вершины пути, операции произведения путей и взятия обратного пути и свойство пути быть граничным циклом диаграммы Δ . Легко проверить также, что пути X и Y на Δ гомотопны тогда и только тогда, когда гомотопны их образы на Δ' , и что указанное соответствие путей на диаграммах Δ и Δ' индуцирует изоморфизм фундаментальных групп $\pi_1(\Delta, a) \rightarrow \pi_1(\Delta', a)$.

Каждой поддиаграмме Θ диаграммы Δ соответствует поддиаграмма Θ' диаграммы Δ' , которая совпадает с Θ как подмножество $\mathbb{R}^2$. Легко видеть, что диаграмма Θ' есть результат измельчения диаграммы Θ , причем граничные циклы диаграммы Θ' являются образами на диаграмме Δ' соответствующих граничных циклов диаграммы Θ .

Наконец, отметим, что между областями диаграмм Δ и Δ' , имеющими нетривиальную метку (т.е. не равную 1 в свободной группе), существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее метку граничного цикла области.

В дальнейшем измельчения диаграмм будут играть роль “несущественных” преобразований диаграмм, так как все рассматриваемые ниже свойства диаграмм, их поддиаграмм и путей на диаграммах будут сохраняться при измельчениях.

Нам понадобится следующее наблюдение.

4.4. ЛЕММА. Пусть диаграммы Δ' и Δ'' получены измельчением диаграммы Δ . Тогда с точностью до изотопной деформации Δ' и Δ'' обладают общим измельчением Δ^* .

“С точностью до изотопной деформации” здесь означает, что при выполнении операций элементарного измельчения, переводящих Δ в Δ' и в Δ'' , добавляемые вершины могут сдвигаться вдоль содержащих их ребер, а добавляемые ребра могут перемещаться с закрепленными концами внутри содержащих их областей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду очевидной индукции достаточно рассмотреть случай, когда Δ' получена из Δ применением одной операции элементарного измельчения. Пусть

$$\Delta = \Delta_0 \rightarrow \Delta_1 \rightarrow \dots \rightarrow \Delta_t = \Delta'' \quad (4.3)$$

– последовательность элементарных измельчений, переводящая Δ в Δ'' .

Предположим сначала, что диаграмма Δ' получена из Δ добавлением вершины v , лежащей на ребре e диаграммы Δ . Пусть $\bar{e}_1 \bar{e}_2$ – образ ориентированного ребра $\bar{e}$ на Δ' и $\bar{d}_1 \bar{d}_2 \dots \bar{d}_r$ – образ $\bar{e}$ на Δ'' . В зависимости от того, метка какого из ребер, $\bar{e}_1$ или $\bar{e}_2$, есть пустое слово, сдвинем вершину v вдоль e так, чтобы она попала соответственно на d_1 или на d_r . Пусть диаграмма Δ'_i получена из Δ_i добавлением вершины v , где соответственно $\mathcal{L}_{\Delta'_i}(\bar{e}_1) \cong 1$ или $\mathcal{L}_{\Delta'_i}(\bar{e}_2) \cong 1$. Тогда, очевидно, $\Delta' = \Delta'_0 \rightarrow \Delta'_1 \rightarrow \dots \rightarrow \Delta'_t$ – последовательность элементарных измельчений диаграммы Δ' (где каждое элементарное измельчение имеет тот же тип (i) или (ii), что и в последовательности (4.3)), и в качестве Δ^* можно взять Δ'_t .

Пусть теперь диаграмма Δ' получена из Δ добавлением ребра e , расположенного внутри области A диаграммы Δ . Как и в предыдущем случае, мы построим последовательность $\Delta' = \Delta'_0 \rightarrow \Delta'_1 \rightarrow \dots \rightarrow \Delta'_t$ измельчений диаграммы Δ' ,

где Δ'_{i+1} есть результат измельчения диаграммы Δ'_i (но теперь измельчения, вообще говоря, не будут элементарными). Если Δ_1 получена из Δ_0 добавлением некоторой вершины v , то, как мы видели выше, передвинув вершину v и добавив v к диаграмме $\Delta' = \Delta'_0$, получим диаграмму Δ'_1 , которая одновременно является результатом добавления ребра к Δ_1 . В этом случае работает индукция по длине последовательности (4.3).

Если Δ_1 получена из Δ_0 добавлением ребра d и $e \cap d = \emptyset$, то d можно добавить к Δ'_0 , и в этом случае получается диаграмма Δ'_1 , которая одновременно является результатом добавления ребра e к Δ_1 . Тогда снова работает индукция по длине последовательности (4.3).

Пусть Δ_1 получена из Δ_0 добавлением ребра d , где $e \cap d \neq \emptyset$. В частности, $d \subseteq A$. Продеформировав e , можно считать, что e и d пересекаются в одной точке (иначе, продеформировав e , можно добиться, чтобы кривые e и d не пересекались, и тогда этот случай сводится к предыдущему). Пусть $w = \{x\} = e \cap d$. Пусть P и Q – пути, входящие в граничный цикл области A , вдоль которых добавляются ребра e и d соответственно. Тогда либо $P = RS$, $Q = ST$, либо $P = ST$, $Q = RS$, где R, S и T – непустые пути. В силу полной аналогии ограничимся рассмотрением случая, когда $P = RS$ и $Q = ST$. Пусть диаграмма Δ'_1 получена из Δ добавлением вершины w и четырех ребер, e_1, e_2, d_1 и d_2 , где $\mathcal{L}(\bar{e}_1) \supseteq \mathcal{L}(R)$, $\mathcal{L}(\bar{e}_2) \supseteq \mathcal{L}(S)$, $\mathcal{L}(\bar{d}_1) \supseteq 1$ и $\mathcal{L}(\bar{d}_2) \supseteq \mathcal{L}(ST)$ (см. рис. 5, где показана ориентация ребер $\bar{e}_i$ и $\bar{d}_i$). Тогда Δ'_1 есть результат добавления вершины w и двух ребер к каждой из диаграмм Δ_1 и Δ' : e_1, e_2 для Δ_1 и d_1, d_2 для Δ' .

Рис. 5

Если $t \geq 2$ и диаграмма Δ_2 есть результат добавления вершины к Δ_1 , то построение диаграммы Δ'_2 сводится к уже рассмотренному выше случаю, когда Δ' есть результат добавления вершины к Δ (нужно положить $\Delta := \Delta_1$, $\Delta' := \Delta_2$ и $\Delta'' := \Delta'_1$). Если Δ_2 есть результат добавления ребра f к Δ_1 , то f может пересекаться только с одним из ребер e_1 или e_2 . Пусть, скажем, $f \cap e_1 = \emptyset$. Так как e_1 и e_2 расположены внутри двух различных областей диаграммы Δ_1 , то для того, чтобы получить диаграмму Δ'_2 , нужно сначала добавить w и e_1 к Δ_1 , а затем применить предыдущее рассуждение при $e := e_2$ и $d := f$.

В общем случае диаграмма Δ'_i есть результат добавления к Δ_i некоторого множества вершин и ребер $e_1, e_2, \dots, e_k$, где e_i расположены внутри попарно различных областей диаграммы Δ_i , и диаграмма Δ'_i строится аналогичным образом.

Опишем несколько ситуаций, в которых будут использоваться измельчения диаграмм.

4.5. Разложение пути на непустые сомножители. Пусть X – непустой путь на диаграмме Δ и задано произвольное разбиение слова $\mathcal{L}(X)$ в произведение подслов $\mathcal{L}(X) \sqsupseteq Y_1 Y_2 \dots Y_k$. Тогда X можно представить в виде $X = Y_1 Y_2 \dots Y_k$, где $\mathcal{L}(Y_i) \sqsupseteq Y_i$ при всех i . В дальнейшем нам понадобится такое разложение пути X с дополнительным условием, чтобы все пути Y_i были непусты (в общем случае, если Y_i – пустое слово, то путь Y_i может оказаться пустым). Покажем, как добиться выполнения этого условия с помощью операции измельчения. Предположим, один из сомножителей Y_i – пустой путь. Выберем Y_i так, чтобы один из соседних сомножителей, Y_{i-1} или Y_{i+1} , был непуст. Пусть, например, это Y_{i-1} . Пусть $Y_{i-1} = Y'_{i-1} e$, где e – ориентированное ребро. Добавим к Δ новую вершину таким образом, чтобы ребро e заменилось на произведение fg двух ребер f и g , где $\mathcal{L}(f) \sqsupseteq \mathcal{L}(e)$ и $\mathcal{L}(g) \sqsupseteq 1$. Заменяя Y_{i-1} и Y_i соответственно на $Y'_{i-1} f$ и $g Y_i$, получим произведение $Y_1 Y_2 \dots Y_k$, в котором метки путей Y_j не изменились, но путь Y_i стал непустым. Продолжая аналогичным образом, придем к диаграмме Δ' , полученной измельчением из Δ , у которой образ пути X имеет вид $Y_1 Y_2 \dots Y_k$, где $\mathcal{L}(Y_i) \sqsupseteq Y_i$ при всех i и все пути Y_i непусты.

4.6. Склейка участков границы диаграммы. Пусть Δ – неособая диаграмма над заданием $\mathcal{P}$ и некоторый граничный цикл Δ имеет вид $RXS Y^{-1}$, где X и Y – непустые пути и $\mathcal{L}(X) \sqsupseteq \mathcal{L}(Y)$. Добавляя новые вершины к диаграмме Δ , можно получить диаграмму Δ' такую, что образы X' и Y' на Δ' путей X и Y имеют вид $X' = e_1 e_2 \dots e_r$ и $Y' = d_1 d_2 \dots d_r$, где e_i, d_i – ориентированные ребра с $\mathcal{L}(e_i) \sqsupseteq \mathcal{L}(d_i)$ для каждого i . Склеивая участки границы диаграммы Δ' вдоль путей X, Y и отождествляя при этом соответствующие ориентированные ребра e_i и d_i , получим новую диаграмму Δ^* , которую будем называть результатом *склейки участков границы диаграммы Δ вдоль путей X и Y* .

4.7. Замена поддиаграммы. Пусть теперь Δ – произвольная диаграмма над заданием $\mathcal{P}$ и Θ – неособая (как карта) поддиаграмма диаграммы Δ . Обозначим через C_1 и $C_2, \dots, C_t$ соответственно внешний и внутренние граничные циклы диаграммы Θ . Пусть Θ^* – какая-нибудь другая неособая диаграмма над заданием $\mathcal{P}$ того же топологического типа, что и Θ , имеющая внешний граничный цикл D_1 и внутренние граничные циклы $D_2, \dots, D_t$ такие, что каждая пара соответствующих граничных циклов C_i и D_i имеет вид $C'_i \approx e_1^i e_2^i \dots e_r^i$ и $D'_i \approx d_1^i d_2^i \dots d_r^i$, где e_j^i и d_j^i – ориентированные ребра с одинаковыми метками. Мы можем удалить поддиаграмму Θ из диаграммы Δ и вклеить вместо нее копию диаграммы Θ^* , отождествляя ориентированные ребра e_j^i с копиями ориентированных ребер d_j^i . Полученную в результате диаграмму Δ^* будем называть результатом *замены поддиаграммы Θ диаграммы Δ на диаграмму Θ^** . Замена поддиаграммы возможна и в более об-

шей ситуации, когда вместо совпадения меток ориентированных ребер, составляющих граничные циклы поддиаграммы Θ диаграммы Δ и диаграммы Θ^* , потребовать лишь совпадение меток соответствующих граничных циклов C_i и D_i диаграмм Θ и Θ^* . В этом случае нужно предварительно добавить к диаграммам Δ и Θ^* новые вершины так, чтобы C_i и D_i получили необходимый вид.

4.8. Окаймление границы области. Пусть A – произвольная область диаграммы Δ . Рассмотрим последовательность элементарных измельчений диаграммы Δ , изображенную на рис. 6, где метки ребер, нарисованных более толстыми линиями, являются пустыми словами, а метки остальных ребер совпадают с метками соответствующих ребер, входящих в граничный цикл области A (каких – ясно из рис. 6).

Рис. 6

Если A – область с нетривиальной меткой граничного цикла, то ей соответствует область A' на полученной диаграмме Δ' , граничный цикл которой – простой замкнутый путь, не пересекающийся с граничными циклами диаграммы Δ и с граничными циклами остальных областей диаграммы Δ с нетривиальной меткой граничного цикла. Указанную операцию будем называть *окаймлением границы области A диаграммы Δ* .

4.9. Раздвоение пути. Пусть RXS – простой путь на неособой диаграмме Δ , состоящий из подпутей R и S , входящих в граничные циклы диаграммы Δ , и непустого пути X , не имеющего отличных от $\iota(X)$ и $\tau(X)$ вершин в пересечении с границей диаграммы Δ . Тогда можно выполнить измельчение диаграммы Δ таким образом, чтобы на полученной диаграмме Δ' существовал путь Y , гомотопный пути RXS , для которого $\mathcal{L}(Y) \subseteq \mathcal{L}(RXS)$ и $\text{supp } Y \cap \text{supp } RXS = \text{supp } Y \cap \partial\Delta' = \iota(R) \cup \tau(S)$. Из рис. 7 видно, каким образом можно получить диаграмму Δ' (здесь, как и на рис. 6, метки ребер, нарисованных более толстыми линиями, являются пустыми словами). Указанную операцию будем называть *раздвоением пути RXS* .

Операции измельчения и замены поддиаграммы будут использоваться при рассмотрении диаграмм над заданиями групп B_α в § 9, 10. Нам понадобятся два вспомогательных утверждения о сохранении некоторых свойств диаграмм при выполнении этих операций.

Рис. 7

4.10. ЛЕММА. Пусть Δ, Δ' – диаграммы над заданием $\mathcal{P}$ и Δ' получена из Δ некоторой последовательностью измельчений и замен дисковых поддиаграмм. Тогда для любого пути X на Δ , соединяющего две граничные вершины диаграммы Δ , существует путь X' на диаграмме Δ' с теми же начальной и конечной вершинами, что и у пути X , такой, что $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X')$ в группе $\mathbf{G}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай, когда диаграмма Δ' получена из диаграммы Δ заменой дисковой поддиаграммы Θ на некоторую дисковую диаграмму Θ' . Пусть X – путь на Δ , соединяющий две граничные вершины диаграммы Δ . Представим X в виде произведения $X = Y_0 Z_1 Y_1 \dots Z_k Y_k$, где пути Z_i состоят только из внутренних ребер диаграммы Θ , а пути Y_i не содержат таких ребер. Тогда начальная и конечная вершины каждого пути Z_i принадлежат границе Θ , и так как Θ – дисковая диаграмма, то путь Z_i гомотопен на Θ (а значит, и на Δ) некоторому пути Z'_i , входящему в граничный цикл диаграммы Θ . В качестве X' возьмем путь $Y_0 Z'_1 Y_1 \dots Z'_k Y_k$ на поддиаграмме $\Delta - \text{int } \Theta$ диаграммы Δ , являющейся одновременно и поддиаграммой диаграммы Δ' . Так как пути X и X' гомотопны на Δ , то по лемме 4.2 в $\mathbf{G}$ истинно равенство $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X')$, что и требовалось доказать.

Из леммы 4.2 следует, что отображение, сопоставляющее каждому пути X на диаграмме Δ его метку, индуцирует отображение множества классов гомотопных путей на диаграмме Δ в группу $\mathbf{G}$, сопоставляющее каждому классу $[X]_\Delta$ элемент $[\mathcal{L}(X)]_{\mathbf{G}}$. Мы будем обозначать это отображение через $[\mathcal{L}]_{\mathbf{G}}$. Заметим, что ограничение $[\mathcal{L}]_{\mathbf{G}}$ на фундаментальную группу $\pi_1(\Delta, a)$ является гомоморфизмом групп.

4.11. ЛЕММА. Пусть Δ, Δ' – диаграммы с тремя граничными циклами над заданием $\mathcal{P}$ и Δ' получена из Δ некоторой последовательностью измельчений и замен дисковых или кольцевых поддиаграмм. Пусть C – некоторый граничный цикл диаграммы Δ и $a = \iota(C) = \tau(C)$. Тогда $[\mathcal{L}]_{\mathbf{G}}(\pi_1(\Delta', a)) = g([\mathcal{L}]_{\mathbf{G}}(\pi_1(\Delta, a)))g^{-1}$ для некоторого элемента $g \in \mathbf{G}$, коммутирующего с $[\mathcal{L}(C)]_{\mathbf{G}}$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда диаграмма Δ' получена из диаграммы Δ заменой дисковой или кольцевой поддиаграммы Θ на некоторую (соответственно дисковую или кольцевую) диаграмму Θ' . Если Θ – дисковая диаграмма, то, как мы видели в доказательстве предыдущей леммы, для любого пути X на Δ с $\iota(X) = \tau(X) = a$ найдется гомотопный пути X путь X' на диаграмме $\Delta - \text{int } \Theta$. Отсюда следует, что вложение $\Delta - \text{int } \Theta \subseteq \Delta$ индуцирует эпиморфизм $\pi_1(\Delta - \text{int } \Theta, a) \rightarrow \pi_1(\Delta, a)$. Так как $[\mathcal{L}]_{\mathbf{G}}(\pi_1(\Delta - \text{int } \Theta, a)) \rightarrow [\mathcal{L}]_{\mathbf{G}}(\pi_1(\Delta, a))$ – вложение, то имеем $[\mathcal{L}]_{\mathbf{G}}(\pi_1(\Delta - \text{int } \Theta, a)) = [\mathcal{L}]_{\mathbf{G}}(\pi_1(\Delta, a))$. Но диаграмма $\Delta - \text{int } \Theta$ является также и поддиаграммой диаграммы Δ' , следовательно, имеем $[\mathcal{L}]_{\mathbf{G}}(\pi_1(\Delta - \text{int } \Theta, a)) = [\mathcal{L}]_{\mathbf{G}}(\pi_1(\Delta', a))$ и, таким образом, $[\mathcal{L}]_{\mathbf{G}}(\pi_1(\Delta, a)) = [\mathcal{L}]_{\mathbf{G}}(\pi_1(\Delta', a))$. Пусть Θ – кольцевая диаграмма. Тогда диаграмма $\Delta - \text{int } \Theta$ состоит из двух связных компонент Δ_1 и Δ_2 . Можно считать, что C – граничный цикл диаграммы Δ_1 . Рассмотрим три случая.

Рис. 8

Случай 1: Δ_2 не содержит в качестве граничных циклов ни одного граничного цикла диаграммы Δ , т.е. Δ_2 – односвязная диаграмма (см. рис. 8, слева). Тогда Δ' есть результат замены дисковой поддиаграммы $\Theta \cup \Delta_2$ диаграммы Δ на диаграмму $\Theta' \cup \Delta'_2$, где Δ'_2 есть копия диаграммы Δ_2 , приклеенная к Θ' . В этом случае по доказанному $[\mathcal{L}]_{\mathbf{G}}(\pi_1(\Delta, a)) = [\mathcal{L}]_{\mathbf{G}}(\pi_1(\Delta', a))$.

Случай 2: Δ_2 содержит в качестве граничного цикла ровно один граничный цикл диаграммы Δ (см. рис. 8, справа). Пусть D – граничный цикл кольцевой диаграммы $\Sigma \Leftarrow \Theta \cup \Delta_2$ такой, что D^{-1} является граничным циклом диаграммы Δ_1 . Так как $\pi_1(\Sigma, \iota(D))$ – циклическая группа, порожденная классом $[D]_{\Sigma}$, то любой путь на Σ , соединяющий две вершины, лежащие на D , гомотопен некоторому пути, состоящему только из ребер, входящих в D . Тогда, рассуждая аналогично доказательству леммы 4.10, получаем, что любой путь X на диаграмме Δ с начальной и конечной вершиной a гомотопен некоторому пути на поддиаграмме Δ_1 . Отсюда следует, что вложение $\Delta_1 \subseteq \Delta$ индуцирует эпиморфизм $\pi_1(\Delta_1, a) \rightarrow \pi_1(\Delta, a)$, и, как и в случае дисковой диаграммы Θ , приходим к равенству $[\mathcal{L}]_{\mathbf{G}}(\pi_1(\Delta, a)) = [\mathcal{L}]_{\mathbf{G}}(\pi_1(\Delta', a))$.

Случай 3: Δ_2 содержит в качестве граничных циклов два граничных цикла диаграммы Δ (рис. 9). Пусть D – граничный цикл диаграммы Δ_2 такой, что D^{-1} является граничным циклом диаграммы Θ . Обозначим $b \Leftarrow \iota(D)$, и пусть T – произвольный путь на поддиаграмме $\Delta_1 \cup \Theta$ диаграммы Δ , соединяющий вершины a

Рис. 9

и b . Рассуждая аналогично доказательству леммы 4.10, получаем, что любой путь на Δ с начальной и конечной вершиной b гомотопен некоторому пути на Δ_2 . Следовательно, вложение $\Delta_2 \subseteq \Delta$ индуцирует эпиморфизм $\pi_1(\Delta_2, b) \rightarrow \pi_1(\Delta, b)$, и поэтому имеем $[\mathcal{L}]_{\mathbf{G}}(\pi_1(\Delta, b)) = [\mathcal{L}]_{\mathbf{G}}(\pi_1(\Delta_2, b))$. С другой стороны, по формуле замены начальной вершины для фундаментальной группы имеем

$$\pi_1(\Delta, a) = [T]_{\Delta} \pi_1(\Delta, b) [T]_{\Delta}^{-1}.$$

Следовательно,

$$[\mathcal{L}]_{\mathbf{G}}(\pi_1(\Delta, a)) = [\mathcal{L}(T)]_{\mathbf{G}}([\mathcal{L}]_{\mathbf{G}}(\pi_1(\Delta_2, b)))[\mathcal{L}(T)]_{\mathbf{G}}^{-1}.$$

Выбрав путь T' на поддиаграмме $\Delta_1 \cup \Theta^*$ диаграммы Δ' , где Θ^* есть копия диаграммы Θ' , вклеенная вместо Θ , аналогично выводим

$$[\mathcal{L}]_{\mathbf{G}}(\pi_1(\Delta', a)) = [\mathcal{L}(T')]_{\mathbf{G}}([\mathcal{L}]_{\mathbf{G}}(\pi_1(\Delta_2, b)))[\mathcal{L}(T')]_{\mathbf{G}}^{-1}.$$

Из двух полученных равенств вытекает

$$[\mathcal{L}]_{\mathbf{G}}(\pi_1(\Delta', a)) = \mathbf{g}([\mathcal{L}]_{\mathbf{G}}(\pi_1(\Delta, a)))\mathbf{g}^{-1},$$

где

$$\mathbf{g} = [\mathcal{L}(T')]_{\mathbf{G}}[\mathcal{L}(T)]_{\mathbf{G}}^{-1}.$$

Воспользовавшись два раза леммой 4.3 при $\Delta := \Delta_1 \cup \Theta$ и $\Delta := \Delta_1 \cup \Theta^*$, получаем, что в $\mathbf{G}$ истинны равенства

$$\mathcal{L}(C) = \mathcal{L}(T)\mathcal{L}(D)(\mathcal{L}(T)^{-1}), \quad \mathcal{L}(C) = \mathcal{L}(T')\mathcal{L}(D)(\mathcal{L}(T')^{-1}),$$

откуда вытекает, что $\mathbf{g}$ коммутирует с $[\mathcal{L}(C)]_{\mathbf{G}}$.

4.12. В заключение этого параграфа укажем связь между диаграммами над заданием $\mathcal{P}$ группы $\mathbf{G}$ и графом Кэли $\Gamma = \Gamma(\mathbf{G}, \mathcal{A})$ (где множество порождающих $\mathcal{A}$

то же, что и в $\mathcal{P}$). Пусть Δ – некоторая дисковая диаграмма над заданием $\mathcal{P}$. Зафиксируем произвольным образом вершину v_0 диаграммы Δ и вершину $g_0 \in \mathbf{G}$ графа Γ . Для любой вершины v диаграммы Δ положим $\omega(v) \doteq g_0[\mathcal{L}(P)]_{\mathbf{G}}$, где P – произвольный путь, соединяющий вершины v_0 и v . Так как в силу односвязности Δ и леммы 4.2 для любых путей P, P' на Δ с одинаковыми начальными и конечными вершинами выполнено $[\mathcal{L}(P)]_{\mathbf{G}} = [\mathcal{L}(P')]_{\mathbf{G}}$, то ω – корректно определенное отображение множества вершин диаграммы Δ во множество вершин графа Γ .

Определим ω на ориентированных ребрах диаграммы Δ следующим образом. Если e – ориентированное ребро с $\mathcal{L}(e) \subseteq 1$, то положим $\omega(e) = \omega(\iota(e)) = \omega(\tau(e))$. Иначе, если $\mathcal{L}(e) \subseteq a^\epsilon \in \mathcal{A}^{\pm 1}$, то, как легко видеть, вершины $\omega(\iota(e))$ и $\omega(\tau(e))$ графа Γ соединены ребром с меткой a^ϵ , которое мы и возьмем в качестве $\omega(e)$. Отображение ω естественным образом распространяется на множество путей на диаграмме Δ . Очевидно, ω сохраняет начальную и конечную вершину пути, его метку, а также операции произведения путей и взятия обратного пути.

§ 5. Основные определения

Определения 5.1–5.9 даются одновременной индукцией по рангу α .

5.1. База индукции.

Группа $\mathbf{B}_0$ по определению есть свободная группа с m -элементным базисом $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$.

Множество $\mathcal{R}_0$ слов, приведенных в ранге 0, состоит из слов, несократимых в свободной группе $\mathbf{B}_0$.

Множество $\mathcal{H}_0$ по определению состоит из одного пустого слова.

Слова X и Y назовем *близкими в ранге 0*, если $X = Y$ в группе $\mathbf{B}_0$.

Пусть теперь $\alpha \geq 1$ и определены группа $\mathbf{B}_{\alpha-1}$, множества слов $\mathcal{R}_{\alpha-1}$, $\mathcal{H}_{\alpha-1}$ и отношение “слова X и Y близки в ранге $\alpha - 1$ ”.

5.2. *Периодом ранга α* назовем непустое слово A , для которого $\text{Пер}(A) \subseteq \mathcal{R}_{\alpha-1}$.

5.3. Период A ранга α *минимален*, если не существует чисел $r \geq 1$, $t \geq 2$ и слова B таких, что A^r и B^{tr} сопряжены в группе $\mathbf{B}_{\alpha-1}$. Множество всех минимальных периодов ранга α обозначим через $\mathcal{M}_\alpha$.

5.4. Минимальные периоды $A, B \in \mathcal{M}_\alpha$ назовем *родственными в ранге α* (обозначаем $\text{Род}_\alpha(A, B)$), если для некоторого $t > 0$ слова A^t и B^t сопряжены в $\mathbf{B}_{\alpha-1}$.

5.5. Индукцией по i определим последовательность подмножеств $\mathcal{N}_{\alpha,i} \subseteq \mathcal{M}_\alpha$ ($i \geq 0$):

$\mathcal{N}_{\alpha,0} \doteq \{A \in \mathcal{M}_\alpha \mid \text{существуют близкие в ранге } \alpha - 1 \text{ слова}$

$P \in \text{Пер}(A) \text{ и } Q \in \text{Пер}(B, p) \text{ при } B \in \mathcal{M}_\alpha \text{ и } \neg \text{Род}_\alpha(A, B)\},$

$\mathcal{N}_{\alpha,i+1} \doteq \{A \in \mathcal{M}_\alpha \mid \text{существуют близкие в ранге } \alpha - 1 \text{ слова}$

$P \in \text{Пер}(A) \text{ и } Q \in \text{Пер}(B, 10) \text{ при } B \in \mathcal{N}_{\alpha,i} \text{ и } \neg \text{Род}_\alpha(A, B)\},$

5.6. По определению положим

$$\mathcal{E}_\alpha = \mathcal{M}_\alpha \setminus \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{N}_{\alpha,i}.$$

Слова из $\mathcal{E}_\alpha$ назовем *элементарными периодами ранга α* . Положим

$$\mathbf{B}_\alpha = \left\langle \mathcal{A} \mid A^n = 1, \quad A \in \bigcup_{\beta=1}^{\alpha} \mathcal{E}_\beta \right\rangle.$$

5.7. Слово X назовем *приведенным в ранге α* , если X приведено в ранге $\alpha - 1$ и не существует близких в ранге $\alpha - 1$ подслов слова X и слова $P \in \text{Пер}(A, n - q)$ при $A \in \mathcal{E}_\alpha$. Множество всех приведенных в ранге α слов обозначим через $\mathcal{R}_\alpha$.

Слово X назовем *циклически приведенным в ранге α* , если любой циклический сдвиг слова X есть приведенное в ранге α слово.

5.8. Положим

$$\mathcal{H}_\alpha = \{uPv \mid u, v \in \mathcal{H}_{\alpha-1}, \quad P - \text{подслово слова } A^n \text{ при } A \in \mathcal{E}_\alpha\}.$$

5.9. Наконец, слова X и Y назовем *близкими в ранге α* , если $X \stackrel{\alpha}{=} uYv$ для некоторых $u, v \in \mathcal{H}_\alpha$ (напомним, что символом $\stackrel{\alpha}{=}$ обозначается равенство слов в группе $\mathbf{B}_\alpha$).

Индуктивные определения 5.1–5.9 завершены.

Отметим некоторые свойства введенных понятий, которые легко получаются из данных выше определений. Прежде всего, заметим, что все эти понятия инвариантны относительно замены слов на обратные. Это означает, что множества периодов ранга α и множества $\mathcal{M}_\alpha, \mathcal{N}_{\alpha,i}, \mathcal{E}_\alpha, \mathcal{R}_\alpha, \mathcal{H}_\alpha$ вместе с каждым словом содержат обратное слово, а отношения “слова X и Y близки в ранге α ” и $\text{Род}_\alpha(A, B)$ сохраняются при замене слов на обратные. Этот факт непосредственно вытекает из определений 5.1–5.9 по индукции. Забегая вперед, отметим, что все относящиеся к словам понятия, которые будут вводиться ниже, также инвариантны относительно замены слов на обратные, а все понятия, относящиеся к путям на графах Кэли групп $\mathbf{B}_\alpha$, будут инвариантны относительно замены путей на обратные. Как и в рассмотренном выше случае, этот факт будет непосредственно следовать из соответствующих определений (см. также леммы 3.1, (i), 3.2, (v) и 3.4, (iii)), и мы будем постоянно пользоваться им в рассуждениях (ср. *принцип симметричности* в [1, I.5.3]).

Множества периодов ранга α , $\mathcal{M}_\alpha, \mathcal{N}_{\alpha,i}$ и $\mathcal{E}_\alpha$ обладают еще одним свойством симметрии: вместе с каждым словом они содержат любой его циклический сдвиг. Это также легко вытекает из определений 5.2, 5.3, 5.5 и 5.6, для множества $\mathcal{N}_{\alpha,i}$ нужно лишь заметить, что в случае, если A_1 есть циклический сдвиг слова A , имеет место эквивалентность $\text{Род}_\alpha(A, B) \Leftrightarrow \text{Род}_\alpha(A_1, B)$.

Отметим еще один факт, непосредственно вытекающий из определения 5.7, который будет постоянно использоваться в дальнейшем: любое подслово приведенного в ранге α слова само является приведенным в ранге α словом.

5.10. ЛЕММА. *Если $\alpha \geq 2$, то любой период ранга α является периодом ранга $\alpha - 1$ и любой минимальный период ранга α является минимальным периодом ранга $\alpha - 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для периодов ранга α это следует непосредственно из определения 5.2 и включения $\mathcal{R}_\alpha \subseteq \mathcal{R}_{\alpha-1}$. Для минимальных периодов ранга α утверждение вытекает из определения 5.3, предыдущего утверждения и факта о том, что группа $\mathbf{B}_\alpha$ есть гомоморфный образ группы $\mathbf{B}_{\alpha-1}$.

5.11. ЛЕММА. *Любой минимальный период ранга α есть простое слово.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если A – период ранга α и $A \sqsubseteq B^t$ при $t \geq 2$, то согласно определению 5.2 слово B есть период ранга α , и тогда в силу определения 5.3 имеем $A \notin \mathcal{M}_\alpha$.

5.12. ЛЕММА. *Для любого $\alpha \geq 1$ выполнено $\mathcal{H}_{\alpha-1} \subseteq \mathcal{H}_\alpha$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $u \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$, то в качестве P и v в определении 5.8 можно взять пустые слова.

Из леммы 5.12 вытекает, в частности, что при любом $\alpha \geq 0$ множество $\mathcal{H}_\alpha$ содержит пустое слово, и, следовательно, отношение “слова X и Y близки в ранге α ” рефлексивно. Так как из $X \stackrel{\alpha}{=} uYv$ следует $Y \stackrel{\alpha}{=} u^{-1}Xv^{-1}$, то это отношение также и симметрично.

5.13. ЛЕММА. *При любом $\alpha \geq 1$ выполнено $\mathcal{M}_{\alpha+1} \subseteq \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{N}_{\alpha,i}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $A \in \mathcal{E}_\alpha$ имеем $A^n \notin \mathcal{R}_\alpha$ в силу определения 5.7. Тогда в силу определения 5.2 $\mathcal{E}_\alpha \cap \mathcal{M}_{\alpha+1} = \emptyset$, откуда в силу определения 5.6 и леммы 5.10 выводим $\mathcal{M}_{\alpha+1} \subseteq \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{N}_{\alpha,i}$.

В системе индуктивных определений 5.14–5.20 будет существенно использоваться язык графа Кэли $\Gamma(\mathbf{B}_\alpha, \mathcal{A})$ группы $\mathbf{B}_\alpha$ относительно множества порождающих $\mathcal{A}$. Начиная с этого момента, нам будет удобно использовать специальное обозначение

$$\Gamma_\alpha \doteq \Gamma(\mathbf{B}_\alpha, \mathcal{A}).$$

Следующие понятия будут предполагаться известными при переходе от меньших значений ранга α к большим.

- Множество *элементарных слов ранга α* и для любого $r \geq 8$ множество *элементарных r -степеней ранга α* . Для любого $\beta \geq \alpha$ через $\mathcal{E}l_\alpha(\Gamma_\beta)$ и $\mathcal{E}l_\alpha(\Gamma_\beta, r)$ будут обозначаться множества путей E на графе Γ_β , для которых слово $\mathcal{L}(E)$ есть элементарное слово ранга α , или соответственно элементарная r -степень ранга α . Путь $E \in \mathcal{E}l_\alpha(\Gamma_\beta)$ будем называть *элементарным отрезком ранга α на графе Γ_β* .
- Отношение $\mathcal{E}Cогл_\alpha(E, F)$ *согласованности элементарных отрезков E и F ранга α на графе Γ_β* (формально для каждого β имеется свое отношение $\mathcal{E}Cогл_\alpha(E, F)$, значение β всегда будет ясным из контекста).

5.14. *Элементарным словом ранга 0* назовем всякое однобуквенное слово. Соответственно *элементарный отрезок ранга 0* на графе Γ_β есть любой путь длины 1 на Γ_β . Любое элементарное слово ранга 0 является *элементарной r -степенью ранга 0* при любом r . Таким образом, $\mathcal{E}l_0(\Gamma_\beta, r) = \mathcal{E}l_0(\Gamma_\beta)$.

По определению для любых $E, F \in \mathcal{E}l_0(\Gamma_\beta)$ отношение $\mathcal{E}Cогл_0(E, F)$ истинно тогда и только тогда, когда $E = F$.

Теперь пусть $\alpha \geq 1$.

5.15. Число $\beta \leq \alpha - 1$ назовем *рангом активности* минимального периода $A \in \mathcal{M}_\alpha$, если никакое слово $P \in \text{Пер}(B)$ не содержит в качестве подслов элементарных q_3 -степеней ранга γ при $\beta < \gamma \leq \alpha - 1$, но некоторое слово $P \in \text{Пер}(A)$ содержит элементарную q_3 -степень ранга β . Ранг активности данного периода $A \in \mathcal{M}_\alpha$ обозначим через $\rho(A)$. Так как согласно определению 5.2 минимальный период ранга α есть непустое слово, а согласно определению 5.14 однобуквенное слово является элементарной q_3 -степенью ранга 0, то ранг активности данного минимального периода A ранга корректно определен.

5.16. Путь E на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ назовем *почти периодическим отрезком ранга α* , порожденным периодом $A \in \mathcal{M}_\alpha$, если $\mathcal{L}(E) \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ и для некоторого $P \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$ существуют начало K и конец L пути P , начало K' и конец L' пути E такие, что $K, L \in \mathcal{E}l_{\rho(A)}(\Gamma_{\alpha-1}, q_2)$, $K', L' \in \mathcal{E}l_{\rho(A)}(\Gamma_{\alpha-1}, q_1)$, $\neg \mathcal{E}Cогл_{\rho(A)}(K, L)$, $\mathcal{E}Cогл_{\rho(A)}(K, K')$ и $\mathcal{E}Cогл_{\rho(A)}(L, L')$.

Будем путь P называть *периодической основой* для E . Множество почти периодических отрезков ранга α , порожденных данным периодом $A \in \mathcal{M}_\alpha$, обозначим через $\text{ППер}_\alpha(A)$.

Слово E будем называть *почти периодическим словом ранга α* , порожденным периодом A , если $\mathcal{L}(E) \supseteq E$ для некоторого $E \in \text{ППер}_\alpha(A)$ (это понятие соответствует понятию целого слова ранга α в [1]). Множество почти периодических слов ранга α , порожденных периодом A , будем обозначать через $\text{ППер}_\alpha(A)$.

5.17. Укажем некоторый способ измерения “количества периодов” A , содержащихся в почти периодическом слове или почти периодическом отрезке ранга α , порожденном A . Пусть $A \in \mathcal{M}_\alpha$ и $E \in \text{ППер}_\alpha(A)$. Через $\ell_{\alpha, A}(E)$ обозначим наибольшее число r такое, что найдется периодическая основа $P \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$ для E , содержащая в качестве подпутей пути $K, s_{A, P}K, \dots, s_{A, P}^r K$, где $K \in \mathcal{E}l_{\rho(A)}(\Gamma_{\alpha-1}, q_2)$.

Если $E \in \text{ППер}_\alpha(A)$, то по определению

$$\ell_{\alpha, A}(E) = \ell_{\alpha, A}(E), \quad \text{где } \mathcal{L}(E) \supseteq E. \quad (5.1)$$

Обозначим

$$\text{ППер}_\alpha(A, r) = \{E \in \text{ППер}_\alpha(A) \mid \ell_{\alpha, A}(E) \geq r\},$$

$$\text{ППер}_\alpha(A, r) = \{E \in \text{ППер}_\alpha(A) \mid \ell_{\alpha, A}(E) \geq r\} = \{\mathcal{L}(E) \mid E \in \text{ППер}_\alpha(A, r)\}.$$

Слово $E \in \text{ППер}_\alpha(A, r)$ будем называть *почти периодической r -степенью ранга α* , порожденной периодом A .

5.18. Почти периодические отрезки $E \in \text{ППер}_\alpha(A)$ и $F \in \text{ППер}_\alpha(B)$ ранга α назовем *согласованными* (обозначаем $\text{ПСогл}_\alpha(E, F)$), если согласованы их некоторые периодические основы $P \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$ и $Q \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, B, 2)$.

5.19. *Элементарным словом ранга α и элементарной r -степенью ранга α при $r \geq 8$ назовем любое слово $E \in \text{ППер}_\alpha(A, 8)$ или соответственно $E \in \text{ППер}_\alpha(A, r)$, где $A \in \mathcal{E}_\alpha$. Тем самым для любого $\beta \geq \alpha$ определены множества $\mathcal{E}_\alpha(\Gamma_\beta)$ и $\mathcal{E}_\alpha(\Gamma_\beta, r)$. Для любого элементарного слова E ранга α и любого пути $E \in \mathcal{E}_\alpha(\Gamma_\beta)$ положим*

$$\ell_\alpha(E) = \max_{A \in \mathcal{E}_\alpha} \ell_{\alpha, A}(E), \quad \ell_\alpha(E) = \ell_\alpha(\mathcal{L}(E)).$$

Очевидно, E есть элементарная r -степень ранга α тогда и только тогда, когда $\ell_\alpha(E) \geq r$.

5.20. Элементарные отрезки E, F ранга α на графе Γ_β при $\beta \geq \alpha$ назовем *согласованными*, если для некоторых $A, B \in \mathcal{E}_\alpha$ существуют их прообразы $\bar{E} \in \text{ППер}(A, 8)$, $\bar{F} \in \text{ППер}(B, 8)$ на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ относительно отображения $\pi_{\alpha-1, \beta}$, (см. § 2, 3) такие, что $\text{ПСогл}_\alpha(\bar{E}, \bar{F})$ или $\text{ПСогл}_\alpha(\bar{E}, \bar{F}^{-1})$.

Определения совместной индукцией завершены.

Как уже отмечалось выше, из определений непосредственно вытекает, что все введенные понятия инвариантны относительно замены слов и путей на графах Γ_α на обратные. Отметим еще одно важное свойство понятий, связанных с путями на графах Γ_α : все введенные в пп. 5.14–5.20 множества путей на графах Γ_α , функции и отношения на них инвариантны относительно действия группы $\mathbf{B}_\alpha$ на Γ_α левыми сдвигами. Это вытекает из соответствующих определений и инвариантности всех функций и отношений на графах Γ_α относительно действия группы $\mathbf{B}_\alpha$, которые эти определения используют (см. § 3, в частности лемму 3.4, (ii)). Например, из определения 5.16 следует, что если $E \in \text{ППер}_\alpha(A)$ и $P \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$ – периодическая основа для E , то для любого $g \in \mathbf{B}_{\alpha-1}$ имеем $gE \in \text{ППер}_\alpha(A)$ и gP – периодическая основа для gE , а из определения 5.17 следует, что $\ell_{\alpha, A}(E) = \ell_{\alpha, A}(gE)$ для любых $E \in \text{ППер}_\alpha(A)$ и $g \in \mathbf{B}_{\alpha-1}$. В качестве следствия отметим, что в (5.1) число $\ell_{\alpha, A}(E)$ не зависит от выбора пути $E \in \text{ППер}_\alpha(A)$, для которого $\mathcal{L}(E) \sqsubseteq E$.

Так как действие группы $\mathbf{B}_{\alpha-1}$ на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ транзитивно на множестве путей с одинаковой меткой, то из определения 5.19 вытекает

5.21. ЛЕММА. *Если E – путь на $\Gamma_{\alpha-1}$, метка которого есть элементарное слово (элементарная r -степень) ранга α , то $E \in \text{ППер}_\alpha(A, 8)$ (соответственно $E \in \text{ППер}_\alpha(A, r)$) для некоторого $A \in \mathcal{E}_\alpha$.*

§ 6. Строго близкие периодические отрезки на графе $\Gamma_{\alpha-1}$

Начиная с этого параграфа и до конца § 16 доказательство всех утверждений, формулировка которых зависит от ранга α , проводится совместной

индукцией по α . На протяжении §6–16 мы будем считать фиксированным значение ранга α . Все утверждения, за исключением небольшого числа, формулируются и доказываются для значения ранга $\alpha \geq 1$. В этих исключительных случаях область значений для α будет указываться сразу перед формулировкой утверждения.

Ввиду совместной индукции все участвующие в ней утверждения в § 6–16 формально равноценны. Тем не менее одна часть утверждений формулируется в виде предложений, а другая – в виде лемм. Это деление условно и отражает лишь авторскую оценку роли того или иного утверждения в общей схеме рассуждений: предложения составляют “каркас” доказательства и в меньшей степени зависимы от конкретной технической реализации (для многих из них можно указать соответствующие аналоги в [1] и [7]).

В этом параграфе мы докажем ряд утверждений о взаимном расположении периодических отрезков на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ с минимальными в ранге α периодами (предложения 6.10–6.12). В частности, предложения 6.11 и 6.12 дают достаточные условия согласованности двух периодических отрезков на графе $\Gamma_{\alpha-1}$. Результаты этого параграфа играют ту же роль, что и так называемая *периодизация* в [1], и в некотором смысле могут рассматриваться как обобщения леммы о наложении периодических слов. При этом вместо периодических слов рассматриваются два периодических отрезка на графе $\Gamma_{\alpha-1}$, а вместо условия графического равенства слов рассматривается некоторое условие “геометрической близости” путей (условие строгой близости путей в ранге $\beta \leq \alpha - 1$, определение 6.5). Отметим, что в [1] эту роль играют порождающие вхождения ранга α и условие их взаимной нормированности в ранге $\alpha - 1$.

В качестве основного инструмента при рассмотрении периодических отрезков на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ будут использоваться содержащиеся в них элементарные отрезки ранга $\beta \leq \alpha - 1$ и отношение согласованности $\mathcal{E}Согл_\beta$, которое в силу индуктивного предположения 8.7 является отношением эквивалентности на множестве $\mathcal{E}л_\beta(\Gamma_{\alpha-1})$. Мы будем использовать специальное обозначение $\mathcal{E}л_\beta(X, r)$ для множества подпутей $K \in \mathcal{E}л(\Gamma_\gamma, r)$ данного пути X на графе Γ_γ , т.е. подпутей K пути X , метка которых есть элементарная r -степень ранга β . Заметим, что в силу индуктивного предположения 11.4 любой путь на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ с $\mathcal{L}(X) \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ является простым. В этом случае на множестве непустых подпутей пути X корректно определены отношения $<_X$ и $\ll_X$ (см. § 3). В частности, в силу определения 5.2 это верно для любого пути $X \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A)$, где A – период ранга α .

6.1. ЛЕММА. *Если $\mathbf{H}$ – конечная подгруппа группы $\mathbf{G}$, $\mathbf{g}, \mathbf{h} \in \mathbf{G}$ и для некоторого r выполнено $\mathbf{h}^{-i-r}\mathbf{g}\mathbf{h}^i \in \mathbf{H}$ при всех $i \in \mathbb{Z}$, то $\mathbf{g}^\ell = \mathbf{h}^{\ell r}$ для некоторого $\ell > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При любом $j > 0$ имеем

$$\mathbf{h}^{-jr}\mathbf{g}^j = \mathbf{h}^{-jr}\mathbf{g}\mathbf{h}^{(j-1)r} \cdot \mathbf{h}^{-(j-1)r}\mathbf{g}\mathbf{h}^{(j-2)r} \cdot \dots \cdot \mathbf{h}^{-r}\mathbf{g} \in \mathbf{H}.$$

Так как подгруппа $\mathbf{H}$ конечна, то отсюда следует $\mathbf{h}^{-jr}\mathbf{g}^j = \mathbf{h}^{-kr}\mathbf{g}^k$ для некоторых $j \neq k$. Тогда имеем $\mathbf{g}^{|j-k|} = \mathbf{h}^{|j-k|r}$.

6.2. ЛЕММА. Пусть некоторая группа $\mathbf{G}$ действует (слева) на множестве X . Пусть $\mathbf{g}, \mathbf{h} \in \mathbf{G}$, $x_0, x_1, \dots, x_t \in X$ и для некоторых $r, s \geq 0$ выполнено

$$\mathbf{g}x_i = x_{i+r} \quad (i = 0, 1, \dots, t-r), \quad \mathbf{h}x_i = x_{i+s} \quad (i = 0, 1, \dots, t-s). \quad (6.1)$$

Пусть, далее, стабилизатор $\mathbf{H}$ элемента x_0 в группе $\mathbf{G}$ конечен и для некоторого $i_0 \geq 0$ удовлетворяет следующему условию: если элементы $\mathbf{x}, \mathbf{w} \in \mathbf{G}$ таковы, что $\mathbf{x}^{-i}\mathbf{w}\mathbf{x}^i \in \mathbf{H}$ при $i = 0, 1, \dots, i_0$, то $\mathbf{x}^{-i}\mathbf{w}\mathbf{x}^i \in \mathbf{H}$ при любом $i \in \mathbb{Z}$.

Тогда если $t \geq r+s+i_0-1$ и $\text{НОД}(r, s) = 1$, то существует элемент $\mathbf{d} \in \mathbf{G}$ такой, что $\mathbf{g}^\ell = \mathbf{d}^{\ell r}$ и $\mathbf{h}^\ell = \mathbf{d}^{\ell s}$ для некоторого $\ell > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду леммы 6.1 достаточно указать элемент $\mathbf{d} \in \mathbf{G}$ такой, что $\mathbf{d}^{-i-r}\mathbf{g}\mathbf{d}^i \in \mathbf{H}$ и $\mathbf{d}^{-i-s}\mathbf{h}\mathbf{d}^i \in \mathbf{H}$ при любом i . Индукцией по $r+s$ докажем утверждение, которое получается заменой условия “ $\mathbf{g}^\ell = \mathbf{d}^{\ell r}$ и $\mathbf{h}^\ell = \mathbf{d}^{\ell s}$ для некоторого $\ell > 0$ ” в формулировке леммы 6.2 на “ $\mathbf{g}\mathbf{d}^i \in \mathbf{d}^{i+r}\mathbf{H}$ и $\mathbf{h}\mathbf{d}^i \in \mathbf{d}^{i+s}\mathbf{H}$ при любом $i \in \mathbb{Z}$ ”. Так как утверждение леммы симметрично относительно перестановки $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$, то можно считать $r \leq s$.

Если $r = 0$, то из $\text{НОД}(r, s) = 1$ следует $s = 1$, из $t \geq r+s+i_0-1$ следует $t \geq i_0$, а из (6.1) следует $\mathbf{h}^{-i}\mathbf{g}\mathbf{h}^i \in \mathbf{H}$ при $0 \leq i \leq t$. Тогда в силу условия на $\mathbf{H}$ получаем $\mathbf{h}^{-i}\mathbf{g}\mathbf{h}^i \in \mathbf{H}$ при любом $i \in \mathbb{Z}$, и можно положить $\mathbf{d} = \mathbf{h}$.

Пусть $r \geq 1$. Так как из (6.1) следует $\mathbf{g}^{-1}\mathbf{h}x_i = x_{i+s-r}$ ($i = 0, 1, \dots, t-s$), то по индуктивному предположению при $\mathbf{g} := \mathbf{g}$, $\mathbf{h} = \mathbf{g}^{-1}\mathbf{h}$, $r := r$, $s := s-r$ и $t := t-r$ найдется $\mathbf{d} \in \mathbf{G}$ такой, что при любом $i \in \mathbb{Z}$ выполнено $\mathbf{g}\mathbf{d}^i \in \mathbf{d}^{i+r}\mathbf{H}$ и $\mathbf{g}^{-1}\mathbf{h}\mathbf{d}^i \in \mathbf{d}^{i+s-r}\mathbf{H}$. Тогда имеем $\mathbf{h}\mathbf{d}^i = \mathbf{g} \cdot \mathbf{g}^{-1}\mathbf{h}\mathbf{d}^i \in \mathbf{d}^{i+s}\mathbf{H}$, что и требовалось доказать.

6.3. ЛЕММА. Пусть $\beta \leq \alpha-1$, элементы $\mathbf{g}, \mathbf{h} \in \mathbf{B}_{\alpha-1}$, числа $r, s \geq 0$ и пути $\mathbf{M}_0, \mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_t \in \mathcal{E}\mathcal{L}_\beta(\Gamma_{\alpha-1})$ таковы, что истинны соотношения

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{L}_\beta(\mathbf{g}\mathbf{M}_i, \mathbf{M}_{i+r}) \quad (i = 0, 1, \dots, t-r), \\ \mathcal{E}\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{L}_\beta(\mathbf{h}\mathbf{M}_i, \mathbf{M}_{i+s}) \quad (i = 0, 1, \dots, t-s). \end{aligned}$$

Если $t \geq r+s+4$ и $\text{НОД}(r, s) = 1$, то существует элемент $\mathbf{d} \in \mathbf{B}_{\alpha-1}$ такой, что $\mathbf{g}^\ell = \mathbf{d}^{\ell r}$ и $\mathbf{h}^\ell = \mathbf{d}^{\ell s}$ для некоторого $\ell > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО будет состоять в применении леммы 6.2. В качестве группы $\mathbf{G}$ рассмотрим группу $\mathbf{B}_{\alpha-1}$, а в качестве элементов множества X – классы эквивалентности множества $\mathcal{E}\mathcal{L}_\beta(\Gamma_{\alpha-1})$ по отношению $\mathcal{E}\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{L}_\beta$. Заметим, что на X корректно определено действие группы $\mathbf{B}_{\alpha-1}$ ввиду инвариантности отношения $\mathcal{E}\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{L}_\beta$ относительно действия $\mathbf{B}_{\alpha-1}$. По индуктивному предположению 8.8 стабилизатор класса, содержащего $\mathbf{M}_0$, т.е. подгруппа $\mathbf{H}$, состоящая из элементов $\mathbf{x} \in \mathbf{B}_{\alpha-1}$, для которых $\mathcal{E}\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{L}_\beta(\mathbf{M}_0, \mathbf{x}\mathbf{M}_0)$, конечен. По индуктивному предположению 16.1 подгруппа $\mathbf{H}$ удовлетворяет условию из формулировки леммы 6.2 при $i_0 = 5$. Таким образом, выполнены все условия этой леммы, которая и утверждает существование искомого элемента $\mathbf{d}$.

6.4. ЛЕММА. Пусть $S_0, S_1, \dots, S_k$ ($k \geq 1$) – произвольные множества, удовлетворяющие следующим условиям:

- (i) на $\bigcup_i S_i$ задано некоторое отношение эквивалентности $a \sim b$;
- (ii) для каждого i на S_i задано транзитивное отношение $a \prec_i b$ такое, что для любых $a, b \in S_i$ истинно ровно одно из отношений $a \prec_i b$, $a \sim b$ или $b \prec_i a$, и для любых $a, a', b, b' \in S_i$, если $a \sim a'$ и $b \sim b'$, выполнено $a \prec_i b \Leftrightarrow a' \prec_i b'$; другими словами, отношение $a \prec_i b$ индуцирует линейный порядок на классах эквивалентности множества S_i по отношению $a \sim b$;
- (iii) если $a, b \in S_i$, $a', b' \in S_{i+1}$, $a \sim a'$, $b \sim b'$, то $a \prec_i b \Leftrightarrow a' \prec_{i+1} b'$;
- (iv) для каждого i выделено некоторое подмножество **устойчивых** элементов множества S_i , обладающих следующим свойством: если $a, b, c \in S_i$, $a', c' \in S_j$, $a \prec_i b \prec_i c$, $a \sim a'$, $c \sim c'$, $a' \prec_j c'$ и b – устойчивый элемент, то существует $b' \in S_j$ такой, что $b \sim b'$ и $a' \prec_j b' \prec_j c'$.

Пусть элементы $a_i, b_i \in S_i$, $a'_{i+1}, b'_{i+1} \in S_{i+1}$ ($i = 0, 1, \dots, k-1$) устойчивы, $a_i \sim a'_{i+1}$, $b_i \sim b'_{i+1}$ и $a_i \prec_i b_i$ при всех i .

Пусть, наконец, $c_i \in S_i$ ($i = 0, 1, \dots, k-1$), $c_0 \sim c_1 \sim \dots \sim c_{k-1}$, $a_i \preceq_i c_i \preceq_i b_i$ при $i = 0, 1, \dots, k-1$ (где $a \preceq_i b$ обозначает $a \prec_i b$ или $a \sim b$) и c_0 – устойчивый элемент.

Тогда существует $c_k \in S_k$ такой, что $c_{k-1} \sim c_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по k . Если $k = 1$, то по условию имеем $a_0 \sim a'_1$, $b_0 \sim b'_1$, $a_0 \preceq_0 c_0 \preceq_0 b_0$, c_0 – устойчивый элемент, и тогда утверждение вытекает из (iii) и (iv). Пусть $k > 1$. В силу (iii), (iv) и устойчивости c_0 достаточно указать элементы $d_0, d_1, \dots, d_k$, $e_0, e_1, \dots, e_k$ ($d_i, e_i \in S_i$) такие, что $d_0 \sim d_1 \sim \dots \sim d_k$, $e_0 \sim e_1 \sim \dots \sim e_k$ и $d_0 \preceq_0 c_0 \preceq_0 e_0$. Докажем существование элементов $d_i \in S_i$ с $d_0 \sim d_1 \sim \dots \sim d_k$ и $d_0 \preceq_0 c_0$ (существование элементов $e_i \in S_i$ с $e_0 \sim e_1 \sim \dots \sim e_k$ и $c_0 \preceq_0 e_0$ доказывается аналогично). Так как по условию $a_i \preceq_i c_i$ при всех i , то в силу (iii) достаточно указать цепочку $d_0 \sim d_1 \sim \dots \sim d_k$ ($d_i \in S_i$), содержащую некоторый элемент a_i . Сделаем это с помощью индукции по r ($r = 1, 2, \dots, k$), на каждом шаге строя последовательность $(d_i)_{i=0}^r$, где $d_i \in S_i$, $d_0 \sim d_1 \sim \dots \sim d_r$, $d_{i_0} = a_{i_0}$ для некоторого $i_0 \leq r-1$ и $a_i \preceq d_i$ для всех $0 \leq i \leq r-1$. При $r = 1$ можно положить $d_0 \Rightarrow a_0$ и $d_1 \Rightarrow a'_1$. Предположим, при некотором $1 \leq r \leq k-1$ последовательность $(d_i)_{i=0}^r$ уже построена. В силу (ii) имеем либо $d_r \prec_r a_r$, либо $a_r \preceq_r d_r$. Если $d_r \prec_r a_r$, то, учитывая, что $a_r \preceq_r c_r$, и используя (iv) в случае $a_r \prec_r c_r$, найдем $d'_i \in S_i$ ($i = 0, 1, \dots, r-1$) такие, что $d'_0 \sim d'_1 \sim \dots \sim d'_{r-1} \sim a_r$ и $d_i \prec_i d'_i \preceq_i c_i$. В этом случае в качестве новой последовательности $(d_i)_{i=0}^{r+1}$ можно взять $(d'_0, d'_1, \dots, d'_{r-1}, a_r, a'_{r+1})$. В случае $d_r \succeq_r a_r$ по индуктивному предположению леммы при $(S_i)_{i=0}^k := (S_i)_{i=i_0+1}^{r+1}$, $(a_i)_{i=0}^{k-1} := (a_i)_{i=i_0+1}^r$, $(b_i)_{i=0}^{k-1} := (b_i)_{i=i_0+1}^r$ и $(c_i)_{i=0}^{k-1} := (a'_{i_0+1}, d_{i_0+2}, \dots, d_r)$ найдется $d_{r+1} \in S_{r+1}$ такой, что $d_r \sim d_{r+1}$. Тогда $(d_i)_{i=0}^{r+1}$ – искомая последовательность.

6.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $0 \leq \beta \leq \alpha - 1$. Будем говорить, что пути X и Y на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ строго близки в ранге β , если найдутся начало K и конец L пути X , на-

чало K' и конец L' пути Y такие, что $K, L \in \mathcal{E}l_\beta(\Gamma_{\alpha-1}, q_1)$, $K', L' \in \mathcal{E}l_\beta(\Gamma_{\alpha-1}, q_1)$, $\neg \mathcal{E}Cогл_\beta(K, L)$, $\mathcal{E}Cогл_\beta(K, K')$ и $\mathcal{E}Cогл_\beta(L, L')$.

6.6. ЛЕММА. Пусть $0 \leq \beta \leq \alpha - 1$, $k \geq 1$, $Z_0, Z_1, \dots, Z_k$ – пути на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ с $\mathcal{L}(Z_i) \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ и $\mathcal{E}l_\gamma(Z_i, q_4) = \emptyset$ для всех γ при $\beta + 1 \leq \gamma \leq \alpha - 1$. Пусть для каждого $i = 0, 1, \dots, k - 1$ подпуть X_i пути Z_i и подпуть Y_i пути Z_{i+1} строго близки в ранге β . Пусть, далее, $H_i \in \mathcal{E}l_\beta(X_i, q_0 + h)$ ($i = 0, 1, \dots, k - 1$), $\mathcal{E}Cогл_\beta(H_i, H_{i+1})$ при всех $i \leq k - 2$ и $\mathcal{E}Cогл_\beta(H_0, \tilde{H})$ для некоторого $\tilde{H} \in \mathcal{E}l_\beta(Z_0, q_1)$. Тогда существует подпуть $H_k \in \mathcal{E}l_\beta(Z_k, q_0 + h)$ пути Z_k такой, что $\mathcal{E}Cогл_\beta(H_{k-1}, H_k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в применении леммы 6.4. Положим

$$\begin{aligned} S_i &= \mathcal{E}l_\beta(Z_i, q_0 + h), \\ M \sim N &= \mathcal{E}Cогл_\beta(M, N), \\ M \prec_i N &= M <_{Z_i} N \ \& \ \neg \mathcal{E}Cогл_\beta(M, N), \\ M \text{ устойчив} &= M \in \mathcal{E}l_\beta(Z_i, q_1). \end{aligned}$$

Тогда условие (i) леммы 6.4 выполнено в силу индуктивного предположения 8.7, условие (ii) – в силу индуктивных предположений 8.40 и 11.25, условие (iii) – в силу определения 6.5 и индуктивного предположения 11.27 и условие (iv) – в силу индуктивного предположения 11.23 и равенства $q_1 = q_0 + 2h$.

Пусть $K_i, L_i \in \mathcal{E}l_\beta(X_i, q_1)$ – начало и конец X_i , $K'_i, L'_i \in \mathcal{E}l_\beta(Y_i, q_1)$ – начало и конец Y_i , где $\neg \mathcal{E}Cогл_\beta(K_i, L_i)$, $\mathcal{E}Cогл_\beta(K_i, K'_i)$ и $\mathcal{E}Cогл_\beta(L_i, L'_i)$. В силу индуктивного предположения 8.40 имеем $K_i \prec_i L_i$ и $K_i \preceq_i H_i \preceq_i L_i$ ($0 \leq i \leq k - 1$). Так как $\mathcal{E}Cогл_\beta(H_0, \tilde{H})$, то в силу индуктивного предположения 11.25 имеем также $K_0 \preceq_0 \tilde{H} \preceq_0 L_0$. Тем самым мы проверили все условия посылки леммы 6.4 при $a_i := K_i$, $b_i := L_i$, $a'_{i+1} := K'_i$, $b'_{i+1} := L'_i$, $c_0 := \tilde{H}$ и $c_i := H_i$ ($1 \leq i \leq k - 1$), и в силу этой леммы найдется $H_k \in \mathcal{E}l_\beta(Z_k, q_0 + h)$ такой, что $\mathcal{E}Cогл_\beta(H_{k-1}, H_k)$.

Нам будет удобно в дальнейшем использовать следующие обозначения, по существу введенные в доказательстве леммы 6.6. Пусть X – путь на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ с $\mathcal{L}(X) \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$. Для любых $K, L \in \mathcal{E}l_\beta(X, q_0)$ положим

$$\begin{aligned} K \prec_X L &= K <_X L \ \& \ \neg \mathcal{E}Cогл_\beta(K, L), \\ K \preceq_X L &= K <_X L \ \text{или} \ \mathcal{E}Cогл_\beta(K, L). \end{aligned} \tag{6.2}$$

Заметим, что в силу индуктивных предположений 8.7 и 11.25 отношения $K \prec_X L$ и $K \preceq_X L$ транзитивны и для любых $K, L \in \mathcal{E}l_\beta(X, q_0)$ имеет место ровно одно из отношений $K \prec_X L$, $\mathcal{E}Cогл_\beta(K, L)$ или $L \prec_X K$ (эти два факта уже использовались в доказательстве леммы 6.6).

6.7. ЛЕММА. Если A – период ранга α , то элемент $[A]_{\alpha-1}$ имеет бесконечный порядок и для любых $P \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$, $K \in \mathcal{E}l_\beta(\Gamma_{\alpha-1})$ при $\beta \leq \alpha - 1$ и $k \neq 0$ выполнено $\neg \mathcal{E}Cогл_\beta(K, s_{A,P}^k K)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение вытекает из определения 5.2 и индуктивного предположения 11.4. Второе следует из первого в силу формулы (3.2) и индуктивного предположения 8.8.

На протяжении оставшейся части параграфа мы будем считать фиксированным некоторое значение ранга $\beta \leq \alpha - 1$.

6.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $A \in \mathcal{M}_\alpha$ и $R, S \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$. На множестве $\mathcal{E}l_\beta(\Gamma_{\alpha-1})$ введем бинарное отношение

$$\text{Coor}_{A,R,S}(M, N) \Leftrightarrow \exists g \in \mathbf{B}_{\alpha-1} \left(\mathcal{E}Cогл_\beta(gM, N) \text{ и } gR, S \text{ имеют общее периодическое продолжение} \right).$$

(Обозначение связано с тем, что в случае, когда M содержится в R и N содержится в S , истинность $\text{Coor}_{A,R,S}(M, N)$ можно понимать как соответствие по фазе относительно периода A подпути M пути R и подпути N пути S , с точностью до согласованности, см. [1, I.2.5]).

6.9. ЛЕММА. (i) Отношение $\text{Coor}_{A,R,S}(M, N)$ рефлексивно, симметрично и транзитивно на парах (R, M) и (S, N) , т.е. имеют место соотношения

$$\begin{aligned} & \text{Coor}_{A,R,R}(M, M), \\ & \text{Coor}_{A,R,S}(M, N) \Rightarrow \text{Coor}_{A,S,R}(N, M), \\ & \text{Coor}_{A,R,S}(M, N) \& \text{Coor}_{A,S,T}(N, L) \Rightarrow \text{Coor}_{A,R,T}(M, L). \end{aligned}$$

(ii) Для любых $M, N, M', N' \in \mathcal{E}l_\beta(\Gamma_{\alpha-1})$ если $\mathcal{E}Cогл_\beta(M, M')$ и $\mathcal{E}Cогл_\beta(N, N')$, то $\text{Coor}_{A,R,S}(M, N) \Leftrightarrow \text{Coor}_{A,R,S}(M', N')$.

(iii) $\text{Coor}_{A,R,R}(M, N) \Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{Z} \ \mathcal{E}Cогл_\beta(s_{A,R}^i M, N)$.

(iv) Если $r \geq q_0$, то для любых $R, S \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$, $M \in \mathcal{E}l_\beta(R, r)$ и $N \in \mathcal{E}l_\beta(S, r)$, если $s_{A,R}M$ содержится в R , то найдется $N' \in \mathcal{E}l_\beta(R, r)$ такой, что $\text{Coor}_{A,S,R}(N, N')$ и $M \preceq_R N' \prec_R s_{A,R}M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Для доказательства соотношения $\text{Coor}_{A,R,R}(M, M)$ достаточно положить $g = 1$ в определении 6.8. Если T – общее периодическое продолжение gR и S , то $g^{-1}T$ – общее периодическое продолжение R и $g^{-1}S$, а из $\mathcal{E}Cогл_\beta(gM, N)$ вытекает $\mathcal{E}Cогл_\beta(g^{-1}N, M)$. Следовательно, верна импликация $\text{Coor}_{A,R,S}(M, N) \Rightarrow \text{Coor}_{A,S,R}(N, M)$. Пусть, далее, истинны отношения $\text{Coor}_{A,R,S}(M, N)$ и $\text{Coor}_{A,S,T}(N, L)$. Пусть $g, h \in \mathbf{B}_{\alpha-1}$ таковы, что $\mathcal{E}Cогл_\beta(gM, N)$, $\mathcal{E}Cогл_\beta(hN, L)$, gR и S имеют общее периодическое продолжение U , hS и T имеют общее периодическое продолжение V . С учетом индуктивного предположения 8.7 имеем $\mathcal{E}Cогл_\beta(hgM, L)$, и так как hU и V – периодические продолжения hS , то по лемме 3.1, (iv) hU и V имеют общее периодическое продолжение W . Тогда в силу леммы 3.1, (iii) W есть общее периодическое продолжение hgR и T и, таким образом, истинно отношение $\text{Coor}_{A,R,T}(M, L)$.

(ii) вытекает непосредственно из определения 6.8 и индуктивного предположения 8.7.

(iii) Если $\mathcal{E}Cогл_\beta(s_{A,R}^i M, N)$ для некоторого i , то, полагая $g \Rightarrow s_{A,R}^i$ в определении 6.8, получаем $Coот_{A,R,R}(M, N)$. Обратно, если периодические отрезки gR и R имеют общее периодическое продолжение, то по лемме 3.2, (vii) имеем $g = s_{A,R}^i$ для некоторого i и, следовательно, верна импликация $Coот_{A,R,R}(M, N) \Rightarrow \exists i (\mathcal{E}Cогл_\beta(s_{A,R}^i M, N))$.

(iv) Пусть $r \geq q_0$, $R, S \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$, $M \in \mathcal{E}л_\beta(R, r)$, $N \in \mathcal{E}л_\beta(S, r)$ и $s_{A,R}M$ содержится в R . По лемме 3.1, (v) выберем элемент $g \in B_{\alpha-1}$ такой, что gS и R имеют общее периодическое продолжение T . Имеем $Coот_{A,S,R}(N, gN)$, и, следовательно, ввиду (i) и (iii) нам достаточно найти $N' \in \mathcal{E}л_\beta(R, r)$ такой, что $M \preceq_R N' \prec_R s_{A,R}M$ и $\mathcal{E}Cогл_\beta(s_{A,R}^i gN, N')$ для некоторого i . Если $\mathcal{E}Cогл_\beta(s_{A,R}^i gN, M)$ для некоторого i , то можно взять $N' \Rightarrow M$. Пусть $\neg \mathcal{E}Cогл_\beta(s_{A,R}^i gN, M)$ ни для какого i . Так как пути M , $s_{A,R}M$ и gN содержатся в T , то с учетом лемм 6.7 и 3.2, (i) имеет место один из трех случаев $M \prec_T gN \prec_T s_{A,R}M$, $gN \prec_T M$ или $s_{A,R}M \prec_T gN$. В первом случае можно положить $N' \Rightarrow gN$. В случае $gN \prec_T M$, взяв максимальное i , для которого $s_{A,R}^i gN \prec_T M$ и, воспользовавшись леммой 3.2, (ii), получим $M \prec_U s_{A,R}^{i+1} gN \prec_U s_{A,R}M$ для некоторого периодического продолжения U для T , откуда вытекает, что $s_{A,R}^{i+1} gN$ содержится в R и $M \prec_R s_{A,R}^{i+1} gN \prec_R s_{A,R}M$. В случае $s_{A,R}M \prec_T gN$, взяв минимальное $i \leq 0$, для которого $s_{A,R}M \prec_T s_{A,R}^i gN$, аналогично получим $M \prec_R s_{A,R}^{i-1} gN \prec_R s_{A,R}M$.

6.10. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $A \in \mathcal{M}_\alpha$, $\rho(A) \leq \beta \leq \alpha - 1$ и пути $P, Q \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$ строго близки в ранге β . Пусть $\ell \geq 4$ и $K, s_{A,P}K, \dots, s_{A,P}^\ell K \in \mathcal{E}л_\beta(P, q_1)$. Тогда $|Q| \geq 3|A|$ и существует элемент $g \in B_{\alpha-1}$ такой, что Q и gP имеют общее периодическое продолжение и $\mathcal{E}Cогл_\beta(s_{A,P}^i K, gs_{A,P}^i K)$ при $0 \leq i \leq \ell$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим два типа операций на парах вида (R, M) , где $R \in \{P, Q\}$ и $M \in \mathcal{E}л_\beta(R, q_0 + h)$. По определению пара (R, M) переходит в пару (S, N) в следующих двух случаях:

(*) $Coот_{A,R,S}(M, N)$ (“операция сдвига”);

(**) $\{R, S\} = \{P, Q\}$ и $\mathcal{E}Cогл_\beta(M, N)$ (“операция перехода”).

Для $R \in \{P, Q\}$ через $\mathcal{I}_R$ обозначим множество всех подпутей M пути R таких, что пара (R, M) получается из пары (P, K) некоторой последовательностью операций (*) и (**).

Используя лемму 6.6, докажем, что

если $M \in \mathcal{I}_R$, то к паре (R, M) применима операция перехода (**),
т.е. найдется $N \in \mathcal{I}_S$ такой, что $\mathcal{E}Cогл_\beta(M, N)$, где $\{R, S\} = \{P, Q\}$. (6.3)

Действительно, пусть пара (R, M) получается из пары (P, K) некоторой последовательностью операций сдвига и перехода. Заметим, что в силу леммы 6.9, (i) не-

сколько последовательных операций сдвига можно заменить одной, а тождественный переход $(R, M) \rightarrow (R, M)$ можно рассматривать как операцию сдвига. Поэтому без ограничения общности можно считать, что пара (P, K) переводится в (R, M) последовательностью следующего вида:

$$(P, K) = (S_0, N_0) \xrightarrow{(*)} (R_1, M_1) \xrightarrow{(**)} (S_1, N_1) \xrightarrow{(*)} (R_2, M_2) \xrightarrow{(**)} \dots \xrightarrow{(**)} (S_{k-1}, N_{k-1}) \xrightarrow{(*)} (R_k, M_k) = (R, M).$$

В соответствии с условиями $(*)$ и $(**)$ имеем

$$\mathcal{E}Cозл_\beta(M_i, N_i), \quad 1 \leq i \leq k-1, \quad (6.4)$$

и при $i = 0, 1, \dots, k-1$ найдется элемент $g_i \in B_{\alpha-1}$ такой, что S_i и $g_i R_{i+1}$ имеют общее периодическое продолжение T_i и

$$\mathcal{E}Cозл_\beta(N_i, g_i M_{i+1}), \quad 0 \leq i \leq k-1. \quad (6.5)$$

Положим

$$H_i = g_0 g_1 \dots g_i M_{i+1} \quad (0 \leq i \leq k-1) \quad \text{и} \quad \tilde{H} = K = N_0. \quad (6.6)$$

Тогда из (6.4) и (6.5) вытекает

$$\mathcal{E}Cозл_\beta(H_i, H_{i+1}) \quad (0 \leq i \leq k-2) \quad \text{и} \quad \mathcal{E}Cозл_\beta(H_0, \tilde{H}).$$

Пусть, далее,

$$\begin{aligned} X_i &= g_0 g_1 \dots g_i R_{i+1} \quad (0 \leq i \leq k-1), & Y_i &= g_0 g_1 \dots g_i S_{i+1} \quad (0 \leq i \leq k-2), \\ Z_i &= g_0 g_1 \dots g_{i-1} T_i \quad (0 \leq i \leq k-1), & Z_k &= Y_{k-1} = g_0 g_1 \dots g_{k-1} S. \end{aligned}$$

Так как $Z_i \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A)$, то $\mathcal{L}(Z_i) \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ в силу определения 5.2. Кроме того, из неравенства $\rho(A) \leq \beta$ в силу определения 5.15 следует $\mathcal{E}л_\gamma(Z_i, q_4) = \emptyset$ при $\beta + 1 \leq \gamma \leq \alpha - 1$. Далее, так как $\{R_i, S_i\} = \{P, Q\}$ ($1 \leq i \leq k-1$), $\{R_k, S\} = \{P, Q\}$ и по условию пути P и Q строго близки в ранге β , то пути X_i и Y_i строго близки в ранге β . Наконец, X_i содержится в Z_i и Y_i содержится в Z_{i+1} . Таким образом, выполнены все условия посылки леммы 6.6 и согласно этой лемме найдется $H_k \in \mathcal{E}л_\beta(Z_k, q_0 + h)$ такой, что $\mathcal{E}Cозл_\beta(H_{k-1}, H_k)$. Тогда с учетом (6.6) получаем

$$\mathcal{E}Cозл_\beta(M_k, (g_0 g_1 \dots g_{k-1})^{-1} H_k),$$

и, следовательно, в качестве искомого N можно взять $(g_0 g_1 \dots g_{k-1})^{-1} H_k$. Этим завершается доказательство (6.3).

Выберем теперь представители $\{M_i\}_{i=0}^t$ для всех классов эквивалентности множества $\mathcal{I}_P$ по отношению эквивалентности $\mathcal{E}Cозл_\beta$. Можно считать, что

$$M_0 \prec_P M_1 \prec_P M_2 \prec_P \dots \prec_P M_t.$$

Согласно (6.3) для каждого i найдется подпуть $N_i \in \mathcal{J}_Q$ пути Q , для которого

$$\mathcal{E}Cогл_\beta(M_i, N_i), \quad (6.7)$$

причем $\{N_i\}_{i=0}^t$ есть множество представителей для $\mathcal{J}_Q$ по отношению эквивалентности $\mathcal{E}Cогл_\beta$. По индуктивному предположению 11.27 имеем

$$N_0 \prec_Q N_1 \prec_Q N_2 \prec_Q \dots \prec_Q N_t.$$

По условию предложения и в силу определения $\mathcal{J}_P$ имеем

$$s_{A,P}^i K \in \mathcal{J}_P, \quad 0 \leq i \leq \ell. \quad (6.8)$$

Так как $M_0 \preceq_P K$, то в силу лемм 3.2, (i) и 6.7 имеем $s_{A,P} M_0 \prec_R s_{A,P}^2 K$, где R – некоторое периодическое продолжение P . Следовательно, $s_{A,P} M_0$ содержится в P . По лемме 6.9, (iv) найдется $N' \in \mathcal{E}л_\beta(P, q_1)$ такой, что $M_0 \preceq_P N' \prec_P s_{A,P} M_0$ и $Coот_{A,P,Q}(N', N_0)$, т.е. для некоторого $g \in B_{\alpha-1}$ выполнено $\mathcal{E}Cогл_\beta(gN', N_0)$ и периодические отрезки Q, gP имеют общее периодическое продолжение T . Согласно определению $\mathcal{J}_P$ и $\mathcal{J}_Q$ имеем $N' \in \mathcal{J}_P$, и, значит, для некоторого $s \geq 0$ выполнено $\mathcal{E}Cогл_\beta(N_0, gM_s)$. Индукцией по i докажем, что

$$\mathcal{E}Cогл_\beta(N_i, gM_{i+s}) \text{ при всех } i = 0, 1, \dots, t-s. \quad (6.9)$$

Предположим, это доказано для некоторого значения $i \leq t-s-1$. Допустим, $\neg \mathcal{E}Cогл_\beta(N_{i+1}, gM_{i+s+1})$. Тогда либо $N_{i+1} \prec_T gM_{i+s+1}$, либо $gM_{i+s+1} \prec_T N_{i+1}$. Если $N_{i+1} \prec_T gM_{i+s+1}$, то $g^{-1}N_{i+1} \prec_{g^{-1}T} g^{-1}N_{i+1} \prec_{g^{-1}T} M_{i+s+1}$, откуда, используя соотношение $\mathcal{E}Cогл_\beta(N_i, gM_{i+s})$ и индуктивное предположение 11.25, выводим $M_{i+s} \prec_{g^{-1}T} g^{-1}N_{i+1} \prec_{g^{-1}T} M_{i+s+1}$. Отсюда следует, что $g^{-1}N_{i+1}$ содержится в P и $\neg \mathcal{E}Cогл_\beta(g^{-1}N_{i+1}, M_j)$ при всех j . Так как $Coот_{A,P,Q}(N_{i+1}, g^{-1}N_{i+1})$, то $g^{-1}N_{i+1} \in \mathcal{J}_P$. Но это невозможно в силу выбора представителей M_i . В случае, если $gM_{i+s+1} \prec_T N_{i+1}$, используя соотношения $gM_{i+s} \prec_T gM_{i+s+1}$ и $\mathcal{E}Cогл_\beta(N_i, gM_{i+s})$, получаем, что gM_{i+s+1} содержится в Q и $\neg \mathcal{E}Cогл_\beta(gM_{i+s+1}, N_j)$ при всех j . Так как $Coот_{A,P,Q}(M_{i+s+1}, gM_{i+s+1})$, то $gM_{i+s+1} \in \mathcal{J}_Q$, и мы получаем противоречие с тем, что N_i образуют множество представителей для $\mathcal{J}_Q$ по отношению эквивалентности $\mathcal{E}Cогл_\beta$. Тем самым мы доказали соотношение $\mathcal{E}Cогл_\beta(N_{i+1}, gM_{i+s+1})$ и, таким образом, (6.9) установлено для всех значений $i \leq t-s$.

Так как $s_{A,P} M_0 \in \mathcal{J}_P$, то для некоторого $r \geq 0$ имеем $\mathcal{E}Cогл_\beta(s_{A,P} M_0, M_r)$. С помощью рассуждений, аналогичных использованным в доказательстве (6.9), получаем

$$\mathcal{E}Cогл_\beta(s_{A,P} M_i, M_{i+r}) \quad (i = 0, 1, \dots, t-r). \quad (6.10)$$

Из $N' \prec_P s_{A,P} M_0$ и $\mathcal{E}Cогл_\beta(N', M_s)$ ввиду (6.10) следует $s < r$. Из (6.8) и (6.10) следует $t \geq \ell r \geq 4r$. Так как gP и Q имеют общее периодическое продолжение,

то по лемме 3.2, (iii), (iv) имеем $s_{A,Q} = gs_{A,P}g^{-1}$. Обозначив через $\sim$ отношение эквивалентности $\mathcal{E}Cогл_\beta$ и используя (6.9), (6.10), выводим

$$s_{A,Q}N_0 \sim s_{A,Q}gM_s \sim gs_{A,P}M_s \sim gM_{r+s} \sim N_r.$$

Тогда, вновь рассуждая, как в доказательстве соотношений (6.9), получаем

$$\mathcal{E}Cогл_\beta(s_{A,Q}N_i, N_{i+r}), \quad i = 0, 1, \dots, t-r. \quad (6.11)$$

Отсюда следует $\mathcal{E}Cогл_\beta(s_{A,Q}^\ell N_0, N_{\ell r})$. Так как в силу лемм 3.2, (i) и 6.7 имеем $s_{A,Q}^{\ell-1}N_0 \prec_Q N_{\ell r}$, то $s_{A,Q}^{\ell-1}N_0$ содержится в Q . Следовательно, $|Q| \geq (\ell-1)|A| \geq 3|A|$. Тем самым доказана первая часть искомого утверждения.

Если $s = 0$, то из (6.7) и (6.9) следует $\mathcal{E}Cогл_\beta(M_i, gM_i)$ ($0 \leq i \leq t$), и тогда с учетом (6.8) получаем $\mathcal{E}Cогл_\beta(s_{A,P}^i K, gs_{A,P}^i K)$ при всех $0 \leq i \leq \ell$, что в точности совпадает со второй частью заключения предложения 6.10. Нам остается доказать невозможность случая $s \neq 0$. Допустим, $s \geq 1$. Идея рассуждений состоит в применении леммы 6.3, после чего легко получается противоречие с минимальностью периода A .

Так как $r > s \geq 1$, то $t \geq 4r \geq r + s + 4$. Из всех условий посылки леммы 6.3 остается проверить только равенство $\text{НОД}(r, s) = 1$. Докажем его.

По выбору представителей M_i, N_i для каждого $M \in \mathcal{I}_P \cup \mathcal{I}_Q$ существует единственный индекс $i(M)$ такой, что $\mathcal{E}Cогл_\beta(M_{i(M)}, M)$. Если $M \in \mathcal{I}_R$, $N \in \mathcal{I}_S$ и пара (S, N) получается из пары (R, M) операцией перехода, то $i(M) = i(N)$. Поэтому достаточно проверить, что в случае, когда пара (S, N) получается из пары (R, M) операцией сдвига, разность $i(M) - i(N)$ есть целочисленная линейная комбинация r и s . Так как каждая из пар (P, M_0) и (P, M_1) получается из пары (P, K) некоторой последовательностью операций сдвига и перехода, то отсюда будет следовать, что 1 есть целочисленная линейная комбинация r и s , т.е. $\text{НОД}(r, s) = 1$.

Итак, пусть $M \in \mathcal{I}_R$, $N \in \mathcal{I}_S$ и (S, N) получается из (R, M) применением операции сдвига, т.е. истинно отношение $Coот_{A,R,S}(M, N)$. Если $R = S = P$ или $R = S = Q$, то $i(M) - i(N) \equiv 0 \pmod{r}$ ввиду леммы 6.9, (iii) и (6.10) или соответственно (6.11), (6.7). Пусть $\{R, S\} = \{P, Q\}$. С точностью до перестановки M и N можно считать $R = P$ и $S = Q$. В силу (6.10) и леммы 6.9, (iii) имеем $Coот_{A,P,P}(M, M_i)$, где $r \leq i < 2r$ и $i \equiv i(M) \pmod{r}$. В силу (6.9) имеем $Coот_{A,P,Q}(M_i, N_{i-s})$. Тогда из $Coот_{A,P,Q}(M, N)$ с учетом леммы 6.9, (i) следует $Coот_{A,Q,Q}(N_{i-s}, N)$, откуда, используя лемму 6.9, (iii) и (6.11), выводим $i - s \equiv i(N) \pmod{r}$ и, таким образом, получаем наконец $i(M) - i(N) \equiv s \pmod{r}$.

Тем самым мы завершили проверку выполнения посылки леммы 6.3, и по этой лемме найдется элемент $d \in \mathbf{B}_{\alpha-1}$ такой, что $s_{A,P}^k = d^{rk}$ для некоторого $k > 0$. Так как в силу (3.2) элементы $s_{A,P}$ и $[A]_{\alpha-1}$ сопряжены, то для некоторого D слова A^k и D^{rk} сопряжены в группе $\mathbf{B}_{\alpha-1}$. Но это противоречит минимальности периода A в ранге α (определение 5.3), ибо $r \geq s+1 \geq 2$. Полученное противоречие завершает доказательство предложения 6.10.

6.11. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $A \in \mathcal{M}_\alpha$, $\rho(A) \leq \beta \leq \alpha - 1$ и пути $P, Q \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A)$ строго близки в ранге β . Тогда если для некоторого $K \in \mathcal{E}l_\beta(\Gamma_{\alpha-1}, q_1)$ пути $K, s_{A,P}K, \dots, s_{A,P}^5 K$ входят в P , то $|Q| \geq 3|A|$ и $\text{Cогл}(P, Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 6.10 имеет место неравенство $|Q| \geq 3|A|$ и существует $g \in \mathbf{B}_{\alpha-1}$ такой, что gP, Q имеют общее периодическое продолжение и $\mathcal{E}l_\beta(s_{A,P}^i K, gs_{A,P}^i K)$ ($0 \leq i \leq 5$). По индуктивному предположению 8.8 имеем $s_{A,P}^{-i} gs_{A,P}^i \in \mathbf{H}$ ($0 \leq i \leq 5$), где $\mathbf{H}$ – некоторая конечная подгруппа группы $\mathbf{B}_{\alpha-1}$. По индуктивному предположению 16.1 включение $s_{A,P}^{-i} gs_{A,P}^i \in \mathbf{H}$ имеет место при любом i . Тогда $s_{A,P}^{-t} gs_{A,P}^t = g$ для некоторого $t > 0$. Так как $s_{A,Q} = gs_{A,P}g^{-1}$ в силу леммы 3.2, (iii), (iv), то отсюда следует $s_{A,Q}^t = s_{A,P}^t$, т.е. $\text{Cогл}(P, Q)$.

6.12. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $A, B \in \mathcal{M}_\alpha$, $\max\{\rho(A), \rho(B)\} \leq \beta \leq \alpha - 1$ и пути $P \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$ и $Q \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, B, 2)$ строго близки в ранге β . Тогда если для некоторых $K, L \in \mathcal{E}l_\beta(\Gamma_{\alpha-1}, q_1)$ пути $K, s_{A,P}K, \dots, s_{A,P}^6 K$ входят в P и пути $L, s_{A,P}L, \dots, s_{A,P}^4 L$ входят в Q , то $\text{Cогл}(P, Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению 6.5 найдутся начало $K' \in \mathcal{E}l_\beta(P, q_1)$ пути P и начало $L' \in \mathcal{E}l_\beta(Q, q_1)$ пути Q такие, что $\mathcal{E}l_\beta(K', L')$. Заменяя K на K' в случае $K' <_P K$, можно считать, что K содержится в K' . Тогда по индуктивному предположению 8.40 имеем $\mathcal{E}l_\beta(K, K')$. Аналогично, можно считать, что $\mathcal{E}l_\beta(L, L')$. Тогда получаем $\mathcal{E}l_\beta(K, L)$.

Дальнейшие рассуждения фактически повторяют доказательство предложения 6.10. Пусть множества $\mathcal{I}_P \subseteq \mathcal{E}l_\beta(P, q_0 + h)$ и $\mathcal{I}_Q \subseteq \mathcal{E}l_\beta(Q, q_0 + h)$ определены точно так же, как и в доказательстве предложения 6.10, за исключением операции сдвига $(*)$, определение которой модифицируется следующим образом:

$(*)$ $(R, M) \rightarrow (S, N)$, если либо $R = S = P$ и $\text{Cогл}_{A,P}(M, N)$, либо $R = S = Q$ и $\text{Cогл}_{B,Q}(M, N)$.

(Эта модификация связана с тем, что периоды A и B , вообще говоря, различны.) Дословно повторяя рассуждения из доказательства предложения 6.10, выберем множества $\{M_i\}_{i=0}^t$ и $\{N_i\}_{i=0}^t$ представителей классов эквивалентности множеств $\mathcal{I}_P$ и $\mathcal{I}_Q$ по отношению $\mathcal{E}l_\beta$ таким образом, что выполнены соотношения

$$M_0 <_P M_1 <_P M_2 <_P \dots <_P M_t, \quad N_0 <_Q N_1 <_Q N_2 <_Q \dots <_Q N_t$$

и

$$\mathcal{E}l_\beta(M_i, N_i), \quad i = 0, 1, \dots, t. \quad (6.12)$$

Продолжая рассуждения из доказательства предложения 6.10, получаем, что для некоторых взаимно простых чисел r и s выполнено

$$\mathcal{E}l_\beta(s_{A,P}M_i, M_{i+r}) \quad (0 \leq i \leq t-r), \quad \mathcal{E}l_\beta(s_{B,Q}N_i, N_{i+s}) \quad (0 \leq i \leq t-s). \quad (6.13)$$

Из определения множеств $\mathcal{I}_P$ и $\mathcal{I}_Q$ следует $s_{A,P}^i K \in \mathcal{I}_P$ при $i = 0, 1, \dots, 6$ и $s_{B,Q}^i L \in \mathcal{I}_Q$ при $i = 0, 1, \dots, 4$. Тогда с учетом (6.13) получаем $t \geq 6r$ и $t \geq 4s$. По лемме 6.7

имеем $r, s \geq 1$, откуда и из предыдущих неравенств легко вытекает $t \geq r + s + 4$. Кроме того, в силу (6.12) в соотношениях (6.13) N_j можно заменить на M_j . Тем самым мы проверили все условия посылки леммы 6.3. В силу этой леммы найдется элемент $\mathbf{d} \in \mathbf{B}_{\alpha-1}$ такой, что $\mathbf{s}_{A,P}^\ell = \mathbf{d}^{r\ell}$ и $\mathbf{s}_{B,Q}^\ell = \mathbf{d}^{s\ell}$ для некоторого $\ell > 0$. Из минимальности периодов A, B вытекает $s = r = 1$. Следовательно, $\mathbf{s}_{A,P}^\ell = \mathbf{s}_{A,Q}^\ell$, т.е. $\text{Cогл}(P, Q)$.

§ 7. Согласованные периодические отрезки на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ и связанные с ними подгруппы группы $\mathbf{B}_{\alpha-1}$

7.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $A \in \mathcal{M}_\alpha$. Положим

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{\alpha-1}^+(A) &\Leftarrow \{\mathbf{g} \in \mathbf{B}_{\alpha-1} \mid \mathbf{g}^{-1}[A]_{\alpha-1}^t \mathbf{g} = [A]_{\alpha-1}^t \text{ для некоторого } t \neq 0\}, \\ \mathbf{N}_{\alpha-1}^-(A) &\Leftarrow \{\mathbf{g} \in \mathbf{B}_{\alpha-1} \mid \mathbf{g}^{-1}[A]_{\alpha-1}^t \mathbf{g} = [A]_{\alpha-1}^{-t} \text{ для некоторого } t \neq 0\}, \\ \mathbf{N}_{\alpha-1}(A) &\Leftarrow \mathbf{N}_{\alpha-1}^+(A) \cup \mathbf{N}_{\alpha-1}^-(A) = \\ &= \{\mathbf{g} \in \mathbf{B}_{\alpha-1} \mid \mathbf{g}^{-1}[A]_{\alpha-1}^t \mathbf{g} = [A]_{\alpha-1}^{\epsilon t} \text{ для некоторых } t \neq 0 \text{ и } \epsilon = \pm 1\}. \end{aligned}$$

Так как из $\mathbf{g}^{-1}[A]_{\alpha-1}^t \mathbf{g} = [A]_{\alpha-1}^{\epsilon t}$ и $\mathbf{h}^{-1}[A]_{\alpha-1}^r \mathbf{h} = [A]_{\alpha-1}^{\delta r}$ следует $(\mathbf{gh})^{-1}[A]_{\alpha-1}^{tr} \mathbf{gh} = [A]_{\alpha-1}^{\epsilon\delta tr}$, то $\mathbf{N}_{\alpha-1}^+(A)$ и $\mathbf{N}_{\alpha-1}(A)$ – подгруппы группы $\mathbf{B}_{\alpha-1}$.

7.2. ЛЕММА. (i) $\mathbf{N}_0^-(A) = \emptyset$ и $\mathbf{N}_0(A) = \mathbf{N}_0^+(A) = \langle [A]_0 \rangle$ для любого $A \in \mathcal{M}_1$.

(ii) Для любого $A \in \mathcal{M}_\alpha$ либо $\mathbf{N}_{\alpha-1}^-(A) = \emptyset$ и $\mathbf{N}_{\alpha-1}(A) = \mathbf{N}_{\alpha-1}^+(A)$, либо $\mathbf{N}_{\alpha-1}^+(A)$ имеет индекс 2 в $\mathbf{N}_{\alpha-1}(A)$ и в этом случае $\mathbf{N}_{\alpha-1}^+(A)$ и $\mathbf{N}_{\alpha-1}^-(A)$ – смежные классы группы $\mathbf{N}_{\alpha-1}(A)$ по подгруппе $\mathbf{N}_{\alpha-1}^+(A)$.

(iii) Если $A, B \in \mathcal{M}_\alpha$ и $\mathbf{h}^{-1}[A]_{\alpha-1}^r \mathbf{h} = [B]_{\alpha-1}^{\epsilon r}$ для некоторых $r \neq 0$ и $\epsilon = \pm 1$, то $\mathbf{h}^{-1}\mathbf{N}_{\alpha-1}^+(A)\mathbf{h} = \mathbf{N}_{\alpha-1}^+(B)$ и $\mathbf{h}^{-1}\mathbf{N}_{\alpha-1}(A)\mathbf{h} = \mathbf{N}_{\alpha-1}(B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма легко вытекает из определений, для доказательства (ii) нужно лишь заметить, что $\mathbf{N}_{\alpha-1}^+(A) \cap \mathbf{N}_{\alpha-1}^-(A) = \emptyset$ ввиду бесконечности порядка элемента $[A]_{\alpha-1}$ (лемма 6.7).

7.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $A \in \mathcal{M}_\alpha$, $P, Q \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$ и слова $\mathcal{L}(P)$, $\mathcal{L}(Q)$ начинаются с A . Тогда

$$\begin{aligned} \text{Cогл}(P, Q) &\Leftrightarrow (\iota(P))^{-1}\iota(Q) \in \mathbf{N}_{\alpha-1}^+(A), \\ \text{Cогл}(P, Q^{-1}) &\Leftrightarrow (\iota(P))^{-1}\iota(Q) \in \mathbf{N}_{\alpha-1}^-(A). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно вытекает из определения 3.3, формулы (3.2) и леммы 3.2, (v).

Заметим, что в условиях предложения 7.3 элемент $(\iota(P))^{-1}\iota(Q)$ равен $[\mathcal{L}(X)]_{\alpha-1}$, где X – произвольный путь, соединяющий начальные вершины путей P и Q . Мы будем часто использовать этот факт вместе с предложением 7.3.

7.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что вершины $\mathbf{g}, \mathbf{h} \in \mathbf{B}_\gamma$ графа Γ_γ *близки в ранге β* , если $\mathbf{g}^{-1}\mathbf{h} = [u]_\gamma$ для некоторого слова $u \in \mathcal{H}_\beta$, или, эквивалентно, $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$ можно соединить некоторым путем $\mathbf{u}$ с $\mathcal{L}(\mathbf{u}) \in \mathcal{H}_\beta$.

Пути X и Y на графе Γ_γ назовем *близкими в ранге β* , если их начальные вершины близки в ранге β и их конечные вершины близки в ранге β .

Из определения вытекает, что слова X и Y близки в ранге β тогда и только тогда, когда существуют близкие в ранге β пути X и Y на графе Γ_β с $\mathcal{L}(X) \sqsubseteq X$ и $\mathcal{L}(Y) \sqsubseteq Y$.

Кроме того, заметим, что если X и Y – близкие в ранге β пути на графе Γ_γ , то X и Y близки в любом ранге $\beta_1 > \beta$. Этот факт непосредственно вытекает из леммы 5.12.

7.5. ЛЕММА. Пусть $A \in \mathcal{M}_\alpha$, B – период ранга α , $P \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$, $Q \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, B, 2)$ и $\mathbf{s}_{A,P}^{kt} = \mathbf{s}_{B,Q}^t$ для некоторых $k, t > 0$. Тогда существуют близкие в ранге $\rho(A)$ периодические продолжения периодических отрезков P и Q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\alpha = 1$ это вытекает из леммы 3.5. Пусть $\alpha \geq 2$. Без ограничения общности можно считать, что слова $\mathcal{L}(P)$ и $\mathcal{L}(Q)$ начинаются с A и с B соответственно. Выберем произвольное слово T такое, что

$$(\iota(P))^{-1}\iota(Q) = [T]_{\alpha-1}. \quad (7.1)$$

В силу (3.2) равенство $\mathbf{s}_{A,P}^{kt} = \mathbf{s}_{B,Q}^t$ можно переписать в виде

$$T^{-1}A^{kt}T \stackrel{\alpha-1}{=} B^t.$$

В силу индуктивного предположения 11.32 найдутся начала R и S слов A^t и B^t соответственно, слово $u \in \mathcal{H}_{\rho(A)}$ и число $r \in \mathbb{Z}$ такие, что

$$T \stackrel{\alpha-1}{=} A^{ktr}RuS^{-1}. \quad (7.2)$$

Положим $\mathbf{g} \Leftarrow \iota(P)[A^{ktr}R]_{\alpha-1}$ и $\mathbf{h} \Leftarrow \iota(Q)[S]_{\alpha-1}$. Из равенств (7.1) и (7.2) вытекает $\mathbf{g}^{-1}\mathbf{h} = [u]_{\alpha-1}$, следовательно, вершины $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$ графа $\Gamma_{\alpha-1}$ близки в ранге $\rho(A)$. Очевидно, $\mathbf{h}$ лежит на Q и $\mathbf{g}$ лежит на некотором периодическом продолжении P . Тогда в силу леммы 3.2, (ii) при любом $i \in \mathbb{Z}$ вершины $\mathbf{s}_{A,P}^i \mathbf{g}$ и $\mathbf{s}_{B,Q}^i \mathbf{h}$ лежат на некоторых периодических продолжениях для P и Q соответственно. Кроме того, из равенства $\mathbf{s}_{A,P}^{kt} = \mathbf{s}_{B,Q}^t$ следует, что в случае, если i кратно t , вершины $\mathbf{s}_{A,P}^{ik} \mathbf{g}$ и $\mathbf{s}_{B,Q}^i \mathbf{h}$ близки в ранге $\rho(A)$. Выберем достаточно длинные периодические продолжения $\bar{P} = UPV$ и $\bar{Q} = WQZ$ для P и Q так, чтобы для некоторых $i, j \in \mathbb{Z}$ на путях U, V, W и Z лежали вершины $\mathbf{s}_{A,P}^{ikt} \mathbf{g}$, $\mathbf{s}_{A,P}^{jkt} \mathbf{g}$, $\mathbf{s}_{B,Q}^{it} \mathbf{h}$ и $\mathbf{s}_{B,Q}^{jt} \mathbf{h}$ соответственно. Тогда в качестве искомым периодических продолжений для P и Q можно взять подпуть пути $\bar{P}$, соединяющий вершины $\mathbf{s}_{A,P}^{ikt} \mathbf{g}$ и $\mathbf{s}_{A,P}^{jkt} \mathbf{g}$, и подпуть пути $\bar{Q}$, соединяющий вершины $\mathbf{s}_{B,Q}^{it} \mathbf{h}$ и $\mathbf{s}_{B,Q}^{jt} \mathbf{h}$.

7.6. ЛЕММА. Пусть A – период ранга α , $P \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$, $\beta \leq \alpha - 1$ и $K \in \mathcal{E}л_\beta(P, r)$, где $r \geq 19$. Тогда $|K| < 2|A|$ и для некоторых начала K' и конца K'' пути K выполнено $|K'|, |K''| \leq |A|$, $K', K'' \in \mathcal{E}л_\beta(\Gamma_{\alpha-1}, r - 9)$, $\mathcal{E}Согл_\beta(K, K')$ и $\mathcal{E}Согл_\beta(K, K'')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу симметрии ограничимся доказательством утверждения о существовании начала $K' \in \mathcal{E}л_\beta(\Gamma_{\alpha-1}, r - 9)$ пути K , такого, что $|K'| \leq |A|$ и $\mathcal{E}Согл_\beta(K, K')$. При $\beta = 0$ слово $\mathcal{L}(K)$ является буквой алфавита $A^{\pm 1}$, поэтому неравенство $|K| < 2|A|$ имеет место в силу непустоты слова A , а в качестве K' можно взять сам путь K . Пусть $\beta \geq 1$. Удлинив P , можно считать, что путь $s_{A,P}K$ содержится в P . По лемме 6.7 $\neg \mathcal{E}Согл_\beta(K, s_{A,P}K)$. Тогда по индуктивному предположению 8.41 имеем $K = K'K^*$, где $K' \in \mathcal{E}л_\beta(\Gamma_{\alpha-1}, r - 9)$, $\mathcal{E}Согл_\beta(K, K')$ и $K' \ll_P s_{A,P}K$. Так как $s_{A,P}K'$ есть начало $s_{A,P}K$, то отсюда следует $|K'| \leq |A|$. Если бы выполнялось неравенство $|K^*| \geq |A|$, то путь $s_{A,P}K'$ содержался бы в K , что невозможно в силу индуктивного предположения 8.40. Следовательно, $|K| < 2|A|$.

7.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $A \in \mathcal{M}_\alpha$, B – период ранга α , $P \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$, $Q \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, B, 2)$ и $s_{A,P}^{kt} = s_{A,Q}^t$ для некоторых $k, t > 0$. Тогда существуют строго близкие в ранге $\rho(A)$ периодические продолжения $\bar{P}$ для P и $\bar{Q}$ для Q .

Более того, $\bar{P}$ и $\bar{Q}$ могут быть выбраны таким образом, что $\bar{P} = K \cup_{\bar{P}} s_{A,P}^r K$ и $\bar{Q} = L \cup_{\bar{Q}} L'$ для некоторых $K \in \mathcal{E}л_{\rho(A)}(\bar{P}, q_3)$, $L, L' \in \mathcal{E}л_{\rho(A)}(\bar{Q}, q_1)$ и $r \geq 1$, где $\mathcal{E}Согл_{\rho(A)}(K, L)$ и $\mathcal{E}Согл_{\rho(A)}(s_{A,P}^r K, L')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 7.5 достаточно рассмотреть случай, когда P и Q близки в ранге $\rho(A)$. Выбрав периодическое продолжение $T_1 P T_2$ для P с $|T_1|, |T_2| \geq 5|A|$ и применив лемму 7.5 еще раз, найдем близкие в ранге $\rho(A)$ периодические продолжения $\tilde{P} = U_1 P U_2$ и $\tilde{Q} = V_1 Q V_2$ для P и Q , где $|U_1|, |U_2| \geq 5|A|$. Тогда пути U_i и V_i также близки в ранге $\rho(A)$. В силу определения 5.15 и леммы 7.6 каждое периодическое слово $R \in \text{Пер}(A, 3)$ содержит в качестве подслова некоторую элементарную q_3 -степень E ранга $\rho(A)$. Отсюда следует, что $s_{A,P}^{-1} K, K, s_{A,P} K \in \mathcal{E}л_{\rho(A)}(U_1, q_3)$ и $s_{A,P}^{r-1} K, s_{A,P}^r K, s_{A,P}^{r+1} K \in \mathcal{E}л_{\rho(A)}(U_2, q_3)$ для некоторых K и $r \geq 1$, где $\mathcal{L}(K) \sqsubseteq E$. В силу индуктивного предположения 11.22 найдутся $L \in \mathcal{E}л_{\rho(A)}(V_1, q_3 - h)$ и $L' \in \mathcal{E}л_{\rho(A)}(V_2, q_3 - h)$ такие, что $\mathcal{E}Согл_{\rho(A)}(K, L)$ и $\mathcal{E}Согл_{\rho(A)}(s_{A,P}^r K, L')$. Так как $q_3 - h > q_1$ и из леммы 6.7 следует $\neg \mathcal{E}Согл_{\rho(A)}(K, s_{A,P}^r K)$, то $\bar{P} = K \cup_{\bar{P}} s_{A,P}^r K$ и $\bar{Q} = L \cup_{\bar{Q}} L'$ – искомые строго близкие в ранге $\rho(A)$ периодические продолжения для P и Q .

7.8. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $A \in \mathcal{M}_\alpha$, $P \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$, $g \in B_{\alpha-1}$ и $\text{Согл}(P, gP)$. Тогда для любого $K \in \mathcal{E}л_{\rho(A)}(P, q_1)$ существует число $t \in \mathbb{Z}$ такое, что $\mathcal{E}Согл_{\rho(A)}(s_{A,P}^i K, g s_{A,P}^{i-t} K)$ при всех $i \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем произвольное $k > 2$ и периодическое продолжение R для P , содержащее в качестве подпути пути $s_{A,P}^i K$ при $-k \leq i \leq k$. Используя предложение 7.7, удлинив при этом R , можно считать, что R и некоторое периодическое продолжение S для gP строго близки в ранге $\rho(A)$. Тогда по предложению 6.10 существует элемент $h \in B_{\alpha-1}$ такой, что $\mathcal{E}Согл_{\rho(A)}(s_{A,P}^i K, h s_{A,P}^i K)$

при $-k \leq i \leq k$ и $\mathbf{S}, \mathbf{hR}$ имеют общее периодическое продолжение $\mathbf{T}$. Так как $\mathbf{T}$ есть общее периодическое продолжение для $\mathbf{hP}$ и $\mathbf{gP}$, то по лемме 3.2, (vii) для некоторого t имеем $\mathbf{g} = \mathbf{s}_{A,P}^t \mathbf{h}$. Следовательно,

$$\partial \text{Cогл}_{\rho(A)}(\mathbf{s}_{A,P}^i \mathbf{K}, \mathbf{g} \mathbf{s}_{A,P}^{i-t} \mathbf{K}), \quad -k \leq i \leq k. \quad (7.3)$$

Так как k произвольно, а из леммы 6.7 следует, что t не зависит от выбора k , то соотношение (7.3) верно при любом $i \in \mathbb{Z}$.

7.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $A \in \mathcal{M}_\alpha$ и $\mathbf{g} \in \mathbf{N}_{\alpha-1}^+(A)$. Выберем периодический отрезок $\mathbf{P} \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$ с начальной вершиной $\iota(\mathbf{P}) = 1$, метка которого начинается с A , так, чтобы $\mathbf{P}$ содержал некоторый подпуть $\mathbf{K} \in \mathcal{E}_{\rho(A)}(\mathbf{P}, q_1)$ (это можно сделать в силу определения 5.15). Согласно предложению 7.3 имеем $\text{Cогл}(\mathbf{P}, \mathbf{gP})$ и, следовательно, мы находимся в условиях предложения 7.8. Число t , существование которого утверждается в предложении 7.8, будем называть *показателем степени периода A в $\mathbf{g}$* и обозначать $\text{ind}_A(\mathbf{g})$.

7.10. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для любого $A \in \mathcal{M}_\alpha$ верны следующие утверждения:

- (i) для любого $\mathbf{g} \in \mathbf{N}_{\alpha-1}^+(A)$ существует число $r > 0$ такое, что $\mathbf{g}^r = [A]_{\alpha-1}^{r \text{ind}_A(\mathbf{g})}$;
- (ii) число $\text{ind}_A(\mathbf{g})$ не зависит от выбора $\mathbf{P}$ и $\mathbf{K}$ в определении 7.9. Следовательно, для данного A корректно определено отображение $\text{ind}_A: \mathbf{N}_{\alpha-1}^+(A) \rightarrow \mathbb{Z}$;
- (iii) $\text{ind}_A([A]_{\alpha-1}^k) = k$ для любого $k \in \mathbb{Z}$;
- (iv) ind_A – гомоморфизм группы $\mathbf{N}_{\alpha-1}^+(A)$ на $\mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть $\mathbf{P}$ и $\mathbf{K}$ таковы, как указано в определении 7.9. По индуктивному предположению 8.8

$$\mathbf{H} \Rightarrow \{\mathbf{h} \in \mathbf{B}_{\alpha-1} \mid \partial \text{Cогл}_{\rho(A)}(\mathbf{K}, \mathbf{hK})\} \quad (7.4)$$

– конечная подгруппа группы $\mathbf{B}_{\alpha-1}$. Заметим, что $\mathbf{s}_{A,P} = [A]_{\alpha-1}$ согласно формуле (3.2). Так как согласно определению 7.9 имеем $\partial \text{Cогл}_{\rho(A)}(\mathbf{s}_{A,P}^i \mathbf{K}, \mathbf{g} \mathbf{s}_{A,P}^{i-\text{ind}_A(\mathbf{g})} \mathbf{K})$ при любом i , то

$$[A]_{\alpha-1}^{-i} \mathbf{g} [A]_{\alpha-1}^{i-\text{ind}_A(\mathbf{g})} = \mathbf{s}_{A,P}^{-i} \mathbf{g} \mathbf{s}_{A,P}^{i-\text{ind}_A(\mathbf{g})} \in \mathbf{H} \quad (i \in \mathbb{Z}). \quad (7.5)$$

Тогда по лемме 6.1 для некоторого $r > 0$ выполнено $\mathbf{g}^r = [A]_{\alpha-1}^{r \text{ind}_A(\mathbf{g})}$.

(ii) Из $\mathbf{g}^{r_1} = [A]_{\alpha-1}^{r_1 t_1}$ и $\mathbf{g}^{r_2} = [A]_{\alpha-1}^{r_2 t_2}$ следует $[A]_{\alpha-1}^{(t_1-t_2)r_1 r_2} = 1$, откуда с учетом леммы 6.7 выводим $t_1 = t_2$. Таким образом, (ii) вытекает из (i).

(iii) Утверждение непосредственно следует из (i), (ii) и леммы 6.7.

(iv) Ввиду (iii) достаточно проверить, что отображение $\text{ind}_A: \mathbf{N}_{\alpha-1}^+(A) \rightarrow \mathbb{Z}$ является гомоморфизмом групп. Соотношение $\text{ind}_A(\mathbf{g}^{-1}) = -\text{ind}_A(\mathbf{g})$ непосредственно вытекает из (i) и бесконечности порядка элемента $[A]_{\alpha-1}$. Далее, из соотношений (7.5) при $\mathbf{g} := \mathbf{g}$ и $\mathbf{g} := \mathbf{h}$ следует

$$\mathbf{gh} [A]_{\alpha-1}^{-\text{ind}_A(\mathbf{g}) - \text{ind}_A(\mathbf{h})} = \mathbf{g} [A]_{\alpha-1}^{-\text{ind}_A(\mathbf{g})} \cdot [A]_{\alpha-1}^{\text{ind}_A(\mathbf{g})} \mathbf{h} [A]_{\alpha-1}^{-\text{ind}_A(\mathbf{g}) - \text{ind}_A(\mathbf{h})} \in \mathbf{H},$$

а полагая в (7.5) $\mathbf{g} := \mathbf{gh}$, выводим

$$\mathbf{gh} [A]_{\alpha-1}^{-\text{ind}_A(\mathbf{gh})} \in \mathbf{H}.$$

Следовательно, $[A]_{\alpha-1}^{\text{ind}_A(\mathbf{gh}) - \text{ind}_A(\mathbf{g}) - \text{ind}_A(\mathbf{h})} \in \mathbf{H}$, и ввиду бесконечности порядка элемента $[A]_{\alpha-1}$ $\text{ind}_A(\mathbf{gh}) = \text{ind}_A(\mathbf{g}) + \text{ind}_A(\mathbf{h})$ для любых $\mathbf{g}, \mathbf{h} \in \mathbf{N}_{\alpha-1}^+(A)$.

7.11. СЛЕДСТВИЕ. В условиях предложения 7.8 число t не зависит от выбора $\mathbf{K}$ и равно $\text{ind}_{A_1}((\iota(\mathbf{P}))^{-1}\mathbf{g}\iota(\mathbf{P}))$, где A_1 – циклический сдвиг слова A , с которого начинается слово $\mathcal{L}(\mathbf{P})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, верны посылка и для некоторого t заключение предложения 7.8. Положим $\mathbf{P}_1 \Leftarrow (\iota(\mathbf{P}))^{-1}\mathbf{P}$, $\mathbf{K}_1 \Leftarrow (\iota(\mathbf{P}))^{-1}\mathbf{K}$ и $\mathbf{g}_1 \Leftarrow (\iota(\mathbf{P}))^{-1}\mathbf{g}\iota(\mathbf{P})$. Из $\text{Cогл}(\mathbf{P}, \mathbf{g}\mathbf{P})$ следует $\text{Cогл}(\mathbf{P}_1, \mathbf{g}_1\mathbf{P}_1)$. Так как в силу леммы 3.2, (iv) имеем $\mathbf{s}_{A, \mathbf{P}} = \iota(\mathbf{P})\mathbf{s}_{A, \mathbf{P}_1}(\iota(\mathbf{P}))^{-1}$, то из $\mathcal{E}\text{Cогл}_{\rho(A)}(\mathbf{s}_{A, \mathbf{P}}^i \mathbf{K}, \mathbf{g}\mathbf{s}_{A, \mathbf{P}}^{i-t} \mathbf{K})$ следует $\mathcal{E}\text{Cогл}_{\rho(A)}(\mathbf{s}_{A, \mathbf{P}_1}^i \mathbf{K}_1, \mathbf{g}_1\mathbf{s}_{A, \mathbf{P}_1}^{i-t} \mathbf{K}_1)$. Так как A_1 , $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{K}_1$ в качестве A , $\mathbf{g}$, $\mathbf{P}$ и $\mathbf{K}$ удовлетворяют условиям определения 7.9, то по предложению 7.10, (ii) получаем $t = \text{ind}_{A_1}(\mathbf{g}_1)$, что и требовалось.

7.12. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $\mathbf{N}_{\alpha-1}^*(A) \Leftarrow \ker(\text{ind}_A)$.

7.13. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для любых $A \in \mathcal{E}_\alpha$ и $\beta \geq \alpha$ положим

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_\beta^+(A) &\Leftarrow \pi_{\alpha-1, \beta}(\mathbf{N}_{\alpha-1}^+(A)), & \mathbf{S}_\beta^-(A) &\Leftarrow \pi_{\alpha-1, \beta}(\mathbf{N}_{\alpha-1}^-(A)), \\ \mathbf{S}_\beta(A) &\Leftarrow \pi_{\alpha-1, \beta}(\mathbf{N}_{\alpha-1}(A)), & \mathbf{S}_\beta^*(A) &\Leftarrow \pi_{\alpha-1, \beta}(\mathbf{N}_{\alpha-1}^*(A)). \end{aligned}$$

7.14. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (i) Пусть $A \in \mathcal{M}_\alpha$. Если $\rho(A) = 0$, то $\mathbf{N}_{\alpha-1}^*(A) = 1$. Если $\rho(A) > 0$, то $\mathbf{N}_{\alpha-1}^*(A) \subseteq \mathbf{xS}_{\alpha-1}(B)\mathbf{x}^{-1}$ для некоторых $\mathbf{x} \in \mathbf{B}_{\alpha-1}$ и $B \in \mathcal{E}_{\rho(A)}$.

(ii) Для любого $A \in \mathcal{M}_\alpha$ группа $\mathbf{N}_{\alpha-1}^*(A)$ конечна.

(iii) Для любых $A \in \mathcal{E}_\alpha$ и $\beta \geq \alpha$ группа $\mathbf{S}_\beta(A)$ конечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i), (ii): Из соотношения (7.5), полученного в доказательстве предложения 7.10, (i), следует $\mathbf{N}_{\alpha-1}^*(A) \subseteq \mathbf{H}$, где $\mathbf{H}$ – конечная подгруппа группы $\mathbf{B}_{\alpha-1}$, определенная равенством (7.4) для некоторого $\mathbf{K} \in \mathcal{E}\mathbf{l}_{\rho(A)}(\Gamma_{\alpha-1})$. Если $\rho(A) = 0$, то $\mathbf{H} = 1$ в силу определения 5.14. Если $\rho(A) > 0$, то индуктивному предположению 8.8 $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{xS}_{\alpha-1}(B)\mathbf{x}^{-1}$ для некоторых $\mathbf{x} \in \mathbf{B}_{\alpha-1}$ и $B \in \mathcal{E}_{\rho(A)}$.

(iii) В силу леммы 7.2, (ii) имеем $|\mathbf{S}_\beta(A) : \mathbf{S}_\beta^+(A)| \leq 2$, так что достаточно доказать конечность $\mathbf{S}_\beta^+(A)$. В силу определений 7.13, 7.12 и предложения 7.10, (iii), (iv) факторгруппа $\mathbf{S}_\beta^+(A)/\mathbf{S}_\beta^*(A)$ есть гомоморфный образ бесконечной циклической группы $\mathbf{N}_{\alpha-1}^+(A)/\mathbf{N}_{\alpha-1}^*(A) = \langle [A]_{\alpha-1} \mathbf{N}_{\alpha-1}^*(A) \rangle$ при гомоморфизме, индуцированном $\pi_{\alpha-1, \beta}$. Так как $[A]_\beta^n = 1$ в силу определения 5.6, то $\mathbf{S}_\beta^+(A)/\mathbf{S}_\beta^*(A)$ – конечная циклическая группа. Остается заметить, что группа $\mathbf{S}_\beta^*(A)$ конечна в силу определения 7.13 и (ii).

7.15. ЛЕММА. (i) Для любых $A \in \mathcal{M}_\alpha$ и $\mathbf{g} \in \mathbf{N}_{\alpha-1}^+(A)$ выполнено

$$\text{ind}_{A^{-1}}(\mathbf{g}) = -\text{ind}_A(\mathbf{g}).$$

(ii) Если $A, B \in \mathcal{M}_\alpha$ и $\mathbf{h}^{-1}[A]_{\alpha-1}^t \mathbf{h} = [B]_{\alpha-1}^{\epsilon t}$ для некоторых $t \neq 0$ и $\epsilon = \pm 1$, то для любого $\mathbf{g} \in \mathbf{N}_{\alpha-1}^+(A)$ выполнено

$$\text{ind}_A(\mathbf{g}) = \text{ind}_{B^\epsilon}(\mathbf{h}^{-1} \mathbf{g} \mathbf{h}).$$

В частности, с учетом предложения 7.2, (iii) получаем

$$\mathbf{h}^{-1} \mathbf{N}_{\alpha-1}^*(A) \mathbf{h} = \mathbf{N}_{\alpha-1}^*(B).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оба утверждения легко вытекают из предложения 7.10, (i).

7.16. СЛЕДСТВИЕ. $\mathbf{N}_{\alpha-1}^*(A)$ есть нормальная подгруппа группы $\mathbf{N}_{\alpha-1}(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из определений 7.1, 7.12 и леммы 7.15 следует, что для любых $\mathbf{g} \in \mathbf{N}_{\alpha-1}^*(A)$ и $\mathbf{h} \in \mathbf{N}_{\alpha-1}^-(A)$ выполнено $\mathbf{h}^{-1} \mathbf{g} \mathbf{h} \in \mathbf{N}_{\alpha-1}^*(A)$. Так как подгруппа $\mathbf{N}_{\alpha-1}^*(A)$ нормальна в $\mathbf{N}_{\alpha-1}^+(A)$, то $\mathbf{N}_{\alpha-1}^*(A)$ нормальна и в $\mathbf{N}_{\alpha-1}(A)$.

7.17. СЛЕДСТВИЕ. Для любого $\mathbf{g} \in \mathbf{N}_{\alpha-1}^-(A)$ выполнено $\mathbf{g}^2 \in \mathbf{N}_{\alpha-1}^*(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя пп. (i) и (ii) леммы 7.15, с учетом леммы 7.2, (ii) получаем

$$\text{ind}_A(\mathbf{g}^2) = \text{ind}_A(\mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{g}) = \text{ind}_{A^{-1}}(\mathbf{g}^2) = -\text{ind}_A(\mathbf{g}^2),$$

и, следовательно, $\text{ind}_A(\mathbf{g}^2) = 0$.

7.18. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для любого $A \in \mathcal{M}_\alpha$ имеют место следующие соотношения в группе $\mathbf{B}_{\alpha-1}$:

- (i) $\mathbf{g}^n = [A]_{\alpha-1}^{n \text{ind}_A(\mathbf{g})}$ для любого $\mathbf{g} \in \mathbf{N}_{\alpha-1}^+(A)$;
- (ii) $\mathbf{g}^{-1} [A]_{\alpha-1}^{n/2} \mathbf{g} = [A]_{\alpha-1}^{n/2}$ для любого $\mathbf{g} \in \mathbf{N}_{\alpha-1}^+(A)$;
- (iii) $\mathbf{g}^{-1} [A]_{\alpha-1}^{n/2} \mathbf{g} = [A]_{\alpha-1}^{-n/2}$ для любого $\mathbf{g} \in \mathbf{N}_{\alpha-1}^-(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\alpha = 1$ утверждение легко вытекает из определения 7.1. При $\alpha \geq 2$ выполнение соотношений (i) и (ii) вытекает из предложения 7.14, (ii), следствия 7.16 и индуктивного предположения 15.11, (i) при $\mathbf{G} := \mathbf{N}_{\alpha-1}^*(A)$ и, соответственно, $\mathbf{x} := [A]_{\alpha-1}^{\text{ind}_A(\mathbf{g})}$, $\mathbf{g} := [A]_{\alpha-1}^{-\text{ind}_A(\mathbf{g})} \mathbf{g}$ или $\mathbf{x} := [A]_{\alpha-1}$, $\mathbf{g} := [A]_{\alpha-1}^{-\text{ind}_A(\mathbf{g})} \mathbf{g}$. Соотношение (iii) истинно в силу предложения 7.14, (ii), следствий 7.16, 7.17 и индуктивного предположения 15.11, (ii) при $\mathbf{x} := [A]_{\alpha-1}$ и $\mathbf{h} := \mathbf{g}$.

7.19. СЛЕДСТВИЕ. Для любого $A \in \mathcal{E}_\beta$ при $\beta \leq \alpha$ элемент $[A]_\alpha^{n/2}$ принадлежит центру группы $\mathbf{S}_\alpha(A)$.

7.20. ЛЕММА. Если $A, B \in \mathcal{E}_\beta$, $\beta \leq \alpha$ и $\mathbf{h}^{-1}[A]_{\beta-1}^r \mathbf{h} = [B]_{\beta-1}^{\epsilon r}$ для некоторых $r \neq 0$ и $\epsilon = \pm 1$, то $\tilde{\mathbf{h}}^{-1} \mathbf{S}_\alpha(A) \tilde{\mathbf{h}} = \mathbf{S}_\alpha(B)$, $\tilde{\mathbf{h}}^{-1} \mathbf{S}_\alpha^+(A) \tilde{\mathbf{h}} = \mathbf{S}_\alpha^+(B)$ и $\tilde{\mathbf{h}}^{-1} \mathbf{S}_\alpha^*(A) \tilde{\mathbf{h}} = \mathbf{S}_\alpha^*(B)$, где $\tilde{\mathbf{h}} = \pi_{\beta-1, \alpha}(\mathbf{h})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из определения 7.13 и лемм 7.2, (iii), 7.15, (ii).

7.21. ЛЕММА. Пусть $A \in \mathcal{M}_\alpha$, B – период ранга α , $P \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$, $Q \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, B, 2)$ и $\mathbf{s}_{A,P}^{kt} = \mathbf{s}_{B,Q}^t$ для некоторых $k, t > 0$. Пусть $K \in \mathcal{E}_{\rho(A)}(P, q_1)$, $L \in \mathcal{E}_{\rho(A)}(Q, q_1)$ и $\mathcal{E}\text{Cогл}_{\rho(A)}(K, L)$. Тогда $\mathcal{E}\text{Cогл}_{\rho(A)}(\mathbf{s}_{A,P}^{ki} K, \mathbf{s}_{B,Q}^i L)$ для любого $i \in \mathbb{Z}$.

В частности, если $A, B \in \mathcal{M}_\alpha$, $P \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$, $Q \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, B, 2)$ и $\text{Cогл}(P, Q)$, то для любых $K \in \mathcal{E}_{\rho(A)}(P, q_1)$, $L \in \mathcal{E}_{\rho(A)}(Q, q_1)$ из $\mathcal{E}\text{Cогл}_{\rho(A)}(K, L)$ следует $\mathcal{E}\text{Cогл}_{\rho(A)}(\mathbf{s}_{A,P}^i K, \mathbf{s}_{B,Q}^i L)$ для любого $i \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что слово $\mathcal{L}(P)$ начинается с A . Обозначив $P_1 = \mathbf{s}_{B,Q} P$, по лемме 3.2, (iv) получаем $\mathbf{s}_{A,P_1}^{kt} = \mathbf{s}_{B,Q}^{-1} \mathbf{s}_{A,P}^{kt} \mathbf{s}_{B,Q} = \mathbf{s}_{A,P}^{kt}$ и, следовательно, $\text{Cогл}(P, \mathbf{s}_{B,Q} P)$. По предложению 7.3

$$(\iota(P))^{-1} \mathbf{s}_{B,Q} \iota(P) = (\iota(P))^{-1} \iota(\mathbf{s}_{B,Q} P) \in \mathbf{N}_{\alpha-1}^+(A).$$

Так как в силу п. (iii) предложения 7.10

$$\text{ind}_A((\iota(P))^{-1} \mathbf{s}_{B,Q}^t \iota(P)) = \text{ind}_A((\iota(P))^{-1} \mathbf{s}_{A,P}^{kt} \iota(P)) = \text{ind}_A([A]_{\alpha-1}^{kt}) = kt,$$

то в силу п. (iv) предложения 7.10 для любого $i \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\text{ind}_A((\iota(P))^{-1} \mathbf{s}_{B,Q}^i \iota(P)) = ki.$$

Используя предложение 7.8 и следствие 7.11 при $\mathbf{g} := \mathbf{s}_{B,Q}^i$ и $i := ki$, получаем $\mathcal{E}\text{Cогл}_{\rho(A)}(\mathbf{s}_{A,P}^{ki} K, \mathbf{s}_{B,Q}^i K)$, что с учетом $\mathcal{E}\text{Cогл}_{\rho(A)}(K, L)$ влечет $\mathcal{E}\text{Cогл}_{\rho(A)}(\mathbf{s}_{A,P}^{ki} K, \mathbf{s}_{B,Q}^i L)$.

7.22. ЛЕММА. Если $A, B \in \mathcal{M}_\alpha$, $P \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$, $Q \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, B, 2)$ и $\text{Cогл}(P, Q)$, то $\text{Род}_\alpha(A, B)$. Обратно, если $\text{Род}_\alpha(A, B)$, то существуют согласованные периодические отрезки $P \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$ и $Q \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, B, 2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение непосредственно вытекает из определений 3.3, 5.4 и формулы (3.2). Докажем второе утверждение. Пусть $\text{Род}_\alpha(A, B)$, т.е. $[A]_{\alpha-1}^t = \mathbf{g}[B]_{\alpha-1}^t \mathbf{g}^{-1}$ для некоторых $t > 0$ и $\mathbf{g} \in \mathbf{B}_{\alpha-1}$. Рассмотрим пути $P \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$ и $Q \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, B, 2)$ с начальными вершинами $\iota(P) = 1$, $\iota(Q) = \mathbf{g}$ и метками $\mathcal{L}(P) \sqsupseteq A^2$ и $\mathcal{L}(Q) \sqsupseteq B^2$. Так как по формуле (3.2) имеем $\mathbf{s}_{A,P} = [A]_{\alpha-1}$ и $\mathbf{s}_{B,Q} = \mathbf{g}[B]_{\alpha-1} \mathbf{g}^{-1}$, то $\mathbf{s}_{A,P}^t = \mathbf{s}_{B,Q}^t$, т.е. $\text{Cогл}(P, Q)$.

§ 8. Почти периодические, элементарные слова и отрезки

8.1. ЛЕММА. Если $E \in \text{ППер}_\alpha(A)$ и $P \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$ – периодическая основа для E , то пути P и E строго близки в ранге $\rho(A)$.

Утверждение непосредственно вытекает из определений 5.16 и 6.5.

8.2. ЛЕММА. Пусть $\beta \leq \alpha - 1$.

(i) Отношение “пути X и Y строго близки в ранге β ” на множестве путей на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ транзитивно.

(ii) Если пути X и Y на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ строго близки в ранге β , то X и Y близки в ранге β . В частности, если $E \in \text{ППер}_\alpha(A)$ и $P \in \text{Пер}(\Gamma_\alpha, A, 2)$ – периодическая основа для E , то пути E и P близки в ранге $\rho(A)$.

(iii) Пусть X и Y – строго близкие в ранге β пути на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ с $\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y) \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$. Предположим, $\mathcal{Эл}_\gamma(X, q_4) = \emptyset$ или $\mathcal{Эл}_\gamma(Y, q_4) = \emptyset$ для всех $\gamma = \beta + 1, \beta + 2, \dots, \alpha - 1$. Пусть $r \geq q_1 + h$, $M_1, M_2, \dots, M_t \in \mathcal{Эл}_\beta(X, r)$, $M_1 <_X M_2 <_X \dots <_X M_t$ и $\neg \mathcal{Согл}_\beta(M_i, M_j)$ при $i \neq j$. Тогда существуют $N_1, N_t \in \mathcal{Эл}_\beta(Y, q_1)$, $N_2, \dots, N_{t-1} \in \mathcal{Эл}_\beta(Y, r - h)$ такие, что $\mathcal{Согл}_\beta(M_i, N_i)$ для каждого i и $N_1 <_Y N_2 <_Y \dots <_Y N_t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из индуктивного предположения 8.40 следует, что если пути $K, K' \in \mathcal{Эл}_\beta(\Gamma_{\alpha-1}, q_1)$ являются началами или концами некоторого пути X , то $\mathcal{Согл}_\beta(K, K')$. С учетом этого факта, утверждение (i) вытекает из определения 6.5 и индуктивного предположения 8.7.

Первое утверждение (ii) при $\beta = 0$ непосредственно следует из определений 6.5, 5.14 и 7.4. При $\beta \geq 1$ нужно сослаться на индуктивное предположение 8.45. Второе утверждение (ii) вытекает из первого в силу леммы 8.1.

Пусть истинна посылка (iii). Пусть $K, L \in \mathcal{Эл}_\beta(X, q_1)$ – начало и конец X и $K', L' \in \mathcal{Эл}_\beta(Y, q_1)$ – начало и конец Y , где $\mathcal{Согл}_\beta(K, K')$, $\mathcal{Согл}_\beta(L, L')$ и $\neg \mathcal{Согл}_\beta(K, L)$. Если $\mathcal{Согл}_\beta(K, M_1)$ или $\mathcal{Согл}_\beta(L, M_1)$, то в качестве N_1 возьмем соответственно K' или L' . В случае $\neg \mathcal{Согл}_\beta(K, M_1)$ и $\neg \mathcal{Согл}_\beta(L, M_1)$ по индуктивному предположению 8.40 имеем $K <_X M_1 <_X L$, $K' <_Y L'$, и по индуктивному предположению 11.23 найдется $N_1 \in \mathcal{Эл}(Y, q_1)$ такой, что $\mathcal{Согл}_\beta(M_1, N_1)$. Если $t = 1$, то доказывать больше нечего. Пусть $t > 1$. Аналогично предыдущему для некоторого $N_t \in \mathcal{Эл}(Y, q_1)$ имеем $\mathcal{Согл}_\beta(M_t, N_t)$. По индуктивному предположению 11.27 $N_1 <_Y N_t$. Тогда по индуктивному предположению 11.23 при $(K, L, M, K', L') := (M_1, M_t, M_i, N_1, N_t)$ для каждого $2 \leq i \leq t - 1$ найдется $N_i \in \mathcal{Эл}(Y, r - h)$ такой, что $\mathcal{Согл}_\beta(M_i, N_i)$. Вновь используя индуктивное предположение 11.27, получаем $N_1 <_Y N_2 <_Y \dots <_Y N_t$.

8.3. ЛЕММА. Если $E \in \text{ППер}_\alpha(A, 5)$ и $P, Q \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$ – периодические основы для E , то $\mathcal{Согл}(P, Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу определения 5.17 и транзитивности отношения $\mathcal{Согл}(P, Q)$ достаточно рассмотреть случай, когда $K, s_{A,P}K \dots s_{A,P}^5 K \in \mathcal{Эл}_{\rho(A)}(P, q_2)$ для некоторого K . В этом случае утверждение следует из лемм 8.1, 8.2, (i) и предложения 6.11.

8.4. ЛЕММА. Если A – период ранга α и в некоторое слово $P \in \text{Пер}(A)$ входит элементарная r -степень ранга $\beta \leq \alpha - 1$ при $r \geq 19$, то некоторый циклический сдвиг A содержит элементарную $(r - 9)$ -степень ранга β , и, следовательно, любой периодический отрезок $P \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, t)$ содержит в качестве подпутей $t - 1$ путей $K, s_{A,P}K, s_{A,P}^2K, \dots, s_{A,P}^{t-2}K$, где $K \in \mathcal{Эл}_\beta(\Gamma_{\alpha-1}, r - 9)$.

В частности, если $A \in \mathcal{M}_\alpha$ и $P \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, t)$, то для некоторого K имеем $K, s_{A,P}K, \dots, s_{A,P}^{t-2}K \in \mathcal{Эл}_{\rho(A)}(P, q_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из леммы 7.6, определения 5.15 и равенства $q_3 = q_2 + 9$.

8.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $E \in \text{ППер}_\alpha(A, 8) \cap \text{ППер}_\alpha(B, 8)$ и $P \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$, $Q \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, B, 2)$ – периодические основы для E , то $\text{Согл}(P, Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 8.3 и определения 5.17 достаточно рассмотреть случай, когда $M, s_{A,P}M, \dots, s_{A,P}^8M \in \mathcal{Эл}_{\rho(A)}(P, q_2)$ и $N, s_{B,Q}N, \dots, s_{B,Q}^8N \in \mathcal{Эл}_{\rho(B)}(Q, q_2)$ для некоторых M и N . Если $\rho(B) = \rho(A)$, то утверждение вытекает из лемм 8.1, 8.2, (i) и предложения 6.12. Пусть $\rho(A) \neq \rho(B)$. Без ограничения общности можно считать $\rho(A) > \rho(B)$. Пусть $K, L \in \mathcal{Эл}_{\rho(A)}(P, q_2)$ – начало и конец P , $K', L' \in \mathcal{Эл}_{\rho(A)}(E, q_1)$ – начало и конец E , где $\neg \mathcal{ЭСогл}_{\rho(A)}(K, L)$, $\mathcal{ЭСогл}_{\rho(A)}(K, K')$ и $\mathcal{ЭСогл}_{\rho(A)}(L, L')$. По лемме 8.2, (ii) пути E и Q близки в ранге $\rho(B)$. Тогда по индуктивному предположению 11.21 найдутся $K^*, L^* \in \mathcal{Эл}_{\rho(A)}(Q, q_2 - h)$ такие, что $\mathcal{ЭСогл}_{\rho(A)}(K, K^*)$ и $\mathcal{ЭСогл}_{\rho(A)}(L, L^*)$. По индуктивному предположению 11.27 имеем $K^* <_Q L^*$. Пусть $Q^* = K^* \cup_Q L^*$ и $Q = UQ^*V$. Если $|U| \geq |B|$, то $s_{B,Q}^{-1}K^*$ содержится в Q и тогда в силу леммы 6.7 и индуктивных предположений 11.21, 11.27 найдется $K^{**} \in \mathcal{Эл}_{\rho(A)}(P, q_2 - 2h)$ такой, что $K^{**} <_P K$. Но это невозможно, так как K есть начало P . Следовательно, $|U| < |B|$. Аналогично доказывается, что $|V| < |B|$. Так как $|Q| \geq 8|B|$, то отсюда следует $|Q^*| > 6|B|$. В силу леммы 8.4 для некоторого N' имеем $N', s_{B,Q}N', \dots, s_{B,Q}^4N' \in \mathcal{Эл}_{\rho(A)}(Q^*, q_2 - h - 9)$. Так как $q_2 - h - 9 > q_1$, то по предположению 6.12 получаем $\text{Согл}(P, Q^*)$ и, следовательно, $\text{Согл}(P, Q)$.

8.6. СЛЕДСТВИЕ. (i) Если $E, F \in \bigcup_A \text{ППер}(A, 8)$, $\text{ПСогл}_\alpha(E, F)$, P и Q – любые периодические основы для E и F соответственно, то $\text{Согл}(P, Q)$.

(ii) Отношение $\text{ПСогл}_\alpha(E, F)$ на множестве $\bigcup_A \text{ППер}_\alpha(A, 8)$ является отношением эквивалентности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из определения 5.18, предложения 8.5 и леммы 3.4, (i).

8.7. СЛЕДСТВИЕ ($\alpha \geq 0$). Для любого $\beta \geq \alpha$ отношение $\mathcal{ЭСогл}_\alpha(E, F)$ на множестве $\mathcal{Эл}_\alpha(\Gamma_\beta)$ является отношением эквивалентности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\alpha = 0$ доказывать нечего (см. определение 5.14). Пусть $\alpha \geq 1$. Рефлексивность и симметричность отношения $\mathcal{ЭСогл}_\alpha(E, F)$ вытекает из определения 5.20, рефлексивности и симметричности отношения

$ПСогл_\alpha(\bar{E}, \bar{F})$ для $\bar{E}, \bar{F} \in \bigcup_A ППер_\alpha(A, 8)$ и инвариантности этого отношения относительно замены путей на обратные. Пусть $E, F, G \in \mathcal{E}_\alpha(\Gamma_\beta)$, $\mathcal{E}Согл_\alpha(E, F)$ и $\mathcal{E}Согл_\alpha(F, G)$. Согласно определению 5.20 для некоторых прообразов $\bar{E}, \bar{F}, \bar{F}'$ и $\bar{G}$ на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ путей E, F и G относительно отображения $\pi_{\alpha-1, \beta}$ имеем $ПСогл_\alpha(\bar{E}, \bar{F}^\epsilon)$ и $ПСогл_\alpha(\bar{F}', \bar{G}^\delta)$, где $\epsilon, \delta = \pm 1$. Так как $\pi_{\alpha-1, \beta}(\bar{F}) = \pi_{\alpha-1, \beta}(\bar{F}') = F$, то $\bar{F}' = g\bar{F}$ для некоторого $g \in \ker \pi_{\alpha-1, \beta}$. Из $ПСогл_\alpha(\bar{F}', \bar{G}^\delta)$ умножением на g^{-1} получаем $ПСогл_\alpha(\bar{F}, g^{-1}\bar{G}^\delta)$, что вместе с $ПСогл_\alpha(\bar{E}, \bar{F}^\epsilon)$ в силу следствия 8.6, (ii) дает $ПСогл_\alpha(\bar{E}, g^{-1}\bar{G}^{\epsilon\delta})$. Тогда согласно определению 5.20 $\mathcal{E}Согл_\alpha(E, G)$.

8.8. СЛЕДСТВИЕ ($\alpha \geq 0$). Для любых $\beta \geq \alpha$ и $E \in \mathcal{E}_\alpha(\Gamma_\beta)$ множество $\mathbf{H} = \{g \in \mathbf{B}_\beta \mid \mathcal{E}Согл_\alpha(E, gE)\}$ есть конечная подгруппа группы $\mathbf{B}_\beta$. Более того, $\mathbf{H} = 1$ при $\alpha = 0$ и $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{xS}_\beta(A)\mathbf{x}^{-1}$ для некоторых $\mathbf{x} \in \mathbf{B}_\beta$ и $A \in \mathcal{E}_\alpha$ при $\alpha > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение тривиально при $\alpha = 0$. Пусть $\alpha \geq 1$. Тот факт, что $\mathbf{H}$ – подгруппа группы $\mathbf{B}_\beta$, вытекает из инвариантности отношения $\mathcal{E}Согл_\alpha(F, G)$ относительно действия группы $\mathbf{B}_\beta$ на графе Γ_β и следствия 8.7. Выберем произвольный прообраз $\bar{E}$ на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ пути E . Согласно лемме 5.21 имеем $\bar{E} \in ППер_\alpha(A, 8)$ для некоторого $A \in \mathcal{E}_\alpha$. Пусть $P \in Пер(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$ – периодическая основа для $\bar{E}$. Заменяя слово A на его циклический сдвиг, можно считать, что слово $\mathcal{L}(P)$ начинается с A . Пусть $g \in \mathbf{H}$ – произвольный элемент. Согласно определению 5.20 для некоторых $\bar{E}'$ и $\bar{E}''$ имеем $\pi_{\alpha-1, \beta}(\bar{E}') = E$, $\pi_{\alpha-1, \beta}(\bar{E}'') = gE$ и $ПСогл_\alpha(\bar{E}', \bar{E}'')$ или $ПСогл_\alpha(\bar{E}', \bar{E}''^{-1})$. Умножая $\bar{E}'$ и $\bar{E}''$ слева на $\iota(\bar{E})(\iota(\bar{E}'))^{-1}$, можно считать $\bar{E} = \bar{E}'$. Имеем $\bar{E}'' = g\bar{E}$, где $\pi_{\alpha-1, \beta}(g) = g$, и так как gP – периодическая основа для $\bar{E}''$, то в силу следствия 8.6, (i) и предложения 7.3 $(\iota(P))^{-1}g\iota(P) \in \mathbf{N}_{\alpha-1}(A)$. Следовательно, $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{xS}_\beta(A)\mathbf{x}^{-1}$, где $\mathbf{x} = \pi_{\alpha-1, \beta}(\iota(P))$. Остается заметить, что в силу предложения 7.14, (iii) группа $\mathbf{S}_\beta(A)$ конечна.

8.9. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $E \in ППер_\alpha(A, 8)$, $F \in ППер_\alpha(A)$ и E содержится в F , то $ПСогл_\alpha(E, F)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P, Q \in Пер(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$ – периодические основы для E и F соответственно. В силу леммы 8.3 можно считать, что $M, s_{A, P}M, \dots, s_{A, P}^8 M \in \mathcal{E}_{\rho(A)}(P, q_2)$ для некоторого M . Так как $q_2 = q_1 + 2h$, то, применив два раза лемму 8.2, (iii) вначале при $X := P$ и $Y := E$, а затем при $X := F$ и $Y := Q$, найдем $N, N' \in \mathcal{E}_{\rho(A)}(Q, q_1)$ такие, что $\mathcal{E}Согл_{\rho(A)}(s_{A, P}M, N)$, $\mathcal{E}Согл_{\rho(A)}(s_{A, P}^7 M, N')$ и $N <_Q N'$. Тогда по предложению 6.11 при $P := s_{A, P}M \cup_P s_{A, P}^7 M$ и $Q := N \cup_Q N'$ получаем $Согл(P, Q)$, что согласно определению 5.18 означает $ПСогл_\alpha(E, F)$.

8.10. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (i) Если $E, F \in ППер_\alpha(A)$, $ПСогл_\alpha(E, F)$ и $P, Q \in Пер(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$ – периодические основы для E и F соответственно, то существует периодическая основа $\tilde{Q}$ для F такая, что P и $\tilde{Q}$ имеют общее периодическое продолжение и $\mathcal{L}(\tilde{Q}) \sqsubseteq \mathcal{L}(Q)$.

(ii) Если $E, F \in ППер_\alpha(A, 8)$, E содержится в F и $P \in Пер(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$ – периодическая основа для E , то в качестве периодической основы для F можно взять некоторое периодическое продолжение P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $E, F \in \text{ППер}_\alpha(A)$, $\text{ПСогл}_\alpha(E, F)$ и $P, Q \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$ – периодические основы для E и F соответственно. Пусть $K, L \in \text{Эл}_{\rho(A)}(Q, q_2)$ – начало и конец Q , $K', L' \in \text{Эл}_{\rho(A)}(F, q_1)$ – начало и конец F , где $\neg \text{ЭСогл}_{\rho(A)}(K, L)$, $\text{ЭСогл}_{\rho(A)}(K, K')$ и $\text{ЭСогл}_{\rho(A)}(L, L')$. По лемме 3.1, (v) выберем элемент $g \in B_{\alpha-1}$ такой, что gQ и P имеют общее периодическое продолжение R . Так как по условию $\text{ПСогл}_\alpha(E, F)$, то в силу следствия 8.6, (i) имеем $\text{Согл}(P, Q)$, откуда и из $\text{Согл}(P, gQ)$ следует $\text{Согл}(P, gP)$. В силу предложения 7.8 и следствия 7.11 для некоторого t имеем $\text{ЭСогл}_{\rho(A)}(K, gs_{A,Q}^t K)$ и $\text{ЭСогл}_{\rho(A)}(L, gs_{A,Q}^t L)$. Так как пути $K^* \Rightarrow gs_{A,Q}^t K$ и $L^* \Rightarrow gs_{A,Q}^t L$ содержатся в некотором периодическом продолжении gQ , то, удлинив R , можно считать, что K^* и L^* – подпути R . Из $\neg \text{ЭСогл}_{\rho(A)}(K, L)$ и $K <_Q L$ следует $\neg \text{ЭСогл}_{\rho(A)}(K^*, L^*)$ и $K^* <_R L^*$ и, таким образом, $\tilde{Q} \Rightarrow K^* \cup_R L^*$ – периодическая основа для F . Так как, очевидно, $\tilde{Q} = gs_{A,Q}^t Q$, то $\mathcal{L}(\tilde{Q}) \supseteq \mathcal{L}(Q)$. Тем самым доказано (i). Пусть выполнена посылка (ii). В силу предложения 8.9 мы находимся в условиях п. (i), и тогда в силу (i) найдется периодическая основа $\tilde{Q}$ для F такая, что P и $\tilde{Q}$ имеют общее периодическое продолжение R . В этом случае, используя индуктивное предположение 11.25, легко видеть, что $\tilde{Q} \cup_R P$ – также периодическая основа для F , которую и можно взять в качестве искомой.

8.11. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть X – путь на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ с $\mathcal{L}(X) \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$. Пусть $E, F \in \text{ППер}_\alpha(A)$ – подпути пути X и $\text{ПСогл}_\alpha(E, F)$. Тогда $E \cup_X F \in \text{ППер}_\alpha(A)$ и $\ell_{\alpha,A}(E \cup_X F) \geq \max\{\ell_{\alpha,A}(E), \ell_{\alpha,A}(F)\}$, а если пути E и F не имеют общих ребер, то $\ell_{\alpha,A}(E \cup_X F) \geq \ell_{\alpha,A}(E) + \ell_{\alpha,A}(F) - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если E содержится в F или F содержится в E , то доказывать нечего. Пусть ни один из путей E, F не содержится в другом, т.е. $E <_X F$ или $F <_X E$. Без ограничения общности можно считать $E <_X F$. Пусть $P, Q \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$ – периодические основы для E и F соответственно. В силу определения 5.17 и предложения 8.10, (i) можно считать, что P и Q имеют общее периодическое продолжение R , причем $M, s_{A,R}M, \dots, s_{A,R}^r M \in \text{Эл}_{\rho(A)}(P, q_2)$ и $N, s_{A,R}N, \dots, s_{A,R}^t N \in \text{Эл}_{\rho(A)}(Q, q_2)$ для некоторых M и N , где $r = \ell_{\alpha,A}(E)$ и $t = \ell_{\alpha,A}(F)$. Пусть $K, L \in \text{Эл}_{\rho(A)}(P, q_2)$ – начало и конец P , $K', L' \in \text{Эл}_{\rho(A)}(E, q_1)$ – начало и конец E , где $\neg \text{ЭСогл}_{\rho(A)}(K, L)$, $\text{ЭСогл}_{\rho(A)}(K, K')$ и $\text{ЭСогл}_{\rho(A)}(L, L')$. Пусть $\tilde{K}, \tilde{L} \in \text{Эл}_{\rho(A)}(Q, q_2)$ – начало и конец Q , $\tilde{K}', \tilde{L}' \in \text{Эл}_{\rho(A)}(F, q_1)$ – начало и конец F , где $\neg \text{ЭСогл}_{\rho(A)}(\tilde{K}, \tilde{L})$, $\text{ЭСогл}_{\rho(A)}(\tilde{K}, \tilde{K}')$ и $\text{ЭСогл}_{\rho(A)}(\tilde{L}, \tilde{L}')$. Из $E <_X F$ в силу индуктивного предположения 11.27 следует $K \preceq_R \tilde{K}$ и $L \preceq_R \tilde{L}$ (в обозначениях (6.2)). Тогда, очевидно, $E \cup_X F$ есть почти периодический отрезок ранга α с периодической основой $P \cup_R Q$ и $\ell_{\alpha,A}(E \cup_X F) \geq \max\{\ell_{\alpha,A}(E), \ell_{\alpha,A}(F)\}$.

Предположим теперь, что E и F не имеют общих ребер. Тогда в силу индуктивного предположения 11.27 имеем $L \preceq_R \tilde{K}$, а в силу индуктивного предположения 8.40 имеем $s_{A,R}^r M \preceq_R L$ и $\tilde{K} \preceq_R N$. В силу транзитивности отношения $\preceq_R$ получаем $s_{A,R}^r M \preceq_R N$, откуда, используя лемму 6.7, легко выводим, что $s_{A,R}^{r+t-1} M \prec_R s_{A,R}^t N$. Последнее означает, что пути $s_{A,R}^i M$ содержатся в $P \cup_R Q$ при $i = 0, 1, \dots$

$\dots, r + t - 1$, и, таким образом, $\ell_{\alpha,A}(E \cup_X F) \geq \ell_{\alpha,A}(E) + \ell_{\alpha,A}(F) - 1$.

8.12. ЛЕММА. *Если $E, F \in \text{ППер}_\alpha(A)$ – строго близкие в ранге $\rho(A)$ пути, то любая периодическая основа $P \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$ для E является периодической основой для F и обратно. В частности, $\text{ПСогл}_\alpha(E, F)$ и $\ell_{\alpha,A}(E) = \ell_{\alpha,A}(F)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение легко следует из определений 5.16, 6.5 и индуктивного предположения 8.40.

8.13. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. В п. 5.17 мы определили числовую функцию $\ell_{\alpha,A}$ на множестве почти периодических слов ранга α , порожденных периодом A . Теперь распространим эту функцию на подслова почти периодических слов ранга α , порожденных периодом A . По определению $\ell_{\alpha,A}(E) = r$, где r – максимальное число, для которого в E входит слово $E' \in \text{ППер}_\alpha(A, r)$. Заметим, что формально значение $\ell_{\alpha,A}(E)$ определено для любого слова E . Как легко следует из предложения 8.10, (ii), для любого $E \in \text{ППер}_\alpha(A, 8)$ значения функции $\ell_{\alpha,A}(E)$ в старом и в новом смысле совпадают.

8.14. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (i) Пусть $E \sqsupseteq E_1 E_2 \in \text{ППер}_\alpha(A, r)$. Если $t \equiv \ell_{\alpha,A}(E_1) \leq r - 3$, то существует конец E'_2 слова E_2 такой, что $E'_2 \in \text{ППер}_\alpha(A, r - t - 2)$. Если $t \equiv \ell_{\alpha,A}(E_2) \leq r - 3$, то существует начало E'_1 слова E_1 такое, что $E'_1 \in \text{ППер}_\alpha(A, r - t - 2)$.

(ii) Если E' – подслово некоторого слова $E \in \text{ППер}_\alpha(A)$ и $E' \sqsupseteq E_1 E_2 \dots E_k$ при $k \geq 1$, то $\sum_{i=1}^k \ell_{\alpha,A}(E_i) \geq \ell_{\alpha,A}(E') - 2k + 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (ii) вытекает из (i). Докажем (i). В силу симметрии ограничимся доказательством первого утверждения. Пусть $E \sqsupseteq E_1 E_2 \in \text{ППер}_\alpha(A, r)$ и $t \equiv \ell_{\alpha,A}(E_1) \leq r - 3$. Рассмотрим путь $E \in \text{ППер}_\alpha(A, r)$ на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ с $\mathcal{L}(E) \sqsupseteq E$. Пусть P – периодическая основа для E , и пусть $K, s_{A,P}K, \dots, s_{A,P}^r K \in \mathcal{Эл}_{\rho(A)}(P, q_2)$. Пусть, кроме того, $L \in \mathcal{Эл}_{\rho(A)}(P, q_2)$ и $L' \in \mathcal{Эл}_{\rho(A)}(E, q_1)$ – концы соответственно P и E , где $\mathcal{Эл}_{\rho(A)}(L, L')$. По лемме 8.2, (iii) (с учетом леммы 6.7) существуют $M_0, M_r \in \mathcal{Эл}_{\rho(A)}(E, q_1)$, $M_1, \dots, M_{r-1} \in \mathcal{Эл}_{\rho(A)}(E, q_2 - h)$ такие, что $\mathcal{Эл}_{\rho(A)}(s_{A,P}^i K, M_i)$ для каждого i и $M_0 <_E M_1 <_E \dots <_E M_r$. Так как $2p+70 < h$, то, укоротив M_i при $1 \leq i \leq r-1$ в силу индуктивного предположения 8.41 и считая $M_i \in \mathcal{Эл}_{\rho(A)}(E, q_1)$ вместо $M_i \in \mathcal{Эл}_{\rho(A)}(E, q_2 - h)$, можно предполагать, что $M_0 \ll_E M_1 \ll_E \dots \ll_E M_{r-1} \ll_E M_r$. Если бы путь M_{t+1} содержался в E_1 , мы имели бы $M_0 \cup_E M_{t+1} \in \text{ППер}_\alpha(A, t+1)$ вопреки равенству $\ell_{\alpha,A}(E_1) = t$. Следовательно, M_{t+1} не содержится в E_1 и тогда M_{t+2} содержится в E_2 . Так как $E'_2 \equiv M_{t+2} \cup_E L' \in \text{ППер}_\alpha(A, r - t - 2)$, то в качестве E'_2 можно взять $\mathcal{L}(E'_2)$.

8.15. ЛЕММА ($\alpha \geq 2$). *Если $A \in \mathcal{M}_\alpha$, $B \in \mathcal{E}_{\alpha-1}$ и слова $P \in \text{Пер}(A)$ и $Q \in \text{Пер}(B)$ близки в ранге $\alpha - 2$, то $|P| < 10|A|$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное: слова $P \in \text{Пер}(A, 10)$ и $Q \in \text{Пер}(B)$ близки в ранге $\alpha - 2$, где $A \in \mathcal{M}_\alpha$ и $B \in \mathcal{E}_{\alpha-1}$. По лемме 5.13 имеем $A \in \mathcal{N}_{\alpha-1,i}$ для некоторого i . Так как порядок $[A]_{\alpha-1}$ бесконечен, а порядок $[B]_{\alpha-1}$ делит n , то никакие нетривиальные степени A и B на могут быть сопряжены в $\mathbf{B}_{\alpha-1}$, а значит, и в $\mathbf{B}_{\alpha-2}$. Тогда согласно определению 5.4 периоды A и B не родственны в ранге $\alpha - 1$ и согласно определению 5.5 $B \in \mathcal{N}_{\alpha-1,i+1}$. Но это противоречит включению $B \in \mathcal{E}_{\alpha-1}$ и определению 5.6.

8.16. ЛЕММА ($\alpha \geq 2$). Пусть E – произвольное слово и $r \Leftarrow \ell_{\alpha,A}(E) \geq 2$. Тогда E имеет вид $E \sqsubseteq U_0 M_1 U_1 \dots M_{r-1} U_{r-1}$, где каждое слово M_i есть элементарная 118-степень ранга $\alpha - 1$ и никакое слово $M_k U_k \dots M_{k+9} U_{k+9} M_{k+10}$ не входит в слово $X \in \mathcal{R}_{\alpha-2}$, близкое в ранге $\alpha - 2$ к слову $R \in \text{Пер}(C)$ при $C \in \mathcal{E}_{\alpha-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда $E \in \text{ППер}_\alpha(A, r)$. Выберем путь $\mathbf{E} \in \text{ППер}_\alpha(A, r)$ с $\mathcal{L}(\mathbf{E}) \sqsubseteq E$, пусть $\mathbf{P} \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$ – периодическая основа для $\mathbf{E}$, и пусть $\mathbf{K}, \mathbf{s}_{A,\mathbf{P}}\mathbf{K}, \dots, \mathbf{s}_{A,\mathbf{P}}^r \mathbf{K} \in \text{Эл}_{\rho(A)}(\mathbf{P}, q_2)$. Рассмотрим два случая.

Случай 1: $\rho(A) = \alpha - 1$. Используя леммы 6.7, 8.2, (iii) и индуктивное предположение 8.41, как в доказательстве предложения 8.14, найдем $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_{r-1} \in \text{Эл}_{\alpha-1}(\mathbf{E}, q_1)$ такие, что $\mathcal{E}\text{Согл}_{\alpha-1}(\mathbf{s}_{A,\mathbf{P}}^{i-1} \mathbf{K}, \mathbf{M}_i)$ ($i = 1, 2, \dots, r-1$) и $\mathbf{M}_1 \ll_{\mathbf{E}} \mathbf{M}_2 \ll_{\mathbf{E}} \dots \ll_{\mathbf{E}} \mathbf{M}_{r-1}$, т.е. $\mathbf{E}$ имеет вид $U_0 \mathbf{M}_1 U_1 \dots \mathbf{M}_{r-1} U_{r-1}$. Тогда $E \sqsubseteq U_0 M_1 U_1 \dots M_{r-1} U_{r-1}$, где $M_i \Leftarrow \mathcal{L}(\mathbf{M}_i)$ и $U_i \Leftarrow \mathcal{L}(\mathbf{U}_i)$.

Докажем, что даже никакое слово $M_k U_k M_{k+1}$ не входит в слово $X \in \mathcal{R}_{\alpha-2}$, близкое в ранге $\alpha - 2$ к слову $R \in \text{Пер}(C)$ при $C \in \mathcal{E}_{\alpha-1}$. Допустим, найдутся такие k, X, R и C . Выберем прообраз $\bar{\mathbf{M}}_k \bar{\mathbf{U}}_k \bar{\mathbf{M}}_{k+1}$ пути $\mathbf{M}_k U_k M_{k+1}$ на графе $\Gamma_{\alpha-2}$, где $\mathcal{L}(\bar{\mathbf{M}}_k) \sqsubseteq M_k$, $\mathcal{L}(\bar{\mathbf{U}}_k) \sqsubseteq U_k$ и $\mathcal{L}(\bar{\mathbf{M}}_{k+1}) \sqsubseteq M_{k+1}$. Пусть $\mathbf{X} = \mathbf{V} \bar{\mathbf{M}}_k \bar{\mathbf{U}}_k \bar{\mathbf{M}}_{k+1} \mathbf{W}$, где $\mathcal{L}(\mathbf{X}) \sqsubseteq X$, и пусть $\mathbf{R}$ – близкий в ранге $\alpha - 2$ к пути $\mathbf{X}$ путь на графе $\Gamma_{\alpha-2}$ с $\mathcal{L}(\mathbf{R}) \sqsubseteq R$. По лемме 5.21 имеем $\bar{\mathbf{M}}_k \in \text{ППер}_{\alpha-1}(B_1, q_1)$ и $\bar{\mathbf{M}}_{k+1} \in \text{ППер}_{\alpha-1}(B_2, q_1)$ для некоторых $B_1, B_2 \in \mathcal{E}_{\alpha-1}$. По индуктивному предположению 8.26 существуют подпути $\mathbf{N}_i \in \text{ППер}_{\alpha-1}(B_i, q_1 - 34)$ ($i = 1, 2$) пути $\mathbf{R}$ такие, что $\text{ПСогл}_{\alpha-1}(\bar{\mathbf{M}}_k, \mathbf{N}_1)$ и $\text{ПСогл}_{\alpha-1}(\bar{\mathbf{M}}_{k+1}, \mathbf{N}_2)$. Пусть $\mathbf{Q}_i \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-2}, B_i, 2)$ – периодическая основа для $\mathbf{N}_i$. По индуктивному предположению 8.2, (ii) пути $\mathbf{Q}_i$ и $\mathbf{N}_i$ близки в ранге $\alpha - 2$. Пусть $\mathbf{R}^* \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-2}, C, 2)$ – произвольный путь, содержащий $\mathbf{R}$. По индуктивному предположению 8.36 имеем $\text{Согл}(\mathbf{Q}_i, \mathbf{R}^*)$ ($i = 1, 2$), и, следовательно, $\text{Согл}(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2)$. Тогда согласно определению 5.18 имеем $\text{ПСогл}_{\alpha-1}(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)$, откуда вытекает $\text{ПСогл}_{\alpha-1}(\bar{\mathbf{M}}_k, \bar{\mathbf{M}}_{k+1})$. Согласно определению 5.20 получаем $\mathcal{E}\text{Согл}_{\alpha-1}(\mathbf{M}_k, \mathbf{M}_{k+1})$, и, следовательно, $\mathcal{E}\text{Согл}_{\alpha-1}(\mathbf{s}_{A,\mathbf{P}}^k \mathbf{K}, \mathbf{s}_{A,\mathbf{P}}^{k+1} \mathbf{K})$. Но это невозможно в силу леммы 6.7. Случай 1 рассмотрен.

Случай 2: $\rho(A) \leq \alpha - 2$. По лемме 8.2, (ii) пути $\mathbf{P}$ и $\mathbf{E}$ близки в ранге $\alpha - 2$. Так как в силу определения 5.15 имеем $\text{Эл}_{\alpha-1}(\mathbf{P}, q_4) = \emptyset$, то по индуктивному предположению 11.6 найдутся близкие в ранге $\alpha - 2$ прообразы $\bar{\mathbf{P}}$ и $\bar{\mathbf{Q}}$ путей $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ на графе $\Gamma_{\alpha-2}$. В силу леммы 5.13 при $\alpha := \alpha - 1$ и индуктивного предположения 8.34 в некоторый циклический сдвиг слова $|A|$ входит элементарная 152-степень G ранга $\alpha - 1$. Так как $|\bar{\mathbf{P}}| > r|A|$, то путь $\bar{\mathbf{P}}$ содержит $r - 1$ подпути

$K, s_{A, \bar{P}} K, \dots, s_{A, \bar{P}}^{r-2} K$, где $\mathcal{L}(K) \supseteq G$. По лемме 5.21 имеем $K \in \text{ППер}_{\alpha-1}(B, 152)$ для некоторого $B \in \mathcal{E}_{\alpha-1}$. Используя индуктивные предположения 8.29, (i) и 8.12, найдем подпути $M_i \in \text{ППер}_{\alpha-1}(B, 118)$ ($i = 1, 2, \dots, r-1$) пути $\bar{E}$ такие, что $\text{ПСог}_{\alpha-1}(s_{A, \bar{P}}^{i-1} M, M_i)$ и $M_1 \ll_{\bar{E}} M_2 \ll_{\bar{E}} \dots \ll_{\bar{E}} M_{r-1}$. Имеем $\bar{E} = U_0 M_1 U_1 \dots M_{r-1} U_{r-1}$, и, следовательно, $E \supseteq U_0 M_1 U_1 \dots M_{r-1} U_{r-1}$, где $M_i = \mathcal{L}(M_i)$ и $U_i = \mathcal{L}(U_i)$.

Для доказательства леммы остается проверить, что ни при каком k слово $M_k U_k \dots M_{k+9} U_{k+9} M_{k+10}$ не входит в слово $X \in \mathcal{R}_{\alpha-2}$, близкое в ранге $\alpha-2$ к слову $R \in \text{Пер}(C)$ при $C \in \mathcal{E}_{\alpha-1}$. Допустим, это неверно для некоторых k , X , R и C . Тогда путь $M_k U_k \dots M_{k+9} U_{k+9} M_{k+10}$ входит в качестве подпути в путь X , близкий в ранге $\alpha-2$ к некоторому пути $R \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-2}, C)$. По индуктивному предположению 8.29, (ii) существуют близкие в ранге $\alpha-2$ подпути $P' \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 10)$ и R' путей $\bar{P}$ и R . Но это противоречит лемме 8.15.

Из леммы 8.16 непосредственно вытекает

8.17. ПРЕДЛОЖЕНИЕ ($\alpha \geq 2$). *Если слово E входит в слово $X \in \mathcal{R}_{\alpha-2}$, близкое в ранге $\alpha-2$ к некоторому слову $R \in \text{Пер}(C)$ при $C \in \mathcal{E}_{\alpha-1}$, то $\ell_{\alpha, A}(E) \leq 11$.*

8.18. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Если E – элементарное слово ранга α , то $|E| \geq 7 \times 117^{\alpha-1}$. В частности, E – непустое слово.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\alpha = 1$ в силу определений 5.16 и 5.17 имеем $\text{ППер}_1(A, r) \subseteq \text{Пер}(A, r)$, и, следовательно, если $E \in \text{ППер}_1(A, r)$, то $|E| \geq r$. При $\alpha \geq 2$, применяя лемму 8.16 последовательно при $\alpha := \alpha, \alpha-1, \dots, 2$, получаем, что любое слово $E \in \text{ППер}_{\alpha}(A, 8)$ содержит $7 \cdot 117^{\alpha-2}$ попарно непересекающихся вхождений элементарных 118-степеней ранга 1.

8.19. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Покрытием ранга β слова X назовем конечный (возможно, пустой) набор $\Omega = \{(U_i, \gamma_i)\}_{i=1}^r$ пар (U_i, γ_i) , где $U_1, U_2, \dots, U_r$ – вхождения слов $E_1, E_2, \dots, E_r$ соответственно в слово X , в совокупности покрывающие X , $1 \leq \gamma_i \leq \beta$ и для каждого i слово E_i входит в некоторое слово $\bar{E}_i \in \mathcal{R}_{\gamma_i-1}$, близкое в ранге γ_i-1 к слову $P_i \in \text{Пер}(A_i)$ при $A_i \in \mathcal{E}_{\gamma_i}$. Каждой паре (U_i, γ_i) сопоставим вес $\zeta^{\beta-\gamma_i}$ и определим вес $\mathcal{W}_{\beta}(\Omega)$ покрытия Ω ранга β как сумму $\sum_{i=1}^r \zeta^{\beta-\gamma_i}$ всех весов пар (U_i, γ_i) .*

По определению вес $\mathcal{W}_{\beta}(X)$ слова X в ранге β есть минимальный из всех весов $\mathcal{W}_{\beta}(\Omega)$ его покрытий ранга β . При этом естественно считать, что $\mathcal{W}_{\beta}(1) = 0$ и $\mathcal{W}_{\beta}(X) = \infty$, если для X не существует покрытия ранга β ; в частности, $\mathcal{W}_0(X)$ может принимать лишь два значения: 0, если слово X пусто, и ∞ , если X – непустое слово.

Из определения непосредственно вытекают следующие свойства функции $\mathcal{W}_{\beta}(X)$.

8.20. ЛЕММА. (i) *Если слово X и некоторое слово $P \in \text{Пер}(A)$ при $A \in \mathcal{E}_{\beta}$ близки в ранге $\beta-1$, то $\mathcal{W}_{\beta}(X) \leq 1$;*
(ii) *если $\beta \geq 1$, то $\mathcal{W}_{\beta}(X) \leq \zeta \mathcal{W}_{\beta-1}(X)$;*

- (iii) $\mathcal{W}_\beta(XY) \leq \mathcal{W}_\beta(X) + \mathcal{W}_\beta(Y)$;
- (iv) если Y есть подслово слова X , то $\mathcal{W}_\beta(Y) \leq \mathcal{W}_\beta(X)$.

8.21. ЛЕММА ($\alpha \geq 2$). Если слово $X \in \mathcal{R}_{\alpha-2}$ содержит t попарно непересекающихся вхождений элементарных 64-степеней ранга $\alpha - 1$, то $\mathcal{W}_{\alpha-2}(X) \geq \frac{50}{13}t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение тривиально при $\alpha = 2$. Пусть $\alpha \geq 3$. Пусть $\{V_i\}_{i=1}^t$ – попарно непересекающиеся вхождения в слово X элементарных 64-степеней ранга $\alpha - 1$. Пусть $\Omega = \{(\mathcal{U}_i, \gamma_i)\}_{i=1}^r$ – произвольное покрытие ранга $\alpha - 2$ слова X . Мы должны показать, что $\mathcal{W}_{\alpha-2}(\Omega) \geq \frac{50}{13}t$. Укоротив каждое вхождение V_i в силу индуктивных предположений 8.14, (i) и 8.17 (при этом вместо элементарных 64-степеней ранга $\alpha - 1$ возникнут элементарные 51-степени ранга $\alpha - 1$), можно считать, что для каждой пары $(\mathcal{U}_k, \gamma_k)$ при $\gamma_k = \alpha - 2$ вхождение $\mathcal{U}_k$ пересекается не более чем с одним V_i . Согласно лемме 8.16 каждое вхождение V_i содержит 50 попарно непересекающихся вхождений W_{ij} ($1 \leq j \leq 50$) элементарных 64-степеней ранга $\alpha - 2$ таких, что для каждой пары $(\mathcal{U}_k, \gamma_k)$ при $k = \alpha - 2$ вхождение $\mathcal{U}_k$ пересекается не более чем с 13 вхождениями W_{ij} . Пусть r_1 – число пар $(\mathcal{U}_k, \gamma_k)$, для которых $\gamma_k = \alpha - 2$, пусть $X_1, X_2, \dots, X_s$ – непустые попарно непересекающиеся подслова слова X , составляющие объединение всех вхождений $\mathcal{U}_k$ при $\gamma_k < \alpha - 2$, и пусть Ω_i есть покрытие ранга $\alpha - 3$ слова X_i , индуцированное покрытием Ω . Общее число вхождений W_{ij} , содержащихся в подсловах X_i , не меньше $50t - 13r_1$. Тогда по индуктивному предположению имеем

$$\sum_{i=1}^s \mathcal{W}_{\alpha-3}(\Omega_i) \geq \frac{50}{13}(50t - 13r_1) = \frac{1}{\zeta} \left(\frac{50}{13}t - r_1 \right).$$

Следовательно, с учетом определения 8.19

$$\mathcal{W}_{\alpha-2}(\Omega) = r_1 + \zeta \sum_{i=1}^s \mathcal{W}_{\alpha-3}(\Omega_i) \geq \frac{50}{13}t,$$

что и требовалось доказать.

8.22. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (i) Для любых $A \in \mathcal{M}_\alpha$, $X \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ и любого подслова E слова X выполнено $\ell_{\alpha,A}(E) \leq 13\mathcal{W}_{\alpha-1}(X) + 1$.

(ii) Для любых $A \in \mathcal{M}_\alpha$ и $X \in \text{Пер}(A)$ выполнено $|X| \leq (13\mathcal{W}_{\alpha-1}(X) + 2)|A|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение тривиально при $\alpha = 1$. Пусть $\alpha \geq 2$.

(i) Пусть $\ell_{\alpha,A}(E) = t + 1$ и $\{V_i\}_{i=1}^t$ – попарно непересекающиеся вхождения в слово X элементарных 118-степеней ранга $\alpha - 1$, полученные по лемме 8.16. Пусть $\Omega = \{(\mathcal{U}_i, \gamma_i)\}_{i=1}^r$ – произвольное покрытие ранга $\alpha - 1$ слова X . Пусть r_1 – число пар $(\mathcal{U}_i, \gamma_i)$ с $\gamma_i = \alpha - 1$, пусть $X_1, X_2, \dots, X_s$ – попарно непересекающиеся подслова слова X , составляющие объединение всех вхождений $\mathcal{U}_i$ при $\gamma_i \leq \alpha - 2$, и пусть Ω_i – индуцированное покрытие ранга $\alpha - 2$ слова X_i . Используя лемму 8.21

и тот факт, что каждое вхождение U_i при $\gamma_i = \alpha - 1$ пересекается не более чем с 13 вхождениями V_j , получаем

$$\mathcal{W}_{\alpha-1}(\Omega) = r_1 + \zeta \sum_{i=1}^s \mathcal{W}_{\alpha-2}(\Omega_i) \geq r_1 + \zeta \frac{50}{13}(t - 13r_1) = \frac{1}{13}t,$$

и, значит, верно искомое неравенство $\ell_{\alpha,A}(E) \leq 13\mathcal{W}_{\alpha-1}(X) + 1$.

(ii) Пусть $\lfloor |P|/|A| \rfloor = t + 1$, где $\lfloor x \rfloor$ – целая часть числа x . Достаточно проверить, что $t \leq 13\mathcal{W}_{\alpha-1}(X)$. В силу леммы 5.13 и индуктивного предположения 8.34 слово X имеет вид $G'EGE \dots GEG''$, где E – элементарная 152 -степень ранга $\alpha - 1$, EG есть циклический сдвиг слова A и число вхождений слова E равно t . Пусть $\Omega = \{(U_i, \gamma_i)\}_{i=1}^r$ – покрытие ранга $\alpha - 1$ слова X . В силу леммы 8.15 каждое вхождение U_i при $\gamma_i = \alpha - 1$ пересекается менее чем с 13 вхождениями слова E . Далее рассуждения аналогичны доказательству п. (i).

8.23. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $P \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, r)$ и X – близкие в ранге $\alpha - 1$ пути на графе $\Gamma_{\alpha-1}$, где $A \in \mathcal{M}_\alpha$ и $\mathcal{L}(X) \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$. Тогда если $r \geq 37$, то существуют подпути $\bar{P}$ и E путей P и X соответственно такие, что $E \in \text{ППер}_\alpha(A)$, $\bar{P}$ – периодическая основа для E и $\ell_{\alpha,A}(E) \geq r - 36$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По индуктивному предположению 11.9 имеем $P = U_1 P' U_2$, $X = V_1 X' V_2$, где $\mathcal{W}_{\alpha-1}(\mathcal{L}(U_i)) < 1 + 2\zeta$ ($i = 1, 2$) и пути P' и X' близки в ранге $\rho(A)$. По предложению 8.22, (ii) имеем $|\mathcal{L}(U_i)| < 16|A|$ и, следовательно, $|P'| > (r - 32)|A|$. Тогда в силу леммы 8.4 $P' = W_0 K_1 W_1 \dots K_t W_t$, где $K_i \in \mathcal{Эл}_{\rho(A)}(\Gamma_{\alpha-1}, q_2)$, $K_i = s_{A,P}^{i-1} K_1$ и $t \geq r - 33$. В силу леммы 6.7 и индуктивного предположения 11.23 найдутся $L_i \in \mathcal{Эл}_{\rho(A)}(X', q_2 - h)$ ($i = 2, 3, \dots, t - 1$) такие, что $\mathcal{ЭСогл}_{\rho(A)}(K_i, L_i)$. По индуктивному предположению 11.27 имеем $L_2 <_{X'} L_3 <_{X'} \dots <_{X'} L_{t-1}$, и можно положить $\bar{P} \Leftarrow K_2 \cup_P K_{t-1}$ и $E \Leftarrow L_2 \cup_{X'} L_{t-1}$.

8.24. СЛЕДСТВИЕ. Если слова $X \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ и $P \in \text{Пер}(A, r)$ при $A \in \mathcal{M}_\alpha$ и $r \geq 37$ близки в ранге $\alpha - 1$, то в X входит некоторое слово $E \in \text{ППер}_\alpha(A, r - 36)$.

8.25. ЛЕММА. Для любого пути $E \in \text{ППер}_\alpha(A, 35)$ существует подпути $\bar{E} \in \text{ППер}(A)$ пути E , обладающий следующими свойствами:

(i) $\text{ПСогл}_\alpha(E, \bar{E})$, $\ell_{\alpha,A}(\bar{E}) \geq \ell_{\alpha,A}(E) - 34$ и $E = E_1 \bar{E} E_2$, где $\ell_{\alpha,A}(\mathcal{L}(E_i)) \geq 15$ ($i = 1, 2$) (в смысле определения 8.13);

(ii) Если E – подпути пути X , пути X и Y близки в ранге $\alpha - 1$ и $\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y) \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$, то существует подпути $F \in \text{ППер}_\alpha(A)$ пути Y , строго близкий в ранге $\rho(A)$ к $\bar{E}$. В частности, в силу (i) и леммы 8.12 имеем $\text{ПСогл}_\alpha(E, F)$ и $\ell_{\alpha,A}(F) = \ell_{\alpha,A}(\bar{E}) \geq \ell_{\alpha,A}(E) - 34$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$ – периодическая основа для E и $K, s_{A,P} K, \dots, s_{A,P}^r K \in \mathcal{Эл}_{\rho(A)}(P, q_2)$, где $r \Leftarrow \ell_{\alpha,A}(E) \geq 35$. Используя леммы 6.7 и 8.2, (iii), найдем $L_0, L_r \in \mathcal{Эл}_{\rho(A)}(E, q_1)$, $L_i \in \mathcal{Эл}_{\rho(A)}(E, q_2 - h)$ ($i = 1, 2, \dots, r - 1$) такие, что $\mathcal{ЭСогл}_{\rho(A)}(s_{A,P}^i K, L_i)$ при всех i и $L_0 <_E L_1 <_E \dots <_E L_r$. Пусть $\bar{E} \Leftarrow L_{17} \cup_E L_{r-17}$ и $E = E_1 \bar{E} E_2$. Тогда имеем $\bar{E} \in \text{ППер}_\alpha(A)$, $\ell_{\alpha,A}(\bar{E}) \geq \ell_{\alpha,A}(E) - 34$

и по предложению 8.9 $ПСогл_\alpha(E, \bar{E})$. Из $L_{15} <_E L_{16} <_E L_{17}$, $\neg \mathcal{E}Cогл_{\rho(A)}(L_i, L_j)$ при $i \neq j$ и индуктивного предположения 8.41 легко следует $L_{15} \ll_E L_{17}$, и так как $L_0 \cup_E L_{15} \in \text{ППер}_\alpha(A, 15)$, то $\ell_{\alpha, A}(\mathcal{L}(E_1)) \geq 15$. Аналогично доказывается, что $\ell_{\alpha, A}(\mathcal{L}(E_2)) \geq 15$. Тем самым доказано утверждение (i).

Докажем (ii). Пусть даны близкие в ранге $\alpha - 1$ пути X и Y на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ такие, что $\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y) \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ и X содержит E . Заметим, что в силу леммы 8.2, (ii) и индуктивного предположения 11.3 слова $\mathcal{L}(P)$ и $\mathcal{L}(E)$ близки в ранге $\rho(A)$. Тогда в силу индуктивного предположения 8.27 слово $\mathcal{L}(E)$ не содержит элементарных $(q_3 + 34)$ -степеней ранга β при $\rho(A) + 1 \leq \beta \leq \alpha - 1$, т.е. имеем $\mathcal{E}л_\beta(E, q_3 + 34) = \emptyset$ при $\rho(A) + 1 \leq \beta \leq \alpha - 1$. Так как $q_3 + 34 < q_4$, то по индуктивному предположению 11.9 имеем $E = U_1 E' U_2$, $Y = V_1 Y' V_2$, где пути E' и Y' близки в ранге $\rho(A)$ и $\mathcal{W}_{\alpha-1}(\mathcal{L}(U_i)) < 1 + 2\zeta$ ($i = 1, 2$). Так как $\ell_{\alpha, A}(L_0 \cup_X L_{15}) \geq 15$ и $\ell_{\alpha, A}(L_{r-15} \cup_X L_r) \geq 15$, то, используя предложение 8.22, (i), получаем, что L_{15} не содержится в U_1 , а L_{r-15} не содержится в U_2 . Используя индуктивное предположение 8.41, найдем подпути $\bar{L}_{16}, \bar{L}_{r-16} \in \mathcal{E}л_{\rho(A)}(E, q_2 - h - p - 35)$ путей L_{16} и L_{r-16} такие, что $\mathcal{E}Cогл_{\rho(A)}(L_{16}, \bar{L}_{16})$, $\mathcal{E}Cогл_{\rho(A)}(L_{r-16}, \bar{L}_{r-16})$ и $L_{15} \ll_E \bar{L}_{16} <_E \bar{L}_{r-16} \ll_E L_{r-15}$, т.е. $\bar{L}_{16} \cup_E \bar{L}_{r-16}$ содержится в E' . Используя далее индуктивные предположения 11.23 и 11.27 и учитывая, что $q_1 = q_2 - 2h$, найдем подпути $M_i \in \mathcal{E}л_{\rho(A)}(Y, q_1)$ ($i = 17, 18, \dots, r - 17$) такие, что $\mathcal{E}Cогл_{\rho(A)}(L_i, M_i)$ и $M_{17} <_Y M_{18} <_Y \dots <_Y M_{r-17}$. Тогда, очевидно, в качестве F можно взять $M_{17} \cup_Y M_{r-17}$.

Непосредственным следствием леммы 8.25 являются следующие предложения 8.26 и 8.27.

8.26. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть X и Y – близкие в ранге $\alpha - 1$ пути на графе $\Gamma_{\alpha-1}$. Пусть $\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y) \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$, $r \geq 35$ и $E \in \text{ППер}_\alpha(A, r)$ – подпути пути X . Тогда существует подпути $F \in \text{ППер}_\alpha(A, r - 34)$ пути Y такой, что $ПСогл_\alpha(E, F)$.

8.27. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если слова $X, Y \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ близки в ранге $\alpha - 1$, $r \geq 35$ и в X входит элементарная r -степень ранга α , то в Y входит элементарная $(r - 34)$ -степень ранга α .

8.28. Назовем устойчивой частью пути $E \in \text{ППер}_\alpha(A, 35)$ подпути $\bar{E}$ пути E , построенный в доказательстве леммы 8.25.

Так как все понятия, относящиеся к путям на графе $\Gamma_{\alpha-1}$, инвариантны относительно действия группы $\mathbf{B}_{\alpha-1}$ на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ левыми сдвигами, то для любого пути $E \in \text{ППер}_\alpha(A, 35)$ и любого элемента $g \in \mathbf{B}_{\alpha-1}$, если $\bar{E}$ есть устойчивая часть E , то $g\bar{E}$ есть устойчивая часть gE .

Отметим еще один факт, легко вытекающий из доказательства леммы 8.25 и леммы 8.12. Если пути $E, F \in \text{ППер}_\alpha(A, 35)$ строго близки в ранге $\rho(A)$ и $\bar{E}$ – устойчивая часть E , то существует устойчивая часть $\bar{F}$ для F такая, что $\bar{E}$ и $\bar{F}$ строго близки в ранге $\rho(A)$.

8.29. ЛЕММА. Пусть $A \in \mathcal{M}_\alpha$, $P \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$ и $E, s_{A,P}E, \dots, s_{A,P}^k E$ – подпути P , где $E \in \text{ППер}_\alpha(B, r)$ для некоторого $r \geq 35$ и $|E| \leq |A|$.

(i) Если P и X – близкие в ранге $\alpha - 1$ пути и $\mathcal{L}(X) \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$, то существуют подпути $\bar{E} \in \text{ППер}_\alpha(B, r - 34)$ пути E и подпути $F_0, F_1, \dots, F_k \in \text{ППер}_\alpha(B, r - 34)$ пути X такие, что для каждого i пути $s_{A,P}^i \bar{E}$ и F_i строго близки в ранге $\rho(B)$ и $F_0 \ll_Y F_1 \ll_Y \dots \ll_Y F_k$.

(ii) Если $r \geq 69$, P и X – близкие в ранге $\alpha - 1$ пути, X содержится в X^* , X^* и Y – близкие в ранге $\alpha - 1$ пути и $\mathcal{L}(X^*), \mathcal{L}(Y) \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$, то некоторый подпути P' пути P и некоторый подпути Y' пути Y близки в ранге $\alpha - 1$, причем $|P'| \geq k|A|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) В качестве $\bar{E}$ возьмем устойчивую часть пути E . По лемме 8.25 имеем $P = U\bar{E}V$, $X = YF_0Z$, где $F_0 \in \text{ППер}_\alpha(B, r - 34)$ и пути $\bar{E}$ и F_0 строго близки в ранге $\rho(B)$. Так как по условию $|E| \leq |A|$, то $s_{A,P}E$ содержится в Z . Так как по лемме 8.2, (ii) при $X := \bar{E}$ и $Y := F_0$ пути Z и V близки в ранге $\alpha - 1$, то в силу леммы 8.25 и замечания из 8.28 существует подпути F_1 пути V такой, что $F_1 \in \text{ППер}_\alpha(A, r - 34)$ и $s_{A,P}\bar{E}$, F_1 строго близки в ранге $\rho(B)$. Далее рассуждения повторяются.

(ii) Пусть $\bar{E}$ – устойчивая часть E и $\bar{\bar{E}}$ – устойчивая часть $\bar{E}$. Как было доказано в (i), существуют подпути $F_0, F_1, \dots, F_k \in \text{ППер}_\alpha(B, r - 34)$ пути X такие, что для каждого i пути $s_{A,P}^i \bar{E}$ и F_i строго близки в ранге $\rho(B)$ и $F_0 \ll_Y F_1 \ll_Y \dots \ll_Y F_k$. В силу замечаний из 8.28 для каждого i существует устойчивая часть $\bar{F}_i \in \text{ППер}_\alpha(B, r - 68)$ пути F_i такая, что $s_{A,P}^i \bar{E}$ и $\bar{F}_i$ строго близки в ранге $\rho(B)$. Подобно тому, как в доказательстве (i), найдем подпути $G, G' \in \text{ППер}_\alpha(B, r - 68)$ пути Y такие, что $\bar{F}_0$ и G строго близки в ранге $\rho(B)$, $\bar{F}_k$ и G' строго близки в ранге $\rho(B)$ и $G \ll_Y G'$. Так как в силу леммы 8.2, (i), (ii) пути $\bar{\bar{E}} \cup_P s_{A,P}^r \bar{E}$ и $G \cup_Y G'$ близки в ранге $\alpha - 1$, то можно положить $P' = \bar{\bar{E}} \cup_P s_{A,P}^r \bar{E}$ и $Y' = G \cup_Y G'$.

8.30. ПРЕДЛОЖЕНИЕ ($\alpha \geq 2$). Пусть слова $X, Y \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ близки в ранге $\alpha - 2$. Если в слово X входит слово $E \in \text{ППер}_\alpha(A, r)$ при $r \geq 11$, то в слово Y входит некоторое слово $F \in \text{ППер}_\alpha(A, r - 8)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – близкие в ранге $\alpha - 2$ пути на графе $\Gamma_{\alpha-2}$ с $\mathcal{L}(\bar{X}) \supseteq X$, $\mathcal{L}(\bar{Y}) \supseteq Y$, и пусть $\bar{E}$ – подпути пути $\bar{X}$ с $\mathcal{L}(\bar{E}) \supseteq E$. Как в доказательстве леммы 8.25, получаем, что $\mathcal{E}l_\beta(\bar{E}, q_4) = \emptyset$ при $\rho(A) \leq \beta \leq \alpha - 2$. Тогда по индуктивному предположению 11.9 имеем $\bar{E} = \bar{U}_1 \bar{E}' \bar{U}_2$ и $\bar{Y} = \bar{V}_1 \bar{Y}' \bar{V}_2$, где пути $\bar{E}'$ и $\bar{Y}'$ близки в ранге $\rho(A)$ и $\mathcal{W}_{\alpha-2}(\mathcal{L}(\bar{U}_i)) < 1 + 2\zeta$ ($i = 1, 2$). Обозначим $E = \pi_{\alpha-2, \alpha-1}(\bar{E})$, $E' = \pi_{\alpha-2, \alpha-1}(\bar{E}')$, $U_i = \pi_{\alpha-2, \alpha-1}(\bar{U}_i)$ и $Y' = \pi_{\alpha-2, \alpha-1}(\bar{Y}')$. Имеем $E \in \text{ППер}_\alpha(A, r)$. Пусть $P \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$ – периодическая основа для E , где $K, s_{A,P}K, \dots, s_{A,P}^r K \in \mathcal{E}l_{\rho(A)}(P, q_2)$ для некоторого K . Используя лемму 8.2, (iii), найдем $L_0, L_r \in \mathcal{E}l_{\rho(A)}(E, q_1)$, $L_i \in \mathcal{E}l_{\rho(A)}(E, q_2 - h)$ ($i = 1, 2, \dots, r - 1$) такие, что $\mathcal{E}l_{\rho(A)}(s_{A,P}^i K, L_i)$ при всех i и $L_0 <_E L_1 <_E \dots <_E L_r$. Так как $\ell_{\alpha, A}(L_0 \cup_E L_2) \geq 2$, $\ell_{\alpha, A}(L_{r-2} \cup_E L_r) \geq 2$ и в силу леммы 8.20, (ii) имеем $\mathcal{W}_{\alpha-1}(\mathcal{L}(U_i)) = \mathcal{W}_{\alpha-1}(\mathcal{L}(\bar{U}_i)) < \zeta(1 + 2\zeta) < \frac{1}{13}$ ($i = 1, 2$), то в силу предложения 8.22, (i) L_2 не содержится в U_1 и L_{r-2} не содержится в U_2 . Далее повторяются рассуждения из доказательства утверждения (ii) леммы 8.25, где вместо L_{16} и L_{r-16} нужно взять L_3 и L_{r-3} соответственно.

8.31. ЛЕММА. Если $A, B \in \mathcal{M}_\alpha$ и пути $P \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 8)$ и $Q \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, B, 6)$ строго близки в некотором ранге $\beta \leq \alpha - 1$, то $\text{Согл}(P, Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\beta \geq \gamma \Rightarrow \max\{\rho(A), \rho(B)\}$, то утверждение вытекает из предложения 6.12. Пусть $\beta < \gamma$. По лемме 8.2, (ii) пути P и Q близки в ранге β . Используя лемму 8.4 и индуктивное предположение 11.21, легко видеть, что найдутся $K \in \mathcal{E}_\gamma(P, q_2 - h)$ и $L \in \mathcal{E}_\gamma(Q, q_2 - h)$ такие, что $|K| \leq |A|$ и $|L| \leq |B|$. Можно считать, что пути $K_i \Rightarrow s_{A,P}^i K$ при $i = 0, 1, \dots, 7$ содержатся в P , а пути $L_i \Rightarrow s_{B,Q}^i L$ при $i = 0, 1, \dots, 5$ содержатся в Q . Используя индуктивное предположение 11.21 еще раз, найдем $K'_i \in \mathcal{E}_\gamma(Q, q_1)$ ($i = 0, 1, \dots, 6$) и $L'_i \in \mathcal{E}_\gamma(P, q_1)$ такие, что $\mathcal{E}\text{Согл}_\gamma(K_i, K'_i)$ и $\mathcal{E}\text{Согл}_\gamma(L_i, L'_i)$ при всех i . Пусть M и N — соответственно минимальный и максимальный относительно $\prec_P$ элементы среди всех K_i и L'_i , а M' и N' — соответственно минимальный и максимальный относительно $\prec_Q$ элементы среди всех K'_i и L_i . Используя индуктивное предположение 11.27, легко видеть, что $\mathcal{E}\text{Согл}_\gamma(M, M')$ и $\mathcal{E}\text{Согл}_\gamma(N, N')$. Следовательно, положив $P^* \Rightarrow M \cup_P N$ и $Q^* \Rightarrow M' \cup_Q N'$, получим строго близкие в ранге γ пути P^* и Q^* . Тогда по предложению 6.12 получаем $\text{Согл}(P^*, Q^*)$, а значит, и $\text{Согл}(P, Q)$, что и требовалось.

8.32. ЛЕММА. Пусть $A, B \in \mathcal{M}_\alpha$, $\neg \text{Род}_\alpha(A, B)$, $P \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$, и путь $E \in \text{ППер}_\alpha(B, 6)$ содержится в P . Тогда $\neg \text{ПСогл}_\alpha(E, s_{A,P}E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, $\text{ПСогл}_\alpha(E, s_{A,P}E)$. Выбрав достаточно длинное периодическое продолжение R для P и воспользовавшись предложением 8.11, получим $F \Rightarrow E \cup_R s_{A,P}^8 E \in \text{ППер}_\alpha(B, 6) \cap \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 8)$. Из определения 5.17 следует, что для F существует периодическая основа $S \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, B)$ с $|S| \geq 6|B|$. Так как пути F и S строго близки в ранге $\rho(B)$, то по лемме 8.31 имеем $\text{Согл}(F, S)$. Тогда в силу леммы 7.22 получаем $\text{Род}_\alpha(A, B)$ вопреки посылке леммы.

8.33. ЛЕММА. Пусть $t \geq 1$, $A_0, A_1, \dots, A_t \in \mathcal{M}_\alpha$, $\neg \text{Род}_\alpha(A_i, A_{i+1})$ ($i = 0, 1, \dots, t-1$) и для каждого $i = 0, 1, \dots, t-1$ существуют близкие в ранге $\alpha - 1$ слова $P_i \in \text{Пер}(A_i)$ и $Q_i \in \text{Пер}(A_{i+1})$ такие, что $|P_0| \geq p|A_0|$ и $|P_i| \geq 10|A_i|$ при $i \geq 1$. Тогда в некоторый циклический сдвиг слова A_t входит слово $E \in \text{ППер}_\alpha(A_0, 152)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (индукция по t).

Случай 1: $t = 1$ (база индукции). Рассмотрим близкие в ранге $\alpha - 1$ пути P_0 и Q_0 на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ с $\mathcal{L}(P_0) \supseteq P_0$ и $\mathcal{L}(Q_0) \supseteq Q_0$. Можно считать, что Q_0 входит в качестве подпути в некоторый путь $Q \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A_1, 2)$. Так как $p = 240$, то по предложению 8.23 найдется подпуть E пути Q_0 такой, что $E \in \text{ППер}_\alpha(A_0, 204)$. По лемме 8.32 имеем $\neg \text{ПСогл}_\alpha(E, s_{A_1,Q}E)$, следовательно, укоротив E в силу предложений 8.9 и 8.14, (i), получим подпуть $\tilde{E} \in \text{ППер}_\alpha(A_0, 195)$ пути Q такой, что $\tilde{E} \ll_Q s_{A,Q}E$, и, значит, $|\tilde{E}| \leq |A_1|$. Тогда в некоторый циклический сдвиг слова A_1 входит слово $\mathcal{L}(\tilde{E}) \in \text{ППер}_\alpha(A_0, 195)$.

Случай 2: $t > 1$ (индуктивный шаг). Индукцией по убыванию r при $r = t -$

$1, t-2, \dots, 1$ докажем следующее утверждение:

$$\begin{aligned} & \text{существуют близкие в ранге } \alpha-1 \text{ пути } P \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A_r) \\ & \text{и } Q \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A_t), \text{ где } |P| \geq 8|A_r| \text{ и } |Q| < 6|A_t|. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Рассмотрим близкие в ранге $\alpha-1$ пути $R \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A_r, 10)$ и $S \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A_{r+1})$, существующие по условию леммы. По индуктивному предположению леммы найдется подпуть $E \in \text{ППер}_\alpha(A_0, 152)$ пути R такой, что $|E| \leq |A_0|$. Можно считать, что пути $s_{A_r, R}^i E$ содержатся в R при $i = 0, 1, \dots, 8$. По лемме 8.29, (i) найдутся подпуть $\bar{E} \in \text{ППер}_\alpha(A_0, 118)$ пути E и подпути $F_0, F_8 \in \text{ППер}_\alpha(A_0, 118)$ пути S такие, что пути $s_{A_r, R}^i \bar{E}$ и F_i строго близки в ранге $\rho(A_0)$ ($i = 0, 8$) и $F_0 \ll_S F_8$. Тогда пути $R' = \bar{E} \cup_R s_{A_r, R}^i \bar{E}$ и $S' = F_0 \cup_S F_8$ строго близки в ранге $\rho(A_0)$ и так как $|R'| \geq 8|A_r|$, то из $\neg \text{Под}_\alpha(A_r, A_{r+1})$ в силу лемм 7.22, 8.31 следует $|S'| < 6|A_{r+1}|$. По лемме 8.2, (ii) пути R' и S' близки в ранге $\alpha-1$. Следовательно, если $r = t-1$, то в качестве искомым P и Q можно взять соответственно R' и S' . Пусть $r < t-1$. По индуктивному предположению (8.1) найдутся близкие в ранге $\alpha-1$ пути P^* и Q^* такие, что $|P^*| \geq 8|A_{r+1}|$ и $|Q^*| < 6|A_t|$. Так как $|P^*| > |S'| + 2|A_{r+1}|$, то, действуя на P^* и Q^* подходящим элементом группы $B_{\alpha-1}$, можно считать, что S' содержится в P^* . По лемме 8.29, (ii) при $P := R$, $X := S$, $X^* := P^*$ и $Y := Q^*$ некоторый подпуть P пути P^* и некоторый подпуть Q пути Q^* близки в ранге $\alpha-1$, где $|P| \geq 8|A_r|$. Так как $|Q^*| < 6|A_t|$, то $|Q| < 6|A_t|$, что и завершает доказательство (8.1).

Завершим доказательство леммы 8.33. Рассмотрим близкие в ранге $\alpha-1$ пути $P \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A_1, 8)$ и $Q \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A_t)$, существующие в силу (8.1). Можно считать, что Q входит в качестве подпути в некоторый путь $Q' \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A_t, 2)$. Как было установлено при рассмотрении случая 1, P содержит некоторые $E, s_{A_1, P} E \in \text{ППер}_\alpha(A_0, 195)$, причем $\neg \text{ПСогл}_\alpha(E, s_{A_1, P} E)$. Тогда по предложению 8.26 найдутся подпути $F, F' \in \text{ППер}_\alpha(A_0, 161)$ пути Q такие, что $\neg \text{ПСогл}_\alpha(F, F')$. Если бы выполнялось $\text{ПСогл}_\alpha(F, s_{A_t, Q} F)$, то для любых $i, j \in \mathbb{Z}$ имели бы $\text{ПСогл}_\alpha(s_{A_t, Q}^i F, s_{A_t, Q}^j F)$, откуда в силу предложений 8.11 и 8.9 легко следовало бы $\text{ПСогл}_\alpha(F, F')$. Поэтому $\neg \text{ПСогл}_\alpha(F, s_{A_t, Q} F)$. Укоротив F с использованием предложений 8.9 и 8.14, (i), найдем подпуть F^* пути Q такой, что $F^* \in \text{ППер}_\alpha(A_0, 152)$ и $|F^*| \leq |A_t|$. Тогда слово $\mathcal{L}(F^*) \in \text{ППер}_\alpha(A_0, 152)$ входит в некоторый циклический сдвиг слова A_t , что и требовалось доказать.

8.34. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для любого $A \in \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{N}_{\alpha, i}$ некоторый циклический сдвиг слова A содержит элементарную 152 -степень ранга α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На множестве $\mathcal{M}_\alpha$ введем бинарное отношение:

$$\begin{aligned} A > B & \Rightarrow \text{для некоторого } t \geq 1 \text{ существуют } A_0, A_1, \dots, A_t \in \mathcal{M}_\alpha, \\ & \text{удовлетворяющие посылке леммы 8.33, где } A_0 \sqsupseteq B \text{ и } A_t \sqsupseteq A. \end{aligned}$$

Непосредственно проверяется, что отношение $A > B$ транзитивно. Сравнивая определение 5.5 и формулировку леммы 8.33, видим, что включение $A \in \bigcup_i \mathcal{N}_{\alpha,i}$ истинно тогда и только тогда, когда $A > B$ для некоторого $B \in \mathcal{M}_{\alpha}$. Следовательно, в силу определения 5.6 A – элементарный период ранга α тогда и только тогда, когда A – минимальный относительно $>$ элемент множества $\mathcal{M}_{\alpha}$.

Докажем, что если $A > B$, то любая почти периодическая r -степень ранга α , порожденная периодом A , содержит в качестве подслов $r - 1$ попарно непересекающихся 118-степеней ранга α , порожденных периодом B . Пусть $E \in \text{ППер}_{\alpha}(A, r)$. Рассмотрим путь $E \in \text{ППер}_{\alpha}(A, r)$ с $\mathcal{L}(E) \supseteq E$, и пусть P – периодическая основа для E с $|P| \geq r|A|$, существующая в силу определения 5.17. По лемме 8.33 путь P содержит $r - 1$ подпутей $F, s_{A,P}F, \dots, s_{A,P}^{r-2}F$, где $F \in \text{ППер}_{\alpha}(B, 152)$. Тогда в силу леммы 8.29 путь E содержит $r - 1$ попарно не имеющих общих ребер подпутей $F_i \in \text{ППер}_{\alpha}(B, 118)$, и, следовательно, слово E содержит $r - 1$ попарно непересекающихся подслов $\mathcal{L}(F_i) \in \text{ППер}_{\alpha}(B, 118)$.

Из доказанного непосредственно вытекает, что отношение $A > B$ удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей. Отсюда следует, что для любого слова $A \in \bigcup_i \mathcal{N}_{\alpha,i}$ существует слово $B \in \mathcal{E}_{\alpha}$ такое, что $A > B$. Тогда в силу леммы 8.33 и определения 5.19 некоторый циклический сдвиг A содержит элементарную 152-степень ранга α .

8.35. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $A, B \in \mathcal{M}_{\alpha}$ и $\text{Род}_{\alpha}(A, B)$, то любой путь $E \in \text{ППер}_{\alpha}(A, 37)$ содержит в качестве подпути путь $F \in \text{ППер}_{\alpha}(B)$ такой, что $\ell_{\alpha,B}(F) \geq \ell_{\alpha,A}(E) - 36$ и $\text{ПСогл}_{\alpha}(E, F)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $r = \ell_{\alpha,A}(E)$, и пусть $P \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$ – периодическая основа для E , где $K, s_{A,P}K, \dots, s_{A,P}^{r-1}K \in \mathcal{E}_{\rho(A)}(P, q_2)$ для некоторого K . Согласно лемме 7.22 найдутся $P^* \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$ и $Q \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, B, 2)$ такие, что $\text{Согл}(P^*, Q)$. В силу леммы 7.7 можно считать, что P^* и Q строго близки в ранге $\rho(A)$, а действуя на P^* и Q подходящим элементом группы $\mathbf{B}_{\alpha-1}$, можно считать что P содержится в P^* .

По лемме 8.2, (iii) найдем $L, L' \in \mathcal{E}_{\rho(A)}(E, q_1)$ и $M \in \mathcal{E}_{\rho(A)}(Q, q_1)$ такие, что $\mathcal{E}\text{Согл}_{\rho(A)}(K, L)$, $\mathcal{E}\text{Согл}_{\rho(A)}(K, M)$, $\mathcal{E}\text{Согл}_{\rho(A)}(s_{A,P}^{r-1}K, L')$. В силу леммы 7.21 имеем $\mathcal{E}\text{Согл}_{\rho(A)}(s_{A,P}^{r-1}K, s_{B,Q}^{r-1}M)$, следовательно, положив $E' = L \cup_E L'$ и $Q' = M \cup_{Q^*} s_{B,Q}M$, где Q^* – некоторое периодическое продолжение Q , получим строго близкие в ранге $\rho(A)$, а значит, и близкие в ранге $\alpha - 1$ подпути E' пути E и путь $Q' \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, B, r)$. Остается воспользоваться предложением 8.23.

8.36. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $A, B \in \mathcal{E}_{\alpha}$, и путь $P \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, p)$ близок в ранге $\alpha - 1$ к некоторому подпути пути $Q \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, B, 2)$. Тогда $\text{Согл}(P, Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Q' – подпути пути Q , близкий в ранге $\alpha - 1$ к P . Так как $B \notin \mathcal{N}_{\alpha,1}$ согласно определению 5.6 и слова $\mathcal{L}(P) \in \text{Пер}(A, p)$ и $\mathcal{L}(Q') \in \text{Пер}(B)$ близки в ранге $\alpha - 1$, то согласно определению 5.5 имеем $\text{Род}_{\alpha}(A, B)$. Тогда в силу предложений 8.23, 8.35 и следствия 8.6, (i) найдутся подпути $E \in \text{ППер}_{\alpha}(B, p - 72)$ пути Q' и периодическая основа $R \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, B, 2)$

для E такие, что $\text{Cогл}(P, R)$. Поскольку $\ell_{\alpha, B}(E) > 6$, то можно считать, что $M, s_{B, R}M, \dots, s_{B, R}^6 M \in \mathcal{E}_{\rho(B)}(R, q_2)$ для некоторого M . Так как R и E строго близки в ранге $\rho(B)$ в силу леммы 8.1 и E содержится в Q , то по предложению 6.11 получаем $\text{Cогл}(R, Q)$. Следовательно, имеем $\text{Cогл}(P, Q)$.

8.37. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $A, B \in \mathcal{E}_\alpha$, P есть начало слова A^n , Q есть начало слова B^n , $u, v \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$, $P \stackrel{\alpha-1}{\equiv} uQv$ и $|P| \geq p|A|$, то $A^n \stackrel{\alpha-1}{\equiv} uB^n u^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим пути P и uQv на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ с общими начальной и конечной вершинами, где метки путей P , u , Q и v равны соответственно словам P , u , Q и v . Можно считать, что $\iota(P) = 1$ и Q является началом пути $\bar{Q}$ с $\mathcal{L}(\bar{Q}) \subseteq B^n$. Так как пути P и Q близки в ранге $\alpha - 1$ и $|P| \geq p|A|$, то по предложению 8.36 имеем $\text{Cогл}(P, \bar{Q})$, т.е. $s_{A, P}^t = s_{B, \bar{Q}}^t$ для некоторого $t > 0$. Так как $s_{A, P} = [A]_{\alpha-1}$ и $s_{B, \bar{Q}} = [uBu^{-1}]_{\alpha-1}$, то отсюда следует $A^t \stackrel{\alpha-1}{\equiv} uB^t u^{-1}$. Тогда имеем $[uBu^{-1}]_{\alpha-1} \in \mathcal{N}_{\alpha-1}^+(A)$, и в силу предложения 7.10, (i) $\text{ind}_A([uBu^{-1}]_{\alpha-1}) = 1$. В этом случае по предложению 7.18, (i) $A^n \stackrel{\alpha-1}{\equiv} uB^n u^{-1}$.

8.38. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (i) Пусть $A, B \in \mathcal{E}_\alpha$, $E \in \text{ППер}_\alpha(A, p+34)$ и $P \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$ – периодическая основа для E . Пусть F – путь на $\Gamma_{\alpha-1}$ с $\mathcal{L}(F) \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$, содержащий E , $Q \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, B, 2)$ и F и некоторый подпуть пути Q близки в ранге $\alpha - 1$. Тогда $\text{Cогл}(P, Q)$.

(ii) Если $A, B \in \mathcal{E}_\alpha$, $E \in \text{ППер}_\alpha(A, p+34)$, $F \in \text{ППер}_\alpha(B)$ и E содержится в F , то $\text{ПСогл}_\alpha(E, F)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) По предложению 8.26 для некоторого подпути G пути Q имеем $G \in \text{ППер}_\alpha(A, p)$ и $\text{ПСогл}_\alpha(E, G)$. Пусть $R \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, p)$ – периодическая основа для G . В силу леммы 8.2, (i) и предложения 8.36 имеем $\text{Cогл}(R, Q)$. Так как в силу следствия 8.6, (i) $\text{Cогл}(P, R)$, то отсюда следует $\text{Cогл}(P, Q)$.

Утверждение (ii) вытекает из (i) с учетом леммы 8.2, (ii), при этом в качестве Q нужно взять периодическую основу для F .

8.39. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть X – путь на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ с $\mathcal{L}(X) \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$. Пусть $E_i \in \text{ППер}_\alpha(A_i, q_0)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) – подпути X , где $A_i \in \mathcal{E}_\alpha$ при всех i . Если $\text{ПСогл}_\alpha(E_1, E_3)$, $\text{ПСогл}_\alpha(E_2, E_4)$ и $\neg \text{ПСогл}_\alpha(E_1, E_2)$, то $E_1 <_X E_2 \Leftrightarrow E_3 <_X E_4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда $E_1 = E_3$. В силу предложения 8.38, (ii) истинно ровно одно из отношений $E_1 <_X E_2$ или $E_1 >_X E_2$, и так как $\neg \text{ПСогл}_\alpha(E_1, E_4)$, то истинно ровно одно из отношений $E_1 <_X E_4$ или $E_1 >_X E_4$. Допустим, $E_2 <_X E_1 <_X E_4$. По предложению 8.38, (ii) путь E_4 содержит в качестве подпути путь $F \in \text{ППер}_\alpha(A_2, q_0 - 36)$ такой, что $\text{ПСогл}_\alpha(E_4, F)$. В силу предложения 8.38, (ii) по-прежнему имеем $E_1 <_X F$. Тогда $E_2 \cup_X F$ содержит E_1 в качестве подпути, и, используя предложения 8.11 и 8.38, (ii), получаем $\text{ПСогл}_\alpha(E_1, E_2)$. Противоречие. Таким образом, случай $E_2 <_X E_1 <_X E_4$ невозможен. Аналогично доказывается невозможность случая $E_4 <_X E_1 <_X E_2$. Следовательно, $E_1 <_X E_2 \Leftrightarrow E_1 <_X E_4$.

8.40. ПРЕДЛОЖЕНИЕ ($\alpha \geq 0$). Если $\beta \geq \alpha$, $E \in \mathcal{E}_\alpha(\Gamma_\beta, p+34)$, $F \in \mathcal{E}_\alpha(\Gamma_\beta)$ и E содержится в F , то $\mathcal{E}\text{Согл}_\beta(E, F)$. То же самое верно при $\alpha \geq 1$, если вместо $E \in \mathcal{E}_\alpha(\Gamma_\beta, p+34)$ предполагать, что $E \in \mathcal{E}_\alpha(\Gamma_\beta)$ и E и F порождены одним элементарным периодом $A \in \mathcal{E}_\alpha$ (см. определение 5.16).

В частности, если X – простой путь на графе Γ_β , $E, F \in \mathcal{E}_\alpha(X, p+34)$ и $\neg \mathcal{E}\text{Согл}_\alpha(E, F)$, то либо $E <_X F$, либо $F <_X E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\alpha = 0$ доказывать нечего. При $\alpha \geq 1$ нужно выбрать прообразы $\tilde{E}$ и $\tilde{F}$ на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ путей E и F такие, что $\tilde{E}$ содержится в $\tilde{F}$, и воспользоваться предложениями 8.38, (ii) и 8.9.

8.41. ПРЕДЛОЖЕНИЕ ($\alpha \geq 0$). Пусть $\beta \geq \alpha$, $r \geq p+43$, X – простой путь на графе Γ_β , $E, F \in \mathcal{E}_\alpha(X, r)$ и $\neg \mathcal{E}\text{Согл}_\alpha(E, F)$. Если $E <_X F$, то существует начало $E' \in \mathcal{E}_\alpha(\Gamma_\beta, r-p-35)$ пути E такое, что $\mathcal{E}\text{Согл}_\alpha(E, E')$ и $E' \ll_X F$. Если $E >_X F$, то существует конец $E' \in \mathcal{E}_\alpha(\Gamma_\beta, r-p-35)$ пути E такой, что $\mathcal{E}\text{Согл}_\alpha(E, E')$ и $E' \gg_X F$. При этом если $\alpha \geq 1$ и E и F порождены одним элементарным периодом $A \in \mathcal{E}_\alpha$, то утверждение верно при $r \geq 19$ вместо $r \geq p+43$ и вместо $E' \in \mathcal{E}_\alpha(\Gamma_\beta, r-p-35)$ можно взять $E' \in \mathcal{E}_\alpha(\Gamma_\beta, r-9)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\alpha = 0$ утверждение тривиально. При $\alpha \geq 1$ нужно перейти к прообразу пути X на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ и воспользоваться предложениями 8.38, (ii), 8.9 и 8.14, (i).

8.42. ЛЕММА. Для любого $E \in \mathcal{E}_\alpha(\Gamma_\beta)$ при $\beta \geq \alpha \geq 1$ выполнено $\mathcal{E}\text{Согл}_\alpha(E, E^{-1})$. Если $E, F \in \mathcal{E}_\alpha(\Gamma_\beta)$ и $\mathcal{E}\text{Согл}_\alpha(E, F)$, то $\mathcal{E}\text{Согл}_\alpha(E, F^{-1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение вытекает из определения 5.20. Второе утверждение вытекает из первого в силу следствия 8.7.

8.43. ЛЕММА. Пусть $U_1 E U_2$ и P – пути на графе $\Gamma_{\alpha-1}$, где $\mathcal{L}(U_1 E U_2) \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$, $E \in \text{ППер}_\alpha(A)$ и $P \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$ – периодическая основа для E .

(i) Пусть $P_1 V_1 \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$ – путь, имеющий общую начальную вершину с P , т.е. один из путей P или $P_1 V_1$ является началом другого. Тогда если $|P_1| \geq 20|A|$, то никакая вершина графа $\Gamma_{\alpha-1}$, лежащая на U_1 , не может быть близка в ранге $\alpha-1$ к вершине, лежащей на V_1 .

(ii) Пусть $V_2 P_2 \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$ – путь, имеющий общую конечную вершину с P , т.е. один из путей P или $V_2 P_2$ является концом другого. Тогда если $|P_2| \geq 20|A|$, то никакая вершина графа $\Gamma_{\alpha-1}$, лежащая на U_2 , не может быть близка в ранге $\alpha-1$ к вершине, лежащей на V_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, лемма неверна. Из двух симметричных случаев (i) и (ii) рассмотрим случай (i), когда некоторые вершины $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$, лежащие соответственно на U_1 и на V_1 , близки в ранге $\alpha-1$. Укоротив U_1 и V_1 , можно считать $\mathbf{g} = \iota(U_1)$ и $\mathbf{h} = \tau(V_1)$. В силу леммы 8.2, (ii) вершины $\tau(U_1) = \iota(E)$ и $\iota(P_1 V_1) = \iota(P)$ близки в ранге $\rho(A)$. Тогда по индуктивному предположению 11.9 при $X := U_1^{-1}$ и $Y := P_1 V_1$ имеем $U_1 = W_1 U' W_2$ и $P_1 V_1 = Z_1 P' Z_2$, где пути U'^{-1} и P' близки в ранге $\rho(A)$ и $\mathcal{W}_{\alpha-1}(\mathcal{L}(Z_i)) < 1 + 2\zeta$ ($i = 1, 2$). Так как $\tau(W_2)$ и $\iota(Z_1)$

близки в ранге $\rho(A)$, то пути $(U'W_2)^{-1}$ и Z_1P' также близки в ранге $\rho(A)$. Следовательно, заменяя U' и P' на $U'W_2$ и Z_1P' , можем считать $U_1 = W_1U'$ и $P_1V_1 = P'Z_2$. По предложению 8.22, (ii) $|Z_2| < 16|A|$, следовательно, $|P'| > 4|A|$. Для вывода искомого противоречия рассмотрим два случая.

Случай 1: $\rho(A) = 0$. В силу индуктивного предположения 11.6 существуют близкие в ранге 0 прообразы на графе Γ_0 путей U'^{-1} и P' . Отсюда следует, что слова $\mathcal{L}(U'^{-1})$ и $\mathcal{L}(P')$ близки в ранге 0, т.е. $(\mathcal{L}(U'))^{-1} \stackrel{0}{=} \mathcal{L}(P')$. Так как $\mathcal{L}(U'), \mathcal{L}(P') \in \mathcal{R}_{\alpha-1} \subseteq \mathcal{R}_0$, то $\mathcal{L}(U')$ и $\mathcal{L}(P')$ – несократимые слова. Следовательно, $(\mathcal{L}(U'))^{-1} \stackrel{-}{=} \mathcal{L}(P')$. Аналогично из близости путей P и E в ранге 0 с помощью индуктивного предположения 11.6 выводим $\mathcal{L}(P) \stackrel{-}{=} \mathcal{L}(E)$. Пусть слово $\mathcal{L}(P)$ начинается с буквы $a^\epsilon \in \mathcal{A}^{\pm 1}$. Так как одно из слов $\mathcal{L}(P')$ или $\mathcal{L}(P)$ есть начало другого, то $\mathcal{L}(P')$ также начинается с a^ϵ , и, следовательно, слово $\mathcal{L}(U')$ оканчивается на $a^{-\epsilon}$. Тогда $a^{-\epsilon}a^\epsilon$ входит в $\mathcal{L}(U'E)$. Но это невозможно, так как $\mathcal{L}(U'E)$ – подслово слова $\mathcal{L}(U_1EU_2) \in \mathcal{R}_{\alpha-1} \subseteq \mathcal{R}_0$.

Случай 2: $\rho(A) > 0$. Пусть P и E начинаются соответственно с $K \in \mathcal{E}_{\rho(A)}(P, q_2)$ и $L \in \mathcal{E}_{\rho(A)}(E, q_1)$, где $\mathcal{E}_{\rho(A)}(K, L)$. В силу леммы 7.6 пути $K, s_{A,P}K$ и $s_{A,P}^2K$ содержатся в P' . Тогда в силу леммы 6.7 и индуктивного предположения 11.23 найдется $L' \in \mathcal{E}_{\rho(A)}(U'^{-1}, q_2 - h)$ такой, что $\mathcal{E}_{\text{Cогл}_{\rho(A)}}(s_{A,P}K, L')$. Так как $\mathcal{E}_{\text{Cогл}_{\rho(A)}}(L', L'^{-1})$ в силу леммы 8.42, то мы получили $\mathcal{E}_{\text{Cогл}_{\rho(A)}}(s_{A,P}K, L'^{-1})$ и $L'^{-1} \ll_{U_1EU_2} L$. Но это невозможно в силу индуктивного предположения 11.27 (случай (i)), где в качестве X и Y нуно взять соответственно U_1EU_2 и максимальный из путей P и P_1V_1 .

8.44. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (i) Если $A, B \in \mathcal{E}_\alpha$, слова $P \in \text{Пер}(A, t)$ и $Q \in \text{Пер}(B)$ близки в ранге $\alpha - 1$ и $t \geq p$, то $|Q| > (t - 44)|B|$.

(ii) Если $B \in \mathcal{E}_\alpha$, слова $X \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ и $Q \in \text{Пер}(B)$ близки в ранге $\alpha - 1$ и в слово X входит элементарная t -степень ранга α при $t \geq p + 34$, то $|Q| > (t - 78)|B|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Рассмотрим близкие в ранге $\alpha - 1$ пути $P \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, t)$ и $Q \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, B)$ с $\mathcal{L}(P) \stackrel{-}{=} P$ и $\mathcal{L}(Q) \stackrel{-}{=} Q$. Допустим, $|Q| \leq (t - 44)|B|$. Пусть $\bar{Q} \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, B, 2)$ – произвольный путь, содержащий Q в качестве подпути. По предложению 8.36 имеем $\text{Cогл}(P, \bar{Q})$. По лемме 8.4 имеем $K, s_{A,P}K, \dots, s_{A,P}^{t-2}K \in \mathcal{E}_{\rho(A)}(P, q_2)$ для некоторого K , где $|K| \leq |A|$. Используя предложение 7.7 и лемму 8.2, (iii), удлинив при этом $\bar{Q}$, найдем $L_0 \in \mathcal{E}_{\rho(A)}(\bar{Q}, q_2 - h)$ такой, что $\mathcal{E}_{\text{Cогл}_{\rho(A)}}(s_{A,P}K, L_0)$. По лемме 7.21 имеем $\mathcal{E}_{\text{Cогл}_{\rho(A)}}(s_{A,P}^iK, s_{B,\bar{Q}}^iL)$ при всех i , где $L \Rightarrow s_{B,\bar{Q}}^{-1}L_0$. Снова удлинив $\bar{Q}$, можно считать, что пути $s_{B,\bar{Q}}^iL$ содержатся в $\bar{Q}$ при $i = 0, 1, \dots, t - 2$, а укоротив L в силу леммы 7.6, вместо $L \in \mathcal{E}_{\rho(A)}(\bar{Q}, q_2 - h)$ получим $L \in \mathcal{E}_{\rho(A)}(\bar{Q}, q_2 - h - 9)$ и $|L| \leq |B|$. Пусть $P = U_0P_1U_1P_2U_2$ и $\bar{Q} = V_0E_1V_1E_2V_2$, где $P_1 \Rightarrow K \cup_P s_{A,P}^{20}K$, $P_2 \Rightarrow s_{A,P}^{t-22}K \cup_P s_{A,P}^{t-2}K$, $E_1 \Rightarrow L \cup_{\bar{Q}} s_{B,\bar{Q}}^{20}L$ и $E_2 \Rightarrow s_{B,\bar{Q}}^{t-22}L \cup_{\bar{Q}} s_{B,\bar{Q}}^{t-2}L$. Согласно определению 5.16 $E_i \in \Pi\text{Пер}_\alpha(A)$ и P_i – периодическая основа для E_i . Так как $|Q| \leq (t - 44)|B|$ и $|V_1| \geq |s_{B,\bar{Q}}^{21}L \cup_P s_{B,\bar{Q}}^{t-23}L| \geq (t - 44)|B|$, то либо вершина $\iota(Q)$ лежит на пути $V_1E_2V_2$, либо вершина $\tau(Q)$ лежит

на пути $V_0 E_1 V_1$. Но в каждом из этих случаев мы получаем противоречие с леммой 8.43 соответственно при $(U_1 E U_2, E, P, P_2, V_2) := (E_1 V_1 E_2 V_2, E_1, P_1, P_1, U_0)$ и $(U_1 E U_2, E, P, P_1, V_1) := (V_0 E_1 V_1 E_2, E_2, P_2, P_2, U_2)$. Следовательно, $|Q| > (t - 44)|B|$.

(ii) Пусть X и Q – близкие в ранге $\alpha - 1$ пути на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ с $\mathcal{L}(X) \supseteq X$ и $\mathcal{L}(Q) \supseteq Q$. По условию X содержит в качестве подпути путь $E \in \text{ППер}_\alpha(A, t)$, где $A \in \mathcal{E}_\alpha$ и $t \geq p + 34$. В силу предложения 8.26 имеем $F \in \text{ППер}_\alpha(A, t - 34)$ для некоторого подпути пути Q . Пусть $P \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, t - 34)$ – периодическая основа для F . Тогда в силу леммы 8.2, (ii) и доказанного утверждения (i) $|Q| \geq |F| \geq (t - 78)|B|$.

8.45. ПРЕДЛОЖЕНИЕ ($\alpha \geq 0$). Если $\beta \geq \alpha$, $E, F \in \mathcal{E}_\alpha(\Gamma_\beta)$ и $\mathcal{E}\text{Согл}_\alpha(E, F)$, то пути E и F близки в ранге α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\alpha = 0$ утверждение вытекает из определений 5.14 и 7.4. Пусть $\alpha \geq 1$. В силу полной аналогии ограничимся доказательством утверждения о том, что начальные вершины $\mathbf{g} \Leftarrow \iota(E)$ и $\mathbf{h} \Leftarrow \iota(F)$ путей E и F близки в ранге α . Согласно определению 5.20 существуют прообразы $\bar{E}$ и $\bar{F}$ на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ путей E и F такие, что $\text{ПСогл}_\alpha(\bar{E}, \bar{F}^\epsilon)$, $\epsilon = \pm 1$. Тогда $\mathbf{g} = \pi_{\alpha-1, \beta}(\bar{\mathbf{g}})$ и $\mathbf{h} = \pi_{\alpha-1, \beta}(\bar{\mathbf{h}})$, где $\bar{\mathbf{g}} \Leftarrow \iota(\bar{E})$ и $\bar{\mathbf{h}} \Leftarrow \iota(\bar{F})$. Пусть $P \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$ и $Q \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, B, 2)$ – периодические основы для $\bar{E}$ и $\bar{F}$ соответственно, где $A, B \in \mathcal{E}_\alpha$ и $\text{Согл}(P, Q^\epsilon)$. В силу леммы 8.2, (ii) вершины $\bar{\mathbf{g}}$ и $\iota(P)$ близки в ранге $\alpha - 1$, т.е. соединены некоторым путем u с $\mathcal{L}(u) \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$. Пусть $K \in \mathcal{E}_{\rho(B)}(Q, q_2)$ и $L \in \mathcal{E}_{\rho(B)}(\bar{F}, q_1)$ – начала соответственно Q и $\bar{F}$, где $\mathcal{E}\text{Согл}_{\rho(B)}(K, L)$. По предложению 7.7 найдем строго близкие в ранге $\rho(B)$ периодические продолжения $\tilde{Q}$ и $\tilde{P}$ для Q^ϵ и P . В силу леммы 8.2, (iii) для некоторого $M \in \mathcal{E}_{\rho(B)}(\tilde{P}, q_1)$ выполнено $\mathcal{E}\text{Согл}_{\rho(B)}(K^\epsilon, M)$. Тогда имеем $\mathcal{E}\text{Согл}_{\rho(B)}(M^\epsilon, L)$, и по индуктивному предположению вершины $\iota(M^\epsilon)$ и $\iota(L) = \bar{\mathbf{h}}$ соединены некоторым путем v с $\mathcal{L}(v) \in \mathcal{H}_{\rho(B)} \subseteq \mathcal{H}_{\alpha-1}$. Так как вершины $\iota(P)$ и $\iota(M^\epsilon)$ лежат на $\tilde{P}$, то $\iota(P)$ и $\iota(M^\epsilon)$ соединены путем R , входящим в качестве подпути в $\tilde{P}$ или в $\tilde{P}^{-1}$. Мы имеем, таким образом, путь $X \Leftarrow uRv$, соединяющий $\bar{\mathbf{g}}$ и $\bar{\mathbf{h}}$, где $\mathcal{L}(u), \mathcal{L}(v) \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$ и $\mathcal{L}(R) \in \text{Пер}(A) \cup \text{Пер}(A^{-1})$. Тогда путь $\pi_{\alpha-1, \beta}(X)$ соединяет вершины $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$. Так как $A^n \stackrel{\beta}{=} 1$, то $\mathcal{L}(R) \stackrel{\beta}{=} R$ для некоторого $R \in \text{Пер}(A) \cup \text{Пер}(A^{-1})$ при $|R| < n|A|$. В таком случае $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$ соединены также путем X' с $\mathcal{L}(X') \supseteq \mathcal{L}(u)R\mathcal{L}(v) \in \mathcal{H}_\alpha$, что и требовалось доказать.

8.46. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $E \in \text{ППер}_\alpha(A, 44)$ и $F \in \text{ППер}_\alpha(B, 44)$ – подпути пути X с $\mathcal{L}(X) \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$, то $\neg \text{ПСогл}_\alpha(E, F^{-1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, $\text{ПСогл}_\alpha(E, F^{-1})$. Тогда в силу леммы 7.22 и предложения 8.35 найдется подпути $G \in \text{ППер}_\alpha(A^{-1}, 8)$ пути F такой, что $\text{ПСогл}_\alpha(F, G)$, и, следовательно, $\text{ПСогл}_\alpha(E, G^{-1})$. В силу предложения 8.10, (i) найдутся периодические основы $P \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$ и $Q \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A^{-1}, 2)$ для E и F такие, что P и Q^{-1} имеют общее периодическое продолжение R , и мы приходим к противоречию с определением 5.16 и индуктивным предположением 11.27 при $X := X$ и $Y := R$.

§ 9. Диаграммы с разбиением границы

В этом параграфе мы рассмотрим некоторый специальный класс диаграмм ван Кампена над заданиями групп $\mathbf{B}_\beta$, а также введем ряд понятий, которые будут использоваться для анализа таких диаграмм в § 10. Отметим, что утверждения этого параграфа носят общий характер и не используют совместную индукцию.

Напомним, что мы имеем дело с бесконечной последовательностью групп $\mathbf{B}_\beta$, определяемых заданиями

$$\mathcal{P}_\beta = \langle \mathcal{A} \mid A^n = 1 \quad (A \in \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \dots \cup \mathcal{E}_\beta) \rangle.$$

Произвольную диаграмму над заданием $\mathcal{P}_\beta$ будем называть *диаграммой ранга β* .

Очевидно, всякая диаграмма ранга β является диаграммой ранга γ при любом $\gamma > \beta$.

Если A – область диаграммы Δ ранга β , то согласно определению из § 4 имеем либо $\mathcal{L}(\delta A) \subseteq 1$, либо $\mathcal{L}(\delta A) \subseteq a^\epsilon a^{-\epsilon}$, где a^ϵ – буква алфавита $\mathcal{A}^{\pm 1}$, либо $\mathcal{L}(\delta A) \approx A^n$ для некоторого $A \in \mathcal{E}_\gamma$ при $\gamma \leq \beta$. В первых двух случаях A назовем *областью ранга 0*, а в случае, если $\mathcal{L}(\delta A) \approx A^n$ при $A \in \mathcal{E}_\gamma$, – *областью ранга γ диаграммы Δ* . Будем формально считать, что каждой области A диаграммы ранга β приписано единственное значение ее ранга γ . (Из лемм 6.7 и 5.10 следует, что для любых $\beta_1 < \beta_2 \leq \alpha$ если $A \in \mathcal{E}_{\beta_2}$, то $[A]_{\beta_1}^n \neq 1$. Так как $[A]_{\beta_1}^n = 1$ при $A \in \mathcal{E}_{\beta_1}$, то на самом деле ранг каждой области диаграммы ранга, не превосходящего α , определяется единственным образом.) Множество всех областей ранга γ диаграммы Δ обозначим через $\mathbf{R}_\gamma(\Delta)$.

Если Δ – диаграмма ранга $\beta \geq 1$, то через $\Delta^{\beta-1}$ будем обозначать поддиаграмму ранга $\beta - 1$ диаграммы Δ , полученную из Δ удалением всех областей ранга β . Очевидно, имеет место формула

$$\chi(\Delta^{\beta-1}) = \chi(\Delta) - \#\mathbf{R}_\beta(\Delta). \quad (9.1)$$

Диаграмму Δ ранга β будем называть *неособой в ранге $\beta - 1$* , если $\Delta^{\beta-1}$ – неособая диаграмма. Очевидно, если Δ – неособая в ранге $\beta - 1$ диаграмма ранга β , то сама диаграмма Δ является неособой.

Мы будем рассматривать диаграммы Δ ранга β , для каждого граничного цикла которых фиксировано разложение в виде циклического произведения $X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_r$ непустых путей X_i , разбитых на несколько типов. Сомножители X_i будем называть *участками границы* диаграммы Δ . В качестве участков границы допускаются и сами граничные циклы диаграммы Δ , в этом случае будем говорить о *циклических* участках границы диаграммы Δ . Введем два специальных типа диаграмм ранга β с разбиением границы указанного вида.

9.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Диаграммой ранга β с разбиением границы типа A* (или, сокращенно, *A -диаграммой ранга β*) назовем неособую диаграмму Δ ранга β , участки границы которой разбиты на два непересекающихся подмножества $\mathcal{X}_\beta(\Delta)$ и $\mathcal{Y}_\beta(\Delta)$ так, что выполнены следующие условия:

- (i) каждый граничный цикл C диаграммы Δ либо принадлежит $\mathcal{X}_\beta(\Delta)$ либо есть циклическое произведение чередующихся путей из множеств $\mathcal{X}_\beta(\Delta)$ и $\mathcal{Y}_\beta(\Delta)$;
- (ii) если $S \in \mathcal{X}_\beta(\Delta)$, то слово $\mathcal{L}(S)$ приведено в ранге β или циклически приведено в ранге β соответственно в случаях, когда S – нециклический или циклический участок границы диаграммы Δ (напомним, что согласно определению 5.7 слово X циклически приведено в ранге β тогда и только тогда, когда любой циклический сдвиг слова X есть приведенное в ранге β слово);
- (iii) для любого $u \in \mathcal{Y}_\beta(\Delta)$ выполнено $\mathcal{L}(u) \in \mathcal{H}_\beta$.

9.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Диаграммой ранга $\beta \geq 1$ с разбиением границы типа B* (сокращенно, *B -диаграммой ранга β*) назовем неособую в ранге $\beta - 1$ диаграмму Δ ранга β , участки границы которой разбиты на три непересекающихся подмножества $\mathcal{X}_\beta(\Delta)$, $\mathcal{Y}_{\beta-1}(\Delta)$ и $\mathcal{Z}_\beta(\Delta)$ так, что выполнены условия:

- (i) каждый граничный цикл C диаграммы Δ либо принадлежит $\mathcal{X}_\beta(\Delta)$, либо имеет вид $C \approx S_1 u_1 S_2 u_2 \dots S_r u_r$, где $S_i \in \mathcal{X}_\beta(\Delta) \cup \mathcal{Z}_\beta(\Delta)$, $u_i \in \mathcal{Y}_{\beta-1}(\Delta)$ и никакие S_i, S_{i+1} ($i \bmod r$) не лежат одновременно в $\mathcal{Z}_\beta(\Delta)$;
- (ii) если $S \in \mathcal{X}_\beta(\Delta)$, то слово $\mathcal{L}(S)$ приведено в ранге β или циклически приведено в ранге β соответственно в случаях, когда S – нециклический или циклический участок границы диаграммы Δ ;
- (iii) для любого $u \in \mathcal{Y}_{\beta-1}(\Delta)$ выполнено $\mathcal{L}(u) \in \mathcal{H}_{\beta-1}$;
- (iv) для любого $S \in \mathcal{Z}_\beta(\Delta)$ слово $\mathcal{L}(S)$ есть подслово слова A^n при некотором $A \in \mathcal{E}_\beta$.

Участки границы $S \in \mathcal{X}_\beta(\Delta)$ будем называть *главными участками границы ранга β* A -диаграммы или B -диаграммы Δ ранга β . Заметим, что только главные участки границы ранга β A -диаграммы или B -диаграммы Δ ранга β могут быть циклическими участками ее границы.

Из определений 9.1 и 9.2 видно, что задание одного из множеств $\mathcal{X}_\beta(\Delta)$ или $\mathcal{Y}_\beta(\Delta)$ полностью определяет разбиение границы типа A на диаграмме Δ , а задание любых двух из множеств $\mathcal{X}_\beta(\Delta)$, $\mathcal{Y}_{\beta-1}(\Delta)$ или $\mathcal{Z}_\beta(\Delta)$ полностью определяет разбиение границы типа B .

В дальнейшем A -диаграммы и B -диаграммы ранга β естественным образом будут возникать при рассмотрении соотношений в группе $\mathbf{B}_\beta$. Приведем типичный пример. Пусть $X, Y \in \mathcal{R}_\beta$, $u, v \in \mathcal{H}_\beta$, слово Z циклически приведено в ранге β и слова $XuYv$ и Z сопряжены в группе $\mathbf{B}_\beta$. По предложению 4.1 существует кольцевая диаграмма Δ ранга β с граничными циклами $XuYv$ и Z^{-1} , где метки слов X, u, Y, Y и Z равны соответственно словам X, u, Y, v и Z . В силу п. 4.5 можно считать, что пути X, u, Y и Y непусты. Тогда согласно определению 9.1 Δ есть A -диаграмма ранга β , для которой $\mathcal{X}_\beta(\Delta) \Leftarrow \{X, Y, Z^{-1}\}$ и $\mathcal{Y}_\beta(\Delta) \Leftarrow \{u, v\}$. Аналогичным образом будут вводиться в рассмотрение B -диаграммы ранга β , при этом нужно лишь дополнительно произвести окаймление границы каждой области ранга β , как описано в п. 4.8, чтобы диаграмма стала неособой в ранге $\beta - 1$.

9.3. Каждую B -диаграмму ранга β можно рассматривать как A -диаграмму ранга β с тем же самым множеством $\mathcal{X}_\beta(\Delta)$ и множеством $\mathcal{Y}_\beta(\Delta)$, состоящим из

путей $u \in \mathcal{Y}_{\beta-1}(\Delta)$, для которых соседние участки границы из $\mathcal{X}_{\beta}(\Delta) \cup \mathcal{Z}_{\beta}(\Delta)$ лежат в $\mathcal{X}_{\beta}(\Delta)$, и путей вида vPw , где $v, w \in \mathcal{Y}_{\beta-1}(\Delta)$ и $P \in \mathcal{Z}_{\beta}(\Delta)$ (тот факт, что метки этих путей лежат в $\mathcal{H}_{\beta}$, вытекает из включения $\mathcal{H}_{\beta-1} \subseteq \mathcal{H}_{\beta}$ и определения 5.8). В дальнейшем каждая B -диаграмма Δ ранга β будет одновременно рассматриваться и как A -диаграмма ранга β с указанным разбиением границы. В частности, обозначение $\mathcal{Y}_{\beta}(\Delta)$ теперь имеет смысл и в случае, когда Δ есть B -диаграмма ранга β .

Обратно, пусть Δ есть A -диаграмма ранга $\beta \geq 1$ и $\mathcal{Y}_{\beta}(\Delta) = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$. Предположим, для каждого слова $\mathcal{L}(u_i)$ фиксировано некоторое разложение вида $\mathcal{L}(u_i) \sqsubseteq v_i P_i w_i$, где $v_i, w_i \in \mathcal{H}_{\beta-1}$ и $\mathcal{L}(P_i)$ есть подслово слова A_i^n для некоторого $A_i \in \mathcal{E}_{\beta}$ (хотя бы одно такое разложение слова $\mathcal{L}(u_i)$ существует в силу условия (iii) определения 9.1). Тогда, выполнив измельчение диаграммы Δ согласно п. 4.5, можно считать, что каждый путь u_i имеет вид $u_i = v_i P_i w_i$, где v_i, P_i и w_i – непустые пути с метками соответственно v_i, P_i и w_i . Кроме того, произведя окаймление границы каждой области ранга β диаграммы Δ , как описано в п. 4.8, можно считать, что Δ – неособая в ранге $\beta - 1$ диаграмма. Полагая $\mathcal{Y}_{\beta-1}(\Delta) = \{v_1, w_1, \dots, v_k, w_k\}$ и $\mathcal{Z}_{\beta}(\Delta) = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$, мы удовлетворим всем условиям определения 9.2, и, таким образом, Δ является B -диаграммой ранга β .

Так как $\text{Пер}(A) \subseteq \mathcal{R}_{\beta}$ при $A \in \mathcal{E}_{\beta}$ в силу определения 5.2, то для любой B -диаграммы Δ ранга β ее поддиаграмму $\Delta^{\beta-1}$ можно рассматривать как A -диаграмму ранга $\beta - 1$, для которой

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{\beta-1}(\Delta^{\beta-1}) &= \mathcal{X}_{\beta}(\Delta) \cup \mathcal{Z}_{\beta}(\Delta) \cup \{\delta A \mid A \in \mathcal{R}_{\beta}(\Delta)\}, \\ \mathcal{Y}_{\beta-1}(\Delta^{\beta-1}) &= \mathcal{Y}_{\beta-1}(\Delta). \end{aligned} \quad (9.2)$$

В частности, имеем

$$\#\mathcal{Y}_{\beta}(\Delta) \leq \#\mathcal{Y}_{\beta-1}(\Delta^{\beta-1}) \leq 2 \#\mathcal{Y}_{\beta}(\Delta). \quad (9.3)$$

9.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть Δ и Δ' – диаграммы ранга β и $\gamma \leq \beta$. Будем говорить, что Δ' получена из Δ *внутренним преобразованием ранга γ* , если имеет место один из следующих трех случаев:

- (i) Δ' есть результат измельчения диаграммы Δ ;
- (ii) Δ' есть результат замены дисковой поддиаграммы Θ ранга γ диаграммы Δ на некоторую дисковую диаграмму Θ' ранга γ ;
- (iii) Δ' есть результат замены кольцевой поддиаграммы Θ ранга γ диаграммы Δ на некоторую кольцевую диаграмму Θ' ранга γ , где поддиаграмма Θ удовлетворяет следующему ограничению: для каждого из двух ее граничных циклов C_1 и C_2 элемент $[\mathcal{L}(C_i)]_{\gamma}$ имеет конечный порядок.

Из определения непосредственно вытекает, что внутренние преобразования ранга γ являются внутренними преобразованиями ранга γ' при $\gamma' > \gamma$.

При внутренних преобразованиях диаграмм естественным образом наследуется разбиение границы диаграммы (см. § 4). Таким образом, мы можем рассматривать внутренние преобразования ранга γ A -диаграмм или B -диаграмм ранга β .

Внутренние преобразования ранга γ не изменяют набор слов, являющихся метками участков границы A -диаграммы или B -диаграммы Δ ранга β . В большинстве случаев при рассмотрении A -диаграмм или B -диаграмм ранга β нас будет интересовать только указанный набор слов, и в этих случаях от диаграммы Δ всегда можно перейти к диаграмме, полученной из нее некоторым внутренним преобразованием ранга β .

Заметим также, что при внутренних преобразованиях ранга $\gamma \leq \beta - 1$ не изменяется число областей ранга β диаграммы Δ .

9.5. ЗАМЕЧАНИЕ. (i) Если Θ – поддиаграмма диаграммы Δ , то любую последовательность $\Theta \rightarrow \dots \rightarrow \Theta^*$ внутренних преобразований ранга γ диаграммы Θ естественным образом можно рассматривать как последовательность $\Delta \rightarrow \dots \rightarrow \Delta^*$ внутренних преобразований ранга γ диаграммы Δ . При этом, очевидно, диаграмма $\Delta^* - \Theta^*$ есть результат измельчения диаграммы $\Delta - \Theta$ (на самом деле $\Delta^* - \Theta^*$ получается из $\Delta - \Theta$ добавлением некоторого множества вершин, лежащих на границе Θ).

(ii) Если $\Delta \rightarrow \dots \rightarrow \Delta^*$ – последовательность внутренних преобразований ранга γ и диаграмма Δ' есть результат измельчения диаграммы Δ , то, как легко следует из леммы 4.4 и 4.7, с точностью до изотопной деформации диаграмм Δ^* и Δ' , оставляющей неподвижной границу диаграммы Δ , существует диаграмма $\Delta^{*'}$, которая одновременно является результатом измельчения диаграммы Δ^* и результатом применения некоторой последовательности внутренних преобразований ранга γ к диаграмме Δ' .

9.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть Δ – B -диаграмма ранга β , и пусть $S \in \mathcal{Z}_\beta(\Delta)$, где $\mathcal{L}(S)$ – подслово слова A^n при $A \in \mathcal{E}_\beta$. Предположим, что $|\mathcal{L}(S)| \geq 2|A|$. Рассмотрим диаграмму Δ' ранга β , полученную добавлением к Δ новой области A ранга β , для которой $\partial A \cap \Delta = \text{supp } S$ и $\delta A \approx SS'^{-1}$, где слово $\mathcal{L}(S')$ удовлетворяет равенству $\mathcal{L}(S)(\mathcal{L}(S'))^{-1} \approx A^n$ (см. рис. 10).

Определим на Δ' разбиение границы типа B , полагая

$$\mathcal{X}_\beta(\Delta') = \mathcal{X}_\beta(\Delta), \quad \mathcal{Y}_{\beta-1}(\Delta') = \mathcal{Y}_{\beta-1}(\Delta), \quad \mathcal{Z}_\beta(\Delta') = (\mathcal{Z}_\beta(\Delta) \setminus \{S\}) \cup \{S'\}.$$

B -диаграмму Δ' ранга β будем называть *результатом добавления области ранга β к диаграмме Δ вдоль участка границы S* .

Условимся считать, что эта операция неприменима, если для некоторого $A \in \mathcal{E}_\beta$ выполнено $\mathcal{L}(S) \in \text{Пер}(A)$ и $|\mathcal{L}(S)| < 2|A|$.

9.7. ЗАМЕЧАНИЕ. В отличие от внутренних преобразований ранга γ , операция добавления области вдоль S изменяет слово $\mathcal{L}(S)$. При этом на новой B -диаграмме Δ' ранга β вместо S возникает новый участок границы S' такой, что

Рис. 10

$\mathcal{L}(S)(\mathcal{L}(S'))^{-1} \approx A^n$, где $A \in \mathcal{E}_\beta$. Так как по условию определения 9.6 имеем $|\mathcal{L}(S)| \geq 2|A|$, то из леммы 2.1, (ii), (iii) следует, что слово $\mathcal{L}(S')$ определено единственным образом. Если теперь к Δ' снова применима операция присоединения области вдоль S' (для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $|\mathcal{L}(S')| \geq 2|A|$), то легко видеть, что для нового участка границы S'' новой диаграммы Δ'' будем иметь $\mathcal{L}(S'') \sqsubseteq \mathcal{L}(S)$. Отсюда следует, что если B -диаграмма Δ^* ранга β получена из B -диаграммы Δ ранга β некоторой последовательностью преобразований, состоящей из внутренних преобразований ранга β и добавлений областей ранга β , то для каждого участка границы $S \in \mathcal{Z}_\beta(\Delta)$ диаграммы Δ и соответствующего ему участка границы $S^* \in \mathcal{Z}_\beta(\Delta^*)$ диаграммы Δ^* имеем либо $\mathcal{L}(S^*) \sqsubseteq \mathcal{L}(S)$, либо $\mathcal{L}(S)(\mathcal{L}(S^*))^{-1} \approx A^n$, где $|\mathcal{L}(S)| \geq 2|A|$. В частности, если для некоторого $A \in \mathcal{E}_\beta$ выполнено $\mathcal{L}(S) \in \text{Пер}(A)$ и $|\mathcal{L}(S)| < 2|A|$, то $\mathcal{L}(S^*) \sqsubseteq \mathcal{L}(S)$.

9.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть Δ – B -диаграмма ранга β .

Будем говорить, что области $A, B \in \mathbf{R}_\beta(\Delta)$ образуют *сократимую пару областей ранга β* , если для некоторой дисковой поддиаграммы Θ диаграммы Δ выполнено $\mathbf{R}_\beta(\Theta) = \{A, B\}$ и $\mathcal{L}(\delta\Theta) \stackrel{\beta-1}{=} 1$.

Область $A \in \mathbf{R}_\beta(\Delta)$ назовем *свернутой областью ранга β* , если существует кольцевая поддиаграмма Θ диаграммы Δ с граничными циклами C_1 и C_2 такая, что $\mathbf{R}_\beta(\Theta) = \{A\}$, слова $\mathcal{L}(C_1)$ и $(\mathcal{L}(C_2))^{-1}$ сопряжены в группе $\mathbf{B}_{\beta-1}$ и элементы $[\mathcal{L}(C_i)]_{\beta-1}$ ($i = 1, 2$) имеют конечный порядок.

Пусть $A \in \mathbf{R}_\beta(\Delta)$, $S \in \mathcal{Z}_\beta(\Delta)$ и $\mathcal{L}(S)$ – подслово слова A^n , где $A \in \mathcal{E}_\beta$. Будем говорить, что A и S образуют *граничную сократимую пару ранга β* , если существует дисковая поддиаграмма Θ диаграммы Δ такая, что $\mathbf{R}_\beta(\Theta) = \{A\}$, $\delta\Theta \approx QR$ для некоторого подпути Q пути S , $|\mathcal{L}(Q)| \geq 2|A|$ и $\mathcal{L}(R) \stackrel{\beta-1}{=} X$, где слово X определяется равенством $\mathcal{L}(Q)X \approx A^n$ (см. рис. 11).

B-диаграмму Δ ранга β назовем *приведенной*, если никакая B -диаграмма Δ' ранга β , полученная из Δ последовательностью внутренних преобразований ранга $\beta - 1$, не имеет сократимых пар областей ранга β , свернутых областей ранга β

Рис. 11

и граничных сократимых пар ранга β .

9.9. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Любую B -диаграмму Δ ранга β с помощью внутренних преобразований ранга β и добавлений областей ранга β можно перевести в приведенную B -диаграмму Δ' ранга β . При этом если сама Δ не является приведенной, то $\#R_\beta(\Delta') < \#R_\beta(\Delta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, Δ не является приведенной B -диаграммой ранга β . В силу очевидной индукции диаграмму Δ с помощью преобразований указанного в предложении вида достаточно перевести в некоторую B -диаграмму Δ' ранга β с условием $\#R_\beta(\Delta') < \#R_\beta(\Delta)$. Применяя к Δ последовательность внутренних преобразований ранга $\beta - 1$, можно считать, что Δ имеет либо сократимую пару областей ранга β , либо свернутую область ранга β , либо граничную сократимую пару ранга β . Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно.

Случай 1: Δ имеет сократимую пару областей ранга β , т.е. найдутся области $A, B \in R_\beta(\Delta)$ и дисковая поддиаграмма Θ диаграммы Δ такие, что $R_\beta(\Theta) = \{A, B\}$ и $\mathcal{L}(\delta\Theta)^{\beta-1} = 1$. По предложению 4.1, (i) существует дисковая диаграмма Θ' ранга $\beta - 1$, для которой $\mathcal{L}(\delta\Theta) \approx \mathcal{L}(\delta\Theta')$. Тогда, заменяя поддиаграмму Θ диаграммы Δ на Θ' , как описано в п. 4.7, получим новую B -диаграмму Δ' ранга β , для которой $\#R_\beta(\Delta') = \#R_\beta(\Delta) - 2$.

Случай 2: Δ содержит свернутую область A ранга β , т.е. найдется кольцевая поддиаграмма Θ диаграммы Δ с граничными циклами C_1 и C_2 такая, что $R_\beta(\Theta) = \{A\}$, слова $\mathcal{L}(C_1)$ и $(\mathcal{L}(C_2))^{-1}$ сопряжены в группе $B_{\beta-1}$ и элементы $[\mathcal{L}(C_i)]_{\beta-1}$ ($i = 1, 2$) имеют конечный порядок. Можно считать, что C_1 есть внешний граничный цикл поддиаграммы Θ . По предложению 4.1, (ii) найдется кольцевая диаграмма Θ' ранга $\beta - 1$ с внешним граничным циклом C'_1 и внутренним граничным циклом C'_2 такая, что $\mathcal{L}(C_i) \approx \mathcal{L}(C'_i)$ ($i = 1, 2$). Тогда, заменяя поддиаграмму Θ диаграммы Δ на Θ' аналогично случаю 1, получим B -диаграмму Δ' ранга β с $\#R_\beta(\Delta') = \#R_\beta(\Delta) - 1$.

Случай 3: Δ имеет граничную сократимую пару ранга β , т.е. найдутся область $A \in R_\beta(\Delta)$, участок границы $S \in \mathcal{Z}_\beta(\Delta)$ и дисковая поддиаграмма Θ диаграммы Δ

такие, что $\mathbf{R}_\beta(\Theta) = \{A\}$, $\delta\Theta \approx QR$ для некоторого подпути Q пути S , $|\mathcal{L}(Q)| \geq 2|A|$ и $\mathcal{L}(R) \stackrel{\beta-1}{=} X$, где $\mathcal{L}(S)$ есть подслово слова A^n , $A \in \mathcal{E}_\beta$ и слово X определяется равенством $\mathcal{L}(Q)X \approx A^n$. Пусть Δ_1 есть результат добавления к Δ области B ранга β вдоль S . Пусть $S = UQV$ и $\delta B \approx SS'^{-1}$ (см. рис. 12).

Рис. 12

Рассмотрим дисковую поддиаграмму Θ_1 диаграммы Δ_1 с граничным циклом $\delta\Theta_1 \approx RU^{-1}S'V^{-1}$, полученную объединением поддиаграммы Θ и области B . По лемме 2.1, (ii), (iii) имеем $\mathcal{L}(VS'^{-1}U) \stackrel{\beta-1}{=} X \stackrel{\beta-1}{=} \mathcal{L}(R)$, следовательно, $\mathcal{L}(\delta\Theta_1) \stackrel{\beta-1}{=} 1$. Тогда A и B образуют сократимую пару областей ранга β на Δ_1 . Повторяя далее рассуждения из случая 1 для Δ_1 вместо Δ , получим B -диаграмму Δ' ранга β , которая является искомой так как $\#\mathbf{R}_\beta(\Delta') = \#\mathbf{R}_\beta(\Delta_1) - 2 = \#\mathbf{R}_\beta(\Delta) - 1$.

9.10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ (ср. [7]). *Связкой ранга β на A -диаграмме Δ ранга β назовем путь x на Δ , удовлетворяющий следующим условиям:*

- (i) x – простой непустой путь, имеющий ровно две вершины $\iota(x)$ и $\tau(x)$ в пересечении с границей диаграммы Δ ;
- (ii) если $a \in \{\iota(x), \tau(x)\}$, то a лежит на некотором главном участке S ранга β диаграммы Δ , причем если S – нециклический участок границы, то $a \neq \iota(S), \tau(S)$;
- (iii) $\mathcal{L}(x) \in \mathcal{H}_\beta$.

9.11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Связку x ранга β на A -диаграмме Δ ранга β назовем *вырожденной* в следующих двух случаях:

- (i) путь x или x^{-1} гомотопен некоторому подпути участка границы $S \in \mathcal{X}_\beta(\Delta)$;
- (ii) путь x или x^{-1} гомотопен пути вида PuQ , где P есть конец некоторого пути $R \in \mathcal{X}_\beta(\Delta)$, Q есть начало некоторого пути $S \in \mathcal{X}_\beta(\Delta)$, $u \in \mathcal{Y}_\beta(\Delta)$ и $\mathcal{L}(P) \stackrel{\beta-1}{=} \mathcal{L}(Q) \stackrel{\beta-1}{=} 1$.

9.12. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. A -диаграмму Δ ранга β назовем *простой*, если никакая A -диаграмма Δ' ранга β , полученная из Δ последовательностью внутренних преобразований ранга β , не имеет невырожденных связок ранга β .

9.13. ОПРЕДЕЛЕНИЕ (ср. [7]). Пусть Δ – A -диаграмма ранга β . *Поддиаграммой примыкания ранга β* главных участков R и S ранга β диаграммы Δ назовем дисковую поддиаграмму Π диаграммы Δ с граничным циклом вида $PuQv$, где пути P и Q непусты и входят в качестве подпутей соответственно в R и S , а каждый из путей u, v либо лежит в $\mathcal{Y}_\beta(\Delta)$, либо является невырожденной связкой ранга β на Δ . Пути P и Q будем называть *участками примыкания* поддиаграммы примыкания Π .

Из определений 9.13, 5.9, условий (iii) определений 9.1, 9.10 и предложения 4.1, (i) непосредственно вытекает

9.14. ЛЕММА. *Если P и Q – участки примыкания поддиаграммы примыкания Π ранга β , то слова $\mathcal{L}(P)$ и $(\mathcal{L}(Q))^{-1}$ близки в ранге β .*

Пусть Δ – A -диаграмма ранга α и $\mathcal{S}$ – некоторый набор ее попарно непересекающихся (как подмножеств $\mathbb{R}^2$) поддиаграмм примыкания ранга β . Пусть Θ – некоторая связная компонента диаграммы $\Delta - \bigcup_{\Pi \in \mathcal{S}} \Pi$. Из определений 9.10 и 9.13 следует, что Θ – неособая диаграмма и каждый ее граничный цикл либо является главным участком ранга β диаграммы Δ , либо имеет вид $S_1 u_1 S_2 u_2 \dots S_k u_k$, где S_i – непустые подпути главных участков ранга β диаграммы Δ и для каждого i либо $u_i \in \mathcal{Y}_\beta(\Delta)$, либо u_i^{-1} есть связка ранга β , входящая в граничный цикл некоторой поддиаграммы примыкания $\Pi \in \mathcal{S}$. Так как подслово приведенного в ранге β слова само является приведенным в ранге β словом, то $\mathcal{L}(S_i) \in \mathcal{R}_\beta$ при всех i . Далее, в силу определений 9.1 и 9.10 для каждого i имеем $\mathcal{L}(u_i) \in \mathcal{H}_\beta$. Следовательно, мы имеем разбиение границы типа A на диаграмме Θ , где $\mathcal{X}_\beta(\Theta)$ состоит из принадлежащих $\mathcal{X}_\beta(\Delta)$ граничных циклов диаграммы Δ и всех путей S_i указанного вида, а $\mathcal{Y}_\beta(\Theta)$ состоит из всех путей u_i . Условимся рассматривать каждую связную компоненту Θ диаграммы $\Delta - \bigcup_{\Pi \in \mathcal{S}} \Pi$ как A -диаграмму ранга β с указанным разбиением границы, а сами диаграммы Θ будем называть *переходными поддиаграммами* диаграммы Δ относительно $\mathcal{S}$. Множество всех переходных поддиаграмм диаграммы Δ относительно $\mathcal{S}$ обозначим через $\mathcal{T}(\Delta, \mathcal{S})$. Главные участки границы ранга β переходных поддиаграмм диаграммы Δ относительно $\mathcal{S}$ будем называть *переходными участками границы* диаграммы Δ относительно $\mathcal{S}$. Легко видеть, что каждый главный участок S ранга β диаграммы Δ либо является переходным участком границы диаграммы Δ относительно $\mathcal{S}$, либо представляется в виде произведения чередующихся участков примыкания поддиаграмм примыкания из $\mathcal{S}$ и переходных участков границы относительно $\mathcal{S}$.

9.15. ЛЕММА. *Пусть Δ – A -диаграмма ранга β и $\mathcal{S}$ – непустое конечное множество ее попарно непересекающихся поддиаграмм примыкания. Тогда для любой поддиаграммы $\Theta \in \mathcal{T}(\Delta, \mathcal{S})$ имеем $\#\mathcal{Y}_\beta(\Theta) \neq 0$ и $(\#\mathcal{Y}_\beta(\Theta), \chi(\Theta)) \neq (1, 1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что если Σ – собственная поддиаграмма связной неособой диаграммы Δ , то некоторый граничный цикл Σ в качестве подпути содержит непустой путь, состоящий только из внутренних ребер диаграммы Δ . Так

как в силу непустоты $\mathcal{S}$ имеем $\Theta \neq \Delta$, то отсюда следует, что некоторый граничный цикл Θ содержит в качестве подпути путь u , где u^{-1} – невырожденная связка ранга β на Δ . В частности, имеем $\mathcal{Y}_\beta(\Theta) \neq \emptyset$. Допустим, $(\#\mathcal{Y}_\beta(\Theta), \chi(\Theta)) = (1, 1)$. Тогда граничный цикл Θ имеет вид Pu , где $P \in \mathcal{X}_\beta(\Theta)$ и $u \in \mathcal{Y}_\beta(\Theta)$. Так как пути u^{-1} и P гомотопны и P есть подпуть некоторого участка границы $S \in \mathcal{X}_\beta(\Delta)$, то в силу определения 9.11 u^{-1} не может быть невырожденной связкой ранга β . Противоречие.

9.16. ЛЕММА. Пусть Δ – A -диаграмма ранга β и $\mathcal{S}$ – конечное множество ее попарно непересекающихся поддиаграмм примыкания ранга β . Тогда если множество $\mathcal{T}(\Delta, \mathcal{S})$ непусто, то имеет место равенство

$$\sum_{\Theta \in \mathcal{T}(\Delta, \mathcal{S})} (\#\mathcal{Y}_\beta(\Theta) - 2\chi(\Theta)) = \#\mathcal{Y}_\beta(\Delta) - 2\chi(\Delta).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Θ – произвольная (не обязательно связная) неособая карта и Π – дисковая подкарта карты Θ такая, что пересечение $\partial\Theta \cap \partial\Pi$ состоит из одного или двух отрезков кривых и не содержит вершин в качестве связных компонент. Из формулы (4.1) легко следует, что

$$\chi(\Theta - \Pi) = \begin{cases} \chi(\Theta), & \text{если } \partial\Theta \cap \partial\Pi \text{ состоит из одного отрезка кривой,} \\ \chi(\Theta) + 1, & \text{если } \partial\Theta \cap \partial\Pi \text{ состоит из двух отрезков кривых.} \end{cases} \quad (9.4)$$

Если в граничный цикл некоторой поддиаграммы $\Pi \in \mathcal{S}$ входят в качестве подпути два участка границы из $\mathcal{Y}_\beta(\Delta)$, то $\Pi = \Delta$, и в этом случае $\mathcal{T}(\Delta, \mathcal{S}) = \emptyset$. Поэтому можно считать, что граничный цикл каждой поддиаграммы $\Pi \in \mathcal{S}$ либо не содержит в качестве подпути ни одного участка границы из $\mathcal{Y}_\beta(\Delta)$, либо содержит ровно один такой участок. Заметим, что в этом случае $\partial\Delta \cap \partial\Pi$ состоит из двух или, соответственно, одного отрезка кривой. Тогда из (9.4) по индукции следует $\chi(\Delta - \bigcup_{\Pi \in \mathcal{S}} \Pi) = \chi(\Delta) + r$, где r – число поддиаграмм $\Pi \in \mathcal{S}$, граничный цикл которых не содержит ни одного подпути из $\mathcal{Y}_\beta(\Delta)$. Остается заметить, что $\chi(\Delta - \bigcup_{\Pi \in \mathcal{S}} \Pi) = \sum_{\Theta \in \mathcal{T}(\Delta, \mathcal{S})} \chi(\Theta)$ и $\sum_{\Theta \in \mathcal{T}(\Delta, \mathcal{S})} \#\mathcal{Y}_\beta(\Theta) - \#\mathcal{Y}_\beta(\Delta) = 2r$.

9.17. ЛЕММА. Пусть Δ – A -диаграмма ранга β , $\mathcal{S}$ – конечное множество ее попарно непересекающихся поддиаграмм примыкания ранга β и $\Theta \in \mathcal{T}(\Delta, \mathcal{S})$. Тогда любая невырожденная связка ранга β на Θ является невырожденной связкой ранга β на Δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения 9.10 следует, что любая связка ранга β на Θ является связкой ранга β на Δ . Проверим, что из вырожденности связки x на Δ вытекает ее вырожденность на Θ . В соответствии с определением 9.11 рассмотрим два случая.

Случай 1: Путь x^ϵ при некотором $\epsilon = \pm 1$ гомотопен пути P , входящему в качестве подпути в некоторый участок границы $S \in \mathcal{X}_\beta(\Delta)$. Так как $Px^{-\epsilon}$ – стягиваемый простой замкнутый путь, то $Px^{-\epsilon} \approx \delta\Sigma$ для некоторой дисковой поддиаграммы Σ диаграммы Δ . Из определения 9.11 следует, что любая связка u ранга β

на диаграмме Δ , содержащаяся в Σ (т.е. для которой $\text{supp } u \subseteq \Sigma$), вырождена, а из определения 9.13 следует тогда, что Σ не может содержать поддиаграмм примыкания $\Pi \in \mathcal{S}$, и потому содержится в одной из связных компонент диаграммы $\Delta - \bigcup_{\Pi \in \mathcal{S}} \Pi$ и x^ϵ . Так как Θ – связная компонента диаграммы $\Delta - \bigcup_{\Pi \in \mathcal{S}} \Pi$ и x^ϵ содержится в Θ , то Σ содержится в Θ . Тогда пути P и $x^{-\epsilon}$ гомотопны на Θ и по определению 9.11 x – вырожденная связка ранга β на Θ .

Случай 2: Путь x^ϵ при некотором $\epsilon = \pm 1$ гомотопен пути вида PuQ , где P – конец некоторого пути $R \in \mathcal{X}_\beta(\Delta)$, Q – начало некоторого пути $S \in \mathcal{X}_\beta(\Delta)$, $u \in \mathcal{Y}_\beta(\Delta)$ и $\mathcal{L}(P) \sqcup \mathcal{L}(Q) \sqcup 1$. В этом случае проходят те же рассуждения, что и в случае 1, с заменой P на PuQ .

9.18. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть Δ – A -диаграмма ранга β . Конечное множество $\mathcal{S}$ ее попарно непересекающихся поддиаграмм примыкания ранга β назовем *картой примыканий ранга β на Δ* , если выполнены следующие условия:

- (i) для каждой поддиаграммы $\Theta \in \mathcal{T}(\Delta, \mathcal{S})$ выполнено $(\#\mathcal{Y}_\beta(\Theta), \chi(\Theta)) \neq (2, 1)$, за исключением случая, когда Δ – кольцевая диаграмма, $\#\mathcal{Y}_\beta(\Delta) = 0$ и $\#\mathcal{S} = 1$ (см. рис. 13);
- (ii) каждая поддиаграмма $\Theta \in \mathcal{T}(\Delta, \mathcal{S})$ есть простая A -диаграмма ранга β .

Рис. 13

9.19. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Любую A -диаграмму Δ ранга β последовательностью внутренних преобразований ранга β можно перевести в A -диаграмму Δ' ранга β такую, что существует некоторая карта примыканий $\mathcal{S}$ ранга β на Δ' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Δ – произвольная A -диаграмма ранга β и пусть $\mathcal{S}$ – конечное множество ее попарно непересекающихся поддиаграмм примыкания ранга β . Опишем два типа преобразований, переводящих пару $(\Delta, \mathcal{S})$ в новую пару $(\Delta', \mathcal{S}')$ указанного вида.

- (i) Предположим, что некоторая поддиаграмма $\Theta \in \mathcal{T}(\Delta, \mathcal{S})$ является дисковой диаграммой и $\#\mathcal{Y}_\beta(\Theta) = 2$. Пусть $\mathcal{Y}_\beta(\Theta) = \{u, v\}$. Предположим, кроме того, что либо один из путей u или v принадлежит $\mathcal{Y}_\beta(\Delta)$, либо u^{-1} и v^{-1} – связки ранга β

на Δ , входящие в граничные циклы двух *различных* поддиаграмм примыкания из $\mathcal{S}$. С точностью до перестановки местами u и v возможны три случая:

- (a) $u, v \in \mathcal{Y}_\beta(\Delta)$,
- (b) $u \in \mathcal{Y}_\beta(\Delta)$, $v \notin \mathcal{Y}_\beta(\Delta)$,
- (c) $u, v \notin \mathcal{Y}_\beta(\Delta)$.

В каждом из этих случаев, не изменяя диаграммы Δ , полагаем соответственно

$$\mathcal{S}' \Rightarrow \begin{cases} \{\Theta\} & \text{в случае (a),} \\ (\mathcal{S} \setminus \{\Pi\}) \cup \{\Pi \cup \Theta\} & \text{в случае (b),} \\ (\mathcal{S} \setminus \{\Pi, \Pi'\}) \cup \{\Pi \cup \Theta \cup \Pi'\} & \text{в случае (c),} \end{cases}$$

где $\Pi, \Pi' \in \mathcal{S}$ – поддиаграммы примыкания, граничащие с Θ (см. рис. 14).

Рис. 14

(ii) Предположим, некоторая поддиаграмма $\Theta \in \mathcal{T}(\Delta, \mathcal{S})$ не является простой A -диаграммой ранга β . Согласно определению 9.12 диаграмму Θ некоторой последовательностью внутренних преобразований ранга β можно перевести в A -диаграмму Θ^* ранга β , обладающую невырожденной связкой ранга β . Из определений 9.4 и 4.7 следует, что Θ^* есть поддиаграмма диаграммы Δ^* , полученной из Δ соответствующей последовательностью внутренних преобразований ранга β . При этом, как легко видеть из определений, диаграмма $\Delta^* - \Theta^*$ есть результат измельчения диаграммы $\Delta - \Theta$ и образ Π^* на Δ^* каждой поддиаграммы примыкания $\Pi \in \mathcal{S}$ является поддиаграммой примыкания ранга β на Δ^* . Пусть $\mathcal{S}^*$ – множество всех поддиаграмм Π^* . Очевидно, имеем $\Theta^* \in \mathcal{T}(\Delta^*, \mathcal{S}^*)$. Пусть x – невырожденная связка ранга β на Θ^* и R, S – главные участки ранга β диаграммы Θ^* , на которых лежат вершины $\iota(x)$ и $\tau(x)$ соответственно. Добавив к Δ^* две новые вершины, лежащие на R и на S , можно считать, что $\iota(x)$ есть конечная вершина ребра e с $\mathcal{L}(e) \supseteq 1$, входящего в R , и $\tau(x)$ есть начальная вершина ребра d с $\mathcal{L}(d) \supseteq 1$, входящего в S , причем в случае, если R – нециклический участок границы диаграммы Θ^* , начальная вершина ребра e отлична от $\iota(R)$, а в случае, если S – нециклический участок границы диаграммы Θ^* , конечная вершина ребра d отлична от $\tau(S)$. Далее, произведя измельчение диаграммы Δ^* , как описано в п. 4.9, можно считать, что вершины $\iota(e)$ и $\tau(d)$ соединены путем x' с $\mathcal{L}(x') \supseteq \mathcal{L}(exd) \supseteq \mathcal{L}(x)$, гомотопным пути exd и не имеющим общих вершин с x и отличных от $\iota(e)$, $\tau(d)$ вершин в пересечении с границей диаграммы Θ^* (см. рис. 15). Из определений 9.10 и 9.11 следует, что x'^{-1} есть невырожденная связка ранга β на диаграмме Θ^* . Тогда согласно лемме 9.17 x и x'^{-1} – невырожденные связки ранга β на диаграмме Δ , и

так как $\text{exd}x'^{-1}$ – стягиваемый простой замкнутый путь, то $\text{exd}x'^{-1}$ ограничивает дисковую поддиаграмму Π диаграммы Δ^* . Согласно определению 9.13 Π – поддиаграмма примыкания ранга β на Δ^* . Будем считать результатом применения преобразования (ii) к паре $(\Delta, \mathcal{S})$ пару $(\Delta^*, \mathcal{S}^* \cup \{\Pi\})$.

Рис. 15

Убедимся в том, что если к паре $(\Delta, \mathcal{S})$ неприменимо никакое преобразование (i) или (ii), то $\mathcal{S}$ есть карта примыканий ранга β на Δ . Действительно, невозможность применения к $(\Delta, \mathcal{S})$ преобразования вида (ii) равносильна выполнению условия (ii) определения 9.18. Невозможность применения преобразования вида (i) означает, что для любой поддиаграммы $\Theta \in \mathcal{T}(\Delta, \mathcal{S})$ с условием $(\#\mathcal{Y}_\beta(\Theta), \chi(\Theta)) = (2, 1)$, если $\mathcal{Y}_\beta(\Theta) = \{u, v\}$, то u^{-1} и v^{-1} входят в граничный цикл некоторой одной поддиаграммы $\Pi \in \mathcal{S}$. Но если найдется такая поддиаграмма Θ , то имеет место исключительный случай, описанный в условии 9.18 (i) (рис. 13). Следовательно, невозможность применения к паре $(\Delta, \mathcal{S})$ преобразования (i) влечет выполнение условия (i) определения 9.18.

Нам остается доказать, что существует конечная последовательность

$$(\Delta, \mathcal{S}) = (\Delta_0, \mathcal{S}_0) \rightarrow (\Delta_1, \mathcal{S}_1) \rightarrow \dots \rightarrow (\Delta_t, \mathcal{S}_t), \quad (9.5)$$

в которой пара $(\Delta_{i+1}, \mathcal{S}_{i+1})$ получается из пары $(\Delta_i, \mathcal{S}_i)$ применением преобразования (i) или (ii) и к паре $(\Delta_t, \mathcal{S}_t)$ такое преобразование уже неприменимо (на самом деле несложная модификация приведенного ниже рассуждения показывает, что любая последовательность преобразований (i) и (ii) обрывается через конечное число шагов). Заметим, что если пара $(\Delta_{i+1}, \mathcal{S}_{i+1})$ получена из пары $(\Delta_i, \mathcal{S}_i)$ применением преобразования (i), то $\mathcal{T}(\Delta_{i+1}, \mathcal{S}_{i+1}) = \mathcal{T}(\Delta_i, \mathcal{S}_i) \setminus \{\Theta\}$, где $(\#\mathcal{Y}_\beta(\Theta), \chi(\Theta)) = (2, 1)$. Отсюда следует, что, во-первых, любая последовательность преобразований (i) через конечное число шагов обрывается, и, во-вторых, если пара $(\Delta_i, \mathcal{S}_i)$ удовлетворяет условию 9.18, (ii), и, следовательно, к ней неприменимо никакое преобразование (ii), то это верно и для пары $(\Delta_{i+1}, \mathcal{S}_{i+1})$. Будем считать, что мы начинаем последовательность (9.5) с выполнения преобразований (ii) до тех пор, пока это возможно, а затем выполняем преобразования (i). Тогда для доказательства предложения достаточно проверить, что процесс применения преобразований (ii) оборвется на конечном шаге.

Итак, предположим, что пара $(\Delta_{i+1}, \mathcal{S}_{i+1})$ получена из пары $(\Delta_i, \mathcal{S}_i)$ преобразованием (ii). Заметим, что это преобразование увеличивает число $\sum_{\Theta \in \mathcal{T}(\Delta_i, \mathcal{S}_i)} \# \mathcal{Y}_\beta(\Theta)$ на 2. Поэтому достаточно указать не зависящую от i верхнюю оценку для $\sum_{\Theta \in \mathcal{T}(\Delta_i, \mathcal{S}_i)} \# \mathcal{Y}_\beta(\Theta)$. Без ограничения общности можно считать $i \geq 1$. Так как $\# \mathcal{S}_{i+1} = \# \mathcal{S}_i + 1$, то при $i \geq 1$ имеем $\mathcal{S}_i \neq \emptyset$. В этом случае из леммы 9.15 следует, что для любой поддиаграммы $\Theta \in \mathcal{T}(\Delta, \mathcal{S})$ выполнено $\# \mathcal{Y}_\beta(\Theta) - 2\chi(\Theta) \geq 0$, причем равенство $\# \mathcal{Y}_\beta(\Theta) - 2\chi(\Theta) = 0$ возможно лишь в случае, если $(\# \mathcal{Y}_\beta(\Theta), \chi(\Theta)) = (2, 1)$. Обозначим через $\mathcal{T}'_i$ и $\mathcal{T}''_i$ соответственно множества поддиаграмм $\Theta \in \mathcal{T}(\Delta_i, \mathcal{S}_i)$, для которых $(\# \mathcal{Y}_\beta(\Theta), \chi(\Theta)) = (2, 1)$ и $(\# \mathcal{Y}_\beta(\Theta), \chi(\Theta)) \neq (2, 1)$. Оценим отдельно слагаемые $\sum_{\Theta \in \mathcal{T}'_i} \# \mathcal{Y}_\beta(\Theta)$ и $\sum_{\Theta \in \mathcal{T}''_i} \# \mathcal{Y}_\beta(\Theta)$. Для оценки величины $\sum_{\Theta \in \mathcal{T}''_i} \# \mathcal{Y}_\beta(\Theta)$ воспользуемся леммой 9.16. Имеем

$$\sum_{\Theta \in \mathcal{T}''_i} (\# \mathcal{Y}_\beta(\Theta) - 2\chi(\Theta)) = \# \mathcal{Y}_\beta(\Delta_i) - 2\chi(\Delta_i) = \# \mathcal{Y}_\beta(\Delta) - 2\chi(\Delta),$$

откуда, учитывая, что для любой поддиаграммы $\Theta \in \mathcal{T}''_i$ из $\# \mathcal{Y}_\beta(\Theta) - 2\chi(\Theta) \geq 1$ и $\chi(\Theta) \leq 1$ следует $\# \mathcal{Y}_\beta(\Theta) \leq 3(\# \mathcal{Y}_\beta(\Theta) - 2\chi(\Theta))$, получаем

$$\sum_{\Theta \in \mathcal{T}''_i} \# \mathcal{Y}_\beta(\Theta) \leq 3(\# \mathcal{Y}_\beta(\Delta) - 2\chi(\Delta)).$$

Так как $\# \mathcal{Y}_\beta(\Theta) = 2$ для любой поддиаграммы $\Theta \in \mathcal{T}'_i$, то остается оценить сверху число $\#\mathcal{T}'_i$. Докажем, что для каждого i существует не более одной поддиаграммы $\Theta \in \mathcal{T}'_i$, для которой оба слова $\{\mathcal{L}(\mathcal{S})\}_{\mathcal{S} \in \mathcal{X}_\beta(\Theta)}$ пусты. Воспользуемся индукцией по i . Если $i = 0$, то $\mathcal{T}(\Delta_i, \mathcal{S}_i) = \{\Delta\}$ и доказывать нечего. Пусть $i \geq 1$. Пусть $(\Delta_{i-1}, \mathcal{S}_{i-1}) = (\Delta, \mathcal{S})$ и $(\Delta_i, \mathcal{S}_i) = (\Delta^*, \mathcal{S}^* \cup \{\Pi\})$ в обозначениях из (ii). Пусть $\{\Theta_j\}_{j=1}^r$, где $r = 1$ или $r = 2$, — одна или две связные компоненты поддиаграммы $\Theta^* - \Pi$ (на рис. 15 таких компонент две). Очевидно, имеем $\mathcal{T}(\Delta_i, \mathcal{S}_i) = (\mathcal{T}(\Delta_{i-1}, \mathcal{S}_{i-1}) \setminus \{\Theta\}) \cup \{\Theta_j\}_{j=1}^r$. Если бы для какой-нибудь из поддиаграмм Θ_j выполнялось $(\# \mathcal{Y}_\beta(\Theta_j), \chi(\Theta_j)) = (2, 1)$ и оба слова $\{\mathcal{L}(\mathcal{S})\}_{\mathcal{S} \in \mathcal{X}_\beta(\Theta)}$ были бы пусты, то в силу условия (ii) определения 9.11 связка x на диаграмме Θ^* была бы вырожденной. Следовательно, если $\Theta_j \in \mathcal{T}'_i$, то хотя бы одно из слов $\{\mathcal{L}(\mathcal{S})\}_{\mathcal{S} \in \mathcal{X}_\beta(\Theta)}$ непусто. Тогда из индуктивного предположения для $i := i - 1$ вытекает, что $\mathcal{T}'(\Delta_i, \mathcal{S}_i)$ содержит не более одной поддиаграммы Θ , для которой слова $\{\mathcal{L}(\mathcal{S})\}_{\mathcal{S} \in \mathcal{X}_\beta(\Theta)}$ пусты, что и требовалось. Из доказанного утверждения вытекает

$$\#\mathcal{T}'_i \leq \sum_{\mathcal{S} \in \mathcal{X}_\beta(\Delta_i)} |\mathcal{L}(\mathcal{S})| + 1 \leq \sum_{\mathcal{S} \in \mathcal{X}_\beta(\Delta)} |\mathcal{L}(\mathcal{S})| + 1.$$

Предложение 9.19 доказано.

9.20. ЛЕММА. Пусть Δ — A -диаграмма ранга β , $\mathcal{S}$ — карта примыканий ранга β на Δ и $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}$. Если выполнено одно из условий $\# \mathcal{Y}_\beta(\Delta) - 2\chi(\Delta) \geq 1$ или $\# \mathcal{S}_1 \geq 2$, то для любой поддиаграммы $\Theta \in \mathcal{T}(\Delta, \mathcal{S}_1)$ выполнено $\# \mathcal{Y}_\beta(\Theta) - 2\chi(\Theta) \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть верна посылка леммы, и пусть $\Theta \in \mathcal{T}(\Delta, \mathcal{S}_1)$. В случае $\mathcal{S}_1 = \emptyset$ имеем $\Theta = \Delta$, и тогда $\#\mathcal{Y}_\beta(\Theta) - 2\chi(\Theta) \geq 1$ по условию. Пусть $\mathcal{S}_1 \neq \emptyset$. По лемме 9.15 невозможны случаи, когда пара $(\mathcal{Y}_\beta(\Theta), \chi(\Theta))$ равна $(0, 0)$, $(0, 1)$ или $(1, 1)$. Для доказательства неравенства $\#\mathcal{Y}_\beta(\Theta) - 2\chi(\Theta) \geq 1$ остается проверить, что $(\mathcal{Y}_\beta(\Theta), \chi(\Theta)) \neq (2, 1)$. Допустим, $(\mathcal{Y}_\beta(\Theta), \chi(\Theta)) = (2, 1)$. В силу условия 9.18, (i) невозможен случай $\Theta \in \mathcal{T}(\Delta, \mathcal{S})$. Пусть $\Theta \notin \mathcal{T}(\Delta, \mathcal{S})$, т.е. некоторая поддиаграмма $\Pi \in \mathcal{S}$ содержится в Θ . Из определений 9.13 и 9.11 следует, что возможны лишь три случая расположения Π в Θ , изображенные на рис. 16, где главные участки ранга β диаграммы Δ изображены более толстыми линиями. В последнем из этих случаев имеем $\Theta = \Delta$, что противоречит предположению $\mathcal{S}_1 \neq \emptyset$. В остальных двух случаях для некоторой поддиаграммы $\Theta' \in \mathcal{T}(\Delta, \mathcal{S})$, содержащейся в Θ , выполнено $(\mathcal{Y}_\beta(\Theta'), \chi(\Theta')) = (2, 1)$. Но это противоречит условию 9.18, (i).

Рис. 16

9.21. ЛЕММА. Если Δ – A -диаграмма ранга β , $\#\mathcal{Y}_\beta(\Delta) - 2\chi(\Delta) \geq 1$ и $\mathcal{S}$ – карта примыканий ранга β на Δ , то имеет место неравенство

$$\#\mathcal{S} \leq \#\mathcal{Y}_\beta(\Delta) - 3\chi(\Delta).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 9.20 для любой поддиаграммы $\Theta \in \mathcal{T}(\Delta, \mathcal{S})$ имеем $\#\mathcal{Y}_\beta(\Theta) - 2\chi(\Theta) \geq 1$, откуда с учетом неравенства $\chi(\Theta) \leq 1$ следует

$$\frac{1}{2} \#\mathcal{Y}_\beta(\Theta) \leq \frac{3}{2} (\#\mathcal{Y}_\beta(\Theta) - 2\chi(\Theta)).$$

Просуммировав по всем поддиаграммам $\Theta \in \mathcal{T}(\Delta, \mathcal{S})$ и воспользовавшись леммой 9.16, получаем

$$\frac{1}{2} \sum_{\Theta \in \mathcal{T}(\Delta, \mathcal{S})} \#\mathcal{Y}_\beta(\Theta) \leq \frac{3}{2} (\#\mathcal{Y}_\beta(\Delta) - 2\chi(\Delta)).$$

Так как множество $\bigcup_{\Theta \in \mathcal{T}(\Delta, \mathcal{S})} \mathcal{Y}_\beta(\Theta)$ состоит в точности из путей x , для которых $x \in \mathcal{Y}_\beta(\Delta)$ либо x^{-1} – связка ранга β на Δ , входящая в граничный цикл поддиаграммы $\Pi \in \mathcal{S}$, то имеем

$$\sum_{\Theta \in \mathcal{T}(\Delta, \mathcal{S})} \#\mathcal{Y}_\beta(\Theta) = \#\mathcal{Y}_\beta(\Delta) + 2\#\mathcal{S},$$

откуда, подставив в предыдущее соотношение, получаем требуемое неравенство.

9.22. ЛЕММА. Пусть $\mathcal{S}$ – карта примыканий ранга β на A -диаграмме Δ ранга β , $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}$ и $\Theta \in \mathcal{T}(\Delta, \mathcal{S}_1)$. Тогда множество поддиаграмм $\Pi \in \mathcal{S}$, содержащихся в Θ , образует карту примыканий ранга β на Θ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, доказано, что каждая поддиаграмма $\Pi \in \mathcal{S}_1$, содержащаяся в Θ , является поддиаграммой примыкания ранга β на Θ . Тогда, очевидно, имеем $\mathcal{T}(\Theta, \mathcal{S}') \subseteq \mathcal{T}(\Delta, \mathcal{S})$, где $\mathcal{S}'$ – множество поддиаграмм $\Pi \in \mathcal{S}$, содержащихся в Θ . Легко видеть, что выполнение условий (i) и (ii) определения 9.18 для Δ и $\mathcal{S}$ влечет выполнение этих условий для Θ и $\mathcal{S}'$. Следовательно, $\mathcal{S}'$ есть карта примыканий ранга β на Θ , и нам остается доказать, что каждая поддиаграмма $\Pi \in \mathcal{S}$, содержащаяся в Θ , является поддиаграммой примыкания ранга β на Θ .

Пусть $\Pi \in \mathcal{S}$ и Π содержится в Θ . Пусть $\delta\Pi \approx PuQv$, где P и Q – участки примыкания. Как видно из определения 9.13, достаточно проверить, что каждый из путей u или v либо принадлежит $\mathcal{Y}_\beta(\Theta)$, либо является невырожденной связкой ранга β на Θ . Докажем это для u . Если $u \in \mathcal{Y}_\beta(\Delta)$, то $u \in \mathcal{Y}_\beta(\Theta)$. Пусть u – невырожденная связка ранга β на Δ . Из определения 9.10 и того, что различные поддиаграммы из $\mathcal{S}$ не имеют общих вершин, следует, что u есть связка ранга β на Θ . Допустим, что u – вырожденная связка ранга β на Θ . Если путь u или u^{-1} гомотопен на Θ некоторому пути R , входящему в качестве подпути в главный участок R' ранга β диаграммы Θ , то R входит в главный участок R'' ранга β диаграммы Δ , содержащий R' в качестве подпути или совпадающий с R' , и тогда u – вырожденная связка ранга β на Δ вопреки предположению. Пусть путь u^ϵ ($\epsilon = \pm 1$) гомотопен на Θ пути вида SwT , где S – конец пути из $\mathcal{X}_\beta(\Theta)$, $w \in \mathcal{Y}_\beta(\Theta)$, T – начало пути из $\mathcal{X}_\beta(\Theta)$ и $\mathcal{L}(S) \supseteq \mathcal{L}(T) \supseteq 1$. Если $w \in \mathcal{Y}_\beta(\Delta)$, то S и T – соответственно конец и начало некоторых путей из $\mathcal{X}_\beta(\Delta)$, и тогда путь u снова являлся бы вырожденной связкой ранга β на Δ . Пусть $w \notin \mathcal{Y}_\beta(\Delta)$, т.е. w^{-1} входит в граничный цикл некоторой поддиаграммы $\Pi' \in \mathcal{S}_1$. Так как $SwTu^{-\epsilon}$ – стягиваемый простой замкнутый путь на Θ , то $SwTu^{-\epsilon} \approx \delta\Theta_1$ для некоторой дисковой поддиаграммы Θ_1 диаграммы Θ . Если $\epsilon = 1$, то $\Theta_1 \in \mathcal{T}(\Delta, \mathcal{S}_1 \cup \{\Pi\})$, и так как $(\#\mathcal{Y}_\beta(\Theta_1), \chi(\Theta_1)) = (2, 1)$ и $\#(\mathcal{S}_1 \cup \{\Pi\}) \geq 2$, мы получаем противоречие с леммой 9.20. Пусть $\epsilon = -1$. Тогда $S = QS_1$, $T = T_1P$ (см. рис. 17), и при этом $\mathcal{L}(S_1) \supseteq \mathcal{L}(T_1) \supseteq 1$. Рассматривая v , S_1 и T_1 вместо u , S и T , мы, как и выше, приходим к противоречию, получив, что либо v – вырожденная связка ранга β на диаграмме Δ , либо для некоторой поддиаграммы $\Theta_2 \in \mathcal{T}(\Delta, \mathcal{S}_1 \cup \{\Pi\})$ выполнено $(\#\mathcal{Y}_\beta(\Theta_2), \chi(\Theta_2)) = (2, 1)$ вопреки лемме 9.20.

Рис. 17

9.23. ЛЕММА. Пусть Δ – A -диаграмма ранга β , $\mathcal{S}$ – карта примыканий ранга β на Δ и $S \in \mathcal{X}_\beta(\Delta)$. Пусть $t(S, R)$ обозначает число поддиаграмм примыкания $\Pi \in \mathcal{S}$ участка границы S к участку границы $R \in \mathcal{X}_\beta(\Delta)$ и $r(S), s(S)$ – соответственно число содержащихся в S участков примыкания поддиаграмм примыкания $\Pi \in \mathcal{S}$ и число содержащихся в S переходных участков диаграммы Δ относительно $\mathcal{S}$. Тогда верны следующие утверждения.

(i) Если Δ – дисковая диаграмма, то $t(S, S) = 0$, $t(S, R) \leq 1$ для любого $R \in \mathcal{X}_\beta(\Delta)$ и $s(S) \leq \max\{1, \#\mathcal{Y}_\beta(\Delta) - 2\}$.

(ii) Если Δ – кольцевая диаграмма и S – нециклический участок ее границы, то $t(S, S) \leq 1$, $t(S, R) \leq 1$, если R – циклический участок границы, и $t(S, R) \leq 2$, если R – нециклический участок границы. При этом каждый из двух граничных циклов диаграммы Δ содержит не более одного подпути $R \in \mathcal{X}_\beta(\Delta)$ с $t(S, R) = 2$. Кроме того, $s(S) \leq \#\mathcal{Y}_\beta(\Delta) + 4$.

(iii) Если Δ – кольцевая диаграмма и S – ее граничный цикл, то $t(S, S) = 0$, $t(S, R) \leq 1$ для любого $R \in \mathcal{X}_\beta(\Delta)$, $r(S) \leq \#\mathcal{Y}_\beta(\Delta)$ и $s(S) \leq \max\{1, \#\mathcal{Y}_\beta(\Delta)\}$.

(iv) Если Δ – диаграмма с тремя граничными циклами и S – ее граничный цикл, то $t(S, S) \leq 1$, $t(S, R) \leq 1$, если R – циклический участок, и $t(S, R) \leq 2$, если R – нециклический участок. При этом каждый из двух отличных от S граничных циклов диаграммы Δ содержит не более одного подпути $R \in \mathcal{X}_\beta(\Delta)$ с $t(S, R) = 2$. Кроме того, $r(S), s(S) \leq \#\mathcal{Y}_\beta(\Delta) + 4$.

(v) Если Δ имеет четыре граничных цикла и все они принадлежат $\mathcal{X}_\beta(\Delta)$, то $t(S, S) \leq 3$, $t(S, R) \leq 2$ для любого $R \in \mathcal{X}_\beta(\Delta) \setminus \{S\}$, $\sum_{R \in \mathcal{X}_\beta(\Delta) \setminus \{S\}} t(S, R) \leq 4$ и $r(S), s(S) \leq 10$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что оценка для $s(S)$ в (iii)–(v) вытекает из оценки для $r(S)$, так как либо S является переходным участком диаграммы Δ относительно $\mathcal{S}$, и тогда $s(S) = 1$, либо S состоит из чередующихся переходных участков и участков примыкания поддиаграмм из $\mathcal{S}$, и в этом случае $s(S) = r(S)$.

(i) Допустим, $\Pi \in \mathcal{S}$ – поддиаграмма примыкания S к S . Пусть $\delta\Pi \approx PuQv$, где P и Q – участки примыкания. Так как, очевидно, $\Pi \neq \Delta$, то один из путей u или v , скажем u , – невырожденная связка ранга β на Δ . Так как вершины $\iota(u)$ и $\tau(u)$ лежат на S и Δ – дисковая диаграмма, то путь u или u^{-1} гомотопен некоторому подпути участка границы S . Но это противоречит определению 9.11. Следовательно, $t(S, S) = 0$.

Допустим теперь, что для некоторого участка границы $R \in \mathcal{X}_\beta(\Delta) \setminus \{S\}$ имеются две различные поддиаграммы примыкания $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{S}$ пути S к пути R . Тогда, очевидно, для одной из трех поддиаграмм $\Theta \in \mathcal{T}(\Delta, \{\Pi_1, \Pi_2\})$ граничный цикл Θ имеет вид $PuQv$, где P входит в S , Q входит в R , $P, Q \in \mathcal{X}_\beta(\Theta)$ и $u, v \in \mathcal{Y}_\beta(\Theta)$. Но это невозможно по лемме 9.20. Следовательно, $t(S, R) \leq 1$ для любого $R \in \mathcal{X}_\beta(\Delta)$.

Если $\#\mathcal{Y}_\beta(\Delta) \leq 1$, то по доказанному $\#\mathcal{S} = 0$ и, следовательно, $r(S) = 1$. Пусть $k = \#\mathcal{Y}_\beta(\Delta) \geq 2$. Пусть $\delta\Delta \approx Su_0R_1u_1 \dots u_{k-1}R_ku_k$, где $R_i \in \mathcal{X}_\beta(\Delta)$ и $u_i \in \mathcal{Y}_\beta(\Delta)$. Предположим, $\Pi \in \mathcal{S}$ – поддиаграмма примыкания S к R_1 . Пусть $\delta\Pi \approx PuQv$, где $S = S'PS''$ и $R_1 = R'_1QR''_1$. Если $u \neq u_0$, то для дисковой поддиаграммы $\Theta \in \mathcal{T}(\Delta, \{\Pi\})$ с граничным циклом $\delta\Theta \approx S''u_0R'_1u^{-1}$ мы имели бы $\#\mathcal{Y}_\beta(\Theta) =$

Рис. 18

2, что невозможно в силу леммы 9.20 (см. рис. 18). Следовательно, $u = u_0$, и P есть конец S . Аналогичным образом замечаем, что если имеется поддиаграмма примыкания $\Pi \in \mathcal{S}$ пути S к пути R_k , то соответствующий участок примыкания, входящий в S , есть начало S . Тогда из доказанного следует, что между первым и последним переходными участками диаграммы Δ относительно $\mathcal{S}$, входящими в S , расположено не более $\max\{0, \#\mathcal{Y}_\beta(\Delta) - 3\}$ участков примыкания. Следовательно, $s(S) \leq \max\{1, \#\mathcal{Y}_\beta(\Delta) - 2\}$.

(ii) Пусть Δ – кольцевая диаграмма и $S \in \mathcal{X}_\beta(\Delta)$ – нециклический участок. Пусть C и D – граничные циклы диаграммы Δ , где S входит в C .

Пусть $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}$ – некоторое множество поддиаграмм примыкания участка границы S к главным участкам ранга β диаграммы Δ . Заметим, что если среди $\mathcal{S}_1$ имеется хотя бы одна поддиаграмма примыкания S к участку границы $R \in \mathcal{X}_\beta(\Delta)$, входящему в D или совпадающему с D , то $\#\mathcal{T}(\Delta, \mathcal{S}_1) = \#\mathcal{S}_1$, причем каждая поддиаграмма $\Theta \in \mathcal{T}(\Delta, \mathcal{S}_1)$ является дисковой диаграммой. В противном случае, если каждая поддиаграмма из $\mathcal{S}_1$ есть поддиаграмма примыкания S к некоторому R , входящему в C , то $\#\mathcal{T}(\Delta, \mathcal{S}_1) = \#\mathcal{S}_1 + 1$, и в этом случае ровно одна из поддиаграмм $\Theta \in \mathcal{T}(\Delta, \mathcal{S}_1)$ является кольцевой, а остальные – дисковыми диаграммами.

Рис. 19

Допустим, $t(S, S) \geq 2$, т.е. имеются две различные поддиаграммы примыкания $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{S}$ пути S к самому себе (см. рис. 19). Очевидно, по крайней мере для двух из трех поддиаграмм $\Theta \in \mathcal{T}(\Delta, \{\Pi_1, \Pi_2\})$ верно утверждение:

$$\begin{aligned} &\text{один из граничных циклов } \Theta \text{ имеет вид } PuQv \text{ или } Pu, \\ &\text{где } P \text{ и } Q \text{ входят в } S, \quad P, Q \in \mathcal{X}_\beta(\Theta) \text{ и } u, v \in \mathcal{Y}_\beta(\Theta). \end{aligned} \quad (9.6)$$

Одна из таких поддиаграмм Θ_i есть дисковая диаграмма. Но это противоречит лемме 9.20. Поэтому $t(S, S) \leq 1$.

Допустим теперь, что $t(S, R) \geq 2$ для некоторого циклического участка границы $R \in \mathcal{X}_\beta(\Delta)$ или $t(S, R) \geq 3$ для некоторого нециклического участка границы R . Пусть $S_1 = \{\Pi_i\}_{i=1}^k \subseteq \mathcal{S}$ – множество поддиаграмм примыкания S к R , где соответственно $k = 2$ или $k = 3$. Если R входит в C (и тогда R является нециклическим участком границы), то $\#\mathcal{T}(\Delta, S_1) = 4$, причем по крайней мере для двух поддиаграмм $\Theta \in \mathcal{T}(\Delta, S_1)$ имеем

$$\begin{aligned} &\text{один из граничных циклов } \Theta \text{ имеет вид } PuQv, \text{ где } P \text{ входит в } S, \\ &Q \text{ входит в } R, \quad P, Q \in \mathcal{X}_\beta(\Theta) \text{ и } u, v \in \mathcal{Y}_\beta(\Theta). \end{aligned} \quad (9.7)$$

Тогда хотя бы одна из таких поддиаграмм Θ является дисковой диаграммой, и мы снова получаем противоречие с леммой 9.20. Если R входит в D или совпадает с D , то, как легко видеть, из соответствующего предположения $k = 3$ или $k = 2$ следует, что хотя бы одна из поддиаграмм $\Theta \in \mathcal{T}(\Delta, S_1)$ удовлетворяет условию (9.7), что опять противоречит лемме 9.20. Следовательно, имеет место соответствующее неравенство $t(S, R) \leq 1$ или $t(S, R) \leq 2$.

Пусть, далее, один из граничных циклов диаграммы Δ содержит подпути $R_1, R_2 \in \mathcal{X}_\beta(\Delta)$ с $t(S, R_i) = 2$ ($i = 1, 2$). Пусть $S_1 \subseteq \mathcal{S}$ – множество всех поддиаграмм примыкания S к R_1 или R_2 . Пусть $R_1 = U_0 P_1 U_1 P_2 U_2$ и $R_2 = V_0 Q_1 V_1 Q_2 V_2$, где P_i, Q_i – участки примыкания поддиаграмм из S_1 , и пусть $\Theta_1, \Theta_2 \in \mathcal{T}(\Delta, S_1)$ – поддиаграммы, в граничные циклы которых входят соответственно пути U_1 и V_1 . Если R_1 и R_2 входят в C , то каждая из двух поддиаграмм Θ_i удовлетворяет условию (9.7) соответственно при $R := R_1$ и $R := R_2$. Если R_1, R_2 входят в D , то хотя бы одна Θ_i удовлетворяет условию (9.7). В любом случае для одной из поддиаграмм Θ_i имеем $(\chi(\Theta_i), \#\mathcal{Y}_\beta(\Theta_i)) = (1, 2)$. Противоречие с леммой 9.20.

Пусть k_i ($i = 1, 2$) – число участков границы $u \in \mathcal{Y}_\beta(\Delta)$, входящих соответственно в C и в D . Так как в C входит ровно k_1 участков границы $R \in \mathcal{X}_\beta(\Delta)$, то по доказанному число поддиаграмм примыкания $\Pi \in \mathcal{S}$ участка границы S к участкам границы $R \in \mathcal{X}_\beta(\Delta)$, входящим в C и отличным от S , не превосходит k_1 . Кроме того, в $\mathcal{S}$ имеется не более одной поддиаграммы примыкания S к S . Далее, так как при $k_2 = 0$ имеем $D \in \mathcal{X}_\beta(\Delta)$, а при $k_2 > 0$ в C входит ровно k_2 участков границы $R \in \mathcal{X}_\beta(\Delta)$, то по доказанному число поддиаграмм примыкания $\Pi \in \mathcal{S}$ участка границы S к участкам границы $R \in \mathcal{X}_\beta(\Delta)$, входящим в D , не превосходит $k_2 + 1$. Следовательно, в S входит не более $k_1 + k_2 + 3 = \#\mathcal{Y}_\beta(\Delta) + 3$ участков примыкания поддиаграмм $\Pi \in \mathcal{S}$, и, таким образом, $r(S) \leq \#\mathcal{Y}_\beta(\Delta) + 4$. Утверждение (ii) доказано.

Утверждения (iii) и (iv) доказываются аналогично (ii): в случае, если не выполнена соответствующая оценка для $t(S, S)$ или $t(S, R)$, легко видеть, что найдется дисковая поддиаграмма $\Theta \in \mathcal{T}(\Delta, S_1)$, $S_1 \subseteq \mathcal{S}$, удовлетворяющая условию (9.6), и тогда мы приходим к противоречию с леммой 9.20. Оценка для $r(S)$ вытекает из оценок для $t(S, S)$ и $t(S, R)$.

(v) Допустим, $t(S, S) \geq 4$. Выберем подмножество $S_1 = \{\Pi_i\}_{i=1}^4 \subseteq \mathcal{S}$ поддиаграмм примыкания S к S . Пусть, для определенности, S есть внутренний граничный цикл диаграммы Δ и $D \subseteq \mathbb{R}^2$ – диск, ограниченный кривой $\text{supp } S$ (в случае,

когда S есть внешний граничный цикл диаграммы Δ , рассуждения аналогичны). Ясно, что если на плоскости $\mathbb{R}^2$ к диску D приклеено 4 “ручки” Π_i ($1 \leq i \leq 4$), то не менее 4-х связных компонент дополнения $\mathbb{R}^2 \setminus (D \cup \bigcup_{i=1}^4 \Pi_i)$ граничат с D , каждая не более чем по двум дугам. Отсюда следует, что по крайней мере 4 поддиаграммы $\Theta \in \mathcal{T}(\Delta, S_1)$ удовлетворяют условию (9.6). Так как, помимо S , Δ содержит еще только три граничных цикла, вновь получаем противоречие с леммой 9.20.

Неравенство $t(S, R) \leq 2$ при $R \in \mathcal{X}_\beta(\Delta) \setminus \{S\}$ доказывается с помощью рассуждений, аналогичных использованным в доказательстве (ii).

Рис. 20

Докажем, что $\sum_{R \in \mathcal{X}_\beta(\Delta) \setminus \{S\}} t(S, R) \leq 4$. Если $t(S, R) \leq 1$ для всех $R \in \mathcal{X}_\beta(\Delta) \setminus \{S\}$, то $\sum_{R \in \mathcal{X}_\beta(\Delta) \setminus \{S\}} t(S, R) \leq 3$. Пусть $\mathcal{X}_\beta(\Delta) \setminus \{S\} = \{R_0, R_1, R_2\}$ и $t(S, R_0) = 2$. Пусть $\Pi_1, \Pi_2 \in S$ – поддиаграммы примыкания S к R_0 . Каждая из двух поддиаграмм $\Theta_1, \Theta_2 \in \mathcal{T}(\Delta, \{\Pi_1, \Pi_2\})$ удовлетворяет условию (9.7) при $R := R_0$, откуда по лемме 9.20 получаем, что R_1 и R_2 – граничные циклы различных поддиаграмм Θ_1 и Θ_2 (см. рис. 20). Тогда, воспользовавшись леммой 9.22 и доказанным утверждением (iii), получаем, что имеется не более одной поддиаграммы примыкания $\Pi \in \mathcal{S}$ граничного цикла S к каждому из граничных циклов R_i . Следовательно, $\sum_{R \in \mathcal{X}_\beta(\Delta) \setminus \{S\}} t(S, R) \leq 4$, что и требовалось доказать.

Наконец, неравенство $r(S) \leq 10$ вытекает из неравенств $t(S, S) \leq 3$ и $\sum_{R \in \mathcal{X}_\beta(\Delta) \setminus \{S\}} t(S, R) \leq 4$.

§ 10. Оценки на диаграммах с разбиением границы

В этом параграфе мы продолжим совместную индукцию по рангу α , начатую в § 6–8.

10.1. ЛЕММА. Пусть Δ – B -диаграмма ранга α и Π – поддиаграмма примыкания ранга $\alpha - 1$ (рассматриваемая на A -диаграмме $\Delta^{\alpha-1}$ ранга $\alpha - 1$) граничного цикла области $A \in \mathbf{R}_\alpha(\Delta)$ к некоторому главному участку S ранга $\alpha - 1$ диаграммы $\Delta^{\alpha-1}$. Пусть $\mathcal{L}(\delta A) \approx A^n$, где $A \in \mathcal{E}_\alpha$, и пусть $\delta \Pi \approx \text{PuQv}$,

где P, Q – участки примыкания, P входит в δA и Q входит в S . Тогда верны следующие утверждения:

- (i) $|\mathcal{L}(P)| < (n - q)|A|$, если $S \in \mathcal{X}_\alpha(\Delta)$;
- (ii) если Δ – приведенная B -диаграмма ранга α , то $|\mathcal{L}(P)| < p|A|$ при $S \notin \mathcal{X}_\alpha(\Delta)$, т.е. когда $S \in \mathcal{Z}_\alpha(\Delta)$ или $S = \delta B$ для некоторой области $B \in \mathbf{R}_\alpha(\Delta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $S \in \mathcal{X}_\alpha(\Delta)$, то $(\mathcal{L}(Q))^{-1}$ – подслово слова $(\mathcal{L}(S))^{-1} \in \mathcal{R}_\alpha$, и тогда неравенство $|\mathcal{L}(P)| < (n - q)|A|$ имеет место в силу определения 5.7 и леммы 9.14. Докажем утверждение (ii). Пусть Δ – приведенная B -диаграмма ранга α . Допустим, что $|\mathcal{L}(P)| \geq p|A|$, и либо $S \in \mathcal{Z}_\alpha(\Delta)$, либо $S = \delta B$ для некоторой области $B \in \mathbf{R}_\alpha(\Delta)$. Тогда, соответственно, для некоторого $B \in \mathcal{E}_\alpha$ либо $\mathcal{L}(S)$ есть подслово слова B^n , либо $\mathcal{L}(S) \approx B^n$. Согласно определению 9.8 для вывода противоречия достаточно доказать, что Δ имеет либо сократимую пару областей ранга α , либо граничную сократимую пару ранга α , либо свернутую область ранга α . Пусть $\delta A \approx PR$. Без ограничения общности можно считать, что

$$\mathcal{L}(PR) \sqsubseteq A^n \text{ и } T\mathcal{L}(Q) \sqsubseteq B^n \text{ для некоторого слова } T. \quad (10.1)$$

По лемме 4.2 имеет место равенство

$$\mathcal{L}(P) \stackrel{\alpha-1}{=} (\mathcal{L}(v))^{-1}(\mathcal{L}(Q))^{-1}(\mathcal{L}(u))^{-1}, \quad (10.2)$$

откуда в силу предложений 8.44, (i) и 8.37 следует $|\mathcal{L}(Q)| > 2|B|$ и

$$A^n \stackrel{\alpha-1}{=} (\mathcal{L}(v))^{-1}B^{-n}\mathcal{L}(v). \quad (10.3)$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1: $S \in \mathcal{Z}_\alpha(\Delta)$. Пусть Θ – дисковая поддиаграмма диаграммы Δ , полученная объединением поддиаграммы Π и области A (см. рис. 21).

Рис. 21

Из соотношений (10.1)–(10.3) выводим

$$T \stackrel{\alpha-1}{=} B^n (\mathcal{L}(Q))^{-1} \stackrel{\alpha-1}{=} \mathcal{L}(v) (\mathcal{L}(PR))^{-1} (\mathcal{L}(v))^{-1} \cdot \mathcal{L}(v) \mathcal{L}(P) \mathcal{L}(u) \stackrel{\alpha-1}{=} \mathcal{L}(vR^{-1}u).$$

Тогда согласно определению 9.8 область A и участок границы S диаграммы Δ образуют граничную сократимую пару ранга α .

Случай 2: $S = \delta B$ для некоторой области $B \in \mathbf{R}_\alpha(\Delta)$.

Рассмотрим два подслучая.

Случай 2А: $A \neq B$.

Пусть $\delta B \approx QT$. Тогда из соотношения $T\mathcal{L}(Q) \stackrel{\alpha-1}{=} B^n$ и неравенства $|\mathcal{L}(Q)| > 2|B|$ по лемме 2.1, (ii), (iii) следует $T \stackrel{\alpha-1}{=} \mathcal{L}(T)$. Рассмотрим дисковую поддиаграмму Θ диаграммы Δ , состоящую из областей A, B и поддиаграммы Π (см. рис. 22). Выше мы доказали равенство $T \stackrel{\alpha-1}{=} \mathcal{L}(vR^{-1}u)$, следовательно, $\mathcal{L}(\delta\Theta) \approx \mathcal{L}(T^{-1}vR^{-1}u) \stackrel{\alpha-1}{=} 1$. Тогда согласно определению 9.8 области A и B образуют сократимую пару областей ранга α на диаграмме Δ .

Рис. 22

Случай 2В: $A = B$.

Тогда $R = MQN$ для некоторых путей M и N . Докажем, что A – свернутая область ранга α . Рассмотрим кольцевую поддиаграмму Θ диаграммы Δ , полученную объединением области A и поддиаграммы Π (см. рис. 23). В силу определения 9.8 достаточно проверить, что слова $\mathcal{L}(N^{-1}v)$ и $\mathcal{L}(Mu^{-1})$ сопряжены в $\mathbf{B}_{\alpha-1}$ и $[\mathcal{L}(N^{-1}v)]_{\alpha-1}$ – элемент конечного порядка. В силу соотношений (10.1) слово B есть циклический сдвиг слова A такой, что $B\mathcal{L}(N) \stackrel{\alpha-1}{=} \mathcal{L}(N)A$. Тогда равенство (10.3) можно переписать в виде

$$A^n \stackrel{\alpha-1}{=} (\mathcal{L}(N^{-1}v))^{-1} A^{-n} \mathcal{L}(N^{-1}v).$$

Согласно определению 7.1 $[\mathcal{L}(N^{-1}v)]_{\alpha-1} \in \mathbf{N}_{\alpha-1}^-(A)$. В частности, в силу следствия 7.17 и предложения 7.14, (ii) элемент $[\mathcal{L}(N^{-1}v)]_{\alpha-1}$ имеет конечный порядок. В силу предложения 7.18, (iii) в группе $\mathbf{B}_{\alpha-1}$ имеет место равенство

$$A^{n/2} \stackrel{\alpha-1}{=} (\mathcal{L}(N^{-1}v))^{-1} A^{-n/2} \mathcal{L}(N^{-1}v),$$

которое можно переписать в виде

$$A^n \mathcal{L}(N^{-1}v) \stackrel{\alpha-1}{=} A^{n/2} \mathcal{L}(N^{-1}v) A^{-n/2}.$$

С другой стороны, используя равенство (10.2), видим, что

$$\begin{aligned} A^n \mathcal{L}(N^{-1}v) &\stackrel{\alpha-1}{=} \mathcal{L}(PMQN) \mathcal{L}(N^{-1}v) \stackrel{\alpha-1}{=} \\ &\stackrel{\alpha-1}{=} \mathcal{L}(P) \mathcal{L}(M) \mathcal{L}(QvP) (\mathcal{L}(P))^{-1} \stackrel{\alpha-1}{=} \mathcal{L}(P) \mathcal{L}(Mu^{-1}) (\mathcal{L}(P))^{-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, слова $\mathcal{L}(N^{-1}v)$ и $\mathcal{L}(Mu^{-1})$ сопряжены в группе $\mathbf{B}_{\alpha-1}$ и, следовательно, A – свернутая область ранга α . Лемма 10.1 доказана.

Рис. 23

10.2. ЛЕММА. Если Δ – простая A -диаграмма ранга 0 и $(\#\mathcal{Y}_0(\Delta), \chi(\Delta)) \neq (2, 1)$, то для каждого $S \in \mathcal{X}_0(\Delta)$ слово $\mathcal{L}(S)$ пусто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, Δ – простая A -диаграмма ранга 0 и для некоторого $S \in \mathcal{X}_0(\Delta)$ слово $\mathcal{L}(S)$ непусто. Докажем, что это возможно только в случае $(\#\mathcal{Y}_0(\Delta), \chi(\Delta)) = (2, 1)$.

Пусть e_0 – ориентированное ребро с $\mathcal{L}(e_0) \stackrel{\alpha}{=} a^\epsilon \in A^{\pm 1}$, входящее в S . Так как Δ – неособая диаграмма, то обратное ребро e_0^{-1} входит в граничный цикл ее некоторой области A_0 . Так как Δ – диаграмма ранга 0, то $\mathcal{L}(\delta A_0) \approx a^\epsilon a^{-\epsilon}$, следовательно, δA_0 имеет вид $M_0 e_0^{-1} N_0 e_1$, где $\mathcal{L}(e_1) \stackrel{\alpha}{=} a^\epsilon$ и $\mathcal{L}(M_0) \stackrel{\alpha}{=} \mathcal{L}(N_0) \stackrel{\alpha}{=} 1$. Если ориентированное ребро e_1^{-1} не входит ни в какой граничный цикл диаграммы Δ , то для некоторой области $A_1 \in \mathbf{R}(\Delta)$ имеем $\delta A_1 \approx M_1 e_1^{-1} N_1 e_2$, где $\mathcal{L}(e_2) \stackrel{\alpha}{=} a^\epsilon$ и $\mathcal{L}(M_1) \stackrel{\alpha}{=} \mathcal{L}(N_1) \stackrel{\alpha}{=} 1$. Продолжая рассуждение, находим области A_i ($0 \leq i \leq k$) диаграммы Δ такие, что $\delta A_i \approx M_i e_i^{-1} N_i e_{i+1}$, $\mathcal{L}(e_i) \stackrel{\alpha}{=} a^\epsilon$, $\mathcal{L}(M_i) \stackrel{\alpha}{=} \mathcal{L}(N_i) \stackrel{\alpha}{=} 1$ для всех i и e_{k+1}^{-1} входит в граничный цикл диаграммы Δ . Так как согласно определениям 9.1 и 5.1 для любого $u \in \mathcal{Y}_0(\Delta)$ слово $\mathcal{L}(u)$ пусто, то e_{k+1}^{-1} входит в некоторый главный участок R ранга 0 диаграммы Δ . Из построения легко видеть, что все ребра e_i и области A_i попарно различны. Произведем измельчение диаграммы Δ , добавляя две новые вершины на каждом ребре e_i , так что при этом ребро e_i заменяется на произведение $d_i e'_i f_i$ трех ребер d_i , e'_i и f_i с $\mathcal{L}(d_i) \stackrel{\alpha}{=} \mathcal{L}(f_i) \stackrel{\alpha}{=} 1$

и $\mathcal{L}(e'_i) \subseteq \mathcal{L}(e_i) \subseteq a^\epsilon$ (заметим, что в силу определений 9.12 и 9.4 при измельчении простота A -диаграммы Δ ранга β сохраняется). Добавим затем новые ребра h_i и g_i вдоль путей $d_i^{-1}N_i d_{i+1}$ и $f_{i+1}M_i f_i^{-1}$ соответственно для каждого $i = 0, 1, \dots, k$ (см. рис. 24). Пусть $x \Rightarrow h_0 h_1 \dots h_k$ и $y \Rightarrow g_k g_{k-1} \dots g_0$. Так как x и y – простые непустые пути и $\mathcal{L}(x) \subseteq \mathcal{L}(y) \subseteq 1$, то в силу определения 9.10 пути x и y являются связками ранга 0. В силу определения 9.12 x и y – вырожденные связки ранга 0. В соответствии с определением 9.11 рассмотрим два случая.

Рис. 24

Случай 1: Один из четырех путей, $x^{\pm 1}$ или $y^{\pm 1}$, гомотопен пути P , входящему в качестве подпути в некоторый участок границы $S' \in \mathcal{X}_0(\Delta)$ (при этом, очевидно, S' есть образ участка границы S при измельчении диаграммы Δ). Пусть, например, путь x^{-1} гомотопен такому пути P (см. рис. 25). Тогда простой замкнутый путь Px ограничивает дисковую поддиаграмму Θ диаграммы Δ . По лемме 4.2 имеем $\mathcal{L}(P) = 1$ в свободной группе $\mathbf{B}_0$, и так как в силу определений 9.1 и 5.7 слово $\mathcal{L}(S')$ несократимо, то $\mathcal{L}(P) \subseteq 1$. Но тогда в несократимое слово $\mathcal{L}(S')$ входит слово $\mathcal{L}(e'^{-1}_{k+1} P e'_0) \subseteq a^{-\epsilon} a^\epsilon$. Получили противоречие. Аналогично доказывается невозможность всех остальных подслучаев.

Рис. 25

Случай 2: При некоторых $\epsilon, \delta = \pm 1$ путь x^ϵ гомотопен пути $P_1 u_1 Q_1$, а путь y^δ гомотопен пути $P_2 u_2 Q_2$, где P_i – конец пути из $\mathcal{X}_0(\Delta)$, $u_i \in \mathcal{Y}_0(\Delta)$, Q_i – начало пути из $\mathcal{X}_0(\Delta)$ и $\mathcal{L}(P_i) \subseteq \mathcal{L}(Q_i) \subseteq 1$. Так как $\mathcal{L}(P_1 u_1 Q_1) \subseteq 1$ и $\mathcal{L}(e'_0) \subseteq \mathcal{L}(e'^{-1}_{k+1}) \not\subseteq 1$, то ребра e'_0 и e'^{-1}_{k+1} не входят в $P_1 u_1 Q_1$, т.е. имеем $\epsilon = -1$ и путь $e'^{-1}_{k+1} P_1 u_1 Q_1 e'_0$ входит в граничный цикл диаграммы Δ . По той же причине имеем $\delta = -1$ и путь $e'_0 P_2 u_2 Q_2 e'^{-1}_{k+1}$ также входит в граничный цикл диаграммы Δ . Тогда некоторый

граничный цикл Δ имеет вид $P_1 u_1 Q_1 e'_0 P_2 u_2 Q_2 e'^{-1}_{k+1}$, где $Q_1 e'_0 P_2$, $Q_2 e'^{-1}_{k+1} P_1 \in \mathcal{X}_0(\Delta)$ (см. рис. 26). Так как пути $P_1 u_1 Q_1 x$, $P_2 u_2 Q_2 y$ и $e'_0 y^{-1} e'^{-1}_{k+1} x^{-1}$ стягиваемы, то Δ – дисковая диаграмма. Следовательно, $(\# \mathcal{Y}_0(\Delta), \chi(\Delta)) = (2, 1)$.

Рис. 26

10.3. В § 8 был введен в рассмотрение вес $\mathcal{W}_\beta(X)$ слова X в ранге β . Мы будем использовать эту функцию для оценки длин меток главных участков ранга β A -диаграмм ранга β . Если X есть метка циклического главного участка границы диаграммы Δ , то слово X определено с точностью до циклического сдвига. Для этого случая мы введем следующую модификацию функции $\mathcal{W}_\beta(X)$. Положим по определению

$$\mathcal{W}_\beta^\circ(X) = \min\{\mathcal{W}_\beta(Y) \mid Y \text{ есть циклический сдвиг слова } X\}.$$

Если S – участок границы диаграммы Δ , то через $\overline{\mathcal{W}}_\beta(\mathcal{L}(S))$ условимся обозначать значение функции $\mathcal{W}_\beta^\circ(\mathcal{L}(S))$, если S – циклический участок границы, и $\mathcal{W}_\beta(\mathcal{L}(S))$ в противном случае.

Следующее утверждение для удобства ссылок формулируется для ранга $\alpha - 1$ (его формулировку для ранга α можно было бы поместить после предложения 10.11).

10.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть Δ – A -диаграмма ранга $\alpha - 1$, $\# \mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta) - 2\chi(\Delta) \geq 1$ и $\mathcal{S}$ – карта примыканий ранга $\alpha - 1$ на Δ . Пусть $\{S_1, S_2, \dots, S_r\}$ – множество всех переходных участков диаграммы Δ относительно $\mathcal{S}$. Тогда

$$\sum_{i=1}^r \overline{\mathcal{W}}_{\alpha-1}(\mathcal{L}(S_i)) \leq \eta(\# \mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta) - 2\chi(\Delta)). \quad (10.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что по определению

$$\{S_i\}_{i=1}^r = \bigcup_{\Theta \in \mathcal{T}(\Delta, \mathcal{S})} \mathcal{X}_{\alpha-1}(\Theta).$$

В силу условия (ii) определения 9.18 каждая поддиаграмма $\Theta \in \mathcal{T}(\Delta, \mathcal{S})$ есть простая A -диаграмма ранга $\alpha - 1$, а в силу леммы 9.20 имеем $\# \mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Theta) - 2\chi(\Theta) \geq 1$. Если $\alpha = 1$, то по лемме 10.2 все слова $\mathcal{L}(S_i)$ пусты, что сразу влечет искомое неравенство (10.4). Если же $\alpha > 1$, то неравенство (10.4) вытекает из индуктивного предположения 10.11 и леммы 9.16.

10.5. ЛЕММА. Пусть Δ – B -диаграмма ранга α , $(\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta), \chi(\Delta)) \neq (0, 1)$ и $\mathcal{S}$ – карта примыканий ранга $\alpha - 1$ на A -диаграмме $\Delta^{\alpha-1}$ ранга $\alpha - 1$. Предположим, что выполнены следующие условия (i) и (ii):

- (i) если $A \in \mathbf{R}_\alpha(\Delta)$, $S \in \mathcal{Z}_\alpha(\Delta)$ или $S = \delta B$ для некоторой области $B \in \mathbf{R}_\alpha(\Delta)$, $\Pi \in \mathcal{S}$ – поддиаграмма примыкания δA к S , P – ее участок примыкания, входящий в δA , и $\mathcal{L}(\delta A) \approx A^n$, где $A \in \mathcal{E}_\alpha$, то $|\mathcal{L}(P)| < p|A|$;
- (ii) для каждой области $A \in \mathbf{R}_\alpha(\Delta)$ имеется не более одной поддиаграммы примыкания $\Pi \in \mathcal{S}$ граничного цикла δA к главным участкам ранга α диаграммы Δ .

Тогда если $(\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta), \chi(\Delta)) \neq (0, 1)$, то имеет место неравенство

$$\#\mathbf{R}_\alpha(\Delta) \leq \max\{0, 0,35(\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta) - 2\chi(\Delta))\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Припишем каждому главному участку S ранга $\alpha - 1$ диаграммы $\Delta^{\alpha-1}$ тип 1, если $S \in \mathcal{X}_\alpha(\Delta)$, тип 2, если $S \in \mathcal{Z}_\alpha(\Delta)$, и тип 3, если $S = \delta A$ для некоторой области $A \in \mathcal{Z}_\alpha(\Delta)$. Если P входит в S в качестве подпути, то пути P будем приписывать тот же тип 1, 2 или 3, что и S . Введем обозначения:

$$\mathcal{S}_{ij} \Rightarrow \{\Pi \in \mathcal{S} \mid \text{участки примыкания } \Pi \text{ имеют типы } i \text{ и } j\},$$

$$N \Rightarrow \text{множество всех участков примыкания поддиаграмм примыкания } \Pi \in \mathcal{S},$$

$$N_i \Rightarrow \{S \in N \mid S \text{ имеет тип } i\},$$

$$N_{i|j} \Rightarrow \{S \in N_i \mid S \text{ входит в } \delta\Pi, \Pi \in \mathcal{S}_{ij}\},$$

$$N(A) \Rightarrow \{S \in N \mid S \text{ входит в } \delta A\} \quad (A \in \mathbf{R}_\alpha(\Delta)),$$

$$N_i(A) \Rightarrow N(A) \cap N_i,$$

$$P \Rightarrow \bigcup_{\Theta \in \mathcal{T}(\Delta^{\alpha-1}, \mathcal{S})} \mathcal{X}_{\alpha-1}(\Theta) - \text{множество всех переходных участков диаграммы } \Delta^{\alpha-1} \text{ относительно } \mathcal{S},$$

$$P_i \Rightarrow \{S \in P \mid S \text{ имеет тип } i\},$$

$$P(A) \Rightarrow \{S \in P \mid S \text{ входит в } \delta A\} \quad (A \in \mathbf{R}_\alpha(\Delta)).$$

По условию имеем $\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta) - 2\chi(\Delta) \geq -1$. Можно считать, что $\#\mathbf{R}_\alpha(\Delta) \geq 1$. Тогда из (9.1) и (9.3) следует

$$\#\mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta^{\alpha-1}) - 2\chi(\Delta^{\alpha-1}) \geq 1.$$

Применив предложение 10.4 и снова используя соотношения (9.1) и (9.3), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{S \in P} \overline{W}_{\alpha-1}(\mathcal{L}(S)) &\leq \eta (\#\mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta^{\alpha-1}) - 2\chi(\Delta^{\alpha-1})) \\ &\leq 2\eta\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta) - 2\eta\chi(\Delta) + 2\eta\#\mathbf{R}_\alpha(\Delta). \end{aligned} \quad (10.5)$$

Пусть $\mathbf{R}_\alpha(\Delta) = \{A_1, A_2, \dots, A_t\}$ и $\mathcal{L}(\delta A_i) \approx A_i^n$, где $A_i \in \mathcal{E}_\alpha$. В силу леммы 10.1, (i) имеем $|\mathcal{L}(S)| < (n - q)|A_i|$, если $S \in N_1(A_i)$, и в силу условия (i) $|\mathcal{L}(S)| < p|A_i|$, если $S \in N_2(A_i) \cup N_3(A_i)$. Следовательно,

$$\frac{1}{|A_i|} \sum_{S \in N(A_i)} |\mathcal{L}(S)| \leq (n - q)\#N_1(A_i) + p(\#N_2(A_i) + \#N_3(A_i)).$$

Далее, из предложения 8.22, (ii) следует

$$\frac{1}{|A_i|} \sum_{S \in P(A_i)} |\mathcal{L}(S)| \leq 13 \sum_{S \in P(A_i)} \overline{W}_{\alpha-1}(\mathcal{L}(S)) + 2 \#P(A_i).$$

Складывая полученные неравенства и учитывая, что

$$|\mathcal{L}(\delta A_i)| = n|A_i| = \sum_{S \in N(A_i)} |\mathcal{L}(S)| + \sum_{S \in P(A_i)} |\mathcal{L}(S)|$$

и

$$\#P(A_i) \leq \#N(A_i) + 1 = \#N_1(A_i) + \#N_2(A_i) + \#N_3(A_i) + 1,$$

получаем

$$n \leq (n-q+2)\#N_1(A_i) + (p+2)(\#N_2(A_i) + \#N_3(A_i)) + 13 \sum_{S \in P(A_i)} \overline{W}_{\alpha-1}(\mathcal{L}(S)) + 2,$$

откуда, просуммировав по всем областям A_i , выводим, что

$$(n-2)\#\mathbf{R}_\alpha(\Delta) \leq (n-q+2)\#N_{3|1} + (p+2)(\#N_{3|2} + \#N_{3|3}) + 13 \sum_{S \in P_3} \overline{W}_{\alpha-1}(\mathcal{L}(S)). \quad (10.6)$$

Так как $\#N_{3|1} \leq \#\mathcal{S}_{13}$, $\#N_{3|2} \leq \#\mathcal{S}_{32}$, $\#N_{3|3} \leq 2\#\mathcal{S}_{33}$, то отсюда следует

$$(n-2)\#\mathbf{R}_\alpha(\Delta) \leq (p+2)\#\mathcal{S} + (n-q-p)\#\mathcal{S}_{13} + (p+2)\#\mathcal{S}_{33} + 13 \sum_{S \in P_3} \overline{W}_{\alpha-1}(\mathcal{L}(S)). \quad (10.7)$$

По лемме 9.21

$$\#\mathcal{S} \leq \#\mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta^{\alpha-1}) - 3\chi(\Delta^{\alpha-1}) \leq 3\#\mathbf{R}_\alpha(\Delta) + 2\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta) - 3\chi(\Delta).$$

В силу условия (ii) имеем

$$\#\mathcal{S}_{13} \leq \#\mathbf{R}_\alpha(\Delta).$$

Докажем неравенство

$$\#\mathcal{S}_{33} \leq -3\chi(\Delta^{\alpha-1}). \quad (10.8)$$

Так как из предположения $\#\mathbf{R}_\alpha(\Delta) \geq 1$ следует $\chi(\Delta^{\alpha-1}) \leq 0$, то достаточно рассмотреть случай $\#\mathcal{S}_{33} \geq 1$. По лемме 9.16 при $\Delta := \Delta^{\alpha-1}$ и $\mathcal{S} := \mathcal{S}_{33}$

$$\sum_{\Theta \in \mathcal{T}(\Delta^{\alpha-1}, \mathcal{S}_{33})} (\#\mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Theta) - 2\chi(\Theta)) = \#\mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta^{\alpha-1}) - 2\chi(\Delta^{\alpha-1}).$$

Обозначив $\mathcal{Y}'_{\alpha-1}(\Theta) = \mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Theta) \setminus \mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta^{\alpha-1})$, получим

$$\sum_{\Theta \in \mathcal{T}(\Delta^{\alpha-1}, \mathcal{S}_{33})} (\#\mathcal{Y}'_{\alpha-1}(\Theta) - 2\chi(\Theta)) = -2\chi(\Delta^{\alpha-1}).$$

Очевидно, при $\#S_{33} \geq 1$ для каждой поддиаграммы $\Theta \in \mathcal{T}(\Delta^{\alpha-1}, S_{33})$ имеем $\#\mathcal{Y}'_{\alpha-1}(\Theta) \geq 1$. Допустим, для некоторой поддиаграммы $\Theta \in \mathcal{T}(\Delta^{\alpha-1}, S_{33})$ выполнено $\#\mathcal{Y}'_{\alpha-1}(\Theta) - 2\chi(\Theta) \leq 0$. Тогда $\chi(\Theta) = 1$, т.е. Θ имеет ровно один граничный цикл. Так как каждый граничный цикл каждой поддиаграммы из $\mathcal{T}(\Delta^{\alpha-1}, S_{33})$ либо является граничным циклом диаграммы Δ , либо не пересекается с границей Δ , то в этом случае $\#\mathcal{Y}'_{\alpha-1}(\Theta) = \#\mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Theta)$, и мы приходим к противоречию с леммой 9.20. Следовательно, для любой поддиаграммы $\Theta \in \mathcal{T}(\Delta^{\alpha-1}, S_{33})$ выполнено $\#\mathcal{Y}'_{\alpha-1}(\Theta) - 2\chi(\Theta) \geq 1$. Так как $\chi(\Theta) \leq 1$, то отсюда следует $1/2\#\mathcal{Y}'_{\alpha-1}(\Theta) \leq 3/2(\#\mathcal{Y}'_{\alpha-1}(\Theta) - 2\chi(\Theta))$, откуда, просуммировав по всем Θ , получаем

$$\#S_{33} = \frac{1}{2} \sum_{\Theta \in \mathcal{T}(\Delta^{\alpha-1}, S_{33})} \#\mathcal{Y}'_{\alpha-1}(\Theta) \leq \frac{3}{2}(-2\chi(\Delta^{\alpha-1})) = -3\chi(\Delta^{\alpha-1}).$$

Тем самым доказано неравенство (10.8).

Подставляя полученные оценки для $\#S$, $\#S_{13}$ и $\#S_{33}$ и оценку (10.5) в (10.7), с учетом неравенства $26\eta < 11$ получаем

$$\begin{aligned} & (n-2)\#\mathbf{R}_{\alpha}(\Delta) \\ & \leq (n-q+5p+12)\#\mathbf{R}_{\alpha}(\Delta) + 2(p+2)\#\mathcal{Y}_{\alpha}(\Delta) - 6(p+2)\chi(\Delta) + 13 \sum_{S \in P_3} \overline{W}_{\alpha-1}(\mathcal{L}(S)) \\ & \leq (n-q+5p+23)\#\mathbf{R}_{\alpha}(\Delta) + (2p+15)\#\mathcal{Y}_{\alpha}(\Delta) - (6p+23)\chi(\Delta), \end{aligned}$$

откуда, с учетом значений числовых параметров p и q ,

$$\#\mathbf{R}_{\alpha}(\Delta) \leq \frac{6p+23}{2(q-5p-25)}(\#\mathcal{Y}_{\alpha}(\Delta) - 2\chi(\Delta)) \leq 0,35(\#\mathcal{Y}_{\alpha}(\Delta) - 2\chi(\Delta)).$$

10.6. ЛЕММА. Пусть Δ — B -диаграмма ранга α , $\#\mathcal{Y}_{\alpha}(\Delta) - 2\chi(\Delta) \geq 1$ и S — карта примыканий ранга $\alpha-1$ на $\Delta^{\alpha-1}$. Предположим, что выполнены условия (i), (ii) леммы 10.5 и следующее условие:

(i) S не содержит поддиаграмм примыкания главных участков ранга α диаграммы Δ к ее участкам границы $S \in \mathcal{X}_{\alpha}(\Delta) \cup \mathcal{Z}_{\alpha}(\Delta)$.

Тогда имеет место неравенство

$$\sum_{S \in \mathcal{X}_{\alpha}(\Delta)} \overline{W}_{\alpha}(\mathcal{L}(S)) \leq \eta(\#\mathcal{Y}_{\alpha}(\Delta) - 2\chi(\Delta)). \quad (10.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать обозначения, введенные в начале доказательства леммы 10.5. Так как каждый главный участок ранга α диаграммы Δ либо лежит в P_1 , либо является произведением чередующихся путей из N_1 и P_1 , то по лемме 8.20, (ii), (iii) имеем

$$\sum_{S \in \mathcal{X}_{\alpha}(\Delta)} \overline{W}_{\alpha}(\mathcal{L}(S)) \leq \sum_{S \in N_1} W_{\alpha}(\mathcal{L}(S)) + \zeta \sum_{S \in P_1} \overline{W}_{\alpha-1}(\mathcal{L}(S)).$$

Пусть $\Pi \in \mathcal{S}$ и $\delta\Pi \approx RuQv$, где P, Q – участки примыкания и P имеет тип 1. Согласно условию (i) путь Q имеет тип 3; в частности, имеем $N_1 = N_{1|3}$. Далее, так как $\mathcal{L}(Q)$ есть подслово некоторого слова A^n при $A \in \mathcal{E}_\alpha$, то с учетом лемм 9.14 и 8.20, (i) имеем $\mathcal{W}_\alpha(\mathcal{L}(P)) \leq 1$. Заметим также, что из условия 10.5, (ii) следует $\#N_{1|3} \leq \#\mathbf{R}_\alpha(\Delta)$. Следовательно,

$$\sum_{S \in N_1} \mathcal{W}_\alpha(\mathcal{L}(S)) \leq \#\mathbf{R}_\alpha(\Delta).$$

Для оценки второго слагаемого $\zeta \sum_{S \in P_1} \overline{\mathcal{W}}_{\alpha-1}(\mathcal{L}(S))$ воспользуемся предложением 10.4, посылка которого верна в силу неравенства $\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta) - 2\chi(\Delta) \geq 1$ и соотношений (9.1) и (9.3); имеем

$$\begin{aligned} \sum_{S \in P_1} \overline{\mathcal{W}}_{\alpha-1}(\mathcal{L}(S)) &\leq \eta(\#\mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta^{\alpha-1}) - 2\chi(\Delta^{\alpha-1})) \\ &\leq 2\eta(\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta) - 2\chi(\Delta)) + 2\eta\chi(\Delta) + 2\eta\#\mathbf{R}_\alpha(\Delta). \end{aligned} \quad (10.10)$$

В результате получаем

$$\sum_{S \in \mathcal{X}_\alpha(\Delta)} \overline{\mathcal{W}}_\alpha(\mathcal{L}(S)) \leq (1 + 2\zeta\eta)\#\mathbf{R}_\alpha(\Delta) + 2\zeta\eta(\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta) - 2\chi(\Delta)) + 2\zeta\eta\chi(\Delta). \quad (10.11)$$

Если $\#\mathbf{R}_\alpha(\Delta) = 0$, то искомое неравенство (10.9) легко следует из (10.11) с учетом неравенства $\chi(\Delta) \leq 1$. Пусть $\#\mathbf{R}_\alpha(\Delta) \geq 1$. Тогда из леммы 10.5 следует $\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta) - 2\chi(\Delta) \geq 3$. Подставляя оценку из леммы 10.5 в (10.11), получаем

$$\sum_{S \in \mathcal{X}_\alpha(\Delta)} \overline{\mathcal{W}}_\alpha(\mathcal{L}(S)) \leq (0,35(1 + 2\zeta\eta) + 2\zeta\eta)(\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta) - 2\chi(\Delta)) + 2\zeta\eta\chi(\Delta).$$

Подставляя значения параметров ζ и η , легко убедиться, что при $\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta) - 2\chi(\Delta) \geq 3$ значение выражения в правой части полученного неравенства меньше $\eta(\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta) - 2\chi(\Delta))$.

10.7. ЛЕММА. Пусть Δ – дисковая B -диаграмма ранга α и $\delta\Delta \approx Ru$, где $\mathcal{X}_\alpha(\Delta) = \{R\}$ и $\mathcal{Y}_\alpha(\Delta) = \{u\}$. Пусть $\mathcal{S}$ – карта примыканий ранга $\alpha - 1$ на $\Delta^{\alpha-1}$. Предположим, Δ и $\mathcal{S}$ удовлетворяют условию 10.5, (i). Тогда Δ не содержит областей ранга α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, лемма неверна. Выберем контрпример, состоящий из диаграммы Δ и карты примыканий $\mathcal{S}$ ранга $\alpha - 1$ на $\Delta^{\alpha-1}$ так, чтобы значение $\#\mathbf{R}_\alpha(\Delta)$ было минимально возможным. Если Δ и $\mathcal{S}$ удовлетворяют условию 10.5, (ii), то мы получаем противоречие с леммой 10.5. Нам остается вывести противоречие в случае, когда не выполнено условие 10.5, (ii). Допустим, условие 10.5, (ii) не выполнено, т.е. для некоторой области $A \in \mathbf{R}_\alpha(\Delta)$ граничный цикл δA имеет две поддиаграммы примыкания $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{S}$ к участку границы R . Пусть

$\delta\Pi_i \approx P_i v_i Q_i w_i$ ($i = 1, 2$), где P_i, Q_i – участки примыкания, $\delta A \approx P_1 S_1 P_2 S_2$ и $R = R_0 Q_1 R_1 Q_2 R_2$ (см. рис. 27). Пусть Δ' – дисковая поддиаграмма диаграммы Δ с граничным циклом $\delta\Delta' \approx R_1 v_2^{-1} S_2 w_1^{-1}$. Определим на Δ' разбиение границы типа В, полагая

$$\mathcal{X}_\alpha(\Delta') = \{R_1\}, \quad \mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta') = \{v_2^{-1}, w_1^{-1}\} \quad \text{и} \quad \mathcal{Z}_\alpha(\Delta') = \{S_2\}.$$

Так как, очевидно, $\Delta'^{\alpha-1} \in \mathcal{T}(\Delta^{\alpha-1}, \{\Pi_1, \Pi_2\})$, то по лемме 9.22 множество $\mathcal{S}_1$ поддиаграмм примыкания $\Pi \in \mathcal{S}$, содержащихся в $\Delta'^{\alpha-1}$, образует карту примыканий ранга $\alpha - 1$ на $\Delta'^{\alpha-1}$. Из выполнения условия 10.5, (i) для Δ и $\mathcal{S}$ вытекает выполнение этого условия для Δ' и $\mathcal{S}_1$. Но так как $\#\mathbf{R}_\alpha(\Delta') < \#\mathbf{R}_\alpha(\Delta)$, мы получаем противоречие в выборе Δ и $\mathcal{S}$.

Рис. 27

10.8. ЛЕММА. Пусть Δ – В-диаграмма ранга α и $\mathcal{S}$ – карта примыкания ранга $\alpha - 1$ на $\Delta^{\alpha-1}$. Предположим, Δ и $\mathcal{S}$ удовлетворяют условию 10.5, (i) (в частности, в силу леммы 10.1, (ii) это верно в случае, если Δ есть приведенная В-диаграмма ранга α). Тогда верны следующие утверждения.

(i) Пусть $A \in \mathbf{R}_\alpha(\Delta)$ и $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{S}$ – две поддиаграммы примыкания граничного цикла области A к главному участку S ранга α диаграммы Δ . Пусть $\delta\Pi_i \approx P_i v_i Q_i w_i$ ($i = 1, 2$), где P_i, Q_i – участки примыкания, $P_1 X P_2$ входит в δA и $Q_2 Y Q_1$ входит в S (см. рис. 28). Тогда поддиаграмма Δ' диаграммы Δ , ограниченная замкнутым путем $X w_2^{-1} Y v_1^{-1}$, не является односвязной.

(ii) Пусть $S \in \mathcal{X}_\alpha(\Delta)$ и $\Pi \in \mathcal{S}$ – поддиаграмма примыкания S к S . Пусть $\delta\Pi \approx P v Q w$, где P, Q – участки примыкания и $P Y Q$ входит в S (см. рис. 29). Тогда поддиаграмма Δ' диаграммы Δ , ограниченная замкнутым путем $Y v^{-1}$, не является односвязной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Допустим, Δ' – односвязная поддиаграмма. Определим на Δ' разбиение границы типа В, полагая $\mathcal{X}_\alpha(\Delta') = \{Y\}$, $\mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta') = \{v_2^{-1}, w_1^{-1}\}$ и $\mathcal{Z}_\alpha(\Delta') = \{X\}$. Рассмотрим в силу леммы 9.22 карту примыканий ранга $\alpha - 1$ на

Рис. 28

Рис. 29

$\Delta'^{\alpha-1}$, образованную поддиаграммами примыкания $\Pi \in \mathcal{S}$, содержащимися в Δ' , по лемме 10.7 получаем, что Δ' не содержит областей ранга α . Отсюда следует $\Delta' \in \mathcal{T}(\Delta^{\alpha-1}, \{\Pi_1, \Pi_2\})$, и так как $(\mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta'), \chi(\Delta')) = (2, 1)$, мы приходим к противоречию с леммой 9.20.

Для доказательства (ii) проходят те же рассуждения, нужно лишь определить на диаграмме Δ' разбиение границы ранга α типа В, полагая $\mathcal{X}_{\alpha}(\Delta') \Leftarrow \{Y\}$, $\mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta') \Leftarrow \{v^{-1}\}$ и $\mathcal{Z}_{\alpha}(\Delta') \Leftarrow \emptyset$.

10.9. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть Δ – приведенная В-диаграмма ранга α и $\mathcal{S}$ – карта примыканий ранга $\alpha - 1$ на диаграмме $\Delta^{\alpha-1}$. Пусть $A \in \mathbf{R}_{\alpha}(\Delta)$, и пусть $t(S)$ обозначает число поддиаграмм примыкания $\Pi \in \mathcal{S}$ граничного цикла области A к главному участку S ранга α диаграммы Δ . Тогда верны следующие утверждения.

- (i) Если Δ – дисковая диаграмма, то $t(S) \leq 1$ для любого $S \in \mathcal{X}_{\alpha}(\Delta)$.
- (ii) Если Δ – кольцевая диаграмма, то $t(S) \leq 1$, если S – циклический участок границы, и $t(S) \leq 2$, если S – нециклический участок границы диаграммы Δ . При этом в каждый из двух граничных циклов диаграммы Δ входит не более одного участка границы $S \in \mathcal{X}_{\alpha}(\Delta)$ с $t(S) = 2$.
- (iii) Если Δ имеет три граничных цикла и все они принадлежат $\mathcal{X}_{\alpha}(\Delta)$, то $t(S) \leq 2$ и $\sum_{S \in \mathcal{X}_{\alpha}(\Delta)} t(S) \leq 4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 9.23 с использованием леммы 10.8, (i) вместо леммы 9.20.

10.10 ЛЕММА. Пусть Δ, Δ' – A -диаграммы ранга α и $\Delta' = \Delta \cup \Theta$, где имеет место один из двух случаев (i) или (ii):

(i) $\delta\Theta = P^{-1}Q$, $\Delta \cap \Theta = \text{supp } P$, $vPw \in \mathcal{Y}_\alpha(\Delta)$ и $\mathcal{Y}_\alpha(\Delta') = (\mathcal{Y}_\alpha(\Delta) \setminus \{vPw\}) \cup \{vQw\}$ (рис. 30 слева);

(ii) $\delta\Theta = u^{-1}Su'T$, $\Delta \cap \Theta = \text{supp } u$, $u \in \mathcal{Y}_\alpha(\Delta)$, $\mathcal{L}(S) \sqsubseteq \mathcal{L}(T) \sqsubseteq 1$ и $\mathcal{Y}_\alpha(\Delta') = (\mathcal{Y}_\alpha(\Delta) \setminus \{u\}) \cup \{u'\}$ (рис. 30 справа).

Тогда Δ – простая A -диаграмма ранга α в том и только том случае, если Δ' – простая A -диаграмма ранга α .

Рис. 30

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, Δ не является простой A -диаграммой ранга α . Тогда существует последовательность внутренних преобразований ранга α , переводящая Δ в некоторую A -диаграмму Δ^* ранга α , обладающую невырожденной связкой x ранга α . В силу замечания 9.5 можно считать, что Δ^* есть поддиаграмма диаграммы Δ'^* , полученной из Δ' соответствующей последовательностью внутренних преобразований ранга α . Тогда, как легко видеть из определений 9.10 и 9.11, x – невырожденная связка ранга α на Δ'^* , и, следовательно, Δ' не является простой A -диаграммой ранга α .

Пусть Δ' не является простой A -диаграммой ранга α . Мы должны показать, что в этом случае и Δ не является простой. Заметим, что в силу определения 9.12 и замечания 9.5 свойство A -диаграммы ранга α быть простой или не простой сохраняется при выполнении операций измельчения. Поэтому, произведя утолщение пути P , или, соответственно, u (см. 4.9), можно считать, что P (или u) входит в граничный цикл некоторой дисковой поддиаграммы Σ диаграммы Δ . Пусть Δ'' – A -диаграмма ранга α , полученная приклеиванием к Δ' зеркальной копии Θ' диаграммы Θ , как изображено на рис. 31, где, соответственно, $\mathcal{L}(P') \sqsubseteq \mathcal{L}(P)$, $\mathcal{Y}_\alpha(\Delta'') = (\mathcal{Y}_\alpha(\Delta) \setminus \{vPw\}) \cup \{vP'w\}$ в (i) и $\mathcal{L}(u'') \sqsubseteq \mathcal{L}(u)$, $\mathcal{L}(S') \sqsubseteq \mathcal{L}(T') \sqsubseteq 1$, $\mathcal{Y}_\alpha(\Delta'') = (\mathcal{Y}_\alpha(\Delta) \setminus \{u\}) \cup \{u''\}$ в (ii). По доказанному при $\Delta := \Delta'$ и $\Delta' := \Delta''$ диаграмма Δ'' не является простой. Но, с точностью до изотопной деформации, Δ'' получается из Δ заменой дисковой поддиаграммы Σ на $\Sigma \cup \Theta \cup \Theta'$. Тогда из определения 9.12 следует, что Δ – не простая A -диаграмма ранга α .

Рис. 31

10.11. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если Δ – простая A -диаграмма ранга α и $\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta) - 2\chi(\Delta) \geq 1$, то

$$\sum_{S \in \mathcal{X}_\alpha(\Delta)} \overline{W}_\alpha(\mathcal{L}(S)) \leq \eta(\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta) - 2\chi(\Delta)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что для некоторого $S \in \mathcal{X}_\alpha(\Delta)$ слово $\mathcal{L}(S)$ непусто. Заметим, что в силу определения 9.12 простота диаграммы Δ сохраняется при внутренних преобразованиях ранга α . В частности, произведя измельчение диаграммы Δ , можно считать, что на Δ задано некоторое разбиение границы ранга α типа В. В силу леммы 10.10, (i) простота Δ сохраняется при выполнении операции добавления области ранга α . Будем считать, что на множестве всех простых (как A -диаграмма ранга α) B -диаграмм ранга α , обладающих данным набором параметров $\sum_{S \in \mathcal{X}_\alpha(\Delta)} \overline{W}_\alpha(\mathcal{L}(S))$, $\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta)$ и $\chi(\Delta)$, диаграмма Δ удовлетворяет следующим условиям:

- (i) значение $\#\mathbf{R}_\alpha(\Delta)$ минимально возможное;
- (ii) для данного значения $\#\mathbf{R}_\alpha(\Delta)$ значение $\#\mathcal{Z}_\alpha(\Delta)$ минимально возможное;
- (iii) для данных значений $\#\mathbf{R}_\alpha(\Delta)$ и $\#\mathcal{Z}_\alpha(\Delta)$ значение $\sum_{S \in \mathcal{X}_{\alpha-1}(\Delta^{\alpha-1})} |\mathcal{L}(S)|$ минимально возможное.

Тогда в силу предложения 9.9 Δ – приведенная B -диаграмма ранга α . Используя, кроме того, предложение 9.19, можно считать, что на $\Delta^{\alpha-1}$ задана некоторая карта примыканий $\mathcal{S}$ ранга $\alpha - 1$. В силу леммы 10.1, (ii) Δ и $\mathcal{S}$ удовлетворяют условию 10.5, (i). Следовательно, в силу леммы 10.6 в этом случае нам достаточно проверить выполнение условий 10.5, (ii) и 10.6, (i). Допустим, хотя бы одно из этих условий не выполнено. Рассмотрим два случая.

Случай 1: Не выполнено условие 10.5, (ii), т.е. для некоторой области $A \in \mathbf{R}_\alpha(\Delta)$ имеются две поддиаграммы примыкания $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{S}$ граничного цикла δA к некоторым главным участкам ранга α диаграммы Δ . Пусть $\delta \Pi_i \approx P_i v_i Q_i w_i$ ($i = 1, 2$), где P_i и Q_i – участки примыкания, $\delta A \approx P_1 S_1 P_2 S_2$ и Q_i входит в $R_i \in \mathcal{X}_\alpha(\Delta)$ (см. рис. 32). Согласно определению 9.10 пути $x_1 \rightleftharpoons w_1 S_2^{-1} v_2$ и $x_2 \rightleftharpoons w_2 S_1^{-1} v_1$ являются связками ранга α на Δ . Так как Δ – простая A -диаграмма ранга α , то x_1 – вырожденная связка ранга α на Δ . Из леммы 10.8, (i) следует,

Рис. 32

что случай, когда путь x_1 или x_1^{-1} гомотопен некоторому подпути участка границы $R_1 = R_2$, невозможен. Рассмотрим остальные случаи из определения 9.11.

Случай 1A: Путь x_1 гомотопен пути MuN , где M – конец пути R_1 , N – начало пути R_2 , $u \in \mathcal{Y}_\alpha(\Delta)$ и $\mathcal{L}(M) \subseteq \mathcal{L}(N) \subseteq 1$. Пусть $\Delta' \triangleq \Delta - \Delta_1$, где Δ_1 – дисковая поддиаграмма диаграммы Δ с граничным циклом $\delta\Delta_1 \approx MuNv_2^{-1}P_2^{-1}S_1^{-1}P_1^{-1}w_1^{-1}$ (см. рис. 33). Пусть $R_1 = R'_1M$, $R_2 = NR'_2$ при $R_1 \neq R_2$, $R_1 = NR'_1M$ при $R_1 = R_2$, и пусть $u = u_1Tu_2$, где $u_1, u_2 \in \mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta)$ и $T \in \mathcal{Z}_\alpha(\Delta)$, в случае, если $u \notin \mathcal{Y}_\alpha(\Delta)$. Определим на Δ' разбиение границы ранга α типа B, полагая $\mathcal{X}_\alpha(\Delta') \triangleq (\mathcal{X}_\alpha(\Delta) \setminus \{R_1, R_2\}) \cup \{R'_1, R'_2\}$ или $\mathcal{X}_\alpha(\Delta') \triangleq (\mathcal{X}_\alpha(\Delta) \setminus \{R_1\}) \cup \{R'_1\}$ соответственно в случаях $R_1 \neq R_2$ и $R_1 = R_2$, и $\mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta') \triangleq (\mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta) \setminus \{u\}) \cup \{w_1, v_2\}$, $\mathcal{Z}_\alpha(\Delta') \triangleq \mathcal{Z}_\alpha(\Delta) \cup \{P_1S_1P_2\}$ или $\mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta') \triangleq (\mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta) \setminus \{u_1, u_2\}) \cup \{w_1, v_2\}$, $\mathcal{Z}_\alpha(\Delta') \triangleq (\mathcal{Z}_\alpha(\Delta) \setminus \{T\}) \cup \{P_1S_1P_2\}$ соответственно в случаях, когда $u \in \mathcal{Y}_\alpha(\Delta)$ и $u \notin \mathcal{Y}_\alpha(\Delta)$. По лемме 10.10, (ii) Δ' – простая A-диаграмма ранга α . Имеем $\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta') = \#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta)$, $\chi(\Delta') = \chi(\Delta)$, и так как слова $\mathcal{L}(M)$ и $\mathcal{L}(N)$ пусты, то $\sum_{S \in \mathcal{X}_\alpha(\Delta')} \overline{W}_\alpha(\mathcal{L}(S)) = \sum_{S \in \mathcal{X}_\alpha(\Delta)} \overline{W}_\alpha(\mathcal{L}(S))$. Но поскольку $R_\alpha(\Delta') \leq \#R_\alpha(\Delta) - 1$, мы получаем противоречие с условием (i).

Рис. 33

Случай 1B: Путь x_1^{-1} гомотопен пути MuN , где M – конец пути R_2 , N – начало пути R_1 , $u \in \mathcal{Y}_\alpha(\Delta)$ и $\mathcal{L}(M) \sqsubseteq \mathcal{L}(N) \sqsubseteq 1$. Тогда для некоторых путей M_1 и N_1 имеем $M = Q_2M_1$, $N = N_1Q_1$ и $\mathcal{L}(M_1) \sqsubseteq \mathcal{L}(N_1) \sqsubseteq 1$. Так как при этом путь x_2 гомотопен пути M_1uN_1 , то этот случай симметричен случаю 1A с заменой x_1 на x_2 .

Случай 2: Не выполнено условие 10.6, (i), т.е. $\mathcal{S}$ содержит поддиаграмму примыкания Π_0 некоторого участка границы $R \in \mathcal{X}_\alpha(\Delta)$ к участку границы $S \in \mathcal{X}_\alpha(\Delta) \cup \mathcal{Z}_\alpha(\Delta)$. Пусть $\delta\Pi_0 \approx PvQw$, где P, Q – участки примыкания, P входит в R и Q входит в S . Так как из неравенства $\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta) - 2\chi(\Delta) \geq 1$ следует $\Pi_0 \neq \Delta$, то один из путей v или w является невырожденной связкой ранга $\alpha - 1$ на $\Delta^{\alpha-1}$. Будем считать, что v – невырожденная связка ранга $\alpha - 1$ на $\Delta^{\alpha-1}$ (случай для w рассматривается аналогично). Рассмотрим два подслучая.

Случай 2A: $S \in \mathcal{X}_\alpha(\Delta)$. Из определения 9.10 и леммы 5.12 следует, что v – связка ранга α на Δ . Так как Δ – простая A -диаграмма ранга α , то v – вырожденная связка ранга α на Δ . Как легко следует из леммы 10.8, (ii), пути v и v^{-1} не могут быть гомотопны никакому подпути главного участка ранга α диаграммы Δ . Тогда при некотором $\epsilon = \pm 1$ путь v^ϵ гомотопен пути вида MuN , где M – конец пути R , N – начало пути S , $u \in \mathcal{Y}_\alpha(\Delta)$ и $\mathcal{L}(M) \sqsubseteq \mathcal{L}(N) \sqsubseteq 1$. Пусть сначала $\epsilon = 1$ (см. рис. 34 слева). Пусть $\Delta' = \Delta - \Delta_1$, где Δ_1 – дисковая поддиаграмма диаграммы Δ с граничным циклом $\delta\Delta_1 \approx MuNv^{-1}$. Пусть, как и в случае 1A, $R = R'M$, $S = NS'$ при $R \neq S$, $R = NR'M$ при $R = S$, и, в случае $u \notin \mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta)$, $u = u_1Tu_2$, где $u_1, u_2 \in \mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta)$ и $T \in \mathcal{Z}_\alpha(\Delta)$. Определим на Δ' разбиение границы ранга α типа В, полагая $\mathcal{X}_\alpha(\Delta') = (\mathcal{X}_\alpha(\Delta) \setminus \{R, S\}) \cup \{R', S'\}$ при $R \neq S$, $\mathcal{X}_\alpha(\Delta') = (\mathcal{X}_\alpha(\Delta) \setminus \{R_1\}) \cup \{R'_1\}$ при $R = S$, $\mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta') = (\mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta) \setminus \{u\}) \cup \{v\}$, $\mathcal{Z}_\alpha(\Delta') = \mathcal{Z}_\alpha(\Delta)$, если $u \in \mathcal{Y}_\alpha(\Delta)$, и $\mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta') = (\mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta) \setminus \{u_1, u_2\}) \cup \{v\}$, $\mathcal{Z}_\alpha(\Delta') = \mathcal{Z}_\alpha(\Delta) \setminus \{T\}$, если $u \notin \mathcal{Y}_\alpha(\Delta)$. Как и случае 1A, получаем, что Δ' – простая A -диаграмма ранга α . Кроме того, имеем $\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta') = \#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta)$, $\chi(\Delta') = \chi(\Delta)$ и, так как слова $\mathcal{L}(M)$ и $\mathcal{L}(N)$ пусты, то $\sum_{S \in \mathcal{X}_\alpha(\Delta')} \bar{W}_\alpha(\mathcal{L}(S)) = \sum_{S \in \mathcal{X}_\alpha(\Delta)} \bar{W}_\alpha(\mathcal{L}(S))$. По лемме 9.20 при $\Delta := \Delta^{\alpha-1}$ и $\mathcal{S}_1 := \{\Pi_0\}$ невозможен случай, когда $\mathbf{R}_\alpha(\Delta_1) = \emptyset$ и $u \in \mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta)$. Пусть $\mathbf{R}_\alpha(\Delta_1) \neq \emptyset$ или $u \notin \mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta)$. Тогда $\#\mathbf{R}_\alpha(\Delta') < \#\mathbf{R}_\alpha(\Delta)$ или $\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta') < \#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta)$ и, беря Δ' в качестве Δ , получаем противоречие с одним из условий (i) или (ii) выбора диаграммы Δ .

Рис. 34

Пусть теперь $\epsilon = -1$. Тогда $w \notin \mathcal{Y}_\alpha(\Delta)$, так как иначе получаем $M = Q$, $u = w$ и $N = P$, и, значит, v – вырожденная связка ранга $\alpha - 1$ на $\Delta^{\alpha-1}$. Следовательно,

w – невырожденная связка ранга $\alpha - 1$ на $\Delta^{\alpha-1}$. В этом случае имеем $M = QM_1$ и $N = N_1P$, где $\mathcal{L}(M_1) \subseteq \mathcal{L}(N_1) \subseteq 1$, пути w и M_1uN_1 гомотопны (см. рис. 34 справа), и проходят симметричные рассуждения. Рассмотрение случая 2А завершено.

Случай 2В: Q входит в некоторый участок границы $T \in \mathcal{Z}_\alpha(\Delta)$. Пусть пути $R_1u_1Tu_2$ и $u_1Tu_2R_2$ входят в граничный цикл диаграммы Δ , где $u_1, u_2 \in \mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta)$, $R_1, R_2 \in \mathcal{X}_\alpha(\Delta)$ ($i = 1, 2$) (возможно, $R_1 = R_2$), и пусть $T = T_1QT_2$ (T_1 – пустой путь в случае $v \in \mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta)$). Добавив к Δ две новые вершины, лежащие соответственно на R_1 и R_2 , можно считать, что ребро e_1 есть конец пути R_1 и ребро e_2 есть начало пути R_2 , где $\mathcal{L}(e_1) \subseteq \mathcal{L}(e_2) \subseteq 1$. Произведя далее измельчение диаграммы Δ , как описано в п. 4.9, можно считать, что вершины $\iota(e_1)$ и $\tau(w)$ соединены простым путем x_1 с $\mathcal{L}(x_1) \subseteq \mathcal{L}(u_1T_1Qw)$, а вершины $\tau(e_2)$ и $\tau(w)$ соединены простым путем x_2 с $\mathcal{L}(x_2) \subseteq \mathcal{L}(u_2^{-1}T_2^{-1}w)$, причем x_1 и x_2 не имеют отличных от $\iota(x_i)$ и $\tau(x_i)$ вершин в пересечении с границей диаграммы Δ (см. рис. 35). Согласно определению 9.10 пути x_1 и x_2 являются связками ранга α на Δ , а в силу простоты Δ – вырожденными связками ранга α на Δ . Заметим, что пути x_1 и x_2^{-1} не могут быть гомотопны путям, входящим в качестве подпутей в главные участки ранга α диаграммы Δ . Рассмотрим остальные случаи из определения 9.11.

Рис. 35

Случай 2В1: $R = R_2$ и путь x_1 гомотопен пути вида e_1ue_2M , где e_2M – начало R и $\mathcal{L}(M) \subseteq 1$. Пусть $\Delta' = \Delta - \Delta_1$, где Δ_1 – дисковая поддиаграмма диаграммы Δ с граничным циклом $\delta\Delta_1 \approx e_2Mw^{-1}T_2u_2$. Определим на Δ' разбиение границы ранга α типа В, полагая

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_\alpha(\Delta') &= (\mathcal{X}_\alpha(\Delta) \setminus \{R\}) \cup \{R'\}, \quad \text{где } R = e_2MR', \\ \mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta') &= (\mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta) \setminus \{u_2\}) \cup \{w\}, \\ \mathcal{Z}_\alpha(\Delta') &= (\mathcal{Z}_\alpha(\Delta) \setminus \{T\}) \cup \{T_1Q\}.\end{aligned}$$

Как и выше, получаем, что Δ' – простая A -диаграмма ранга α . Если $\mathbf{R}_\alpha(\Delta_1) \neq \emptyset$, то $\#\mathbf{R}_\alpha(\Delta') < \#\mathbf{R}_\alpha(\Delta)$ вопреки условию (i) выбора Δ . Если же $\mathbf{R}_\alpha(\Delta_1) = \emptyset$, то в силу невырожденности связки w ранга $\alpha - 1$ на $\Delta^{\alpha-1}$ имеем $\mathcal{L}(T_2) \not\subseteq 1$, и поэтому $\sum_{S \in \mathcal{X}_{\alpha-1}(\Delta'^{\alpha-1})} |\mathcal{L}(S)| < \sum_{S \in \mathcal{X}_{\alpha-1}(\Delta^{\alpha-1})} |\mathcal{L}(S)|$. Так как при этом $\#\mathbf{R}_\alpha(\Delta') = \#\mathbf{R}_\alpha(\Delta)$ и $\#\mathcal{Z}_\alpha(\Delta') = \#\mathcal{Z}_\alpha(\Delta)$, получаем противоречие с условием (iii).

Случай 2B2: $R = R_1$ и путь x_2^{-1} гомотопен пути вида Ne_1ue_2 , где Ne_1 – конец пути R и $\mathcal{L}(N) \supseteq 1$. В этом случае, взяв в качестве Δ_1 дисковую поддиаграмму диаграммы Δ с граничным циклом $\delta\Delta_1 \approx Ne_1uT_1Qw$, приходим к противоречию аналогично случаю 2B1.

Случай 2B3: $R = R_1$ и путь x_1^{-1} гомотопен некоторому подпути M пути R . Так как по условию имеет место хотя бы одно из неравенств $\chi(\Delta) \leq 0$ или $\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta) \geq 3$, то в этом случае путь x_2 не гомотопен никакому подпути главного участка ранга α диаграммы Δ и никакому пути вида $M'u'N'$, где M' и N' – соответственно конец и начало путей из $\mathcal{X}_\alpha(\Delta)$ и $u' \in \mathcal{Y}_\alpha(\Delta)$. Отсюда следует, что имеет место уже рассмотренный случай 2B2.

Случай 2B4: $R = R_2$ и путь x_2 гомотопен некоторому подпути M пути R . Подобно случаю 2B3, этот случай сводится к случаю 2B1.

Случай 2B5: Ни один из случаев 2B1–2B4 ни имеет места. Тогда для x_1 и x_2 остаются единственные возможности из определения 9.11: пути x_1^{-1} и x_2 гомотопны путям $M_1y_1N_1$ и $M_2y_2N_2$ соответственно, где $R = N_2M_1$, $R_1 = N_1e_1$, $R_2 = e_2M_2$, $y_1, y_2 \in \mathcal{Y}_\alpha(\Delta)$ и $\mathcal{L}(M_i) \supseteq \mathcal{L}(N_i) \supseteq 1$ ($i = 1, 2$) (см. рис. 36). Так как в этом случае Δ – дисковая диаграмма, то $\mathcal{X}_\alpha(\Delta) = \{R, R_1, R_2\}$, и мы получаем противоречие со сделанным в начале доказательства предположением о непустоте слова $\mathcal{L}(S)$ хотя бы одного $S \in \mathcal{X}_\alpha(\Delta)$. Предложение 10.11 доказано.

Рис. 36

10.12. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть Δ – B -диаграмма ранга α , $(\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta), \chi(\Delta)) \neq (0, 1)$ и $\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta) - 2\chi(\Delta) \leq 2$. Пусть $\mathcal{S}$ – карта примыканий ранга $\alpha - 1$ на $\Delta^{\alpha-1}$ и выполнено условие 10.5, (i) (в частности, в силу леммы 10.1, (ii) это верно в случае, если Δ есть приведенная B -диаграмма ранга α). Тогда граничный цикл каждой области $A \in \mathbf{R}_\alpha(\Delta)$ имеет не менее двух поддиаграмм примыкания $\Pi \in \mathcal{S}$ к главным участкам ранга α диаграммы Δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (индукция по $\#\mathbf{R}_\alpha(\Delta)$). Допустим, лемма неверна. Выберем контрпример $(\Delta, \mathcal{S})$ с минимальным значением $\#\mathbf{R}_\alpha(\Delta)$. Пусть $A_0 \in \mathbf{R}_\alpha(\Delta)$ – область, граничный цикл которой имеет не более одной поддиаграммы примыкания $\Pi \in \mathcal{S}$ к главным участкам ранга α диаграммы Δ . В силу леммы 10.5 для получения противоречия достаточно доказать выполнение условия 10.5, (ii).

Допустим, условие 10.5, (ii) не выполнено, т.е. найдется область $A \in \mathbf{R}_\alpha(\Delta)$ и поддиаграммы примыкания $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{S}$ граничного цикла δA соответственно к главным участкам R_1 и R_2 ранга α диаграммы Δ . Пусть $\delta \Pi_i \approx P_i v_i Q_i w_i$ ($i = 1, 2$), где P_i, Q_i – участки примыкания, P_i входит в δA и Q_i входит в R_i . Пусть $\delta A \approx P_1 S_1 P_2 S_2$ (см. рис. 32). Пусть (не обязательно связная) диаграмма Δ' получена удалением области A и поддиаграмм Π_1, Π_2 из Δ , и пусть Δ_1 – связная компонента диаграммы Δ' , содержащая область A_0 . Определим на Δ_1 разбиение границы ранга α типа B , полагая

$$\mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta_1) = \{x \in \mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta) \cup \{v_1^{-1}, v_2^{-1}, w_1^{-1}, w_2^{-1}\} \mid x \text{ входит в некоторый граничный цикл } \Delta_1\} \quad (10.12)$$

и

$$\mathcal{Z}_\alpha(\Delta_1) = \{R \in \mathcal{Z}_\alpha(\Delta) \cup \{S_1, S_2\} \mid R \text{ входит в некоторый граничный цикл } \Delta_1\}. \quad (10.13)$$

Очевидно, если Q_1 и Q_2 входят в разные граничные циклы диаграммы Δ , то $\Delta' = \Delta_1$, а если Q_1 и Q_2 входят в один граничный цикл диаграммы Δ , то Δ' состоит из двух связных компонент Δ_1 и Δ_2 . Из формулы (4.1) легко видеть, что в первом случае $\chi(\Delta_1) = \chi(\Delta) + 1$, а во втором случае $\chi(\Delta_1) + \chi(\Delta_2) = \chi(\Delta) + 1$, в частности, $\chi(\Delta_1) \geq \chi(\Delta)$. Далее, имеем $\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta_1) = \#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta) + 2$ в случае $\Delta' = \Delta_1$ и $\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta_1) + \#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta_2) = \#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta) + 2$ в случае $\Delta' = \Delta_1$, где $\mathcal{Y}_\alpha(\Delta_2)$ – множество участков границы $u \in \mathcal{Y}_\alpha(\Delta)$, входящих в границу Δ_2 . Во втором случае, если $\chi(\Delta_2) = 1$, то в силу леммы 10.8, (i) $\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta_2) > 1$, и тогда $\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta_1) \leq \#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta)$. Таким образом, во всех случаях имеем либо $\chi(\Delta_1) \geq \chi(\Delta) + 1$ и $\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta_1) \leq \#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta) + 2$, либо $\chi(\Delta_1) = \chi(\Delta)$ и $\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta_1) \leq \#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta)$. Отсюда следует $\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta_1) - 2\chi(\Delta_1) \leq \#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta) - 2\chi(\Delta) \leq 2$. Так как $\mathcal{Y}_\alpha(\Delta_1) \neq \emptyset$, то $(\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta_1), \chi(\Delta_1)) \neq (0, 1)$, и так как, очевидно, $\Delta_1^{\alpha-1} \in \mathcal{T}(\Delta^{\alpha-1}, \{\Pi_1, \Pi_2\})$, то по лемме 9.22 множество поддиаграмм примыкания $\Pi \in \mathcal{S}$, содержащихся в $\Delta_1^{\alpha-1}$, образует карту примыканий ранга $\alpha - 1$ на $\Delta_1^{\alpha-1}$. Так как $\#\mathbf{R}_\alpha(\Delta_1) < \#\mathbf{R}_\alpha(\Delta)$, то, рассматривая Δ_1 и $\mathcal{S}_1$ в качестве Δ и $\mathcal{S}$, мы приходим к противоречию с выбором Δ и $\mathcal{S}$.

10.13. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть Δ – приведенная B -диаграмма ранга α и $\mathcal{S}$ – карта примыканий ранга $\alpha - 1$ на A -диаграмме $\Delta^{\alpha-1}$ ранга $\alpha - 1$. Пусть $A \in \mathbf{R}_\alpha(\Delta)$, $\mathcal{L}(A) \approx A^n$, где $A \in \mathcal{E}_\alpha$, и пусть $\{R_1, R_2, \dots, R_t\}$ – множество всех участков примыкания поддиаграмм примыкания $\Pi \in \mathcal{S}$ граничного цикла области A к главным участкам ранга α диаграммы Δ . Тогда верны следующие утверждения.

(i) Если Δ – дисковая диаграмма и $2 \leq \#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta) \leq 4$, то

$$\frac{1}{|A|} \sum_{i=1}^t |\mathcal{L}(R_i)| \geq n - (p + 16) \#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta).$$

(ii) Если Δ – кольцевая диаграмма и $\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta) \leq 2$, то

$$\frac{1}{|A|} \sum_{i=1}^t |\mathcal{L}(R_i)| \geq n - 2p - 32 - (2p + 16) \#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta).$$

(iii) Если Δ имеет три граничных цикла и $\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta) = 0$, то

$$\frac{1}{|A|} \sum_{i=1}^t |\mathcal{L}(R_i)| \geq n - 6p - 68.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ослабим посылку предложения, считая вместо условия о том, что диаграмма Δ приведена, выполненным условие 10.5, (i) (это можно сделать в силу леммы 10.1, (ii)). Утверждения (i)–(iii) будем доказывать одновременно, используя индукцию по $\#\mathbf{R}_\alpha(\Delta)$.

Случай 1: $\#\mathbf{R}_\alpha(\Delta) = \{A\}$ (база индукции). Будем использовать обозначения $N(A)$, $N_i(A)$ и $P(A)$ из доказательства леммы 10.5. В этих обозначениях, в частности, $\{R_1, R_2, \dots, R_t\} = N_1(A)$. Имеем

$$\frac{1}{|A|} \sum_{S \in N_1(A)} |\mathcal{L}(S)| = n - \frac{1}{|A|} \sum_{S \in N_2(A) \cup N_3(A)} |\mathcal{L}(S)| - \frac{1}{|A|} \sum_{S \in P(A)} |\mathcal{L}(S)|. \quad (10.14)$$

Используя предложения 10.4, 8.22, (ii), лемму 8.20, (ii) и соотношения (9.3), (9.1), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{|A|} \sum_{S \in P(A)} |\mathcal{L}(S)| &\leq 6(\#\mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta_{\alpha-1}) - 2\chi(\Delta_{\alpha-1})) + 2\#P(A) \\ &\leq 6(2\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta) - 2\chi(\Delta) + 2) + 2\#P(A), \end{aligned}$$

а в силу условия 10.5, (i) имеем

$$\frac{1}{|A|} \sum_{S \in N_2(A) \cup N_3(A)} |\mathcal{L}(S)| \leq p(\#N_2(A) + \#N_3(A)).$$

Далее, имеем $\#P(A) \leq \max\{1, \#N(A)\}$, а из леммы 9.23, (iii)–(v), учитывая неравенство (9.3), легко выводим, что

$$\#N(A) \leq \begin{cases} 2\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta), & \text{если } \chi(\Delta) = 1, \\ 2\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta) + 4, & \text{если } \chi(\Delta) = 0, \\ 10, & \text{если } \chi(\Delta) = -1 \text{ и } \#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta) = 0, \end{cases}$$

и, с учетом неравенства $\#\mathcal{Z}_\alpha(\Delta) \leq \#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta)$,

$$\#N_2(A) + \#N_3(A) \leq \begin{cases} \#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta), & \text{если } \chi(\Delta) = 1, \\ 2\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta) + 2, & \text{если } \chi(\Delta) = 0, \\ 6, & \text{если } \chi(\Delta) = -1 \text{ и } \#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta) = 0. \end{cases}$$

Подставляя все полученные оценки в (10.14), легко убедиться в истинности утверждений (i)–(iii).

Случай 2: $\#\mathbf{R}_\alpha(\Delta) > 1$ (индуктивный шаг). Пусть $\mathbf{B} \in \mathbf{R}_\alpha(\Delta) \setminus \{\mathbf{A}\}$. По лемме 10.12 имеются две поддиаграммы примыкания $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{S}$ граничного цикла $\delta\mathbf{B}$ к главным участкам ранга α диаграммы Δ . Пусть $\delta\Pi_i \approx P_i v_i Q_i w_i$ ($i = 1, 2$), где P_i, Q_i – участки примыкания и $\delta\mathbf{B} \approx P_1 S_1 P_2 S_2$. Пусть поддиаграмма Δ' диаграммы Δ получена удалением области $\mathbf{B}$ и поддиаграмм Π_1, Π_2 из Δ , и пусть Δ_1 – связная компонента диаграммы Δ' , содержащая область $\mathbf{A}$. Определим разбиение границы ранга α типа $\mathbf{B}$ на Δ_1 равенствами (10.12), (10.13), и в силу леммы 9.22 рассмотрим карту примыканий $\mathcal{S}_1$ ранга $\alpha - 1$ на $\Delta_1^{\alpha-1}$, состоящую из поддиаграмм примыкания $\Pi \in \mathcal{S}$, содержащихся в $\Delta_1^{\alpha-1}$. Как в доказательстве предложения 10.12, имеем либо

$$\chi(\Delta_1) \geq \chi(\Delta) + 1 \quad \text{и} \quad \#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta_1) \leq \#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta) + 2, \quad (10.15)$$

либо

$$\chi(\Delta_1) = \chi(\Delta) \quad \text{и} \quad \#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta_1) \leq \#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta). \quad (10.16)$$

Следовательно, $\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta_1) - 2\chi(\Delta_1) \leq \#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta) - 2\chi(\Delta)$. Кроме того, из $\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta_1) \geq 1$ и леммы 10.8, (i) при $\Delta' := \Delta_1$ и $\mathcal{S} := \mathcal{S}_1$ вытекает $\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta_1) - 2\chi(\Delta_1) \geq 0$. Отсюда видно, что истинность посылки одного из утверждений (i)–(iii) влечет истинность посылки одного из утверждений (i)–(iii) при $\Delta := \Delta_1$. Заметим, что при замене Δ на Δ_1 множество $N_1(\mathbf{A})$ не меняется. Тогда из вида правых частей неравенств в (i)–(iii) сразу получаем, что в случае (10.16) соответствующее неравенство (i)–(iii) для диаграммы Δ вытекает из индуктивного предположения для $\Delta := \Delta_1$. В случае (10.15) нужно еще заметить, что правые части неравенств в (i), (ii) при подстановке $\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta) := 2$ больше правой части неравенства в (iii), а правая часть неравенства в (i) при подстановке $\#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta) := \#\mathcal{Y}_\alpha(\Delta) + 2$ становится равной правой части неравенства в (ii).

§ 11. Анализ соотношений в группе $\mathbf{B}_\alpha$ с помощью диаграмм

В этом параграфе мы используем полученные в § 10 результаты о диаграммах ранга α для анализа соотношений равенства и сопряженности в группе $\mathbf{B}_\alpha$.

11.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $u \in \mathcal{H}_\alpha$ и для слова u фиксировано разложение в виде $u \sqsubseteq u_1 Q u_2$, где $u_1, u_2 \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$ и Q – подслово слова B^n при $B \in \mathcal{E}_\alpha$. Предположим, $|Q| \geq 2|B|$, и пусть слово $\hat{Q}$ определено равенством $Q \hat{Q}^{-1} \approx B^n$. Слово $u_1 \hat{Q} u_2 \in \mathcal{H}_\alpha$ будем называть *дополнительным* к u .

Если слово $u \in \mathcal{H}_\alpha$ может быть представлено в виде $u \sqsubseteq u_1 Q u_2$, где $u_1, u_2 \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$, $Q \in \text{Пер}(B)$, $B \in \mathcal{E}_\alpha$ и $|Q| < 2|B|$, то u назовем *ограниченным в ранге α* . В частности, любое слово $u \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$ является ограниченным в ранге α .

Из определения непосредственно вытекает, что если u' – слово, дополнительное к слову $u \in \mathcal{H}_\alpha$, то $u \stackrel{\alpha}{=} u'$.

11.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $X \stackrel{\alpha}{=} uYv$, где $X, Y \in \mathcal{R}_\alpha$ и $u, v \in \mathcal{H}_\alpha$. Пусть для u, v фиксированы некоторые разложения в виде $u \stackrel{\alpha}{=} u_1Qu_2$ и $v \stackrel{\alpha}{=} v_1Rv_2$, где $u_i, v_i \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$ ($i = 1, 2$) и Q, R – подслова слов B^n, C^n соответственно при $B, C \in \mathcal{E}_\alpha$. Тогда верно хотя бы одно из двух следующих утверждений.

(i) $X \stackrel{\alpha-1}{=} \hat{u}Y\hat{v}$, где каждое из слов $\hat{u}$ и $\hat{v}$ либо совпадает с соответствующим словом u или v , либо является дополнительным к нему.

(ii) Для некоторого $r \geq 1$ существуют слова K_i, L_i ($i = 0, 1, \dots, r$), $G_i, H_i, S_i, U_i, T_i, V_i$, элементарные периоды $D_i \in \mathcal{E}_\alpha$ и слова $x_i, y_i, z_i, w_i \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$ ($i = 1, 2, \dots, r$) такие, что выполнены следующие соотношения, где каждое из слов $\hat{u}$ и $\hat{v}$ либо совпадает с соответствующим словом u или v , либо является дополнительным к нему:

$$X \stackrel{\alpha}{=} K_0G_1K_1 \dots G_rK_r, \quad Y \stackrel{\alpha}{=} L_0H_1L_1 \dots H_rL_r, \quad (11.1)$$

$$S_i^{-1}U_iT_iV_i \approx D_i^n \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad (11.2)$$

$$G_i \stackrel{\alpha-1}{=} x_iS_iy_i, \quad H_i \stackrel{\alpha-1}{=} z_iT_iw_i \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad (11.3)$$

$$\begin{cases} K_0 \stackrel{\alpha-1}{=} \hat{u}L_0z_1U_1^{-1}x_1^{-1}, \\ K_i \stackrel{\alpha-1}{=} y_i^{-1}V_i^{-1}w_iL_iz_{i+1}U_{i+1}^{-1}x_{i+1}^{-1} \quad (i = 1, 2, \dots, r-1), \\ K_r \stackrel{\alpha-1}{=} y_r^{-1}V_r^{-1}w_rL_r\hat{v}, \end{cases} \quad (11.4)$$

$$|S_i|, |T_i| > (q - 2p - 32)|D_i| \quad (i = 1, 2, \dots, r). \quad (11.5)$$

Если слова u, v ограничены в ранге α , то в (i) и (ii) можно считать $u \stackrel{\alpha}{=} \hat{u}$ и $v \stackrel{\alpha}{=} \hat{v}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим дисковую B -диаграмму Δ ранга α с граничным циклом $\delta\Delta \approx X^{-1}u_1Qu_2Yv_1Rv_2$, где метки путей X, Y, Q, R, u_i, v_i равны соответственно словам X, Y, Q, R, u_i, v_i ,

$$\mathcal{X}_\alpha(\Delta) = \{X^{-1}, Y\}, \quad \mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta) = \{u_1, u_2, v_1, v_2\} \quad \text{и} \quad \mathcal{Z}_\alpha(\Delta) = \{Q, R\}.$$

Заменим Δ на приведенную B -диаграмму ранга α согласно предложению 9.9. В силу замечания 9.7 при такой замене вместо $\mathcal{L}(u_1Qu_2) \stackrel{\alpha}{=} u$ и $\mathcal{L}(v_1Rv_2) \stackrel{\alpha}{=} v$ будем иметь $\mathcal{L}(u_1Qu_2) \stackrel{\alpha}{=} \hat{u}$ и $\mathcal{L}(v_1Rv_2) \stackrel{\alpha}{=} \hat{v}$, где каждое из слов $\hat{u}$ или $\hat{v}$ либо совпадает соответственно с u или v , либо является дополнительным словом. По предложению 9.19 можно считать, что на $\Delta^{\alpha-1}$ задана некоторая карта примыканий $\mathcal{S}$ ранга $\alpha - 1$. Если Δ не содержит областей ранга α , то имеет место утверждение (i). Пусть $\mathbf{R}_\alpha(\Delta) = \{A_1, A_2, \dots, A_r\} \neq \emptyset$. В силу предложений 10.12 и 10.9, (i) граничный цикл δA_i каждой области A_i имеет ровно одну поддиаграмму примыкания ранга $\alpha - 1$ к каждому из участков границы X и Y^{-1} . Пусть Π_i и Π'_i – соответствующие поддиаграммы примыкания, $\delta\Pi_i \approx G_iy_i^{-1}S_i^{-1}x_i^{-1}$, $\delta\Pi'_i \approx H_i^{-1}z_iT_iw_i$, где $G_i, S_i^{-1}, H_i^{-1}, T_i$ – участки примыкания, $\mathcal{L}(x_i), \mathcal{L}(y_i), \mathcal{L}(z_i), \mathcal{L}(w_i) \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$, G_i входит в X , H_i^{-1} входит в Y , S_i^{-1} и T_i входят в δA_i . Пусть $\delta A_i \approx S_i^{-1}U_iT_iV_i$ и $\mathcal{L}(\delta A_i) \approx D_i^n$, где $D_i \in \mathcal{E}_\alpha$. Перенумеровав области A_i , можно считать, что пути X и Y имеют

вид $X = K_0 G_1 K_1 \dots G_r K_r$ и $Y = L_0 H_1 L_1 \dots H_r L_r$ (см. рис. 37). Обозначим через $K_i, G_i, L_i, H_i, S_i, U_i, T_i, V_i, x_i, y_i, z_i, w_i$ метки соответствующих путей $K_i, G_i, L_i, H_i, S_i, U_i, T_i, V_i, x_i, y_i, z_i, w_i$ на диаграмме Δ . Тогда из расположения этих путей на Δ и леммы 4.2 вытекают соотношения (11.1)–(11.4). Далее, по предложению 10.13 имеем $|S_i| + |T_i| \geq (n - 2p - 32)|D_i|$, а в силу приведенности слов X и Y в ранге α имеем $|S_i|, |T_i| < (n - q)|D_i|$. Отсюда вытекают неравенства (11.5).

Рис. 37

Наконец, если слова u, v ограничены в ранге α , то согласно определению 11.1 в разложениях $u \sqsubseteq u_1 Q u_2$ и $v \sqsubseteq v_1 R v_2$ можно считать $|Q| < 2|B|$ и $|R| < 2|C|$. Тогда в силу замечания 9.7 выполнены равенства $u \sqsubseteq \hat{u}$ и $v \sqsubseteq \hat{v}$.

Прежде чем перейти к выводу следствий из предложения 11.2, сделаем одно наблюдение. Пусть дано соотношение $X \stackrel{\alpha}{=} uYv$, где $X, Y \in \mathcal{R}_\alpha$ и $u, v \in \mathcal{H}_\alpha$, и пусть для слов u и v фиксированы некоторые разложения $u \sqsubseteq u_1 Q u_2$ и $v \sqsubseteq v_1 R v_2$, где $u_i, v_i \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$ ($i = 1, 2$) и Q, R – подслова слов B^n, C^n соответственно при $B, C \in \mathcal{E}_\alpha$. Предположим, имеет место случай (ii) из формулировки предложения 11.2. Тогда из соотношений (11.3), (11.4), равенства $q_4 = q - 2p - 68$ и следствия 8.24 вытекает, что в каждое из подслов G_i, H_i слов X и Y входит элементарная q_4 -степень ранга α . Отсюда следует, что если хотя бы одно из слов X или Y не содержит элементарных q_4 -степеней ранга α , то имеет место случай (i) из предложения 11.2, т.е. $X \stackrel{\alpha-1}{=} \hat{u}Y\hat{v}$, где каждое из слов $\hat{u}$ и $\hat{v}$ либо совпадает с соответствующим словом u или v , либо является дополнительным к нему. В частности, имеет место

11.3. СЛЕДСТВИЕ. Если слова $X, Y \in \mathcal{R}_\alpha$, $u, v \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$ удовлетворяют соотношению $X \stackrel{\alpha}{=} uYv$ и хотя бы одно из слов X или Y не содержит элементарных q_4 -степеней ранга α , то $X \stackrel{\alpha-1}{=} uYv$.

Более того, утверждение имеет место, если вместо $u, v \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$ предполагать, что $u, v \in \mathcal{H}_\alpha$ и слова u, v ограничены в ранге α .

11.4. СЛЕДСТВИЕ ($\alpha \geq 0$). Если $X \stackrel{\alpha}{=} 1$ и $X \in \mathcal{R}_\alpha$, то X – пустое слово.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\alpha = 0$, то это следует из определения 5.1. При $\alpha \geq 1$ нужно применить следствие 11.3 при $u := Y := v := 1$ и воспользоваться индуктивным предположением.

Из предыдущего утверждения непосредственно вытекает

11.5. СЛЕДСТВИЕ ($\alpha \geq 0$). *Любой путь X на графе Γ_α с $\mathcal{L}(X) \in \mathcal{R}_\alpha$ является простым.*

11.6. СЛЕДСТВИЕ. *Пусть $\gamma \leq \beta \leq \alpha - 1$ и X, Y – близкие в ранге γ пути на графе Γ_α . Если для каждого $\delta = \beta + 1, \beta + 2, \dots, \alpha$ хотя бы одно из множеств $\mathcal{E}_\delta(X, q_4)$ или $\mathcal{E}_\delta(Y, q_4)$ пусто, то существуют близкие в ранге γ прообразы путей X и Y на графе Γ_β .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соединим вершины $\iota(X)$ и $\iota(Y)$ путем u , а вершины $\tau(X)$ и $\tau(Y)$ – путем v , где $\mathcal{L}(u), \mathcal{L}(v) \in \mathcal{H}_\gamma$. Выберем произвольный прообраз $\bar{X}\bar{v}\bar{Y}^{-1}\bar{v}^{-1}$ на графе Γ_β пути $XvY^{-1}v^{-1}$. Применяя следствие 11.3, получаем $\mathcal{L}(\bar{X}\bar{v}\bar{Y}^{-1}\bar{v}^{-1}) \stackrel{\beta}{=} 1$. Тогда $\bar{X}\bar{v}\bar{Y}^{-1}\bar{v}^{-1}$ – замкнутый путь и, следовательно, $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – близкие в ранге γ пути.

Теперь докажем одно вспомогательное утверждение для соотношений в группе $B_{\alpha-1}$.

11.7. ЛЕММА. *Пусть $r \geq 2$, X и $W = u_0 Z_1 u_1 \dots Z_r u_r$ – пути на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ с общими начальной и конечной вершинами, где $\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Z_1), \dots, \mathcal{L}(Z_r) \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ и $\mathcal{L}(u_0), \mathcal{L}(u_1), \dots, \mathcal{L}(u_r) \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$. Тогда*

(i) *любой подпуть Y пути X можно разложить в произведение $Y = w_0 S_1 w_1 \dots S_t w_t$ (возможно, $t = 0$), где $\sum_{i=0}^t \mathcal{W}_{\alpha-1}(\mathcal{L}(w_i)) \leq (r-1)\eta$ и для некоторых $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_t \leq r$ каждый путь S_i входит в подпуть пути X , близкий в ранге $\alpha - 1$ к некоторому подпути R_i пути Z_{k_i} ;*

(ii) *если $E \in \text{ППер}_\alpha(A)$ – подпуть пути X и $\ell_{\alpha,A}(E) \geq 45r$, то найдутся подпути $F_1, F_2, \dots, F_t \in \text{ППер}_\alpha(A)$ попарно различных путей Z_i такие, что $\text{ПСог}_\alpha(E, F_i)$ при всех i и $\sum_{i=1}^t \ell_{\alpha,A}(F_i) \geq \ell_{\alpha,A}(E) - 45r + 5$. При этом пути F_i можно выбрать таким образом, чтобы каждый F_i и некоторый подпуть $\bar{F}_i \in \text{ППер}_\alpha(A)$ пути E были строго близки в ранге $\rho(A)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Ввиду леммы 8.20, (iv) достаточно рассмотреть случай, когда $Y = X$. Рассмотрим A -диаграмму Δ ранга $\alpha - 1$ с граничным циклом $\delta\Delta = \bar{X}\bar{u}_r^{-1}\bar{Z}_r^{-1}\bar{u}_{r-1}^{-1} \dots \bar{Z}_1^{-1}\bar{u}_0^{-1}$, где

$$\mathcal{L}(\bar{X}) \sqsubseteq \mathcal{L}(X), \quad \mathcal{L}(\bar{u}_i) \sqsubseteq \mathcal{L}(u_i) \quad (i = 0, 1, \dots, r), \quad \mathcal{L}(\bar{Z}_i) \sqsubseteq \mathcal{L}(Z_i) \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

$$\mathcal{X}_{\alpha-1}(\Delta) = \{\bar{X}, \bar{Z}_r^{-1}, \bar{Z}_{r-1}^{-1}, \dots, \bar{Z}_1^{-1}\} \quad \text{и} \quad \mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta) = \{\bar{u}_r^{-1}, \bar{u}_{r-1}^{-1}, \dots, \bar{u}_0^{-1}\}.$$

По предложению 9.19 можно считать, что на Δ задана некоторая карта примыканий $\mathcal{S}$ ранга $\alpha - 1$. Пусть $\bar{X} = \bar{w}_0 \bar{S}_1 \bar{w}_1 \dots \bar{S}_t \bar{w}_t$, где $\bar{S}_i$ – участки примыкания

поддиаграмм примыкания $\Pi \in \mathcal{S}$ и $\bar{w}_i$ – переходные участки диаграммы Δ относительно $\mathcal{S}$ либо, возможно, пустые пути при $i = 0$ или $i = t$. По предложению 10.4

$$\sum_{i=0}^t \mathcal{W}_{\alpha-1}(\mathcal{L}(\bar{w}_i)) \leq (r-1)\eta.$$

Пусть $\bar{S}_i$ входит в граничный цикл поддиаграммы примыкания $\Pi_i \in \mathcal{S}$, и пусть $\bar{R}_i^{-1}$ – другой участок примыкания поддиаграммы Π_i . По лемме 9.23, (i) каждый путь $\bar{R}_i^{-1}$ входит в некоторый путь $\bar{Z}_{k_i}^{-1}$ и все k_i попарно различны, а из расположения поддиаграмм Π_i вытекает $k_1 < k_2 < \dots < k_t$ (см. рис. 38). Рассмотрим отображение ω множества путей на диаграмме Δ во множество путей на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ такое, что $\omega(\iota(\bar{X})) = \iota(X)$ (см. 4.12). Очевидно, $\omega(\bar{X}) = X$ и $\omega(\bar{Z}_i) = Z_i$ при всех i . Тогда в качестве искомым путей S_i , w_i и R_i можно взять соответственно $\omega(\bar{S}_i)$, $\omega(\bar{w}_i)$ и $\omega(\bar{R}_i)$.

Рис. 38

(ii) Согласно (i) имеем $E = w_0 S_1 w_1 \dots S_s w_s$, где $\sum_{i=0}^s \mathcal{W}_{\alpha-1}(\mathcal{L}(w_i)) \leq (r-1)\eta$ и каждый S_i входит в подпуть пути X , близкий к подпути пути Z_{k_i} , причем все k_i попарно различны. По предложению 8.22, (i)

$$\sum_{i=0}^s \ell_{\alpha,A}(\mathcal{L}(w_i)) \leq 13(r-1)\eta + s + 1 < 6(r-1) + r + 1 = 7r - 5,$$

откуда в силу предложения 8.14, (ii)

$$\sum_{i=1}^s \ell_{\alpha,A}(\mathcal{L}(S_i)) \geq \ell_{\alpha,A}(E) - 11r + 5. \quad (11.6)$$

Предположим, $\ell_{\alpha,A}(\mathcal{L}(S_i)) \geq 35$ для некоторого i . Пусть $E_i \in \text{ППер}_\alpha(A, 35)$ – подпуть пути S_i , где $\ell_{\alpha,A}(E_i) = \ell_{\alpha,A}(\mathcal{L}(S_i))$. В силу леммы 8.25 найдется подпуть $F_i \in \text{ППер}_\alpha(A)$ пути Z_{k_i} такой, что $\ell_{\alpha,A}(F_i) \geq \ell_{\alpha,A}(\mathcal{L}(S_i)) - 34$ и F_i и некоторый подпуть $\bar{F}_i \in \text{ППер}_\alpha(A)$ пути E_i строго близки в ранге $\rho(A)$, причем $\text{ПСогл}_\alpha(E_i, \bar{F}_i)$. Так как в силу предложения 8.9 $\text{ПСогл}_\alpha(E, E_i)$, то, используя лемму 8.3 при $E := E_i$, получаем $\text{ПСогл}_\alpha(E, \bar{F}_i)$, откуда в силу леммы 8.12 выводим $\text{ПСогл}_\alpha(E, F_i)$ (мы не можем здесь воспользоваться следствием 8.6, (ii), так

как, вообще говоря, неверно, что $\ell_{\alpha,A}(\bar{F}_i), \ell_{\alpha,A}(F_i) \geq 8$. Наконец, остается заметить, что

$$\sum_i \ell_{\alpha,A}(F_i) \geq \sum_i \ell_{\alpha,A}(\mathcal{L}(S_i)) - 34\#\{F_i\} \geq \ell_{\alpha,A}(E) - 45r + 5.$$

Теперь мы используем лемму 11.7 для доказательства еще одного следствия из предложения 11.2.

11.8. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть пути X и Y на графе Γ_α близки в ранге α и $\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y) \in \mathcal{R}_\alpha$. Пусть $X = X_1 E X_2$, где $\mathcal{W}_\alpha(\mathcal{L}(E)) > 2 + 2\zeta\eta$ и $\mathcal{E}l_\alpha(E, q_4) = \emptyset$. Тогда $E = U_1 E' U_2$ и $Y = V_1 Y' V_2$, где пути E' и Y' близки в ранге $\alpha - 1$ и $\mathcal{W}_\alpha(\mathcal{L}(U_i)) \leq 1 + 2\zeta\eta$ ($i = 1, 2$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соединим вершины $\iota(X)$ и $\iota(Y)$ путем u , а вершины $\tau(Y)$ и $\tau(X)$ — путем v , где $u \rightleftharpoons \mathcal{L}(u) \in \mathcal{H}_\alpha$ и $v \rightleftharpoons \mathcal{L}(v) \in \mathcal{H}_\alpha$. Имеем $\mathcal{L}(X) \stackrel{\alpha}{\equiv} u \mathcal{L}(Y) v$ и, следовательно, в соответствии с предложением 11.2 при $X \rightleftharpoons \mathcal{L}(X)$ и $Y \rightleftharpoons \mathcal{L}(Y)$ можно рассмотреть два случая.

Случай 1: Имеет место случай (i) из предложения 11.2, т.е. $\mathcal{L}(X) \stackrel{\alpha-1}{\equiv} \hat{u} \mathcal{L}(Y) \hat{v}$, где $\hat{u}, \hat{v}$ — либо сами слова u, v , либо некоторые дополнительные к ним слова. Так как $u \stackrel{\alpha}{\equiv} \hat{u}$ и $v \stackrel{\alpha}{\equiv} \hat{v}$, то, заменяя пути u и v на пути с метками $\hat{u}$ и $\hat{v}$ соответственно и переходя к новым обозначениям, можно считать $\mathcal{L}(X) \stackrel{\alpha-1}{\equiv} u \mathcal{L}(Y) v$. Рассмотрим прообразы $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{u}$ и $\bar{v}$ на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ путей X, Y, u и v , образующие замкнутый путь $\bar{X}^{-1} \bar{u} \bar{Y} \bar{v}$. Пусть $\bar{E}$ — подпуть пути $\bar{X}$, для которого $\pi_{\alpha-1,\alpha}(\bar{E}) = E$. Представим $\bar{u}$ и $\bar{v}$ в виде $\bar{u} = u_1 Q u_2$ и $\bar{v} = v_1 R v_2$, где $\mathcal{L}(u_i), \mathcal{L}(v_i) \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$ ($i = 1, 2$) и $\mathcal{L}(Q), \mathcal{L}(R)$ — подслова некоторых слов B^n и C^n при $B, C \in \mathcal{E}_\alpha$. Заметим, что если произвольный путь S и некоторый подпуть пути Q или пути R близки в ранге $\alpha - 1$, то в силу леммы 8.20, (i) $\mathcal{W}_\alpha(\mathcal{L}(S)) \leq 1$. По лемме 11.7, (i) при $W := u_1 Q u_2 \bar{Y} v_1 R v_2$, $X := \bar{X}$ и $Y := \bar{E}$ путь $\bar{E}$ можно разложить в произведение $\bar{E} = w_0 E_1 w_1 E_2 w_2 E_3 w_3$, где $\sum_{i=0}^3 \mathcal{W}_{\alpha-1}(\mathcal{L}(w_i)) \leq 2\eta$ и каждый путь E_i либо пуст, либо близок в ранге $\alpha - 1$ к некоторому подпути соответствующего пути Q, Y или R . В силу леммы 8.20, (ii), (iii) имеем $\mathcal{W}_\alpha(\mathcal{L}(w_0 E_1 w_1)) \leq 1 + 2\zeta\eta$, $\mathcal{W}_\alpha(\mathcal{L}(w_2 E_3 w_3)) \leq 1 + 2\zeta\eta$ и $\mathcal{W}_\alpha(\mathcal{L}(w_0 E_1 w_1)) + \mathcal{W}_\alpha(\mathcal{L}(w_2 E_3 w_3)) \leq 2 + 2\zeta\eta$. Так как по условию $\mathcal{W}_\alpha(\mathcal{L}(\bar{E})) > 2 + 2\zeta\eta$, то отсюда следует, что E_2 — непустой путь, и, следовательно, E_2 близок в ранге $\alpha - 1$ к некоторому подпути $\bar{Y}'$ пути $\bar{Y}$. Тогда в качестве искомым путей U_1, E', U_2 и Y' можно взять $\pi_{\alpha-1,\alpha}(w_0 E_1 w_1)$, $\pi_{\alpha-1,\alpha}(E_2)$, $\pi_{\alpha-1,\alpha}(w_2 E_3 w_3)$ и $\pi_{\alpha-1,\alpha}(\bar{Y}')$ соответственно.

Случай 2: Имеет место случай (ii) из предложения 11.2, т.е. найдутся слова $D_i \in \mathcal{E}_\alpha$, $x_i, y_i, z_i, w_i \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$, $G_i, H_i, S_i, U_i, T_i, V_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$), K_i, L_i ($i = 0, 1, \dots, r$) такие, что выполнены соотношения (11.1)–(11.5). Как и в случае 1, в (11.4) можно считать $u \stackrel{\alpha}{\equiv} \hat{u}$ и $v \stackrel{\alpha}{\equiv} \hat{v}$. Пусть $X = K_0 G_1 K_1 \dots G_{r-1} K_r$ и $Y = L_0 H_1 L_1 \dots H_{r-1} L_r$, где метки путей K_i, G_i, L_i и H_i равны словам K_i, G_i, L_i и H_i соответственно. В силу соотношений (11.1)–(11.5) рассмотрим пути на графе Γ_α , расположенные, как на рис. 39, и обозначенные теми же буквами, что и их метки. В силу сделанного выше замечания каждый путь G_i содержит некоторый подпуть

$\tilde{G}_i \in \mathcal{E}l_\alpha(\Gamma_\alpha, q_4)$. Отсюда следует, что подпуть E пути X содержится в одном из подпутьей $Z_0 \Rightarrow K_0 G_1$, $Z_1 \Rightarrow G_1 K_1 G_2$, $Z_2 \Rightarrow G_2 K_2 G_3$, $\dots$, $Z_r \Rightarrow G_r K_r$. Пусть E содержится в Z_k . Положим

$$u^* \Rightarrow \begin{cases} u, & \text{если } k = 0, \\ x_k S_k V_k^{-1} w_k, & \text{если } k > 0, \end{cases} \quad v^* \Rightarrow \begin{cases} v, & \text{если } k = r, \\ z_{k+1} U_{k+1}^{-1} S_{k+1} y_{k+1}, & \text{если } k < r. \end{cases}$$

Так как $\mathcal{L}(u^*), \mathcal{L}(v^*) \in \mathcal{H}_\alpha$ и из (11.2)–(11.4) следует $\mathcal{L}(Z_k) \stackrel{\alpha-1}{=} \mathcal{L}(u^*) L_k \mathcal{L}(v^*)$, то можно воспользоваться рассуждениями из случая 1 при $X := Z_k$ и $Y := L_k$.

Рис. 39

Из предыдущего утверждения по индукции с использованием следствия 11.3, леммы 8.20, (ii), (iii) и неравенств $\frac{1+\zeta\eta}{1-\zeta} < 1 + \zeta$, $\frac{1+2\zeta\eta}{1-\zeta} < 1 + 2\zeta$ легко выводится

11.9. СЛЕДСТВИЕ. Пусть пути X и Y на графе Γ_α близки в ранге α , $\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y) \in \mathcal{R}_\alpha$, и пусть $X = X_1 E X_2$, где $\mathcal{W}_\alpha(\mathcal{L}(E)) > 2 + 2\zeta$ и $\mathcal{E}l_\gamma(E, q_4) = \emptyset$ при $\gamma = \beta + 1, \beta + 2, \dots, \alpha$. Тогда $E = U_1 E' U_2$ и $Y = V_1 Y' V_2$, где пути E' и Y' близки в ранге β и $\mathcal{W}_\alpha(\mathcal{L}(U_i)) < 1 + 2\zeta$ ($i = 1, 2$).

11.10. ЛЕММА. Пусть X и uYv – пути на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ с общей начальной и конечной вершинами, где $\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y) \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ и $\mathcal{L}(u), \mathcal{L}(v) \in \mathcal{H}_\alpha$. Пусть $u = u_1 Q u_2$, $v = v_1 R v_2$, где $\mathcal{L}(u_i), \mathcal{L}(v_i) \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$ и $\mathcal{L}(Q), \mathcal{L}(R)$ – подслова некоторых слов B^n, C^n соответственно при $B, C \in \mathcal{E}_\alpha$. Пусть $E \in \text{ППер}_\alpha(A, h + 8)$ – подпуть пути X , $P \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$ – периодическая основа для E и выполнены следующие условия:

- (i) либо $|Q| < 2|B|$, либо $|Q| \geq 2|B|$ и $\neg \text{Согл}(P, Q)$;
- (ii) либо $|R| < 2|C|$, либо $|R| \geq 2|C|$ и $\neg \text{Согл}(P, R)$.

Тогда существует подпуть $F \in \text{ППер}_\alpha(A, 8)$ пути Y такой, что $\text{ПСогл}_\alpha(E, F)$ и $\ell_{\alpha, A}(F) \geq \ell_{\alpha, A}(E) - h$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 11.7, (ii) при $W := u_1 Qu_2 Yv_1 Rv_2$ найдутся подпути $F_1, F_2, \dots, F_t \in \text{ППер}_\alpha(A)$ попарно различных путей Q, Y и R такие, что $\text{ПСогл}_\alpha(E, F_i)$ при всех i и $\sum_i \ell_{\alpha,A}(F_i) \geq \ell_{\alpha,A}(E) - 130$. Допустим, F_i – подпути пути Q и $\ell_{\alpha,A}(F_i) \geq p$. Пусть $P_i \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$ – периодическая основа для F_i . Так как в силу леммы 8.2, (ii) пути F_i и P_i близки в ранге $\alpha - 1$, то в силу предложения 8.44, (i) получаем $|Q| > 2|B|$, а в силу предложения 8.36 получаем $\text{Согл}(P_i, Q)$. Далее, так как в силу предложений 8.9 и 8.5 имеем $\text{Согл}(P_i, P)$, то отсюда следует $\text{Согл}(P, Q)$, что противоречит (i). Аналогично, из (ii) следует, что если F_i – подпути пути R , то $\ell_{\alpha,A}(F_i) \leq p - 1$. Тогда некоторый $F \Rightarrow F_j$ – подпути пути Y и $\ell_{\alpha,A}(F) \geq \ell_{\alpha,A}(E) - 2p - 128 = \ell_{\alpha,A}(E) - h$.

11.11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $E \in \mathcal{Эл}_\alpha(\Gamma_\alpha)$ и u – путь на графе Γ_α с $\mathcal{L}(u) \in \mathcal{H}_\alpha$. Будем говорить, что E *устойчив относительно u* , если u можно представить в виде $u = u_1 Qu_2$, $\mathcal{L}(u_1), \mathcal{L}(u_2) \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$, $\mathcal{L}(Q)$ есть подслово слова B^n , $B \in \mathcal{E}_\alpha$, так что либо $|Q| < 2|B|$, либо $|Q| \geq 2|B|$ и для любых прообразов $\bar{Q}$ и $\bar{E}$ на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ путей Q и E выполнено $\neg \text{Согл}(P, \bar{Q})$ и $\neg \text{Согл}(P, \bar{Q}^{-1})$, где P – периодическая основа для $\bar{E}$.

11.12. ЛЕММА. Пусть u – путь на графе Γ_α с $\mathcal{L}(u) \in \mathcal{H}_\alpha$. Тогда верны следующие утверждения.

(i) Если $E, F \in \mathcal{Эл}_\alpha(\Gamma_\alpha)$ и $\neg \mathcal{ЭСогл}_\alpha(E, F)$, то по крайней мере один из путей E или F устойчив относительно u .

(ii) Пусть путь $E \in \mathcal{Эл}(\Gamma_\alpha)$ устойчив относительно u , т.е. $u = u_1 Qu_2$, где $\mathcal{L}(u_1), \mathcal{L}(u_2) \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$, $\mathcal{L}(Q)$ есть подслово слова B^n , $B \in \mathcal{E}_\alpha$, и Q и E удовлетворяют условию из определения 11.11. Предположим, $|Q| \geq 2|B|$ и u' – слово, дополнительное к $\mathcal{L}(u)$ в смысле определения 11.1 при $u_i := \mathcal{L}(u_i)$ и $Q := \mathcal{L}(Q)$. Пусть u' – путь на графе Γ_α с $\mathcal{L}(u') \supseteq u'$ и теми же, что у пути u , начальной и конечной вершинами. Тогда E устойчив относительно u' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Предположим, например, что E не устойчив относительно u . Пусть $u = u_1 Qu_2$, где $\mathcal{L}(u_1), \mathcal{L}(u_2) \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$ и $\mathcal{L}(Q)$ есть подслово слова B^n при $B \in \mathcal{E}_\alpha$. Согласно определению 11.11 имеем $|Q| \geq 2|B|$ и найдутся прообразы $\bar{E}$ и $\bar{Q}$ на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ путей E и Q такие, что $\text{Согл}(P, \bar{Q})$ или $\text{Согл}(P, \bar{Q}^{-1})$, где P – периодическая основа для $\bar{E}$. Пусть $\bar{F}$ – произвольный прообраз на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ пути F , R – периодическая основа для F и $\bar{Q}'$ – любой другой прообраз на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ пути Q . Пусть $\bar{Q}' = g\bar{Q}$, где $g \in \ker \pi_{\alpha-1, \alpha}$. Так как $\pi_{\alpha-1, \alpha}(g\bar{E}) = E$ и gP – периодическая основа для $g\bar{E}$, то из $\neg \mathcal{ЭСогл}_\alpha(E, F)$ следует $\neg \text{Согл}(gP, R)$ и $\neg \text{Согл}(gP, R^{-1})$. Следовательно, $\neg \text{Согл}(R, g\bar{Q})$ и $\neg \text{Согл}(R, g\bar{Q}^{-1})$. Тогда согласно определению 11.11 F устойчив относительно u .

(ii) Согласно определению 11.1 имеем $u' \supseteq u_1 Q' u_2$, где $u_i \Rightarrow \mathcal{L}(u_i)$ и $\mathcal{L}(Q)Q' \approx B^n$. Пусть $u' \Rightarrow u_1 Q' u_2'$, где $\mathcal{L}(Q') \supseteq Q'$ и $\mathcal{L}(u_2') \supseteq u_2$. Если $|Q'| < 2|B|$, то доказывать нечего. Пусть $|Q'| \geq 2|B|$. Пусть Q' и $\bar{E}$ – произвольные прообразы на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ путей Q' и E . Так как $\iota(Q') = \iota(Q)$, то для некоторого прообраза $\bar{Q}$ на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ пути Q имеем $\iota(\bar{Q}') = \iota(\bar{Q})$. Согласно определению 11.11 имеем $\neg \text{Согл}(P, \bar{Q})$ и $\neg \text{Согл}(P, \bar{Q}^{-1})$, где P – периодическая основа для $\bar{E}$. Так как $\mathcal{L}(\bar{Q}\bar{Q}'^{-1}) \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, B, 2)$, то $\bar{Q}\bar{Q}'^{-1}$ – общее периодическое продолжение $\bar{Q}$

и $\bar{Q}'^{-1}$. Следовательно, $\neg \text{Cогл}(\bar{P}, \bar{Q}')$ и $\neg \text{Cогл}(\bar{P}, \bar{Q}'^{-1})$. Тогда согласно определению 11.11 $\bar{E}$ устойчив относительно u .

11.13. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $E \in \mathcal{E}_\alpha(\Gamma_\alpha)$ и $E = \pi_{\alpha-1, \alpha}(\bar{E})$, где $\bar{E} \in \text{ППер}_\alpha(A, 8)$ ($A \in \mathcal{E}_\alpha$). Пусть $P \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$ – периодическая основа для $\bar{E}$. Тогда путь $\pi_{\alpha-1, \alpha}(P)$ также будем называть *периодической основой для E* .

11.14. ЛЕММА. Пусть $E, F \in \mathcal{E}_\alpha(\Gamma_\alpha)$ и P, Q – периодические основы для E и F соответственно. Если P и Q или P и Q^{-1} имеют общее периодическое продолжение, то $\mathcal{E}\text{Cогл}_\alpha(E, F)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{E}, \bar{F}, \bar{P}, \bar{Q}$ – прообразы на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ путей E, F, P и Q соответственно такие, что $\bar{P}$ есть периодическая основа для $\bar{E}$ и $\bar{Q}$ есть периодическая основа для $\bar{F}$. Из посылки следует, что для некоторого $g \in \ker \pi_{\alpha-1, \alpha}$ пути $\bar{P}$ и $g\bar{Q}^{\pm 1}$ имеют общее периодическое продолжение. Тогда в силу леммы 3.4, (iv) имеем $\text{Cогл}(\bar{P}, g\bar{Q})$ или $\text{Cогл}(\bar{P}, g\bar{Q}^{-1})$. Так как $\pi_{\alpha-1, \alpha}(gF) = F$ и $g\bar{Q}$ – периодическая основа для $g\bar{F}$, то согласно определению 5.18 имеем $\text{ПСогл}_\alpha(\bar{E}, \bar{F})$ или $\text{ПСогл}_\alpha(\bar{E}, \bar{F}^{-1})$, а согласно определению 5.20 – $\mathcal{E}\text{Cогл}_\alpha(E, F)$.

11.15. ЛЕММА. Пусть E и uPv – пути на графе Γ_α с общими начальной и конечной вершинами, где $\mathcal{L}(E) \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$, $\mathcal{L}(u), \mathcal{L}(v) \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$ и $P \in \text{Пер}(\Gamma_\alpha, A, r)$ при $A \in \mathcal{E}_\alpha$. Пусть $\mathcal{L}(E^{-1}uPv) \stackrel{\alpha-1}{=} 1$. Тогда если $r \geq 44$, то существуют подпути E^* и P^* путей E и P такие, что $E^* \in \mathcal{E}_\alpha(\Gamma_\alpha, r-36)$ и P^* – периодическая основа для E^* .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно перейти к прообразу $\bar{E}^{-1}u\bar{P}v$ на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ замкнутого пути $E^{-1}uPv$ и воспользоваться предложением 8.23.

11.16. ЛЕММА. Пусть $E, F \in \mathcal{E}_\alpha(\Gamma_\alpha)$, $\neg \mathcal{E}\text{Cогл}_\alpha(E, F)$ и P – периодическая основа для E . Пусть $u = u_1Qu_2$ – путь на графе Γ_α , где $\mathcal{L}(u_i) \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$ ($i = 1, 2$) и $\mathcal{L}(Q)$ – подслово слова B^n при $B \in \mathcal{E}_\alpha$. Тогда если Q или Q^{-1} содержится в некотором периодическом продолжении P , то F устойчив относительно u .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $|Q| < 2|B|$, то доказывать нечего. Пусть $|Q| \geq 2|B|$. Пусть $\bar{Q}$ и $\bar{F}$ – произвольные прообразы на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ путей Q и F , и пусть R – периодическая основа для $\bar{F}$. Как в доказательстве леммы 11.14, найдем прообразы $\bar{E}$ и $\bar{P}$ на $\Gamma_{\alpha-1}$ путей E и P такие, что $\bar{P}$ – периодическая основа для $\bar{E}$ и $\bar{P}$ и $\bar{Q}^{\pm 1}$ имеют общее периодическое продолжение. Тогда имеем $\text{Cогл}(\bar{P}, \bar{Q})$ или $\text{Cогл}(\bar{P}, \bar{Q}^{-1})$, а из $\neg \mathcal{E}\text{Cогл}_\alpha(E, F)$ следует $\neg \text{Cогл}(\bar{P}, R)$ и $\neg \text{Cогл}(\bar{P}, R^{-1})$. Следовательно, $\neg \text{Cогл}(R, \bar{Q})$ и $\text{Cогл}(R, \bar{Q}^{-1})$, т.е. F устойчив относительно u .

11.17. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть X и uYv – пути на графе Γ_α с общей начальной и конечной вершинами, где $\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y) \in \mathcal{R}_\alpha$ и $\mathcal{L}(u), \mathcal{L}(v) \in \mathcal{H}_\alpha$. Пусть $E \in \mathcal{E}_\alpha(\Gamma_\alpha, h+8)$ – подпуть пути X и E устойчив относительно u и v . Тогда для некоторого подпути $F \in \mathcal{E}_\alpha(\Gamma_\alpha)$ пути Y выполнено $\mathcal{E}\text{Cогл}_\alpha(E, F)$ и $\ell_\alpha(F) \geq \min\{q_4, \ell_\alpha(E) - h\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $X \rightleftharpoons \mathcal{L}(X)$, $u \rightleftharpoons \mathcal{L}(u)$, $Y \rightleftharpoons \mathcal{L}(Y)$ и $v \rightleftharpoons \mathcal{L}(v)$. Так как $X \stackrel{\alpha}{=} uYv$, то в силу предложения 11.2 можно рассмотреть два случая.

Случай 1: Имеет место случай 11.2, (i), т.е. $X \stackrel{\alpha-1}{=} \hat{u}Y\hat{v}$, где каждое из слов $\hat{u}$ или $\hat{v}$ либо совпадает с соответствующим словом u или v , либо является дополнительным к нему. Заменяя в силу леммы 11.12, (ii) пути u и v на пути с теми же начальными и конечными вершинами и с метками соответственно $\hat{u}$ и $\hat{v}$, можно считать, что $\mathcal{L}(u) = \hat{u}$ и $\mathcal{L}(v) = \hat{v}$. Рассмотрим прообразы $\bar{X}$, $\bar{u}$, $\bar{Y}$, $\bar{v}$ на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ путей X , u , Y , v , образующие замкнутый путь $\bar{X}^{-1}\bar{u}\bar{Y}\bar{v}$. Пусть $\bar{E} \in \text{ППер}_{\alpha}(A, h+8)$ — прообраз пути E , содержащийся в $\bar{X}$. Из определения 11.11 следует, что выполнены условия (i) и (ii) посылок леммы 11.10. Тогда по лемме 11.10 найдется подпуть $\bar{F} \in \text{ППер}_{\alpha}(A, 8)$ пути $\bar{Y}$, для которого $\text{ПСогл}_{\alpha}(\bar{E}, \bar{F})$ и $\ell_{\alpha, A}(\bar{F}) \geq \ell_{\alpha, A}(E) - h$. Следовательно, можно положить $F \rightleftharpoons \pi_{\alpha-1, \alpha}(\bar{F})$.

Случай 2: Имеет место случай 11.2, (ii), т.е. найдутся слова $D_i \in \mathcal{E}_{\alpha}$, $x_i, y_i, z_i, w_i \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$, $G_i, H_i, S_i, U_i, T_i, V_i$ такие, что выполнены соотношения (11.1)–(11.5). В соответствии с равенствами (11.1)–(11.4) рассмотрим пути $x_i, y_i, z_i, w_i, G_i, H_i, S_i, U_i, T_i, V_i$ на графе Γ_{α} , обозначенные теми же буквами, что и их метки, и расположенные как на рис. 39, где $X = K_0G_1K_1 \dots G_{r-1}K_r$ и $Y = L_0H_1L_1 \dots H_{r-1}L_r$. В силу (11.5) и леммы 11.15 каждый путь G_i содержит подпуть $\bar{G}_i^* \in \mathcal{Эл}_{\alpha}(\Gamma_{\alpha}, q_4)$ с периодической основой, содержащейся в S_i , и каждый путь H_i содержит подпуть $\bar{H}_i^* \in \mathcal{Эл}_{\alpha}(\Gamma_{\alpha}, q_4)$ с периодической основой, содержащейся в T_i . В силу леммы 11.14 имеем $\mathcal{ЭСогл}_{\alpha}(G_i^*, H_i^*)$ при всех i . Если для некоторого i выполнено $\mathcal{ЭСогл}_{\alpha}(G_i^*, E)$, то в качестве F можно взять H_i^* . Пусть $\neg \mathcal{ЭСогл}_{\alpha}(G_i^*, E)$ ни для какого i . Тогда в силу предложения 8.40 E содержится в одном из подпутей $K_0G_1, G_1K_1G_2, G_2K_2G_3, \dots, G_rK_r$ пути X . Пусть, например, E содержится в $G_iK_iG_{i+1}$ для некоторого i . По лемме 11.16 путь E устойчив относительно $x_iS_iV_i^{-1}w_i$ и $z_{i+1}U_{i+1}^{-1}S_{i+1}y_{i+1}$. Так как $x_iS_iV_i^{-1}w_iL_iz_{i+1}U_{i+1}^{-1}S_{i+1}y_{i+1}$ — путь с теми же начальной и конечной вершинами, что и $G_iK_iG_{i+1}$ (см. рис. 39), и из (11.3), (11.4) следует $G_iK_iG_{i+1} \stackrel{\alpha-1}{=} x_iS_iV_i^{-1}w_iL_iz_{i+1}U_{i+1}^{-1}S_{i+1}y_{i+1}$, то тем самым утверждение сводится к случаю 1 при $X := G_iK_iG_{i+1}$, $u := x_iS_iV_i^{-1}w_i$, $Y := L_i$ и $v := z_{i+1}U_{i+1}^{-1}S_{i+1}y_{i+1}$. Аналогично рассматриваются случаи, когда E содержится в K_0G_1 или в G_rK_r , при этом в первом случае роль пути $x_iS_iV_i^{-1}w_i$ играет u , а во втором роль пути $z_{i+1}U_{i+1}^{-1}S_{i+1}y_{i+1}$ играет v .

11.18. СЛЕДСТВИЕ. Пусть X и Y — близкие в ранге $\alpha - 1$ пути на графе Γ_{α} с $\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y) \in \mathcal{R}_{\alpha}$. Тогда для любого подпути $E \in \mathcal{Эл}_{\alpha}(\Gamma_{\alpha}, h+8)$ пути X существует подпуть $F \in \mathcal{Эл}_{\alpha}(\Gamma_{\alpha})$ пути Y такой, что $\mathcal{ЭСогл}_{\alpha}(E, F)$ и $\ell_{\alpha}(F) \geq \min\{q_4, \ell_{\alpha}(E) - h\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что если w — путь на Γ_{α} с $\mathcal{L}(w) \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$, то E устойчив относительно w , так как $w = w_1Qw_2$, где $w_1 \rightleftharpoons w$ и Q, w_2 — пустые пути.

11.19. ЛЕММА. Пусть $E, F \in \mathcal{Эл}_{\alpha}(\Gamma_{\alpha})$ и $\mathcal{ЭСогл}_{\alpha}(E, F)$. Тогда каждая из вершин $\iota(E)$ или $\tau(E)$ может быть соединена с каждой из вершин $\iota(F)$ или $\tau(F)$ путем u с $\mathcal{L}(u) \in \mathcal{H}_{\alpha}$ таким, что относительно u устойчив любой путь $G \in \mathcal{Эл}_{\alpha}(\Gamma_{\alpha})$, для которого $\neg \mathcal{ЭСогл}_{\alpha}(G, E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{E}, \bar{F}$ – прообразы на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ путей E и F такие, что $ПСогл_\alpha(\bar{E}, \bar{F})$ или $ПСогл_\alpha(\bar{E}, \bar{F}^{-1})$. Пусть $\bar{P} \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$ ($A \in \mathcal{E}_\alpha$) – периодическая основа для $\bar{E}$. Используя предложение 7.7 и индуктивное предположение 11.23 (см. доказательство предложения 8.45), легко видеть, что каждая из двух вершин $\iota(\bar{E})$ или $\tau(\bar{E})$ может быть соединена с каждой из двух вершин $\iota(\bar{F})$ или $\tau(\bar{F})$ путем $\bar{w}$ вида $\bar{w} = \bar{u}_1 \bar{Q} \bar{u}_2$, где $\mathcal{L}(\bar{u}_1), \mathcal{L}(\bar{u}_2) \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$ и $\bar{Q}$ или $\bar{Q}^{-1}$ содержится в некотором периодическом продолжении $\bar{P}$. Пусть $u_i \Rightarrow \pi_{\alpha-1, \alpha}(\bar{u}_i)$, $Q \Rightarrow \pi_{\alpha-1, \alpha}(\bar{Q})$ и $w \Rightarrow \pi_{\alpha-1, \alpha}(\bar{w}) = u_1 Q u_2$. Очевидно, Q или Q^{-1} содержится в некотором периодическом продолжении $P \Rightarrow \pi_{\alpha-1, \alpha}(\bar{P})$. Так как $A^n \stackrel{\alpha}{=} 1$, то $\tau(Q') = \tau(Q)$ для некоторого начала Q' пути Q длины $|Q'| < n|A|$. Тогда $\mathcal{L}(Q')$ – подслово слова A'^n , где A' – некоторый циклический сдвиг слова A , и в силу леммы 11.16 путь $u \Rightarrow u_1 Q' u_2$ является искомым.

11.20. СЛЕДСТВИЕ. Пусть X и Y – близкие в ранге α пути на графе Γ_α с $\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y) \in \mathcal{R}_\alpha$. Пусть $E_i \in \mathcal{E}_\alpha(X, h+8)$ ($i = 1, 2, 3$), $\neg \mathcal{E}Согл_\alpha(E_i, E_j)$ при $i \neq j$ и $E_1 <_X E_2 <_X E_3$. Тогда существует $F \in \mathcal{E}_\alpha(Y)$ такой, что $\mathcal{E}Согл_\alpha(E_2, F)$ и $\ell_\alpha(F) \geq \min\{q_4, \ell_\alpha(E_2) - h\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соединим вершины $\iota(X)$ и $\iota(Y)$ путем u , а вершины $\tau(Y)$ и $\tau(X)$ путем v , где $\mathcal{L}(u), \mathcal{L}(v) \in \mathcal{H}_\alpha$. По лемме 11.12, (i) хотя бы один из E_i устойчив как относительно u , так и относительно v . Если это E_2 , то можно непосредственно воспользоваться предложением 11.17. Из двух оставшихся симметричных случаев рассмотрим случай, когда E_1 устойчив относительно u и v . По предложению 11.17 найдется $F_1 \in \mathcal{E}_\alpha(Y)$ такой, что $\mathcal{E}Согл_\alpha(E_1, F_1)$. Тогда по лемме 11.19 начальные вершины путей E_1 и F_1 соединены путем u' с $\mathcal{L}(u') \in \mathcal{H}_\alpha$, относительно которого устойчивы E_2 и E_3 . Если теперь E_2 устойчив относительно v , то снова можно воспользоваться предложением 11.17, рассмотрев вместо путей X и Y их концы, начинающиеся с E_1 и с F_1 соответственно. Если E_2 не устойчив относительно v , то по лемме 11.12, (i) E_3 устойчив относительно v , и, повторив рассуждения, найдем сначала $F_3 \in \mathcal{E}_\alpha(Y)$ такой, что $F_1 <_Y F_3$, а затем путь v' с $\mathcal{L}(v') \in \mathcal{H}_\alpha$, соединяющий вершины $\tau(F_3)$ и $\tau(E_3)$, такой, что E_2 устойчив относительно v' . Теперь можно применить предложение 11.17 при $X := E_1 \cup_X E_3$ и $Y := F_1 \cup_Y F_3$.

11.21. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $1 \leq \beta \leq \alpha$, X и Y – близкие в ранге $\beta - 1$ пути на графе Γ_α и $\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y) \in \mathcal{R}_\alpha$. Пусть $\mathcal{E}л_\gamma(X, q_4) = \emptyset$ или $\mathcal{E}л_\gamma(Y, q_4) = \emptyset$ для каждого $\gamma = \beta + 1, \beta + 2, \dots, \alpha$. Тогда для любого $M \in \mathcal{E}л_\beta(X, t)$ при $t \geq h + 8$ существует $M' \in \mathcal{E}л_\beta(Y, t')$, где $t' = \min\{q_4, t - h\}$, такой, что $\mathcal{E}Согл_\beta(M, M')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\beta = \alpha$, то утверждения следствий 11.21 и 11.18 совпадают. Пусть $\beta < \alpha$. В силу следствия 11.6 найдутся близкие в ранге $\beta - 1$ прообразы $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ на графе Γ_β путей X и Y . Из определения 5.20 легко видеть, что для любых $K, L \in \mathcal{E}л_\beta(\Gamma_\beta)$ из $\mathcal{E}Согл_\beta(K, L)$ следует $\mathcal{E}Согл_\beta(\pi_{\beta, \alpha}(K), \pi_{\beta, \alpha}(L))$. Тогда, очевидно, можно воспользоваться индуктивным предположением 11.18 при $\alpha := \beta$.

11.22. СЛЕДСТВИЕ ($\alpha \geq 0$). Пусть $0 \leq \beta \leq \alpha$, X и Y – близкие в ранге β пути на графе Γ_α и $\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y) \in \mathcal{R}_\alpha$. Пусть $\mathcal{E}л_\gamma(X, q_4) = \emptyset$ или $\mathcal{E}л_\gamma(Y, q_4) = \emptyset$ для каждого $\gamma = \beta + 1, \beta + 2, \dots, \alpha$. Пусть $K, L \in \mathcal{E}л_\beta(X, h + 8)$, $M \in \mathcal{E}л_\beta(X, t)$

для некоторого $t \geq h + 8$, $K <_X M <_X L$ и K, L, M попарно не согласованы. Тогда существует $M' \in \mathcal{E}l_\beta(Y, t')$, где $t' = \min\{q_4, t - h\}$, такой, что $\mathcal{E}Cогл_\beta(M, M')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – близкие в ранге β прообразы на графе Γ_β путей X и Y , существующие в силу следствия 11.6. Если $\beta = 0$, то в силу определения 7.4 пути $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ имеют общие начальную и конечную вершины. В этом случае $\mathcal{L}(\bar{X}) \stackrel{0}{=} \mathcal{L}(\bar{Y})$ в свободной группе $\mathbf{B}_0$, и так как $\mathcal{L}(\bar{X}), \mathcal{L}(\bar{Y})$ – несократимые слова, то $\mathcal{L}(\bar{X}) \sqsupseteq \mathcal{L}(\bar{Y})$, т.е. $X = Y$. Тогда утверждение становится тривиальным. Если $\beta \geq 1$, то утверждение вытекает из следствия 11.20.

11.23. СЛЕДСТВИЕ ($\alpha \geq 0$). Пусть $0 \leq \beta \leq \alpha$, X и Y – пути на графе Γ_α и $\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y) \in \mathcal{R}_\alpha$. Пусть $\mathcal{E}l_\gamma(X, q_4) = \emptyset$ или $\mathcal{E}l_\gamma(Y, q_4) = \emptyset$ для каждого $\gamma = \beta + 1, \beta + 2, \dots, \alpha$. Пусть $K, L \in \mathcal{E}l_\beta(X, h + 8)$, $M \in \mathcal{E}l_\beta(X, t)$ для некоторого $t \geq h + 8$, $K', L' \in \mathcal{E}l_\beta(Y, p + 34)$, $K <_X M <_X L$, $K' <_Y L'$, K, L, M попарно не согласованы, $\mathcal{E}Cогл_\beta(K, K')$ и $\mathcal{E}Cогл_\beta(L, L')$. Тогда существует $M' \in \mathcal{E}l_\beta(Y, t')$, где $t' = \min\{q_4, t - h\}$, такой, что $\mathcal{E}Cогл_\beta(M, M')$. Если при этом $t \geq h + p + 34$, то $K' <_Y M' <_Y L'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как в силу предложения 8.45 пути $K \cup_X L$ и $K' \cup_Y L'$ близки в ранге β , то первое утверждение вытекает из следствия 11.22. Предположим, $t \geq h + p + 34$. Тогда $t' \geq p + 34$, и так как $\neg \mathcal{E}Cогл_\beta(K', M')$ и $\neg \mathcal{E}Cогл_\beta(L', M')$, то по предложению 8.40 путь M' не содержится в K' или в L' и ни один из путей K', L' не содержится в M' . Отсюда следует, что $K' <_Y M' <_Y L'$.

11.24. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $1 \leq \beta \leq \alpha$, X – путь на графе $\Gamma_{\beta-1}$ с $\mathcal{L}(X) \in \mathcal{R}_\alpha$ и $E \in \text{ППер}_\beta(A, 8)$, $F \in \text{ППер}_\beta(B, 8)$ – подпути пути X , где $A, B \in \mathcal{E}_\beta$. Тогда

$$\mathcal{E}Cогл_\beta(\pi_{\beta-1, \alpha}(E), \pi_{\beta-1, \alpha}(F)) \Leftrightarrow \text{П}Cогл_\beta(E, F) \text{ или } \text{П}Cогл_\beta(E, F^{-1}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\text{П}Cогл_\beta(E, F)$ или $\text{П}Cогл_\beta(E, F^{-1})$, то $\mathcal{E}Cогл_\beta(\pi_{\beta-1, \alpha}(E), \pi_{\beta-1, \alpha}(F))$ согласно определению 5.20. Докажем, что из $\mathcal{E}Cогл_\beta(\pi_{\beta-1, \alpha}(E), \pi_{\beta-1, \alpha}(F))$ следует $\text{П}Cогл_\beta(E, F^\epsilon)$ при некотором $\epsilon = \pm 1$. Согласно определению 5.20 найдутся пути $\tilde{E}$ и $\tilde{F}$ на графе $\Gamma_{\beta-1}$ такие, что $\pi_{\beta-1, \alpha}(\tilde{E}) = E$, $\pi_{\beta-1, \alpha}(\tilde{F}) = F$ и $\text{П}Cогл_\beta(\tilde{E}, \tilde{F}^\epsilon)$. Имеем $\tilde{E} = \mathbf{g}E$ и $\tilde{F} = \mathbf{h}F$ для некоторых $\mathbf{g}, \mathbf{h} \in \ker \pi_{\beta-1, \alpha}$ и, заменяя $\tilde{E}$ и $\tilde{F}$ на $\mathbf{h}^{-1}\tilde{E}$ и $\mathbf{h}^{-1}\tilde{F}$, можем считать, что $\mathbf{h} = 1$, т.е. $\tilde{F} = F$. Достаточно доказать, что $\text{П}Cогл_\beta(\tilde{E}, E)$. Пусть $P \in \text{Пер}(\Gamma_{\beta-1}, A, 2)$ – периодическая основа для E . Тогда $\mathbf{g}P$ – периодическая основа для $\tilde{E}$. Без ограничения общности можно считать, что слово $\mathcal{L}(P)$ начинается с A . В силу леммы 8.2, (ii) вершины $\iota(E)$ и $\iota(F)$ соединены некоторым путем u с $\mathcal{L}(u) \in \mathcal{H}_{\beta-1}$. Так как $\text{П}Cогл_\beta(\tilde{E}, F^\epsilon)$, то, используя предложение 7.7 и индуктивное предположение 11.23, легко видеть, что вершины $\iota(\mathbf{g}P)$ и $\iota(F)$ соединены путем вида Rv , где $\mathcal{L}(v) \in \mathcal{H}_{\beta-1}$ и $\mathcal{L}(R)$ – начало слова вида $A^{\pm t}$. Пусть Y – подпути пути X или X^{-1} , соединяющий вершины $\iota(F)$ и $\iota(E)$. Мы имеем, таким образом, путь $RvYu$, соединяющий вершины $\iota(\mathbf{g}P)$ и $\iota(P)$ (см. рис. 40). Так как вершины $\iota(\mathbf{g}P)$ и $\iota(P)$ отображаются в одну и ту же вершину графа Γ_α , то $\mathcal{L}(RvYu) \stackrel{\alpha}{=} 1$. Пусть $\mathcal{L}(R) \stackrel{0}{=} A^{kn}S$, где

S – начало слова A^n . Так как $A^{kn} \stackrel{\alpha}{=} 1$, то $(\mathcal{L}(Y))^{-1} \stackrel{\alpha}{=} \mathcal{L}(u)S\mathcal{L}(v)$. Тогда по предложению 11.2 при $X := (\mathcal{L}(Y))^{-1}$, $u := \mathcal{L}(u)S\mathcal{L}(v)$, $Y := v := 1$ и $\alpha := \alpha, \alpha - 1, \dots, \beta$, учитывая, что в силу предложения 8.18 пустое слово не может содержать элементарных q_4 -степеней ранга ≥ 1 , получаем $(\mathcal{L}(Y))^{-1} \stackrel{\beta-1}{=} \mathcal{L}(u)\widehat{S}\mathcal{L}(v)$, где $\widehat{S} \sqsubseteq S$ или, в случае $S \geq 2|A|$, возможно, $S\widehat{S}^{-1} \sqsubseteq A^n$. Поменяв k , полученное равенство можно переписать в виде $(\mathcal{L}(Y))^{-1} \stackrel{\beta-1}{=} \mathcal{L}(u)A^{kn}\mathcal{L}(Rv)$, т.е. $\mathcal{L}(RvYu) \stackrel{\beta-1}{=} A^{-kn}$. Отсюда следует, что вершины $\iota(\mathbf{gP})$ и $\iota(\mathbf{P})$ соединены путем $\mathbf{T}$ с $\mathcal{L}(\mathbf{T}) \sqsubseteq A^{-kn}$. Так как слово $\mathcal{L}(\mathbf{gP}) \sqsubseteq \mathcal{L}(\mathbf{P})$ начинается с A , то в этом случае $\mathbf{gP}$ и $\mathbf{P}$ имеют общее периодическое продолжение. Тогда имеем $\text{Cогл}(\mathbf{gP}, \mathbf{P})$, и, следовательно, $\text{ПСогл}_\beta(\tilde{\mathbf{E}}, \mathbf{E})$, что и требовалось.

Рис. 40

11.25. ПРЕДЛОЖЕНИЕ ($\alpha \geq 0$). Пусть $\beta \leq \alpha$, X – путь на графе Γ_α с $\mathcal{L}(X) \in \mathcal{R}_\alpha$. Пусть $K, K', L, L' \in \mathcal{Эл}_\beta(X, q_0)$, $\neg \mathcal{ЭСогл}_\beta(K, L)$, $\mathcal{ЭСогл}_\beta(K, K')$ и $\mathcal{ЭСогл}_\beta(L, L')$. Тогда $K <_X L \Leftrightarrow K' <_X L'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\beta = 0$ утверждение тривиально. При $\beta \geq 1$ нужно перейти к прообразу на графе $\Gamma_{\beta-1}$ пути X и воспользоваться предложениями 11.24, 8.46 и 8.39.

11.26. ЛЕММА ($\alpha \geq 0$). Пусть X, Y – пути на графе Γ_α с $\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y) \in \mathcal{R}_\alpha$. Пусть $0 \leq \beta \leq \alpha$, $\mathcal{Эл}_\gamma(X, q_4) = \emptyset$ или $\mathcal{Эл}_\gamma(Y, q_4) = \emptyset$ при $\gamma = \beta + 1, \beta + 2, \dots, \alpha$.

Пусть, далее, $K_i \in \mathcal{Эл}_\beta(X, q_0 + h)$, $K'_i \in \mathcal{Эл}_\beta(Y, q_0 + h)$ ($i = 1, 2, 3$), $\mathcal{ЭСогл}_\beta(K_i, K'_i)$ при всех i , $\neg \mathcal{ЭСогл}_\beta(K_i, K'_j)$ при $i \neq j$ и $K_1 <_X K_2 <_X K_3$. Тогда если для некоторых $1 \leq i < j \leq 3$ выполнено $K'_i <_Y K'_j$, то $K'_1 <_Y K'_2 <_Y K'_3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, $K'_i <_Y K'_j$ для некоторых $1 \leq i < j \leq 3$, но неверно, что $K'_1 <_Y K'_2 <_Y K'_3$. В силу предложения 8.40 имеет место один из четырех случаев: $K'_1 <_Y K'_3 <_Y K'_2$, $K'_2 <_Y K'_1 <_Y K'_3$, $K'_2 <_Y K'_3 <_Y K'_1$ или $K'_3 <_Y K'_1 <_Y K'_2$. Если $K'_1 <_Y K'_3 <_Y K'_2$, то в силу следствия 11.23 при $X := Y$, $Y := X$, $K := K'_1$, $L := K'_2$ и $M := K'_3$ найдется $L \in \mathcal{Эл}_\beta(X, q_0)$ такой, что $\mathcal{ЭСогл}_\beta(K'_3, L)$ и $K_1 <_X L <_X K_2$, и мы приходим к противоречию с предложением 11.25. Аналогично рассматривается случай $K'_2 <_Y K'_1 <_Y K'_3$, с применением следствия 11.23 при $M := K'_1$. Из двух оставшихся случаев в силу полной аналогии ограничимся рассмотрением случая, когда $K'_2 <_Y K'_3 <_Y K'_1$. Для вывода противоречия рассмотрим два подслучая.

Случай 1: $\beta = 0$. Согласно определению 5.14 $K_i = K'_i$ ($i = 1, 2, 3$) и $\mathcal{L}(K_i)$ – однобуквенные слова. Пусть $X = R_0 K_1 R_1 K_2 R_2 K_3 R_3$ и $Y = S_0 K_2 S_1 K_3 S_2 K_1 S_3$. Тогда $W \Rightarrow K_1 R_1 K_2 R_2 K_3 S_2$ – замкнутый путь на Γ_α , и в силу следствия 11.6 при $X := K_1 R_1 K_2 R_2 K_3$ и $Y := S_2^{-1}$ существует замкнутый путь $\bar{W}$ на Γ_0 , являющийся прообразом W . Так как $\mathcal{L}(K_1 R_1 K_2 R_2 K_3)$ и $\mathcal{L}(K_3 S_2)$ – подслова несократимых слов $\mathcal{L}(X)$ и $\mathcal{L}(Y)$ соответственно, то слово $\mathcal{L}(\bar{W})$ несократимо. Но это невозможно, так как $\mathcal{L}(\bar{W}) \stackrel{0}{=} 1$ в свободной группе $\mathbf{B}_0$.

Случай 2: $\beta > 0$. Применяя следствие 11.23 при $(X, Y, K, L, M, K', L') := (X, Y^{-1}, K_1, K_3, K_2, K_1'^{-1}, K_3'^{-1})$ (с учетом леммы 8.42), находим $L \in \mathcal{E}l_\beta(Y, q_0)$ такой, что $\mathcal{E}Cогл_\beta(K_2, L)$ и $K'_3 <_Y L <_Y K'_1$. Вновь противоречие с предложением 11.25.

11.27. ПРЕДЛОЖЕНИЕ ($\alpha \geq 0$). Пусть X, Y – пути на графе Γ_α с $\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y) \in \mathcal{R}_\alpha$. Пусть $0 \leq \beta \leq \alpha$, $\mathcal{E}l_\gamma(X, q_4) = \emptyset$ или $\mathcal{E}l_\gamma(Y, q_4) = \emptyset$ при $\gamma = \beta + 1, \beta + 2, \dots, \alpha$. Предположим, выполнено хотя бы одно из двух следующих условий (i) или (ii):

(i) для некоторых $K_1, K_2 \in \mathcal{E}l_\beta(X, q_0 + h)$, $K'_1, K'_2 \in \mathcal{E}l_\beta(Y, q_0 + h)$ выполнено $\neg \mathcal{E}Cогл_\beta(K_1, K_2)$, $\mathcal{E}Cогл_\beta(K_i, K'_i)$ ($i = 1, 2$), $K_1 <_X K_2$ и $K'_1 <_Y K'_2$;

(ii) пути X и Y близки в ранге β и X содержит по крайней мере 4 подпути $K_i \in \mathcal{E}l_\beta(X, q_0 + 2h)$ ($1 \leq i \leq 4$) таких, что $\neg \mathcal{E}Cогл_\beta(K_i, K_j)$ при $i \neq j$.

Тогда если $M, N \in \mathcal{E}l_\beta(X, q_0 + h)$, $M', N' \in \mathcal{E}l_\beta(Y, q_0 + h)$, $\neg \mathcal{E}Cогл_\beta(M, N)$, $\mathcal{E}Cогл_\beta(M, M')$ и $\mathcal{E}Cогл_\beta(N, N')$, то $M <_X N \Leftrightarrow M' <_Y N'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала выполнено условие (i). Если $\mathcal{E}Cогл_\beta(M, K_i)$ или $\mathcal{E}Cогл_\beta(N, K_i)$ для некоторого $i = 1, 2$, то утверждение вытекает из предложения 11.25 и леммы 11.26 (предложением 11.25 нужно воспользоваться в случае, когда $\mathcal{E}Cогл_\beta(M, K_i)$ и $\mathcal{E}Cогл_\beta(N, K_j)$, где $\{i, j\} = \{1, 2\}$). В случае $\neg \mathcal{E}Cогл_\beta(M, K_i)$ и $\neg \mathcal{E}Cогл_\beta(N, K_i)$ ($i = 1, 2$) искомое утверждение получается применением два раза леммы 11.26 при $\{K_1, K_2, K_3\} := \{K_1, K_2, M\}$, $\{K_1, K_2, K_3\} := \{K_1, K_2, N\}$ и, в случае, если $K_1 <_X M <_X K_2$ и $K_1 <_X N <_X K_2$, дополнительным применением леммы 11.26 при $\{K_1, K_2, K_3\} := \{K_1, M, N\}$.

Пусть выполнено условие (ii). В силу предложения 8.40 можно считать $K_1 <_X K_2 <_X K_3 <_X K_4$. С помощью следствия 11.22 найдем сначала $K'_2 \in \mathcal{E}l_\beta(Y, q_0 + h)$ такой, что $\mathcal{E}Cогл_\beta(K_2, K'_2)$. Далее, рассматривая вместо X конец X , начинающийся с K_2 , а вместо Y – конец Y , начинающийся с K'_2 , в силу предложения 8.45 и следствия 11.22 найдем $K'_3 \in \mathcal{E}l_\beta(Y, q_0 + h)$ такой, что $\mathcal{E}Cогл_\beta(K_3, K'_3)$. Тогда в силу предложения 8.40 получим $K'_2 <_Y K'_3$. Остается воспользоваться уже рассмотренным случаем (i).

Перейдем к анализу соотношений вида $X_1 \stackrel{\alpha}{=} u_1 X_2 u_2 X_3 u_3$, где $X_1, X_2, X_3 \in \mathcal{R}_\alpha$ и $u_1, u_2, u_3 \in \mathcal{H}_\alpha$. Наша цель сейчас – получить аналог предложения 11.17 для соотношений указанного вида (предложение 11.30). Схема рассуждений в этом случае такая же, как и для соотношений вида $X \stackrel{\alpha}{=} uYv$ с тем лишь отличием, что вместо аналога предложения 11.2 (которое используется также и для других целей) мы докажем более слабое утверждение.

11.28. ЛЕММА. Пусть $X_1 \stackrel{\alpha}{=} u_1 X_2 u_2 X_3 u_3$, где $X_i \in \mathcal{R}_\alpha$, $u_i \in \mathcal{H}_\alpha$ ($i = 1, 2, 3$). Пусть для каждого слова u_i фиксировано некоторое разложение $u_i \stackrel{\alpha}{=} v_i Q_i w_i$, где $v_i, w_i \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$ и Q_i – подслово слова B_i^n при $B_i \in \mathcal{E}_\alpha$. Тогда верно по крайней мере одно из двух следующих утверждений (i) или (ii).

(i) $X_1 \stackrel{\alpha-1}{=} \hat{u}_1 X_2 \hat{u}_2 X_3 \hat{u}_3$, где либо $\hat{u}_i \stackrel{\alpha}{=} u_i$, либо $\hat{u}_i$ есть слово, дополнительное к u_i .

(ii) Пусть X_1 и $u_1 X_2 u_2 X_3 u_3$ – пути на графе Γ_α с общими начальной и конечной вершинами, где $\mathcal{L}(X_i) \stackrel{\alpha}{=} X_i$ и $\mathcal{L}(u_i) \stackrel{\alpha}{=} u_i$. Тогда либо каждый путь X_i содержит подпуть $E_i \in \mathcal{E}_\alpha(\Gamma_\alpha)$, где $\mathcal{E}\text{Согл}_\alpha(E_1, E_j)$ ($j = 2, 3$) и для любых $i \neq j$ выполнено $\ell_\alpha(E_i) + \ell_\alpha(E_j) \geq q - 3p - 166$, либо некоторые два X_i и X_j содержат подпути $E_1, E_2 \in \mathcal{E}_\alpha(\Gamma_\alpha)$ соответственно такие, что $\mathcal{E}\text{Согл}_\alpha(E_1, E_2)$ и $\ell_\alpha(E_i) \geq q - 3p - 129$ ($i = 1, 2$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим дисковую B -диаграмму Δ ранга α с граничным циклом $\delta\Delta \approx \tilde{X}_1 \tilde{w}_3^{-1} \tilde{Q}_3^{-1} \tilde{v}_3^{-1} \tilde{X}_3^{-1} \tilde{w}_2^{-1} \tilde{Q}_2^{-1} \tilde{v}_2^{-1} \tilde{X}_2^{-1} \tilde{w}_1^{-1} \tilde{Q}_1^{-1} \tilde{v}_1^{-1}$, где метки путей $\tilde{X}_i, \tilde{v}_i, \tilde{Q}_i, \tilde{w}_i$ равны словам X_i, v_i, Q_i, w_i соответственно,

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_\alpha(\Delta) &= \{\tilde{X}_1, \tilde{X}_3^{-1}, \tilde{X}_2^{-1}\}, \quad \mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta) = \{\tilde{w}_3^{-1}, \tilde{v}_3^{-1}, \tilde{w}_2^{-1}, \tilde{v}_2^{-1}, \tilde{w}_1^{-1}, \tilde{v}_1^{-1}\}, \\ \mathcal{Z}_\alpha(\Delta) &= \{\tilde{Q}_3^{-1}, \tilde{Q}_2^{-1}, \tilde{Q}_1^{-1}\}. \end{aligned}$$

Так же, как и в доказательстве предложения 11.2, заменяя слова u_i на $\hat{u}_i$ и используя предложения 9.9 и 9.19, можно считать, что Δ есть приведенная B -диаграмма ранга α и на $\Delta^{\alpha-1}$ задана некоторая карта примыканий $\mathcal{S}$ ранга $\alpha - 1$. Если Δ не содержит областей ранга α , то мы приходим к случаю (i). Пусть $A \in \mathbf{R}_\alpha(\Delta)$ и $\mathcal{L}(\delta A) \approx A^n$, где $A \in \mathcal{E}_\alpha$. В силу предложения 10.9, (i) граничный цикл δA области A имеет не более одной поддиаграммы примыкания $\Pi \in \mathcal{S}$ к каждому участку границы $\tilde{X}_1, \tilde{X}_3^{-1}$ или $\tilde{X}_2^{-1}$ диаграммы $\Delta^{\alpha-1}$. Пусть Π_i ($1 \leq i \leq r$, $r \leq 3$) – все такие поддиаграммы. Пусть $\delta\Pi_i \approx G_i y_i^{-1} S_i x_i^{-1}$, где G_i, S_i – участки примыкания, G_i входит в X_1, X_2^{-1} или X_3^{-1} , S_i входит в δA и $\mathcal{L}(x_i), \mathcal{L}(y_i) \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$. По предложению 10.13, (i) имеем

$$\sum_{i=1}^r |\mathcal{L}(S_i)| \geq (n - 3p - 48)|A|, \quad (11.7)$$

а в силу приведенности слов X_i в ранге α для каждого i

$$|\mathcal{L}(S_i)| < (n - q)|A|. \quad (11.8)$$

Отбросим те поддиаграммы примыкания Π_i , для которых $|\mathcal{L}(S_i)| < 44|A|$. Из (11.7) и (11.8) следует, что таких поддиаграмм примыкания Π_i не более одной. Следовательно, вместо (11.7) будем иметь

$$\sum_{i=1}^r |\mathcal{L}(S_i)| > (n - 3p - 92)|A|. \quad (11.9)$$

Из (11.8) и (11.9) следует $r \geq 2$ для нового значения r . Рассмотрим теперь пути X_1 и $u_1X_2u_2X_3u_3$ на графе Γ_α , как указано в (ii). Рассмотрим отображение ω множества путей на диаграмме Δ во множество путей на графе Γ_α , как указано в 4.12, такое, что $\omega(\iota(\tilde{X}_1)) = \iota(X_1)$. Очевидно, $\omega(\tilde{X}_i) = X_i$ ($i = 1, 2, 3$). По лемме 11.15 каждый путь $\omega(G_i)$ содержит подпуть $G_i^* \in \mathcal{E}l_\alpha(\Gamma_\alpha)$ с периодической основой, содержащейся в $\omega(S_i)$, причем $\ell_\alpha(G_i^*) \geq |\mathcal{L}(S_i)|/|A| - 37$. Так как все $\omega(S_i)$ имеют общее периодическое продолжение, то по лемме 11.14 имеем $\mathcal{E}Cогл_\alpha(G_i^*, G_j^*)$ при всех i, j . Из (11.8) и (11.9) следует, что если $r = 2$, то $\ell_\alpha(G_i^*) \geq q - 3p - 129$ для каждого $i = 1, 2$, а если $r = 3$, то $\ell_\alpha(G_i^*) + \ell_\alpha(G_j^*) \geq q - 3p - 166$ для любых $i \neq j$. Поэтому в качестве E_i можно взять G_i^* , если G_i^* содержится в X_1 , и G_i^{*-1} , если G_i^* содержится в X_2^{-1} или в X_3^{-1} .

11.29. ЛЕММА. Пусть X_1 и $u_1X_2u_2X_3u_3$ — пути на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ с общей начальной и конечной вершинами, где $\mathcal{L}(X_i) \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ и $\mathcal{L}(u_i) \in \mathcal{H}_\alpha$, и пусть $E \in \text{ППер}_\alpha(A, 3p + 232)$ ($A \in \mathcal{E}_\alpha$) — подпуть пути X_1 . Пусть для каждого i $u_i = v_iQ_iw_i$, где $\mathcal{L}(v_i), \mathcal{L}(w_i) \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$, $\mathcal{L}(Q_i)$ — подслово слова B_i^n при $B_i \in \mathcal{E}_\alpha$ и либо $|Q_i| < 2|B_i|$, либо $|Q_i| \geq 2|B_i|$ и $\neg \text{Cогл}(P, Q_i)$, где P — периодическая основа для E . Тогда верно хотя бы одно из утверждений (i) или (ii):

(i) существует подпуть $F \in \text{ППер}_\alpha(A, 8)$ пути X_2 или X_3 такой, что $\text{ПСогл}_\alpha(E, F)$ и $\ell_{\alpha,A}(F) \geq \ell_{\alpha,A}(E) - 3p - 224$;

(ii) существуют подпути $F, G \in \text{ППер}_\alpha(A, 8)$ путей X_2 и X_3 соответственно такие, что $\text{ПСогл}_\alpha(E, F)$, $\text{ПСогл}_\alpha(E, G)$ и $\ell_{\alpha,A}(F) + \ell_{\alpha,A}(G) \geq \ell_{\alpha,A}(E) - 3p - 217$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По существу, нужно повторить рассуждения из доказательства леммы 11.10. По лемме 11.7, (ii) при $X := X_1$ и $W := v_1Q_1w_1X_2v_2Q_2w_2 \times X_3v_3Q_3w_3$ найдутся подпути $F_1, F_2, \dots, F_t \in \text{ППер}_\alpha(A)$ попарно различных путей Q_1, X_2, Q_2, X_3 и Q_3 такие, что $\text{ПСогл}_\alpha(E, F_i)$ при всех i и $\sum_{i=1}^t \ell_{\alpha,A}(F_i) \geq \ell_{\alpha,A}(E) - 220$. Если F_i — подпуть некоторого Q_j , то из посылки леммы аналогично тому, как в доказательстве леммы 11.10, вытекает $\ell_{\alpha,A}(F_i) \leq p - 1$. Следовательно, отбросив F_i , содержащиеся во всех Q_j , а также в случае $\ell_{\alpha,A}(F_i) \leq 7$ и содержащиеся в X_2 или в X_3 , придем к одному из утверждений (i) или (ii).

11.30. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть X_1 и $u_1X_2u_2X_3u_3$ — пути на графе Γ_α с общей начальной и конечной вершинами, где $\mathcal{L}(X_i) \in \mathcal{R}_\alpha$ и $\mathcal{L}(u_i) \in \mathcal{H}_\alpha$. Пусть $E \in \mathcal{E}l_\alpha(X_1, 3p + 232)$ и E устойчив относительно каждого u_i . Тогда верно хотя бы одно из следующих утверждений:

(i) существует подпуть $F \in \mathcal{E}l_\alpha(\Gamma_\alpha)$ пути X_2 или X_3 такой, что $\mathcal{E}Cогл_\alpha(E, F)$ и $\ell_\alpha(F) \geq \min\{q - 3p - 129, \ell_\alpha(E) - 3p - 224\}$;

(ii) существуют подпути $F, G \in \mathcal{E}l_\alpha(\Gamma_\alpha)$ путей X_2 и X_3 соответственно такие, что $\mathcal{E}Cогл_\alpha(E, F)$, $\mathcal{E}Cогл_\alpha(E, G)$ и $\ell_\alpha(F) + \ell_\alpha(G) \geq \min\{q - 3p - 166, \ell_\alpha(E) - 3p - 217\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать индукцию по $|X_1| + |X_2| + |X_3|$. Пусть $u_i = v_iQ_iw_i$ ($i = 1, 2, 3$), где $\mathcal{L}(v_i), \mathcal{L}(w_i) \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$, $\mathcal{L}(Q_i)$ — подслово слова B_i^n при $B_i \in \mathcal{E}_\alpha$ и Q_i и E удовлетворяют условию из определения 11.11. Применим

лемму 11.28, где роль слов X_i , u_i , v_i , Q_i и w_i играют метки соответствующих путей на графе Γ_α . Если имеет место случай 11.28, (i), то утверждение сводится к лемме 11.29 точно так же, как в доказательстве предложения 11.17. Пусть имеет место случай 11.28, (ii), т.е. либо каждый путь X_i содержит подпуть $E_i \in \mathcal{E}_\alpha(\Gamma_\alpha)$, где $\partial \text{Cогл}_\alpha(E_1, E_j)$ ($j = 2, 3$) и для любых $i \neq j$ выполнено $\ell_\alpha(E_i) + \ell_\alpha(E_j) \geq q - 3p - 166$, либо некоторые X_i и X_j содержат подпути $E_1, E_2 \in \mathcal{E}_\alpha(\Gamma_\alpha)$ такие, что $\partial \text{Cогл}_\alpha(E_1, E_2)$ и $\ell_\alpha(E_i) \geq q - 3p - 129$ ($i = 1, 2$). Рассмотрим два случая.

Случай 1: Каждый путь X_i содержит подпуть $E_i \in \mathcal{E}_\alpha(\Gamma_\alpha)$, где $\partial \text{Cогл}_\alpha(E_1, E_j)$ ($j = 2, 3$) и для любых $i \neq j$ выполнено $\ell_\alpha(E_i) + \ell_\alpha(E_j) \geq q - 3p - 166$. Если $\partial \text{Cогл}_\alpha(E, E_1)$, то верно утверждение (ii) при $F = E_2$ и $G = E_3$. Пусть $\neg \partial \text{Cогл}_\alpha(E, E_1)$. Пусть $X_i = X'_i E_i X''_i$ ($i = 2, 3$). По лемме 11.19 соединим вершины $\iota(E_2)$ и $\tau(E_3)$ путем u'_2 с $\mathcal{L}(u'_2) \in \mathcal{H}_\alpha$, относительно которого устойчив путь E . Так как слова $\mathcal{L}(E_i)$ непусты (это следует, например, из предложения 8.16), то можно воспользоваться индуктивным предположением для $u_1 X'_2 u'_2 X''_3 u_3$ вместо $u_1 X_2 u_2 X_3 u_3$.

Случай 2: Для некоторых $i \neq j$ пути X_i и X_j содержат подпути $E_1, E_2 \in \mathcal{E}_\alpha(\Gamma_\alpha)$ такие, что $\partial \text{Cогл}_\alpha(E_1, E_2)$ и $\ell_\alpha(E_i) \geq q - 3p - 129$ ($i = 1, 2$). Если $\{i, j\} = \{2, 3\}$, то проходят рассуждения из предыдущего случая. Предположим, $\{i, j\} = \{1, 2\}$. Можно считать, что E_k содержится в X_k ($k = 1, 2$). Если $\partial \text{Cогл}_\alpha(E, E_1)$, то верно утверждение (i) при $F := E_2$. Пусть $\neg \partial \text{Cогл}_\alpha(E, E_1)$. Пусть $X_i = X'_i E_i X''_i$ ($i = 1, 2$). По лемме 11.19 соединим вершины $\iota(E_1)$ и $\tau(E_2)$ путем u'_1 , а вершины $\tau(E_1)$ и $\tau(E_2)$ путем u''_1 , где $\mathcal{L}(u'_1), \mathcal{L}(u''_1) \in \mathcal{H}_\alpha$ и E устойчив относительно u'_1 и u''_1 (см. рис. 41). По предложению 8.40 путь E содержится либо в $X'_1 E_1$, либо в $E_1 X''_1$. В первом случае по предложению 11.17 при $X := X'_1 E_1$ и $u \Upsilon v := u_1 X'_2 E_2 u''_1{}^{-1}$ найдется подпуть $F \in \mathcal{E}_\alpha(\Gamma_\alpha)$ пути X_2 такой, что $\partial \text{Cогл}_\alpha(E, F)$ и $\ell_\alpha(F) \geq \min\{q_4, \ell_\alpha(E) - h\}$, т.е. мы снова приходим к утверждению (i). Во втором случае можно воспользоваться индуктивным предположением при $X_1 := E_1 X''_1$ и $u_1 X_2 u_2 X_3 u_3 := u'_1 X'_2 u_2 X_3 u_3$. Аналогично рассматривается случай, когда $\{i, j\} = \{1, 3\}$.

Рис. 41

В оставшейся части параграфа изучаются соотношения сопряженности в груп-

пе B_α .

11.31. ЛЕММА. Пусть слова X и Y циклически приведены в ранге α , элемент $[X]_\alpha$ имеет бесконечный порядок и $T^{-1}XT \stackrel{\alpha}{=} Y$. Тогда верно по крайней мере одно из утверждений (i) или (ii):

- (i) для некоторого T' выполнено $T \stackrel{\alpha}{=} T'$ и $T'^{-1}XT' \stackrel{\alpha-1}{=} Y$;
- (ii) в некоторый циклический сдвиг каждого из слов X и Y входят элементарные q_4 -степени ранга α и $T \stackrel{\alpha}{=} X^t X_1 u Y_1^{-1}$ для некоторых $u \in \mathcal{H}_\alpha$, начала X_1 слова X , начала Y_1 слова Y и $t \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{\Delta}$ – дисковая диаграмма ранга α с граничным циклом $\delta\Delta \approx \tilde{T}^{-1}\tilde{X}\tilde{T}'\tilde{Y}^{-1}$, где $\mathcal{L}(\tilde{T}) \sqsubseteq \mathcal{L}(\tilde{T}') \sqsubseteq T$, $\mathcal{L}(\tilde{X}) \sqsubseteq X$ и $\mathcal{L}(\tilde{Y}) \sqsubseteq Y$. Склеивая участки границы диаграммы $\tilde{\Delta}$ вдоль путей $\tilde{T}$ и $\tilde{T}'$, как описано в п. 4.6, получим кольцевую диаграмму Δ с граничными циклами X и Y^{-1} , где $\mathcal{L}(X) \sqsubseteq X$, $\mathcal{L}(Y) \sqsubseteq Y$, и вершины $\iota(X)$ и $\iota(Y)$ соединены путем T с $\mathcal{L}(T) \sqsubseteq T$. Так как слова X и Y^{-1} циклически приведены в ранге α , то Δ можно рассматривать как B -диаграмму ранга α с $\mathcal{X}_\alpha(\Delta) = \{X, Y\}$ и $\mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta) = \mathcal{Z}_\alpha(\Delta) = \emptyset$. В силу предложений 9.9 и 9.19 существует последовательность внутренних преобразований ранга α

$$\Delta = \Delta_0 \rightarrow \Delta_1 \rightarrow \dots \rightarrow \Delta_r = \Delta', \quad (11.10)$$

переводящая Δ в приведенную B -диаграмму Δ' ранга α такую, что на $\Delta^{\alpha-1}$ существует некоторая карта примыканий $\mathcal{S}$. Докажем, что в последовательности (11.10) можно обойтись без преобразований вида 9.4, (iii), т.е. только измельчениями и заменами дисковых поддиаграмм. Предположим, диаграмма Δ_{i+1} получена из Δ_i преобразованием 9.4, (iii), т.е. Δ_{i+1} есть результат замены кольцевой поддиаграммы Θ диаграммы Δ_i на некоторую кольцевую диаграмму Θ' , где для каждого из двух граничных циклов C_1 и C_2 диаграммы Θ элемент $[\mathcal{L}(C_i)]_\alpha$ имеет конечный порядок. Диаграмма $\Delta_i - \text{int } \Theta$ состоит из двух связанных компонент Σ_1, Σ_2 и имеет четыре граничных цикла X, Y^{-1}, C_1^{-1} и C_2^{-1} , причем C_1^{-1} и C_2^{-1} – граничные циклы разных поддиаграмм Σ_1 и Σ_2 . Если бы каждая из поддиаграмм Σ_j имела по два граничных цикла, то по предложению 4.3 мы получили бы, что $[X]_\alpha$ – элемент конечного порядка вопреки условию. Следовательно, одна из поддиаграмм Σ_j , скажем Σ_1 , является дисковой диаграммой, и тогда Δ_{i+1} есть результат замены дисковой поддиаграммы $\Theta \cup \Sigma_1$ диаграммы Δ_i на диаграмму $\Theta' \cup \Sigma'$, где Σ' – копия диаграммы Σ_1 , приклеенная к Θ' .

Итак, для каждого i диаграмма Δ_{i+1} есть либо результат измельчения диаграммы Δ_i , либо результат замены дисковой поддиаграммы диаграммы Δ_i . Тогда по лемме 4.10 вершины $\iota(X)$ и $\iota(Y)$ соединены путем T' на Δ' с $\mathcal{L}(T') \sqsubseteq T' \stackrel{\alpha}{=} T$. Если Δ' не имеет областей ранга α , то по предложению 4.3 выполнено равенство $T'^{-1}XT' \stackrel{\alpha-1}{=} Y$, и мы приходим к случаю (i). Пусть Δ' имеет некоторую область A ранга α . Изменив обозначения, будем считать $\Delta = \Delta'$ и $T = T'$ (соответственно $T \sqsubseteq T'$). В силу предложений 10.12 и 10.9 граничный цикл области A имеет ровно одну поддиаграмму примыкания $\Pi_1 \in \mathcal{S}$ к X и ровно одну поддиаграмму примыкания $\Pi_2 \in \mathcal{S}$ к Y^{-1} . Пусть S_1 и S_2 – соответствующие участки

примыкания, входящие в δA , и пусть $\mathcal{L}(\delta A) \approx A^n$, где $A \in \mathcal{E}_\alpha$. В силу предложения 10.13, (ii) $|\mathcal{L}(S_1)| + |\mathcal{L}(S_2)| \geq (n - 2p - 32)|A|$. Так как слова $\mathcal{L}(S_1)$ и $\mathcal{L}(S_2)$ близки в ранге $\alpha - 1$ к некоторым подсловам циклических сдвигов слов X^{-1} и Y соответственно, то в силу циклической приведенности слов X^{-1} и Y имеем $|\mathcal{L}(S_i)| < (n - q)|A|$. Отсюда следует $|\mathcal{L}(S_i)| \geq (q - 2p - 32)|A|$ ($i = 1, 2$). Тогда в силу следствия 8.24 в циклический сдвиг каждого слова X^{-1} и Y (а значит, и X) входит элементарная q_4 -степень ранга α . Тем самым доказана первая часть утверждения (ii). Для доказательства второй части рассмотрим путь u на диаграмме Δ с $u \Rightarrow \mathcal{L}(u) \in \mathcal{H}_\alpha$, изображенный более толстой линией на рис. 42. Пусть X_1 – начало пути X и Y_1 – начало пути Y с конечными вершинами $\iota(u)$ и $\tau(u)$ соответственно. Положим $X_1 \Leftarrow \mathcal{L}(X_1)$ и $Y_1 \Leftarrow \mathcal{L}(Y_1)$. Так как циклическая группа $\pi_1(\Delta, \iota(X))$ порождается классом $[X]_\Delta$, то замкнутый путь $TY_1u^{-1}X_1^{-1}$ гомотопен пути X^t для некоторого $t \in \mathbb{Z}$. Тогда по лемме 4.2 имеем $TY_1u^{-1}X_1^{-1} \stackrel{\alpha}{\cong} X^t$, т.е. $T \stackrel{\alpha}{\cong} X^t X_1 u Y_1^{-1}$.

Рис. 42

11.32. СЛЕДСТВИЕ ($\alpha \geq 0$). Пусть слова X и Y циклически приведены в ранге α , элемент $[X]_\alpha$ имеет бесконечный порядок и $T^{-1}XT \stackrel{\alpha}{\cong} Y$. Пусть $\beta \leq \alpha$ и никакой циклический сдвиг слова X не содержит элементарных q_4 -степеней ранга γ при $\beta + 1 \leq \gamma \leq \alpha$. Тогда $T \stackrel{\alpha}{\cong} X^t X_1 u Y_1^{-1}$ для некоторых $u \in \mathcal{H}_\beta$, начала X_1 слова X , начала Y_1 слова Y и $t \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\alpha = 0$ из циклической несократимости слов X и Y и равенства $T^{-1}XT \stackrel{0}{=} Y$ легко следует, что $X \stackrel{0}{\cong} X_1 X_2$, $Y \stackrel{0}{\cong} X_2 X_1$ и $T \stackrel{0}{=} X^t X_1$ для некоторых X_1, X_2 и t , т.е. в качестве u и Y_1 можно взять пустые слова. При $\alpha \geq 1$ нужно применить лемму 11.31 и в случае $\beta < \alpha$ воспользоваться индуктивным предположением для $\alpha := \alpha - 1$.

11.33. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если циклически приведенные в ранге α слова X и Y сопряжены в группе $\mathbf{B}_\alpha$, $\beta \leq \alpha - 1$ и никакой циклический сдвиг слова X

не содержит элементарных q_4 -степеней ранга γ при $\beta + 1 \leq \gamma \leq \alpha$, то X и Y сопряжены в $\mathbf{B}_\beta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай $\beta = \alpha - 1$. Пусть Δ – кольцевая диаграмма ранга α с граничными циклами X и Y^{-1} , где $\mathcal{L}(X) \subseteq X$ и $\mathcal{L}(Y) \subseteq Y$. Рассмотрим Δ как B -диаграмму ранга α , где $\mathcal{X}_\alpha(\Delta) = \{X, Y^{-1}\}$ и $\mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta) = \mathcal{Z}_\alpha(\Delta) = \emptyset$. В силу предложений 9.9 и 9.19 можно считать, что Δ – приведенная B -диаграмма ранга α и $\mathcal{S}$ – некоторая карта примыканий ранга $\alpha - 1$ на $\Delta^{\alpha-1}$. Повторяя рассуждения из доказательства леммы 11.31, получаем, что либо Δ есть диаграмма ранга $\alpha - 1$, и тогда X и Y сопряжены в $\mathbf{B}_{\alpha-1}$, либо некоторый циклический сдвиг слова X содержит элементарную q_4 -степень ранга α .

11.34. ЛЕММА. Пусть слова $XuYv$ и Z сопряжены в группе $\mathbf{B}_\alpha$, где $X, Y \in \mathcal{R}_\alpha$, $u, v \in \mathcal{H}_\alpha$ и слово Z циклически приведено в ранге α . Пусть для слов u, v фиксированы представления в виде $u \subseteq u_1Qu_2$, $v \subseteq v_1Rv_2$, где $u_i, v_i \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$ ($i = 1, 2$) и Q, R – подслова слов B^n, C^n соответственно при $B, C \in \mathcal{E}_\alpha$. Тогда если слова X и Y не содержат элементарных $(\lceil \frac{1}{3}q \rceil - 2p - 58)$ -степеней ранга α , то в группе $\mathbf{B}_{\alpha-1}$ сопряжены слова $X\hat{u}Y\hat{v}$ и Z , где $\hat{u}, \hat{v}$ совпадают соответственно с u, v или являются дополнительными к ним словами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим кольцевую B -диаграмму Δ ранга α с граничными циклами $Xu_1Qu_2Yv_1Ru_2$ и Z^{-1} , где метки путей X, u_i, Q, Y, v_i, R и Z равны соответственно словам X, u_i, Q, Y, v_i, R и Z ,

$$\mathcal{X}_\alpha(\Delta) = \{X, Y, Z^{-1}\}, \quad \mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta) = \{u_1, u_2, v_1, v_2\} \quad \text{и} \quad \mathcal{Z}_\alpha(\Delta) = \{Q^{-1}, R^{-1}\}.$$

Так же, как и в доказательстве предложения 11.2, заменяя слова u_i на $\hat{u}_i$ и используя предложение 9.9, можно считать, что Δ есть приведенная B -диаграмма ранга α , а в силу предложения 9.19 можно считать, что на $\Delta^{\alpha-1}$ задана некоторая карта примыканий $\mathcal{S}$ ранга $\alpha - 1$. Достаточно доказать, что Δ не имеет областей ранга α . Допустим, $A \in \mathbf{R}_\alpha(\Delta)$. Пусть $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_r \in \mathcal{S}$ – поддиаграммы примыкания граничного цикла области A к главным участкам ранга α диаграммы Δ , и пусть S_i – участок примыкания поддиаграммы примыкания Π_i , входящий в δA . Пусть $\mathcal{L}(A) \approx A^n$, где $A \in \mathcal{E}_\alpha$. По предложению 10.13, (ii)

$$\sum_{i=1}^r |\mathcal{L}(S_i)| \geq (n - 6p - 64)|A|. \quad (11.11)$$

В силу предложения 10.9, (ii) имеется не более одной поддиаграммы примыкания Π_i граничного цикла A к Z^{-1} . Так как слово Z циклически приведено в ранге α , то для такой поддиаграммы примыкания Π_i выполнено $|\mathcal{L}(S_i)| < (n - q)|A|$. Следовательно, выбросив такую поддиаграмму Π_i , если она существует, вместо (11.11) получим

$$\sum_{i=1}^r |\mathcal{L}(S_i)| \geq (q - 6p - 64)|A|.$$

По предложению 10.9, (ii) для нового значения r имеем $r \leq 3$, поэтому для некоторого i выполнено $\mathcal{L}(S_i) \geq (\lceil \frac{1}{3}q \rceil - 2p - 22)|A|$. Тогда в силу следствия 8.24 одно из слов X или Y содержит элементарную $(\lceil \frac{1}{3}q \rceil - 2p - 58)$ -степень ранга α вопреки условию. Следовательно, Δ не имеет областей ранга α .

§ 12. Представление элементов группы $\mathbf{B}_\alpha$ приведенными словами

Часть рассуждений этого параграфа будет проводиться на языке слов и вхождений. Нам будет удобно использовать следующие два понятия, которые являются аналогами соответствующих понятий из [1].

12.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $U = K*E*L$, $V = M*F*N$ – два вхождения в слово X элементарных слов E и F ранга α . Будем говорить, что U и V *согласованы*, если для некоторого (или, равносильно, для любого) пути X на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ с $\mathcal{L}(X) \sqsubseteq X$ выполнено $ПСогл_\alpha(\phi_X(U), \phi_X(V))$ (обозначение $\phi_X(U)$ было введено в § 3). Отношение согласованности вхождений U и V будем обозначать той же записью $\mathcal{E}Согл_\alpha(U, V)$, что и для путей на графе Γ_β .

12.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть U, V – два вхождения в слово X элементарных слов ранга α , порожденных одним элементарным периодом $A \in \mathcal{E}_\alpha$. Будем говорить, что V есть *продолжение* U *относительно периода* A , если U содержится в V . Продолжение V вхождения U относительно периода A назовем *максимальным*, если не существует отличных от V продолжений вхождения U относительно A , содержащих V .

12.3. ЛЕММА. (i) *Отношение $\mathcal{E}Согл_\alpha(U, V)$ на множестве вхождений элементарных слов ранга α в данное слово X является отношением эквивалентности.*

(ii) *Если $P*E*Q$ содержится в $R*F*S$ и $\ell_\alpha(E) \geq p + 34$, то $P*E*Q$ и $R*F*S$ согласованы.*

(iii) *Для любой элементарной $(2p + 80)$ -степени E ранга α существуют элементарное слово $\bar{E}$ ранга α и слова U и V такие, что $E \sqsubseteq U\bar{E}V$, $\ell_\alpha(\bar{E}) \geq \ell_\alpha(E) - 2p - 72$ и для любых двух несогласованных вхождений $P*E*Q$ и $R*F*S$ в слово $X \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ вхождения $PU*\bar{E}*VQ$ и $R*F*S$ не пересекаются.*

(iv) *Каждое вхождение в слово $X \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ элементарного слова ранга α , порожденного данным элементарным периодом A ранга α , обладает единственным максимальным продолжением относительно A .*

(v) *Если вхождения элементарных слов F и F' ранга α в слово $X \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ – продолжения некоторого вхождения элементарного слова ранга α в X относительно периода A и F максимально, то $\ell_{\alpha,A}(F) \geq \ell_{\alpha,A}(F')$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) вытекает из предложения 8.6, (ii). Утверждение (ii) вытекает из предложения 8.38, (ii), а (iii) – из предложений 8.38, (ii) и 8.14, (i). Наконец, (iv) и (v) легко следуют из предложений 8.9 и 8.11.

12.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $X \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ и $X \sqsubseteq K_0 E_1 K_1 \dots E_r K_r$, где $E_1, E_2, \dots, E_r$ — элементарные слова ранга α . Пусть для каждого слова E_i фиксирован некоторый элементарный период $A_i \in \mathcal{E}_\alpha$, где $E_i \in \text{ППер}_\alpha(A_i, 8)$. Слово $Y \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ будем называть результатом поворота в слове X набора вхождений

$$K_0 E_1 K_1 \dots K_{i-1} * E_i * K_i \dots E_r K_r \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad (12.1)$$

если существуют слова $P_i \in \text{Пер}(A_i, 2)$, $u_i, v_i \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$ и Q_i ($i = 1, 2, \dots, r$), удовлетворяющие следующим условиям:

(i) для каждого $i = 1, 2, \dots, r$ существуют пути E_i и $u_i P_i v_i$ на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ с общими начальной и конечной вершинами такие, что метки путей E_i , u_i , P_i и v_i равны словам E_i , u_i , P_i и v_i соответственно и P_i — периодическая основа для E_i ; в частности, $E_i \stackrel{\alpha-1}{=} u_i P_i v_i$;

(ii) для каждого $i = 1, 2, \dots, r$ выполнено $A_i^n \approx P_i Q_i$;

(iii) $Y \stackrel{\alpha-1}{=} K_0 u_1 Q_1^{-1} v_1 K_1 \dots u_r Q_r^{-1} v_r K_r$.

Из определения вытекает

12.5. ЛЕММА. Если слово Y есть результат поворота в X некоторого набора вхождений (12.1), то $X \stackrel{\alpha}{=} Y$.

12.6. ЛЕММА. Пусть $X \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$, $X \sqsubseteq K_0 E_1 K_1 \dots E_r K_r$, где E_i — элементарное слово ранга α , порожденное элементарным периодом $A_i \in \mathcal{E}_\alpha$. Пусть $\ell_{\alpha, A_i}(E_i) \leq n - 2$ для всех i . Тогда существует слово Y , являющееся результатом поворота в X набора вхождений (12.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование слов $P_i \in \text{Пер}(A_i, 2)$, $u_i, v_i \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$, удовлетворяющих условию (i) определения 12.4, вытекает из определений 5.19, 5.16 и леммы 8.2, (ii). Так как $\ell_{\alpha, A_i}(E_i) \leq n - 2$, то из 12.4, (i), определения 5.17 и леммы 7.6 следует $|P_i| \leq n|A_i|$. Поэтому для некоторых Q_i выполнено условие 12.4, (ii). Наконец, по индуктивному предположению 12.13 существует слово $Y \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ такое, что имеет место равенство 12.4, (iii).

12.7. ЛЕММА. Пусть $X \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$, $X \sqsubseteq K_0 E_1 K_1 \dots E_r K_r$, где $E_i \in \text{ППер}_\alpha(A_i, 44)$ ($A_i \in \mathcal{E}_\alpha$), и пусть слово Y есть результат поворота в X набора вхождений

$$U_i \sqsubseteq K_0 E_1 K_1 \dots K_{i-1} * E_i * K_i \dots E_r K_r \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

т.е. выполнены условия (i)–(iii) определения 12.4 для некоторых $P_i \in \text{Пер}(A_i, 2)$, $u_i, v_i \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$ и Q_i ($i = 1, 2, \dots, r$).

Пусть вхождение слова $\tilde{E}_i$ в слово X есть максимальное продолжение вхождения U_i относительно A_i и для каждого $i = 1, 2, \dots, r$ выполнено

$$\ell_{\alpha, A_i}(\tilde{E}_i) \leq n - 2p - 111. \quad (12.2)$$

Тогда существуют элементарные слова $F_1, F_2, \dots, F_r$ ранга α и слова $w_i, z_i \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$, $S_i \in \text{Пер}(A_i^{-1}, 2)$, U_i, V_i ($i = 1, 2, \dots, r$) и L_i ($i = 0, 1, \dots, r$) такие, что $F_i \in \text{ППер}_\alpha(A_i^{-1}, 8)$ и верны следующие утверждения:

- (i) $Y \sqsubseteq L_0 F_1 L_1 \dots F_r L_r$;
- (ii) для каждого $i = 1, 2, \dots, r$ существуют пути F_i и $w_i S_i z_i$ на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ с общими начальной и конечной вершинами такие, что метки путей F_i , w_i , S_i и z_i равны словам F_i , v_i , S_i и z_i соответственно и S_i – периодическая основа для F_i ;
- (iii) $Q_i \sqsubseteq U_i S_i^{-1} V_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$);
- (iv) имеют место соотношения

$$\begin{aligned} L_0 &\stackrel{\alpha-1}{=} K_0 u_1 V_1^{-1} w_1^{-1}, \\ L_i &\stackrel{\alpha-1}{=} z_i^{-1} U_i^{-1} v_i K_i u_{i+1} V_{i+1}^{-1} w_{i+1}^{-1} \quad (1 \leq i \leq r-1), \\ L_r &\stackrel{\alpha-1}{=} z_r^{-1} U_r^{-1} v_r K_r; \end{aligned}$$

- (v) $\ell_{\alpha, A_i}(\tilde{E}_i) + \ell_{\alpha, A_i^{-1}}(F_i) \geq n - 2p - 103$ ($i = 1, 2, \dots, r$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с условием 12.4, (iii) рассмотрим дисковую A -диаграмму Δ ранга $\alpha - 1$ с граничным циклом

$$\delta\Delta \approx K_0 u_1 Q_1^{-1} v_1 K_1 \dots u_r Q_r^{-1} v_r K_r x Y^{-1} y,$$

где метки путей K_i , u_i , Q_i , v_i и Y равны словам K_i , u_i , Q_i , v_i и Y соответственно, $\mathcal{L}(x) \sqsubseteq \mathcal{L}(y) \sqsubseteq 1$,

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{\alpha-1}(\Delta) &= \{K_0, K_1, \dots, K_r, Q_1^{-1}, Q_2^{-1}, \dots, Q_r^{-1}, Y^{-1}\}, \\ \mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta) &= \{u_1, u_2, \dots, u_r, v_1, v_2, \dots, v_r, x, y\}. \end{aligned}$$

Можно считать, что на Δ задана некоторая карта примыканий $\mathcal{S}$ ранга $\alpha - 1$.

Наша цель – доказать, что каждый из участков границы Q_i^{-1} диаграммы Δ имеет поддиаграмму примыкания к участку границы Y^{-1} с достаточно длинным участком примыкания, откуда несложно будет следовать искомое утверждение. Доказательство разбивается на ряд шагов, на каждом из которых мы изучим поддиаграммы примыкания $\Pi \in \mathcal{S}$ определенного сорта.

Прежде всего заметим, что по лемме 9.23, (i)

$$\begin{aligned} &\text{не существует поддиаграмм примыкания } \Pi \in \mathcal{S} \text{ участка границы } Q_i^{-1} \\ &\text{к самому себе и для любого другого участка границы } Z \in \mathcal{X}_{\alpha-1}(\Delta) \\ &\text{диаграммы } \Delta \text{ существует не более одной поддиаграммы} \\ &\text{примыкания } Q_i^{-1} \text{ к } Z. \end{aligned} \tag{12.3}$$

Рис. 43

Изучим поддиаграммы примыкания участка границы Q_i^{-1} к соседним участкам границы K_{i-1} и K_i . Предположим, имеются две поддиаграммы примыкания $\Pi, \Pi' \in \mathcal{S}$ участка границы Q_i^{-1} к K_{i-1} и к K_i соответственно. Пусть $\delta\Pi \approx Mu_iN^{-1}s$ и $\delta\Pi' \approx N'^{-1}v_iM't$, где M, N^{-1}, N'^{-1} и M' – участки примыкания и $\mathcal{L}(s), \mathcal{L}(t) \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$ (см. рис. 43; тот факт, что пути u_i и v_i входят в граничные циклы поддиаграмм Π и Π' , вытекает из леммы 9.20). Допустим,

$$|P_i| + |\mathcal{L}(N)| + |\mathcal{L}(N')| \geq (\ell_{\alpha, A_i}(\tilde{E}_i) + 37)|A_i|. \quad (12.4)$$

Рис. 44

В силу условия 12.4, (i) существуют пути E_i и $\hat{u}_i P_i \hat{v}_i$ на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ с общими начальной и конечной вершинами, где метки путей $E_i, \hat{u}_i, P_i, \hat{v}_i$ равны словам E_i, u_i, P_i, v_i соответственно и P_i – периодическая основа для E_i . Рассмотрим пути $\hat{M}, \hat{S}, \hat{N}, \hat{M}', \hat{t}, \hat{N}'$ на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ с метками $\mathcal{L}(M), \mathcal{L}(S), \mathcal{L}(N), \mathcal{L}(M'), \mathcal{L}(t), \mathcal{L}(N')$ соответственно, расположенные, как на рис. 44. Заметим, что $\mathcal{L}(\hat{M}E_i\hat{M}') \sqsubseteq \mathcal{L}(M)E_i\mathcal{L}(M')$ – подслово слова $X \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$, и в силу 12.4, (ii) имеем $\hat{N}P_i\hat{N}' \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A_i)$. Так как пути $\hat{M}E_i\hat{M}'$ и $\hat{N}P_i\hat{N}'$ близки в ранге $\alpha - 1$, то в силу (12.4) и предложения 8.23 путь $\hat{M}E_i\hat{M}'$ содержит подпуть $\tilde{E} \in \text{ППер}_{\alpha}(A_i, 8)$ такой, что $\ell_{\alpha, A_i}(\tilde{E}) \geq \ell_{\alpha, A_i}(\tilde{E}_i) + 1$. Но это противоречит лемме 12.3, (v). Следовательно, неравенство (12.4) неверно. Аналогично доказывается, что если имеется одна поддиаграмма примыкания $\Pi \in \mathcal{S}$ участка границы Q_i^{-1} к K_{i-1} или к K_i и N – ее участок примыкания, содержащийся в Q_i^{-1} , то $|P_i| + |\mathcal{L}(N)| < (\ell_{\alpha, A_i}(\tilde{E}_i) +$

$37)|A_i|$. Так как $|P_i| + |Q_i| = n|A_i|$ в силу 12.4, (ii), то доказанное нами можно сформулировать в виде следующего утверждения:

суммарная длина меток содержащихся в Q_i^{-1} участков примыкания поддиаграмм примыкания $\Pi \in \mathcal{S}$ участка границы Q_i^{-1} к участкам границы K_{i-1} и K_i меньше $|Q_i| - (n - \ell_{\alpha, A_i}(\tilde{E}_i) - 37)|A_i|$, в частности, с учетом (12.2), меньше $|Q_i| - (2p + 74)|A_i|$. (12.5)

Рис. 45

Теперь предположим, что $\Pi \in \mathcal{S}$ – поддиаграмма примыкания Q_i^{-1} к Q_{i+1}^{-1} . Пусть $\delta\Pi \approx \text{MsNt}$, $Q_i = Q'_i M^{-1} Q''_i$, $Q_{i+1} = Q'_{i+1} N^{-1} Q''_{i+1}$, где M, N – участки примыкания. Допустим, $|\mathcal{L}(M)| \geq p|A_i|$ или $|\mathcal{L}(N)| \geq p|A_{i+1}|$. Рассмотрим пути $\hat{Q}'_i, \hat{M}, \hat{Q}''_i, \hat{v}_i, \hat{K}_i, \hat{u}_{i+1}, \hat{Q}'_{i+1}, \hat{N}, \hat{Q}''_{i+1}$ на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ с теми же метками, что и соответствующие пути на диаграмме Δ , и с учетом условия 12.4, (i) добавим к ним пути $E_i, \hat{u}_i, P_i, E_{i+1}, P_{i+1}, \hat{v}_{i+1}$, как изображено на рис. 45. Так как пути $\hat{M}$ и $\hat{N}^{-1}$ близки в ранге $\alpha - 1$, то по предложению 8.36 получаем $\text{Cогл}(\hat{Q}_i, \hat{Q}_{i+1}^{-1})$. В силу условия 12.4, (i) P_i и P_{i+1} – периодические основы для E_i и E_{i+1} соответственно. Так как $P_i \hat{Q}_i \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A_i, n)$ и $P_{i+1} \hat{Q}_{i+1} \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A_{i+1}, n)$ в силу 12.4, (ii), то имеем, следовательно, $\text{Cогл}(P_i, P_{i+1}^{-1})$, т.е. $\text{ПСогл}_\alpha(E_i, E_{i+1}^{-1})$. Но это невозможно по предложению 8.46 при $X := E_i K_i E_{i+1}$. Мы доказали следующее утверждение:

суммарная длина меток содержащихся в Q_i^{-1} участков примыкания поддиаграмм примыкания участка границы Q_i^{-1} к участкам границы Q_{i-1}^{-1} и Q_{i+1}^{-1} меньше $2p|A_i|$. (12.6)

Теперь докажем, что

Не существует поддиаграмм примыкания $\Pi \in \mathcal{S}$ участка границы Q_i^{-1} к участкам границы K_j при $j \neq i - 1, i$ и Q_j^{-1} при $j \neq i - 1, i + 1$. (12.7)

Рис. 46

Действительно, допустим, при некоторых i_0, j_0 такая поддиаграмма Π_0 существует. Пусть Θ – связная компонента диаграммы $\Delta - \Pi_0$, в граничный цикл которой не входит Y^{-1} (см. рис. 46). Если диаграмма Θ , в свою очередь, содержит поддиаграмму $\Pi_1 \in \mathcal{S}$, нарушающую условие из (12.7), то вместо Θ можно рассмотреть соответствующую связную компоненту диаграммы $\Delta - \Pi_1$, которая, очевидно, является собственной поддиаграммой Θ . Следовательно, можно считать, что Θ уже не содержит поддиаграмм Π , нарушающих (12.7), т.е. каждая поддиаграмма $\Pi \in \mathcal{S}$, содержащаяся в Θ , является поддиаграммой одного из видов, учтенных в (12.5) или (12.6). Обозначим

$$Z_1 \rightleftharpoons K_0, \quad Z_2 \rightleftharpoons Q_1^{-1}, \quad Z_3 \rightleftharpoons K_1, \quad \dots, \quad Z_{2r} \rightleftharpoons Q_r^{-1}, \quad Z_{2r+1} \rightleftharpoons K_r. \quad (12.8)$$

Тогда Π_0 – поддиаграмма примыкания некоторых Z_{i_1} и Z_{j_1} , где $j_1 - i_1 > 1$. Легко видеть, что $\mathcal{X}_{\alpha-1}(\Theta) = \{Z'_{i_1}, Z_{i_1+1}, Z_{i_1+2}, \dots, Z_{j_1-1}, Z'_{j_1}\}$, где Z'_{i_1} и Z'_{j_1} – некоторые конец и начало путей Z_{i_1} и Z_{j_1} соответственно. Отсюда следует $\#\mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Theta) = \#\mathcal{X}_{\alpha-1}(\Theta) = j_1 - i_1 + 1$ и, в частности, $\#\mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Theta) - 2\chi(\Theta) = j_1 - i_1 - 1 \geq 1$. По лемме 9.22 множество $\mathcal{S}_1$ поддиаграмм примыкания $\Pi \in \mathcal{S}$, содержащихся в Θ , образует карту примыканий ранга $\alpha - 1$ на Θ . Обозначим через U множество всех переходных участков диаграммы Θ относительно $\mathcal{S}_1$. По предложению 10.4

$$\sum_{S \in U} \mathcal{W}_{\alpha-1}(\mathcal{L}(S)) \leq \eta(j_1 - i_1 - 1). \quad (12.9)$$

С другой стороны, пусть U_i ($i = i_1 + 1, i_1 + 2, \dots, j_1 - 1$) обозначает множество переходных участков диаграммы Θ относительно $\mathcal{S}_1$, содержащихся в Z_i . Предположим, Z_i есть некоторый Q_j^{-1} . Тогда из (12.5) и (12.6) следует

$$\sum_{S \in U_i} |\mathcal{L}(S)| > 74|A_i|.$$

Так как в силу (12.3) и выбора Θ в Q_j^{-1} входит не более четырех участков примыкания поддиаграмм примыкания из $\mathcal{S}$, то $\#U_i \leq 5$. Тогда, используя предложение 8.22, (ii), получаем

$$\sum_{S \in U_i} \mathcal{W}_{\alpha-1}(\mathcal{L}(S)) > \frac{64}{13} > 4\eta.$$

Заметим теперь, что по крайней мере $\lceil 1/3(j_1 - i_1 - 1) \rceil$ путей Q_j^{-1} находятся среди Z_i (в наихудшем случае $j_1 - i_1 - 1 = 3$ и среди Z_i ровно один Q_j^{-1}). Учитывая это, из предыдущего неравенства выводим

$$\sum_{S \in U} \mathcal{W}_{\alpha-1}(\mathcal{L}(S)) > \eta(j_1 - i_1 - 1).$$

Мы получили противоречие с неравенством (12.9), что и доказывает (12.7).

Теперь докажем, что для каждого $i = 1, 2, \dots, r$ имеется поддиаграмма примыкания $\Pi_i \in \mathcal{S}$ участков границы Q_i^{-1} и Y^{-1} . Допустим, для некоторого i_0 это не так. Пусть $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_t \in \mathcal{S}$ – все поддиаграммы примыкания участков границы Q_i^{-1} и Y^{-1} . Из допущения следует, что путь $Q_{i_0}^{-1}$ входит целиком в граничный цикл некоторой связной компоненты Θ диаграммы $\Delta - \bigcup_{i=1}^t \Pi_i$. Пусть $i_1 \leq i_0$ и $i_2 \geq i_0$ – соответственно наименьший и наибольший индексы, для которых пути Q_i^{-1} входят в $\delta\Theta$ при $i_1 \leq i \leq i_2$. Легко видеть, что кроме путей Q_i^{-1} при $i_1 \leq i \leq i_2$, множество $\mathcal{X}_{\alpha-1}(\Theta)$ состоит из путей $K_{i_1-1}, K_{i_1}, \dots, K_{i_2}$, некоторого подпути пути Y^{-1} , некоторого конца пути $Q_{i_1-1}^{-1}$, если $i_1 > 1$, и некоторого начала пути $Q_{i_2+1}^{-1}$, если $i_2 < r$. Следовательно, $\#\mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Theta) = \#\mathcal{X}_{\alpha-1}(\Theta) \leq 2(i_2 - i_1) + 6$, и поэтому $\#\mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Theta) - 2\chi(\Theta) \leq 2(i_2 - i_1) + 4 \leq 4(i_2 - i_1 + 1)$. Тогда, используя (12.5)–(12.7) и предложения 10.4, 8.22, (ii), приходим к противоречию аналогично тому, как в доказательстве утверждения (12.7).

Рис. 47

Итак, каждый участок границы Q_i^{-1} имеет поддиаграмму примыкания $\Pi_i \in \mathcal{S}$ к Y^{-1} . Пусть $\delta\Pi_i \approx M_i s_i N_i^{-1} t_i$, где M_i, N_i^{-1} – участки примыкания, $\mathcal{L}(s_i), \mathcal{L}(t_i) \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$, $Q_i^{-1} = W_i M_i Z_i$ и N_i входит в Y . Оценим снизу длину слова $\mathcal{L}(M_i)$. Заметим, что пути W_i и Z_i входят в граничные циклы некоторых дисковых поддиаграмм Σ и Σ' диаграммы Δ , являющихся связными компонентами диаграммы $\Delta - \bigcup_{i=1}^r \Pi_i$ (см. рис. 47, где изображен случай $i = 1$). Ясно, что $\#\mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Sigma), \#\mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Sigma') \leq 4$. Пусть $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ – множество содержащихся соответственно в Σ и в Σ' поддиаграмм из $\mathcal{S}$. Так как каждый переходный участок диаграммы Δ относительно $\mathcal{S}$, содержащийся в Q_i^{-1} , является либо переходным участком диаграммы Σ

относительно $\mathcal{S}_1$, либо переходным участком диаграммы Σ' относительно $\mathcal{S}_2$, то, применяя предложение 10.4 два раза для $(\Delta, \mathcal{S}) := (\Sigma, \mathcal{S}_1), (\Sigma', \mathcal{S}_2)$, получаем $\sum_{S \in V_i} \mathcal{W}_{\alpha-1}(\mathcal{L}(S)) \leq 4\eta$, где V_i – множество переходных участков диаграммы Δ относительно $\mathcal{S}$, содержащихся в Q_i^{-1} . Так как $\#V_i \leq 4$ по лемме 9.23, (i) при $\Delta := \Sigma, \Sigma'$, то по предложению 8.22, (ii) получаем

$$\sum_{S \in V_i} |\mathcal{L}(S)| \leq (52\eta + 8)|A_i| < 30|A_i|.$$

Используя, далее, (12.3), (12.5)–(12.7), получаем наконец

$$|\mathcal{L}(M_i)| > (n - \ell_{\alpha, A_i}(\tilde{E}_i) - 2p - 67)|A_i|.$$

В частности, ввиду (12.2) имеем $|\mathcal{L}(M_i)| \geq 44|A_i|$.

Теперь уже несложно вывести все требуемые утверждения. Рассмотрим отображение ω множества путей на диаграмме Δ во множество путей на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ (см. 4.12). Так как пути $\omega(M_i)$ и $\omega(N_i)$ близки в ранге $\alpha - 1$, то по предложению 8.23 пути $\omega(M_i)$ и $\omega(N_i)$ содержат подпути S_i и F_i соответственно, где $F_i \in \text{ППер}_{\alpha}(A_i^{-1}, 8)$, S_i – периодическая основа для F_i и

$$\ell_{\alpha, A^{-1}}(F_i) \geq n - \ell_{\alpha, A}(\tilde{E}_i) - 2p - 103. \quad (12.10)$$

Пусть $\omega(Y) = L_0 F_1 L_1 \dots F_r L_r$ и $\omega(Q_i) = U_i S_i^{-1} V_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$). В силу леммы 8.2, (ii) соединим вершины $\iota(F_i)$ и $\iota(S_i)$ путем w_i , а вершины $\tau(S_i)$ и $\tau(F_i)$ путем z_i , где $\mathcal{L}(w_i), \mathcal{L}(z_i) \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$. Мы имеем, таким образом, набор путей на графе $\Gamma_{\alpha-1}$, расположенных, как на рис. 48 (заметим, что $\omega(x)$ и $\omega(y)$ – пустые пути). Рассматривая в качестве слов $F_i, L_i, w_i, Z_i, S_i, U_i, V_i$ метки соответствующих путей на рис. 48, мы сразу получаем выполнение условий (i)–(iii), а из рис. 48 видно, что имеют место соотношения (iv). Наконец, искомые неравенства (v) выполнены ввиду (12.10). Доказательство леммы 12.7 завершено.

Рис. 48

12.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если выполнены посылка и заключение леммы 12.7, то набор вхождений $V_i \rightleftharpoons L_0 F_1 \dots L_{i-1} * F_i * L_i \dots F_r L_r$ ($i = 1, 2, \dots, r$) элементарных слов F_i ранга α в слово Y будем называть *образами вхождений* U_i в *поворот* $X \rightarrow Y$.

12.9. ЛЕММА. Пусть слово Y есть результат поворота в слове X некоторого набора вхождений $U_i = K_0 E_1 K_1 \dots K_{i-1} E_i K_i \dots E_r K_r$ ($i = 1, 2, \dots, r$) и $V_i = L_0 F_1 \dots L_{i-1} F_i L_i \dots F_r L_r$ – образы вхождений U_i в повороте $X \rightarrow Y$. Предположим, что $\ell_\alpha(E_i) \geq q_0$ и $\ell_\alpha(F_i) \geq q_0$ при всех i . Пусть $W = M * G * N$ – вхождение элементарной $(h + 8)$ -степени G ранга α в слово Y такое, что $\neg \text{Согл}_\alpha(W, V_i)$ при всех $i = 1, 2, \dots, r$. Тогда найдется вхождение $W' = R * H * T$ элементарного слова H ранга α в слово X такое, что $\ell_\alpha(H) \geq \ell_\alpha(G) - h$ и $\neg \text{Согл}_\alpha(W', U_i)$ при $i = 1, 2, \dots, r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из $\neg \text{Согл}_\alpha(W, V_i)$ ($i = 1, 2, \dots, r$) в силу леммы 12.3, (ii) следует, что G содержится в одном из подслов $L_0 F_1, F_1 L_1 F_2, \dots, F_{r-1} L_{r-1} F_r, F_r L_r$ слова Y . Рассмотрим случай, когда G содержится в некотором подслове $F_k L_k F_{k+1}$. В соответствии с 12.4, (i), 12.7, (ii) и 12.7, (iv) рассмотрим пути на графе $\Gamma_{\alpha-1}$, расположенные, как на рис. 49, и обозначенные теми же буквами, что и их метки. Пусть $X \Leftarrow K_0 E_1 K_1 \dots E_r K_r$, $Y \Leftarrow L_0 F_1 E_1 \dots F_r L_r$ и $G \Leftarrow \phi_Y(W)$ – подпуть пути $F_k L_k F_{k+1}$ с $\mathcal{L}(G) \subseteq G$. Так как по условию $\neg \text{Согл}_\alpha(W, V_k)$ и $\neg \text{Согл}_\alpha(W, V_{k+1})$, то в силу определения 12.1 имеем $\neg \text{ПСогл}_\alpha(G, F_k)$ и $\neg \text{ПСогл}_\alpha(G, F_{k+1})$. Так как S_k, S_{k+1} – периодические основы для F_k, F_{k+1} в силу 12.7, (ii), а в силу 12.4, (ii), 12.7, (iii) пути $S_k U_k^{-1} P_k^{-1}$ и $P_{k+1}^{-1} V_{k+1}^{-1} S_{k+1}$ – периодические продолжения для S_k и S_{k+1} , то в силу определения 11.11 путь G устойчив относительно $w_k S_k U_k^{-1} v_k$ и $u_{k+1} V_{k+1}^{-1} S_{k+1} z_{k+1}$. Тогда по лемме 11.10 найдется подпуть $H \in \text{ППер}_\alpha(B, 8)$ пути K_k ($B \in \mathcal{E}_\alpha$) такой, что $\text{ПСогл}_\alpha(G, H)$ и $\ell_\alpha(H) \geq \ell_\alpha(G) - h$. Проверим, что $\neg \text{ПСогл}_\alpha(E_i, H)$ при всех i . Так как P_k и P_{k+1} – периодические основы для E_k и E_{k+1} в силу 12.4, (i), то согласно определению 5.18 имеем $\text{ПСогл}_\alpha(E_k, F_k^{-1})$ и $\text{ПСогл}_\alpha(E_{k+1}, F_{k+1}^{-1})$. Тогда если бы выполнялось $\text{ПСогл}_\alpha(E_i, H)$ при $i = k$ или $i = k + 1$, то мы получили бы $\text{ПСогл}_\alpha(G, F_i^{-1})$ вопреки предложению 8.46. Следовательно, $\neg \text{ПСогл}_\alpha(E_i, H)$ при $i = k, k + 1$.

Рис. 49

Допустим, $\text{ПСогл}_\alpha(E_i, H)$ при некотором $i < k$. Тогда по предложению 8.35 имеем $\tilde{E}_i \in \text{ППер}_\alpha(B, p + 34)$ для некоторого подпути $\tilde{E}_i$ пути E_i , откуда в силу предложений 8.11 и 8.38, (ii) получаем $\tilde{E}_i \cup_X H \in \text{ППер}_\alpha(B, p + 34)$, $\text{ПСогл}_\alpha(E_k, \tilde{E}_i \cup_X H)$,

и, следовательно, $ПСогл_\alpha(E_k, H)$ вопреки доказанному. Аналогично доказывається $\neg ПСогл_\alpha(E_i, H)$ при $i > k + 1$. Таким образом, $\neg ПСогл_\alpha(E_i, H)$ при всех i , и в качестве искомого вхождения W' в слово X можно взять соответствующее вхождение слова $\mathcal{L}(H)$ в X .

Мы рассмотрели случай, когда G содержится в некотором подслове $F_k L_k F_{k+1}$ слова Y . Аналогично рассматриваются случаи, когда G содержится в $L_0 F_1$ или в $F_r L_r$, с тем лишь отличием, что роль пути $w_k S_k U_k^{-1} v_k$ или, соответственно, $u_{k+1} V_{k+1}^{-1} S_{k+1} z_{k+1}$ при использовании леммы 11.10 будет играть пустой путь.

12.10. ЛЕММА. Пусть слово Y есть результат поворота в слове X некоторого набора вхождений $U_i = K_0 E_1 K_1 \dots K_{i-1} * E_i * K_i \dots E_r K_r$ ($i = 1, 2, \dots, r$), где E_i – элементарное слово ранга α , порожденное периодом $A_i \in \mathcal{E}_\alpha$. Пусть $V_i = L_0 F_1 \dots L_{i-1} * F_i * L_i \dots F_r L_r$ ($i = 1, 2, \dots, r$) – образы вхождений U_i в повороте $X \rightarrow Y$. Предположим, $\ell_\alpha(E_i) \geq p + 34$, $\ell_\alpha(F_i) \geq p + 34$ при всех i и $\neg ЭСогл_\alpha(U_i, U_{i+1})$ ($1 \leq i \leq r - 1$). Пусть вхождение слова $\tilde{E}_i$ в слово X и вхождение слова $\tilde{F}_i$ в слово Y – максимальные продолжения вхождений U_i и V_i относительно периодов A_i и A_i^{-1} соответственно. Тогда

$$\ell_{\alpha, A_i}(\tilde{E}_i) + \ell_{\alpha, A_i^{-1}}(\tilde{F}_i) < n + 2p + 120.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для некоторых слов $u_i, v_i, w_i, z_i \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$, $P_i \in \text{Пер}(A_i, 2)$, $S_i \in \text{Пер}(A_i^{-1}, 2)$, U_i, V_i ($i = 1, 2, \dots, r$) выполнены условия (i)–(iii) определения 12.4 и верны утверждения 12.7, (i)–(v). Выберем произвольные пути X, Y на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ с $\mathcal{L}(X) \sqsupseteq X$ и $\mathcal{L}(Y) \sqsupseteq Y$ и рассмотрим пути $K_i, E_i, u_i, P_i, v_i, L_i, F_i, w_i, S_i, z_i$, обозначенные теми же буквами, что и их метки, расположенные, как на рис. 50, где $X = K_0 E_0 K_1 \dots E_r K_r$ и $Y = L_0 F_0 L_1 \dots F_r L_r$. Согласно 12.4, (i) и 12.7, (ii) P_i и S_i – периодические основы для E_i и F_i соответственно.

Рис. 50

Зафиксируем индекс i , и пусть U и V – максимальные продолжения вхождений U_i и V_i соответственно. Обозначим $\tilde{E} \equiv \phi_X(U)$ и $\tilde{F} \equiv \phi_Y(V)$. Мы должны доказать неравенство $\ell_{\alpha, A_i}(\tilde{E}_i) + \ell_{\alpha, A_i^{-1}}(\tilde{F}_i) < n + 2p + 120$. В силу предложений 8.9 и 8.10, (ii) найдутся периодические основы $\tilde{P}$ и $\tilde{S}$ для $\tilde{E}$ и $\tilde{F}$ соответственно,

где $\tilde{P}$ есть периодическое продолжение P_i и $\tilde{S}$ есть периодическое продолжение S_i , причем можно считать $|\tilde{P}| \geq \ell_{\alpha, A_i}(\tilde{E})|A_i|$ и $|\tilde{S}| \geq \ell_{\alpha, A_i^{-1}}(\tilde{F})|A_i|$. Пусть $\tilde{P} = G'P_iG''$ и $\tilde{S} = H'S_iH''$. Так как согласно 12.4, (ii) и 12.7, (iii) имеем $A_i^n \approx P_i U_i S_i^{-1} V_i$, то для доказательства искомой оценки достаточно установить два неравенства:

$$|G'| + |H'| < |V_i| + (p + 60)|A_i| \quad \text{и} \quad |G''| + |H''| < |U_i| + (p + 60)|A_i|. \quad (12.11)$$

Эти два неравенства симметричны. Ограничимся доказательством первого из них. Рассмотрим два случая.

Рис. 51

Случай 1: $i > 1$. Согласно 12.7, (iv) имеем $v_{i-1}K_{i-1}u_i \stackrel{\alpha-1}{=} U_{i-1}z_{i-1}L_{i-1}w_iV_i$. Рассмотрим путь $U_{i-1}z_{i-1}^*L_{i-1}^*w_i^*V_i$ с теми же, что и у пути $v_{i-1}K_{i-1}u_i$, начальной и конечной вершинами, где метки путей U_{i-1} , z_{i-1}^* , L_{i-1}^* , w_i^* и V_i равны словам U_{i-1} , z_{i-1} , L_{i-1} , w_i и V_i соответственно. Так как путь Y расположен произвольным образом относительно X , то можно считать $z_{i-1}^* = z_{i-1}$, $L_{i-1}^* = L_{i-1}$ и $w_i^* = w_i$ (см. рис. 51). Если $|G'| + |H'| \leq |V_i|$, то доказывать нечего. Пусть $|G'| + |H'| > |V_i|$. Так как по условию $\neg \text{ЭСогл}_\alpha(U_{i-1}, U_i)$, то $\neg \text{ПСогл}_\alpha(E_{i-1}, E_i)$. Так как периодические основы P_{i-1} и S_{i-1}^{-1} для E_{i-1} и F_{i-1}^{-1} имеют общее периодическое продолжение $P_{i-1}U_iS_{i-1}^{-1}$, то имеем $\text{ПСогл}_\alpha(E_{i-1}, F_{i-1}^{-1})$. По той же причине $\text{ПСогл}_\alpha(E_i, F_i^{-1})$. Следовательно, $\neg \text{ПСогл}_\alpha(F_{i-1}, F_i)$. Так как в силу предложения 8.9 имеем $\text{ПСогл}_\alpha(E_i, \tilde{E})$ и $\text{ПСогл}_\alpha(F_i, \tilde{F})$, то в силу предложения 8.38, (ii) E_{i-1} не может содержаться в $\tilde{E}$ и F_{i-1} не может содержаться в $\tilde{F}$, т.е. $E_{i-1} <_X \tilde{E}$ и $F_{i-1} <_Y \tilde{F}$. Пусть W – начало пути $E_{i-1}K_{i-1}$ с $\tau(W) = \iota(\tilde{E})$ и Z – начало пути $F_{i-1}L_{i-1}$ с $\tau(Z) = \iota(\tilde{F})$. Так как $G'P_iG''$ – периодическая основа для $\tilde{E}$, то в силу леммы 8.2, (ii) вершины $\tau(W)$ и $\iota(G')$ можно соединить путем $\tilde{u}$ с $\mathcal{L}(\tilde{u}) \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$. По той же причине вершины $\tau(Z)$ и $\iota(H')$ можно соединить путем $\tilde{v}$ с $\mathcal{L}(\tilde{v}) \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$. Из предположения $|G'| + |H'| > |V_i|$ следует, что вершины $\iota(G') = \tau(\tilde{u}) = \iota(\tilde{P})$ и $\iota(H') = \tau(\tilde{v}) = \iota(\tilde{S})$ соединены путем $T \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A_i^{-1})$, содержащимся в некотором периодическом продолжении $S_i^{-1}V_iP_i$,

$$|T| = |G'| + |H'| - |V_i|. \quad (12.12)$$

Мы имеем, таким образом, замкнутый путь $W\tilde{u}T\tilde{v}^{-1}Z^{-1}w_{i-1}S_{i-1}U_{i-1}^{-1}P_{i-1}^{-1}u_{i-1}^{-1}$ (см. рис. 52). Предположим, некоторый подпуть R пути T и некоторый подпуть Q пути W^{-1} близки в ранге $\alpha - 1$. Тогда, применив лемму 11.7, (ii) при $E := \tilde{E}$, $P := \tilde{P}$, $U_1 := W$, где в качестве V_1 нужно взять начало пути $\tilde{P}$ длины $20|A|$, получим $|R| < 20|A_i|$. Аналогично, используя лемму 8.43, (ii) при $E := \tilde{F}$ и $P := \tilde{S}$, получим, что если некоторый подпуть R пути T и некоторый подпуть пути Z близки в ранге $\alpha - 1$, то $|R| < 20|A_i|$. Далее, из $\neg PCogl_\alpha(E_{i-1}, E_i)$ следует $\neg Cogl(P_{i-1}U_{i-1}S_{i-1}^{-1}, S_{i-1}^{-1}V_iP_i)$, откуда по предложению 8.36 заключаем, что если подпуть R пути T и подпуть пути $P_{i-1}U_{i-1}S_{i-1}^{-1}$ близки в ранге $\alpha - 1$, то $|R| < p|A_i|$. Тогда, используя лемму 11.7, (i) при $X := Y := T$, $W := \tilde{u}^{-1}W^{-1}u_{i-1}P_{i-1}U_{i-1}S_{i-1}^{-1}w_{i-1}^{-1}Z\tilde{v}$ и предложение 8.22, (ii), легко выводим $|T| < (p + 60)|A_i|$, что вместе с (12.12) дает искомое неравенство (12.11).

Рис. 52

Случай 2: $i = 1$. Этот случай рассматривается аналогично случаю 1, с той лишь разницей, что вместо пути $u_{i-1}P_{i-1}U_{i-1}S_{i-1}^{-1}w_{i-1}^{-1}$ на рис. 52 будет пустой путь.

12.11. ЛЕММА. Для любого слова $X \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$, не содержащего элементарных $(n - q_0 - 2p - 102)$ -степеней ранга α , существует слово $Y \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$, не содержащее элементарных $(\frac{n}{2} + 2p + 142)$ -степеней ранга α , такое, что $X \stackrel{\alpha}{\equiv} Y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что X содержит некоторую элементарную $(\frac{n}{2} + 14)$ -степень ранга α . Рассмотрим множество всех вхождений в слово X элементарных $(\frac{n}{2} + 14)$ -степеней ранга α и выберем из него подмножество $\{U_i\}_{i=1}^r$ представителей по отношению $\mathcal{E}Cogl_\alpha(U, V)$, которое в силу леммы 12.3, (i) является отношением эквивалентности на множестве вхождений в слово X элементарных слов ранга α . Пусть U_i есть вхождение слова $E_i \in \mathcal{P}Per_\alpha(A_i, \frac{n}{2} + 14)$ ($A_i \in \mathcal{E}_\alpha$). По лемме 12.3, (iii) укоротим каждое U_i , чтобы получились попарно непересекающиеся вхождения U'_i слов $E'_i \in \mathcal{P}Per_\alpha(A_i, \frac{n}{2} - 2p - 68)$. Тем самым мы получим набор $\{U'_i\}_{i=1}^r$ попарно непересекающихся вхождений элементарных слов ранга α в слово X , удовлетворяющий следующим условиям:

- (i) если вхождение слова $\tilde{E}_i$ в X есть максимальное продолжение вхождения $\mathcal{U}'_i$ относительно периода A_i , то $\frac{n}{2} + 14 \leq \ell_{\alpha, A_i}(\tilde{E}_i) \leq n - q_0 - 2p - 103$;
- (ii) $\neg \mathcal{E}Cогл_\alpha(\mathcal{U}'_i, \mathcal{U}'_j)$ при $i \neq j$ (это верно в силу леммы 12.3, (i), (ii));
- (iii) если $\mathcal{U}$ – вхождение в слово X элементарной $(\frac{n}{2} + 14)$ -степени ранга α , то $\mathcal{E}Cогл_\alpha(\mathcal{U}'_i, \mathcal{U})$ для некоторого i .

По лемме 12.6 существует поворот $X \rightarrow Y$ набора вхождений $\{\mathcal{U}'_i\}_{i=1}^r$. Проверим, что Y – искомое слово. По лемме 12.5 имеем $X \stackrel{\alpha}{\equiv} Y$. Допустим, W – вхождение в слово Y элементарной $(\frac{n}{2} + 2p + 142)$ -степени ранга α . Пусть V_i ($i = 1, 2, \dots, r$) – образы вхождений $\mathcal{U}'_i$ в повороте $X \rightarrow Y$. Если $\neg \mathcal{E}Cогл_\alpha(V_i, W)$ при всех i , то по лемме 12.9, посылка $\ell_{\alpha, A_i^{-1}}(F_i) \geq q_0$ которой выполнена в силу (i) и условия 12.7, (v), найдется вхождение W' элементарной $(\frac{n}{2} + 2p + 142 - h)$ -степени ранга α в слово X такое, что $\neg \mathcal{E}Cогл_\alpha(\mathcal{U}'_i, W')$ для всех i . Но это невозможно в силу (iii), так как $h = 2p + 128$. Пусть $\mathcal{E}Cогл_\alpha(V_i, W)$ для некоторого i . Используя предложения 8.35 и 8.11, легко видеть, что в этом случае найдется содержащее V_i вхождение W^* в слово Y элементарной $(\frac{n}{2} + 2p + 106)$ -степени ранга α , порожденной периодом A_i^{-1} . Тогда по лемме 12.3, (v) получаем $\ell_{\alpha, A_i^{-1}}(\tilde{F}_i) \geq \frac{n}{2} + 2p + 106$, где вхождение слова $\tilde{F}_i$ есть максимальное продолжение V_i относительно A_i^{-1} . Но в этом случае мы получаем противоречие с (i) и леммой 12.10, посылка которой выполнена в силу (ii). Таким образом, Y не содержит вхождений элементарных $(\frac{n}{2} + 2p + 142)$ -степеней ранга α .

12.12. ЛЕММА. Если $X \in \mathcal{R}_\alpha$, то X не содержит элементарных $(n - q)$ -степеней ранга α . Если $X \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ и X не содержит элементарных $(n - q - 36)$ -степеней ранга α , то $X \in \mathcal{R}_\alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение вытекает из определений 5.7, 5.16, 5.17 и леммы 8.2, (ii), а второе – из определения 5.7 и следствия 8.27.

12.13. ПРЕДЛОЖЕНИЕ ($\alpha \geq 0$). Для любого слова X существует слово Y такое, что $X \stackrel{\alpha}{\equiv} Y$ и $Y \in \mathcal{R}_\alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\alpha = 0$ утверждается существование несократимого слова Y , равного данному слову X в свободной группе $\mathbf{B}_0$. Пусть $\alpha \geq 1$. Воспользуемся индукцией по длине слова X . Если $|X| = 1$, то включение $X \in \mathcal{R}_\alpha$ вытекает из леммы 12.12 и предложения 8.18. Пусть $|X| > 1$ и $X \sqsubseteq X_1 a^\epsilon$, где $a^\epsilon \in \mathcal{A}^{\pm 1}$. По индуктивному предположению найдется слово $Y_1 \in \mathcal{R}_\alpha$ такое, что $X_1 \stackrel{\alpha}{\equiv} Y_1$. По индуктивному предположению при $\alpha := \alpha - 1$ найдется слово $Y_2 \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ такое, что $Y_2 \stackrel{\alpha-1}{\equiv} Y_1 a^\epsilon$. Так как в силу леммы 12.12 слово Y_1 не содержит элементарных $(n - q)$ -степеней ранга α , а в силу леммы 8.16 слово a^ϵ не содержит элементарных 2-степеней ранга α , то, переходя к путям на $\Gamma_{\alpha-1}$ и применяя лемму 11.7, (ii), получаем, что слово Y_2 не содержит элементарных $(n - q + 87)$ -степеней ранга α . Так как $n - q + 87 < n - q_0 - 2p - 102$, то по предложению 12.11 найдется слово $Y \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ такое, что $Y_2 \stackrel{\alpha}{\equiv} Y$ и Y не содержит элементарных $(\frac{n}{2} + 2p + 142)$ -степеней ранга α . Так как $n - q - 36 = \frac{n}{2} + 2p + 142$, то снова по лемме 12.12 получаем $Y \in \mathcal{R}_\alpha$.

Теперь перейдем к доказательству “циклического” аналога предложения 12.13

(предложение 12.24 ниже). Основная схема рассуждений в этом случае повторяет схему рассуждений из доказательства предложения 12.13, начиная с определения 12.4, за исключением последнего шага: в доказательстве предложения 12.13 мы использовали индукцию по длине слова X , строя искомое слово $Y \in \mathcal{R}_\alpha$ исходя из уже построенного слова $Y_1 \in \mathcal{R}_\alpha$, где $Y_1 \stackrel{\alpha}{=} X_1$ и слово X_1 получено из X удалением последней буквы. Этот подход неприменим для построения циклически приведенного слова в ранге α , сопряженного данному слову X . Вместо этого будет доказана специальная лемма 12.23.

12.14. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть X – период ранга α и $X \approx E_1 K_1 E_2 K_2 \dots E_r K_r$, где $E_1, E_2, \dots, E_r$ – элементарные слова ранга α . Пусть для каждого слова E_i фиксирован некоторый элементарный период $A_i \in \mathcal{E}_\alpha$, где $E_i \in \text{ППер}_\alpha(A_i, 8)$. Слово Y будем называть результатом *циклического поворота в слове X набора вхождений*

$$E_1 K_1 \dots K_{i-1} * E_i * K_i \dots E_r K_r \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad (12.13)$$

если Y – период ранга α и существуют слова $P_i \in \text{Пер}(A_i, 2)$, $u_i, v_i \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$ и Q_i ($i = 1, 2, \dots, r$), удовлетворяющие следующим условиям:

- (i) для каждого $i = 1, 2, \dots, r$ существуют пути E_i и $u_i P_i v_i$ на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ с общими начальной и конечной вершинами такие, что метки путей E_i , u_i , P_i и v_i равны словам E_i , u_i , P_i и v_i соответственно и P_i – периодическая основа для E_i ;
- (ii) для каждого $i = 1, 2, \dots, r$ выполнено $A_i^n \approx P_i Q_i$;
- (iii) слова Y и $u_1 Q_1^{-1} v_1 K_1 u_2 Q_2^{-1} v_2 K_2 \dots u_r Q_r^{-1} v_r K_r$ сопряжены в группе $\mathbf{B}_{\alpha-1}$.

Из определения вытекает

12.15. ЛЕММА. Если слово Y есть результат циклического поворота некоторого набора вхождений в слове X , то слова X и Y сопряжены в группе $\mathbf{B}_\alpha$.

Подобно тому, как из индуктивного предположения 12.13 вытекает лемма 12.6, из индуктивного предположения 12.24 вытекает

12.16. ЛЕММА. Пусть X – период ранга α и элемент $[X]_{\alpha-1}$ группы $\mathbf{B}_{\alpha-1}$ не сопряжен никакому элементу $\mathbf{g} \in \mathbf{S}_{\alpha-1}^+(A)$ при $A \in \bigcup_{\beta \leq \alpha-1} \mathcal{E}_\beta$. Пусть $X \approx E_1 K_1 E_2 K_2 \dots E_r K_r$, где $E_1, E_2, \dots, E_r$ – элементарные слова ранга α , и даны элементарные периоды $A_i \in \mathcal{E}_\alpha$, где $E_i \in \text{ППер}_\alpha(A_i, 8)$. Предположим, $\ell_{\alpha, A_i}(E_i) \leq n - 2$ для всех i . Тогда существует слово Y , являющееся результатом поворота в X набора вхождений (12.13).

12.17. ЛЕММА. Пусть X – период ранга α , $X \approx E_1 K_1 E_2 K_2 \dots E_r K_r$, где $E_i \in \text{ППер}_\alpha(A_i, 44)$ ($A_i \in \mathcal{E}_\alpha$), и пусть слово Y есть результат циклического поворота в слове X набора вхождений

$$u_i \Rightarrow E_1 K_1 \dots K_{i-1} * E_i * K_i \dots E_r K_r \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Пусть вхождение слова $\tilde{E}_i$ в слово $E_{i-1} K_{i-1} E_i K_i E_{i+1}$ ($i \bmod r$) есть максимальное продолжение вхождения $E_{i-1} K_{i-1} * E_i * K_i E_{i+1}$ относительно A_i и для каждого $i = 1, 2, \dots, r$ выполнено $\ell_{\alpha, A_i}(\tilde{E}_i) \leq n - 2p - 111$.

Пусть, кроме того, слова $P_i \in \text{Пер}(A_i, 2)$, $u_i, v_i \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$, Q_i ($i = 1, 2, \dots, r$) удовлетворяют условиям (i)–(iii) определения 12.14.

Тогда существуют элементарные слова $F_1, F_2, \dots, F_r$ ранга α и слова $w_i, z_i \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$, $S_i \in \text{Пер}(A_i^{-1}, 2)$, U_i, V_i и L_i ($i = 0, 1, \dots, r$) такие, что $F_i \in \text{ППер}_\alpha(A_i^{-1}, 8)$ и верны следующие утверждения:

- (i) $Y \approx F_1 L_1 F_2 L_2 \dots F_r L_r$;
- (ii) для каждого $i = 1, 2, \dots, r$ существуют пути F_i и $w_i S_i z_i$ на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ с общими начальной и конечной вершинами такие, что метки путей F_i, w_i, S_i и z_i равны словам F_i, v_i, S_i и z_i соответственно и S_i – периодическая основа для F_i ;
- (iii) $Q_i \sqsubseteq U_i S_i^{-1} V_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$);
- (iv) имеют место соотношения

$$L_i \stackrel{\alpha-1}{=} z_i^{-1} U_i^{-1} v_i K_i u_{i+1} V_{i+1}^{-1} w_{i+1}^{-1} \quad (i = 1, 2, \dots, r, i \bmod r);$$

- (v) $\ell_{\alpha, A_i}(\tilde{E}_i) + \ell_{\alpha, A_i^{-1}}(F_i) \geq n - 2p - 103$ ($i = 1, 2, \dots, r$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается модификацией доказательства леммы 12.7. Исходя из условия 12.14, (iii), рассмотрим кольцевую A -диаграмму Δ ранга $\alpha - 1$ с граничными циклами $u_1 Q_1^{-1} v_1 K_1 u_2 Q_2^{-1} v_2 K_2 \dots u_r Q_r^{-1} v_r K_r$ и Y^{-1} , где пути обозначены теми же буквами, что и их метки, $\mathcal{X}_{\alpha-1}(\Delta) = \{K_1, K_2, \dots, K_r, Q_1^{-1}, Q_2^{-1}, \dots, Q_r^{-1}, Y^{-1}\}$ и $\mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta) = \{u_1, u_2, \dots, u_r, v_1, v_2, \dots, v_r\}$. Пусть $\mathcal{S}$ – карта примыканий ранга $\alpha - 1$ на Δ .

Основное отличие от доказательства леммы 12.7 состоит в том, что теперь утверждение (12.3) неверно. Пусть $\Pi \in \mathcal{S}$ – поддиаграмма примыкания участка границы Q_i^{-1} к участку границы $R \in \mathcal{X}_{\alpha-1}(\Delta)$, где $R = Q_j^{-1}$ или $R = K_j^{-1}$ для некоторого j . Назовем Π *правильной*, если имеет место один из четырех случаев:

- 1) $R = K_i$ и v_i входит в граничный цикл Π ;
- 2) $R = K_j$, $j \equiv i - 1 \pmod{r}$, u_i входит в граничный цикл Π ;
- 3) $R = Q_j^{-1}$, $j \equiv i + 1 \pmod{r}$, связная компонента диаграммы $\Delta - \Pi$, в граничный цикл которой входит v_i , является дисковой диаграммой;
- 4) $R = Q_j^{-1}$, $j \equiv i - 1 \pmod{r}$, связная компонента диаграммы $\Delta - \Pi$, в граничный цикл которой входит u_i , является дисковой диаграммой.

Из доказательства утверждений (12.5) и (12.6) легко видеть, что в нашей ситуации эти утверждения верны, если вместо $\mathcal{S}$ рассмотреть множество всех правильных поддиаграмм примыкания $\Pi \in \mathcal{S}$. Утверждение (12.7) модифицируется следующим образом:

Ни для каких i, j не существует неправильных поддиаграмм примыкания $\Pi \in \mathcal{S}$ участка границы Q_i^{-1} к участкам границы K_j и Q_j^{-1} .
(12.14)

Его доказательство почти дословно повторяет доказательство (12.7). Небольшая модификация связана с тем, что индексы у путей Q_i^{-1}, K_i следует считать упорядоченными не линейно, а циклически. Формально, вместо (12.8) нужно занумеровать

пути Q_i^{-1} и K_i с помощью Z_i таким образом, чтобы в граничный цикл поддиаграммы Θ последовательно входили пути $Z'_{i_1}, Z_{i_1+1}, Z_{i_1+2}, \dots, Z_{j_1-1}, Z'_{j_1}$, где Z'_{i_1} и Z'_{j_1} – некоторые конец и начало путей Z_{i_1} и Z_{j_1} соответственно (при этом если Π_0 – поддиаграмма примыкания $Q_{i_0}^{-1}$ к $Q_{i_0}^{-1}$, то $Z_{i_1} = Z_{j_1} = Q_{i_0}^{-1}$, но индексы i_1 и j_1 будут различаться на r).

Допустим далее, что ни для какого i не существует поддиаграммы примыкания Q_i^{-1} к Y^{-1} . Пусть W_i – множество всех переходных участков диаграммы Δ , содержащихся в Q_i^{-1} . Тогда из утверждений (12.5), (12.6) в новой формулировке и (12.14) следует $\sum_{S \in W_i} |\mathcal{L}(S)| > 74|A_i|$, откуда по предложению 8.22, (ii) получаем $\sum_{S \in W_i} |W_{\alpha-1}(\mathcal{L}(S))| > \frac{64}{13} > 2\eta$. С другой стороны, по предложению 10.4 $\sum_i \sum_{S \in W_i} |W_{\alpha-1}(\mathcal{L}(S))| \leq 2\eta$. Противоречие. Таким образом, для некоторого i существует поддиаграмма примыкания $\Pi \in \mathcal{S}$ участков границы Q_i и Y^{-1} . С точностью до нумерации, можно считать $i = 1$. Повторяя дословно рассуждения из доказательства леммы 12.7, получаем, что для каждого i найдется поддиаграмма примыкания $\Pi \in \mathcal{S}$ участков границы Q_i и Y^{-1} . Далее можно повторить заключительный шаг доказательства 12.7, при этом, когда рассматривается отображение ω множества путей на Δ во множество путей на графе $\Gamma_{\alpha-1}$, вместо Δ нужно взять дисковую диаграмму, полученную из Δ разрезом вдоль некоторого простого пути, соединяющего две вершины, лежащие на разных граничных циклах диаграммы Δ . Для этой цели можно взять, например, путь s_1 , входящий в граничный цикл поддиаграммы примыкания Π_1 участков границы Q_1^{-1} и Y^{-1} .

12.18. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если выполнены посылка и заключение предложения 12.17, то набор вхождений $V_i = F_1 L_1 \dots L_{i-1} * F_i * L_i \dots F_r L_r$ будем называть *образами вхождений U_i в циклическом повороте $X \rightarrow Y$* .

12.19. ЛЕММА. Пусть слово Y есть результат циклического поворота в слове X набора вхождений

$$U_i = E_1 K_1 E_2 K_2 \dots K_{i-1} * E_i * K_i \dots E_r K_r \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Пусть

$$V_i = F_1 L_1 F_2 L_2 \dots L_{i-1} * F_i * L_i \dots F_r L_r \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

– образы вхождений U_i в циклическом повороте $X \rightarrow Y$. Предположим, $\ell_\alpha(E_i) \geq q_0$, $\ell_\alpha(F_i) \geq q_0$ при всех i . Пусть W – вхождение элементарной $(h+8)$ -степени G ранга α в слово $F_i L_i F_{i+1}$ ($i \bmod r$) такое, что $\neg \text{Согл}_\alpha(*F_i * L_i F_{i+1}, W)$ и $\neg \text{Согл}_\alpha(F_i L_i * F_{i+1} *, W)$. Тогда найдется вхождение W' элементарного слова H ранга α в слово $E_i K_i E_{i+1}$ такое, что $\ell_\alpha(H) \geq \ell_\alpha(G) - h$, $\neg \text{Согл}_\alpha(*E_i * K_i E_{i+1}, W)$ и $\neg \text{Согл}_\alpha(E_i K_i * E_{i+1} *, W)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 12.9.

12.20. ЛЕММА. Пусть слово Y есть результат циклического поворота в слове X набора вхождений

$$U_i = E_1 K_1 E_2 K_2 \dots K_{i-1} * E_i * K_i \dots E_r K_r \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

где E_i – элементарное слово ранга α , порожденное периодом $A_i \in \mathcal{E}_\alpha$, и пусть

$$V_i = F_1 L_1 F_2 L_2 \dots L_{i-1} * F_i * L_i \dots F_r L_r \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

– образы вхождений $\mathbb{U}_i$ в циклическом повороте $X \rightarrow Y$.

Предположим, $\ell_\alpha(E_i) \geq p + 34$, $\ell_\alpha(F_i) \geq p + 34$ при всех i и $\neg \exists \text{Cогл}_{\alpha-1}(*E_i * K_i E_{i+1}, E_i K_i * E_{i+1} *)$ ($i = 1, 2, \dots, r, i \bmod r$). Пусть вхождение слова $\tilde{E}_i$ в слово $E_{i-1} K_{i-1} E_i K_i E_{i+1}$ и вхождение слова $\tilde{F}_i$ в слово $F_{i-1} L_{i-1} F_i L_i F_{i+1}$ – максимальные продолжения вхождений $E_{i-1} K_{i-1} * E_i * K_i E_{i+1}$ и $F_{i-1} L_{i-1} * F_i * L_i F_{i+1}$ относительно периодов A_i и A_i^{-1} соответственно.

Тогда имеет место неравенство

$$\ell_{\alpha, A_i}(\tilde{E}_i) + \ell_{\alpha, A_i^{-1}}(\tilde{F}_i) < n + 2p + 120.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 12.10.

12.21. ЛЕММА. Пусть X – период ранга α и элемент $[X]_\alpha$ не сопряжен никакому элементу $\mathbf{g} \in \mathbf{S}_\alpha^+(A)$ при $A \in \mathcal{E}_\alpha$. Тогда если в некоторое слово $P \in \text{Пер}(X)$ входит слово $E \in \text{ППер}_\alpha(B, t)$ ($B \in \mathcal{E}_\alpha$), где $t \geq 15$, то для некоторого начала E' слова E выполнено $E' \in \text{ППер}_\alpha(B, t-9)$ и $|E'| \leq |X|$. В частности, некоторый циклический сдвиг слова X содержит элементарную $(t-9)$ -степень ранга α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать $|P| \geq 2|X|$. Рассмотрим произвольный путь P на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ с $\mathcal{L}(P) \supseteq P$. По условию P содержит подпуть $E \in \text{ППер}_\alpha(B, t)$, где $B \in \mathcal{E}_\alpha$. Допустим, $\neg \text{ПСогл}_\alpha(E, \mathbf{s}_{X, P} E)$. Пусть $Q \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$ – периодическая основа для E . В силу следствия 8.6, (i) и предложения 7.3 имеем $\tilde{\mathbf{g}} = (\iota(Q))^{-1} \mathbf{s}_{X, P} \iota(Q) \in \mathbf{N}_{\alpha-1}^+(B')$, где B' – некоторый циклический сдвиг слова B . Так как элемент $\mathbf{s}_{X, P}$ сопряжен элементу $[X]_{\alpha-1}$, то отсюда следует сопряженность элементов $[X]_{\alpha-1}$ и $\tilde{\mathbf{g}}$. Но тогда сопряжены и их гомоморфные образы $[X]_\alpha$ и $\pi_{\alpha-1, \alpha}(\tilde{\mathbf{g}}) \in \mathbf{S}_\alpha^+(B')$ в группе $\mathbf{B}_\alpha$, что невозможно по условию. Следовательно, $\neg \text{ПСогл}_\alpha(E, \mathbf{s}_{X, P} E)$. Тогда в силу предложений 8.9 и 8.14, (i) найдется начало E' пути E такое, что $E' \in \text{ППер}_\alpha(A, t-9)$ и E' не имеет общих ребер с $\mathbf{s}_{A, P} E$. В этом случае, очевидно, $|E'| \leq |X|$ и в качестве E' можно взять $\mathcal{L}(E')$.

12.22. ЛЕММА. Пусть X – период ранга α , элемент $[X]_\alpha$ группы $\mathbf{B}_\alpha$ не сопряжен никакому элементу $\mathbf{g} \in \mathbf{S}_\alpha^+(A)$ при $A \in \bigcup_{\beta \leq \alpha} \mathcal{E}_\beta$ и никакое слово $P \in \text{Пер}(X)$ не содержит элементарных $(n - q_0 - 2p - 102)$ -степеней ранга α . Тогда существует период Y ранга α , сопряженный в группе $\mathbf{B}_\alpha$ периоду X , такой, что никакое слово $Q \in \text{Пер}(Y)$ не содержит элементарных $(\frac{n}{2} + 2p + 142)$ -степеней ранга α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Схема рассуждений такая же, как и в доказательстве леммы 12.11. Без ограничения общности можно считать, что при некотором $t > 0$ в слово X^t входит слово $E \in \text{ППер}_\alpha(A_1, \frac{n}{2} + 14)$ ($A_1 \in \mathcal{E}_\alpha$). Подобно доказательству леммы 12.11, покажем, что существует набор вхождений

$$\mathbb{U}_i = E_1 K_1 \dots K_{i-1} * E_i * K_i \dots E_r K_r \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad (12.15)$$

в некоторый циклический сдвиг слова X элементарных слов E_i ранга α , удовлетворяющий следующим условиям:

- (i) если вхождение слова $\tilde{E}_i$ в слово $E_{i-1} K_{i-1} E_i K_i E_{i+1}$ ($i \bmod r$) есть максимальное продолжение вхождения $E_{i-1} K_{i-1} * E_i * K_i E_{i+1}$ относительно A_i , то $\frac{n}{2} + 14 \leq \ell_{\alpha, A_i}(\tilde{E}_i) \leq n - q_0 - 2p - 103$;
- (ii) $\neg \mathcal{E} \text{Cогл}_\alpha(*E_i * K_i E_{i+1}, E_i K_i * E_{i+1} *)$ ($i = 1, 2, \dots, r, i \bmod r$);
- (iii) если $\mathbb{U}$ – вхождение в слово $E_i K_i E_{i+1}$ ($i \bmod r$) элементарной $(\frac{n}{2} + 14)$ -степени ранга α , то либо $\mathcal{E} \text{Cогл}_\alpha(*E_i * K_i E_{i+1}, \mathbb{U})$, либо $\mathcal{E} \text{Cогл}_\alpha(E_i K_i * E_{i+1} *, \mathbb{U})$.

В силу леммы 12.21 имеем $X \approx E_1 K_1$, где $E_1 \in \text{ППер}_\alpha(A_1, \frac{n}{2} + 5)$ – начало слова E . Проверим, что выполнены условия (i) и (ii) при $r := 1$ и $\mathbb{U}_1 := *E_1 * K_1$. Можно считать, что $X^t \sqsubseteq U E_1 K_1 E_1 V$, где E есть начало слова $E_1 K_1 E_1 V$. Если бы выполнялось $\mathcal{E} \text{Cогл}_\alpha(*E_1 * K_1 E_1, E_1 K_1 * E_1 *)$, то, аналогично тому, как в доказательстве леммы 12.21, переходя к путям на графе $\Gamma_{\alpha-1}$, мы получили бы, что элемент $[X]_\alpha$ сопряжен элементу $\mathbf{g} \in \mathbf{S}_\alpha^+(A'_1)$, где A'_1 – циклический сдвиг A_1 . Но это невозможно по условию леммы. Следовательно, $\neg \mathcal{E} \text{Cогл}_\alpha(*E_1 * K_1 E_1, E_1 K_1 * E_1 *)$, что доказывает (ii). В силу леммы 12.3, (ii) вхождение W слова E в X^t , началом которого является вхождение $*E_1 * K_1 E_1$, не может содержать вхождение $E_1 K_1 * E_1 *$. Следовательно, W содержится в $U * E_1 K_1 E_1 * V$, а это означает, что имеет место нижняя оценка $\frac{n}{2} + 14 \leq \ell_{\alpha, A_1}(\tilde{E}_1)$ в (i). Так как верхняя оценка $\ell_{\alpha, A_i}(\tilde{E}_i) \leq n - q_0 - 2p - 103$ имеет место по условию леммы, то тем самым мы проверили выполнение условий (i) и (ii) при $r = 1$.

Если теперь для некоторого $r \geq 1$ имеется набор вхождений (12.15), удовлетворяющий условиям (i), (ii), но не условию (iii), то, используя лемму 12.3, (ii), (iii), легко видеть, что набор вхождений (12.15), удовлетворяющий условиям (i) и (ii), существует при $r := r + 1$. Отсюда по индукции следует, что существует набор вхождений (12.15), удовлетворяющий всем условиям (i)–(iii).

По лемме 12.16 существует слово Y , являющееся результатом циклического поворота набора вхождений (12.15) в слове X . Проверим, что Y – искомое слово. По лемме 12.15 слова X и Y сопряжены в $\mathbf{B}_\alpha$. Допустим, при некотором $t > 0$ слово Y^t содержит элементарную $(\frac{n}{2} + 2p + 142)$ -степень G ранга α . Пусть

$$V_i = F_1 L_1 \dots L_{i-1} * F_i * L_i \dots F_r L_r \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

– образы вхождений $\mathbb{U}_i$ в циклическом повороте $X \rightarrow Y$. Заметим, что в силу (i) и 12.17, (v) имеем $\ell_{\alpha, A_i^{-1}}(F_i) \geq q_0$ при всех i . Используя этот факт, а также условие (ii) и лемму 12.3, (ii), легко видеть, что либо какое-нибудь из слов $F_i L_i F_{i+1}$

$(i \bmod r)$ содержит вхождение W слова G такое, что $\neg \mathcal{E} \text{Cозл}_\alpha(*F_i * L_i F_{i+1}, W)$ и $\neg \mathcal{E} \text{Cозл}_\alpha(F_i L_i * F_{i+1} *, W)$, либо какое-нибудь из слов $F_{i-1} L_{i-1} F_i L_i F_{i+1}$ ($i \bmod r$) содержит вхождение W слова G такое, что $\mathcal{E} \text{Cозл}_\alpha(F_{i-1} L_{i-1} * F_i * L_i F_{i+1}, W)$. Тогда, аналогично доказательству леммы 12.11, в первом случае мы приходим к противоречию с условием (iii) и предложением 12.19, а во втором – используя предложения 8.35 и 8.11, приходим к противоречию с леммой 12.20 и условиями (i), (ii).

12.23. ЛЕММА. Если X – период ранга α , $X \in \mathcal{R}_\alpha$ и элемент $[X]_\alpha$ группы $\mathbf{B}_\alpha$ не сопряжен никакому элементу $g \in \mathbf{S}_\alpha^+(B)$ при $B \in \bigcup_{\beta \leq \alpha} \mathcal{E}_\beta$, то существует период Y ранга α такой, что слова X и Y сопряжены в группе $\mathbf{B}_\alpha$ и никакое слово Y^t не содержит элементарных $(\frac{n}{2} + 4p + 321)$ -степеней ранга α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 12.21 вместо условия, что никакое слово Y^t не содержит элементарных $(\frac{n}{2} + 4p + 321)$ -степеней ранга α , достаточно проверить, что никакой циклический сдвиг слова Y не содержит элементарных $(\frac{n}{2} + 4p + 312)$ -степеней ранга α .

Выберем слова X_1, H, X_2 и $w \in \mathcal{H}_\alpha$ таким образом, чтобы выполнялись равенства

$$X \sqsubseteq X_1 H X_2 \text{ и } X_2 X_1 \stackrel{\alpha}{\equiv} w \quad (12.16)$$

и при этом длина слова H была минимально возможной (так как равенства (12.16) выполнены при $X_1 \sqsubseteq X_2 \sqsubseteq w \sqsubseteq 1$ и $H \sqsubseteq X$, то такие слова X_1, H, X_2 и w существуют). Пусть $w \sqsubseteq u P v$, где $u, v \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$ и P – подслово слова A^n при $A \in \mathcal{E}_\alpha$. Заменяя при необходимости P на слово P' , определяемое равенством $P P'^{-1} \approx A^n$, можно считать $|P| \leq \frac{n}{2} |A|$. По индуктивному предположению 12.24 существует период Y ранга α такой, что слова Hw и Y сопряжены в группе $\mathbf{B}_{\alpha-1}$. Так как из равенств (12.16) следует $X \stackrel{\alpha}{\equiv} X_1 H w X_1^{-1}$, то X и Y сопряжены в $\mathbf{B}_\alpha$. Докажем, что слово Y является искомым, т.е. что никакой циклический сдвиг Y не содержит элементарных $(\frac{n}{2} + 4p + 312)$ -степеней ранга α .

Допустим, в некоторый циклический сдвиг слова Y входит слово $E \in \text{ППер}_\alpha(B, \frac{n}{2} + 4p + 312)$, где $B \in \mathcal{E}_\alpha$.

Рассмотрим кольцевую A -диаграмму Δ ранга $\alpha - 1$ с граничными циклами HuPv и Y^{-1} , где метки путей H, u, P, v и Y равны словам H, u, P, v и Y соответственно,

$$\mathcal{X}_{\alpha-1}(\Delta) = \{H, P, Y^{-1}\} \text{ и } \mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta) = \{u, v\}.$$

По предложению 9.19 можно считать, что на Δ задана карта примыканий $\mathcal{S}$ ранга $\alpha - 1$. Заметим, что в силу леммы 9.23, (iii) не существует поддиаграмм примыкания $\Pi \in \mathcal{S}$ граничного цикла Y^{-1} к самому себе и существует не более одной поддиаграммы примыкания Y^{-1} к каждому из участков границы H и P . Ввиду этого рассмотрим четыре случая.

Случай 1: $\mathcal{S}$ не содержит поддиаграмм примыкания граничного цикла Y^{-1} к участкам границы H и P . Тогда Y^{-1} является переходным участком диаграммы Δ относительно $\mathcal{S}$. По предложению 10.4 (см. также 10.3) имеем $\mathcal{W}_{\alpha-1}^\circ(\mathcal{L}(Y^{-1})) \leq 2\eta$. С другой стороны, из наличия E в силу предложения 8.14, (ii) легко следует,

что любой циклический сдвиг Z слова $\mathcal{L}(Y^{-1})$ содержит в качестве подслова элементарную $(\frac{n}{4} + 2p + 155)$ -степень ранга α . Тогда по предложению 8.22, (i) имеем $\mathcal{W}_{\alpha-1}(Z) > 2\eta$ и, следовательно, $\mathcal{W}_{\alpha-1}^\circ(\mathcal{L}(Y^{-1})) > 2\eta$. Противоречие.

Рис. 53

Случай 2: S содержит поддиаграмму примыкания Π граничного цикла Y^{-1} к H и не содержит поддиаграммы примыкания Y^{-1} к P . Пусть $\delta\Pi \approx R^{-1}yQz$, $Y \approx RS$ и $H = H_1QH_2$, где R^{-1} и Q – участки примыкания (см. рис. 53). В силу нашего допущения E входит в одно из слов $\mathcal{L}(R)\mathcal{L}(S)\mathcal{L}(R)$ или $\mathcal{L}(S)\mathcal{L}(R)\mathcal{L}(S)$. В силу предложения 10.4 имеем $\mathcal{W}_{\alpha-1}(\mathcal{L}(S)) \leq 2\eta$. Тогда в силу предложения 8.22, (i) слово $\mathcal{L}(S)$ не содержит элементарных 12-степеней ранга α . Так как слова $\mathcal{L}(R) \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ и $\mathcal{L}(Q) \in \mathcal{R}_\alpha$ близки в ранге $\alpha - 1$, то из леммы 12.12 и предложения 8.27 следует, что $\mathcal{L}(R)$ не содержит элементарных $(n - q + 34)$ -степеней ранга α . Тогда, используя предложение 8.14, (ii), легко видеть, что E может содержаться только в $\mathcal{L}(R)\mathcal{L}(S)\mathcal{L}(R)$, причем, $\mathcal{L}(R) \sqsupseteq LUK$, где $E \sqsupseteq K\mathcal{L}(S)L$ и $\ell_{\alpha,B}(K), \ell_{\alpha,B}(L) > 42$.

Рис. 54

Рассмотрим пути на графе $\Gamma_{\alpha-1}$, расположенные, как на рис. 54, метки которых равны меткам соответствующих путей на диаграмме Δ . Пусть $\hat{R} = LUK$, где $\mathcal{L}(L) \sqsupseteq L$, $\mathcal{L}(U) \sqsupseteq U$ и $\mathcal{L}(K) \sqsupseteq K$. Обозначим через $\mathbf{h}$ элемент группы $\mathbf{B}_{\alpha-1}$, для которого $\hat{R}' = \mathbf{h}\hat{R}$. Очевидно, $\hat{Q}' = \mathbf{h}\hat{Q}$. Так как $\ell_{\alpha,B}(K), \ell_{\alpha,B}(L) \geq 42$, то

для некоторых подпутей $\bar{K}$ и $\bar{L}$ путей K и L выполнено $\bar{K}, \bar{L} \in \text{ППер}_\alpha(B, 42)$. Используя лемму 8.29, (i), найдем подпути $M, N \in \text{ППер}_\alpha(B, 8)$ пути $\hat{Q}$ такие, что $\text{ПСогл}_\alpha(\bar{L}, M)$, $\text{ПСогл}_\alpha(\bar{K}, N)$ и $M \ll_{\hat{Q}} N$. Так как $K\hat{S}L' \in \text{ППер}_\alpha(B)$, где $L' \equiv hL$, то по предложению 8.9 имеем $\text{ПСогл}_\alpha(\bar{K}, h\bar{L})$, и, следовательно, $\text{ПСогл}_\alpha(N, hM)$. Тогда, используя предложение 8.10, (i) и лемму 8.2, (ii), легко видеть, что вершины $\iota(N)$ и $\tau(hM)$ соединены путем w^* с $\mathcal{L}(w^*) \supseteq u^*P^*v^*$, где $u^*, v^* \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$ и $P^* \in \text{Пер}(B) \cup \text{Пер}(B^{-1})$. Заметим, что hM содержится в $\hat{Q}' = h\hat{Q}$. Пусть T_1 – начало пути $\hat{H}_1\hat{Q}'$, оканчивающееся на hM , и T_2 – конец пути $\hat{Q}\hat{H}_2$, начинающийся с N (см. рис. 55). Так как пути w^* и $T_2\hat{P}\hat{V}T_1$ имеют общие начальную и конечную вершины, то, обозначив $T_i \equiv \mathcal{L}(T_i)$ ($i = 1, 2$), получим

$$u^*P^*v^* \stackrel{\alpha-1}{\equiv} T_2uPvT_1.$$

С учетом равенств $w \supseteq uPv$ и (12.16) отсюда следует

$$u^*P^*v^* \stackrel{\alpha}{\equiv} T_2X_2X_1T_1.$$

Так как $M \ll_{\hat{Q}} N$, то $H \supseteq T_1H^*T_2$ для некоторого H^* , и так как $B^n \stackrel{\alpha}{\equiv} 1$, то $P^* \stackrel{\alpha}{\equiv} P'$ для некоторого слова $P' \in \text{Пер}(B) \cup \text{Пер}(B^{-1})$ с $|P'| < n|B|$. Мы получили, что равенства (12.16) выполнены при $X_1 := X_1T_1$, $X_2 := T_2X_2$, $H := H^*$ и $w := u^*P'v^*$. Так как слова T_1 и T_2 содержат элементарные слова $\mathcal{L}(M)$ и $\mathcal{L}(N)$ ранга α , то они непусты, следовательно, $|H^*| < |H|$. Получили противоречие с выбором слов X_1, X_2, H и w . Случай 2 рассмотрен.

Рис. 55

Случай 3: $\mathcal{S}$ содержит поддиаграмму примыкания Π граничного цикла Y^{-1} к P и не содержит поддиаграммы примыкания Y^{-1} к H . Пусть $\delta\Pi \approx R^{-1}yQz$, $Y \approx RS$ и $P = P_1QP_2$, где R^{-1} и Q – участки примыкания (см. рис. 56).

Согласно допущению E входит в одно из слов $\mathcal{L}(R)\mathcal{L}(S)\mathcal{L}(R)$ или $\mathcal{L}(S)\mathcal{L}(R)\mathcal{L}(S)$. В силу предложений 10.4 и 8.22, (i) слово $\mathcal{L}(S)$ не содержит элементарных 12-степеней ранга α , а в силу неравенства $|P| \leq \frac{n}{2}|A|$ и предложения 8.44, (ii) слово $\mathcal{L}(R)$ не содержит элементарных $(\frac{n}{2} + 78)$ -степеней ранга α . Так как $\ell_{\alpha, B}(E) \geq \frac{n}{2} + 3p + 312$, то E может содержаться только в $\mathcal{L}(R)\mathcal{L}(S)\mathcal{L}(R)$, причем $\mathcal{L}(R) \supseteq LUK$, где

Рис. 56

$E \sqsubseteq K \mathcal{L}(S) L$ и $\ell_{\alpha, B}(K), \ell_{\alpha, B}(L) > p + 34$. Рассмотрим пути на $\Gamma_{\alpha-1}$, расположенные, как на рис. 57, метки которых равны меткам соответствующих путей на диаграмме Δ . Пусть $\hat{R} = LUK$, где $\mathcal{L}(L) \sqsubseteq L$, $\mathcal{L}(U) \sqsubseteq U$ и $\mathcal{L}(K) \sqsubseteq K$. Пусть $\mathbf{h} = \iota(\hat{R})[\mathcal{L}(RS)]_{\alpha-1}(\iota(\hat{R}))^{-1}$ – элемент группы $\mathbf{B}_{\alpha-1}$, для которого $\hat{R}' = \mathbf{h}\hat{R}$, пусть $\bar{K}, \bar{L} \in \text{ППер}_{\alpha}(B, p + 34)$ – подпути путей K и L , и пусть $V, W \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, B, 2)$ – периодические основы для $\bar{K}$ и $\bar{L}$ соответственно. В силу предложения 8.44, (ii) имеем $|\hat{Q}|, |\hat{Q}'| > 2|A|$. Применяя предложение 8.38, (i) два раза при $E := \bar{K}$, $P := V$, $F := \hat{R}$, $Q := \hat{Q}$ и при $E := \bar{L}$, $P := W$, $F := \hat{R}'$, $Q := \hat{Q}'$, получаем $\text{Cогл}(V, \hat{Q})$ и $\text{Cогл}(W, \hat{Q}')$. Так как в силу предложения 8.9 $\text{ПСогл}_{\alpha}(E, \bar{K})$ и $\text{ПСогл}_{\alpha}(E, \mathbf{h}\bar{L})$, то отсюда следует $\text{Cогл}(Z, \hat{Q})$ и $\text{Cогл}(Z, \hat{Q}')$, где $Z \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, B, 2)$ – периодическая основа для $E \Rightarrow \hat{K}\hat{S}L'$, $L' \Rightarrow \mathbf{h}L$. Так как $\hat{Q}' = \mathbf{h}\hat{Q}$, то получаем $\text{Cогл}(Z, \mathbf{h}Z)$. Тогда по предложению 7.3 имеем $\mathbf{g} \Rightarrow (\iota(Z))^{-1}\mathbf{h}\iota(Z) \in \mathbf{N}_{\alpha-1}^+(B')$, где B' – циклический сдвиг слова B , с которого начинается слово $\mathcal{L}(Z)$. Так как $\mathcal{L}(RS)$ – циклический сдвиг слова Y , то элементы $[Y]_{\alpha-1}$ и $\mathbf{h}$ сопряжены. Тогда сопряжены $[Y]_{\alpha-1}$ и $\mathbf{g}$, откуда вытекает сопряженность элементов $[X]_{\alpha}$ и $\pi_{\alpha-1, \alpha}(\mathbf{g}) \in \mathbf{S}_{\alpha}^+(B')$. Но это невозможно по условию леммы. Получили противоречие. Случай 3 рассмотрен.

Рис. 57

Случай 4: S содержит поддиаграммы примыкания Π_1 и Π_2 граничного цикла Y^{-1} к H и P соответственно. Пусть $\delta\Pi_i \approx R_i^{-1}y_iQ_iz_i$ ($i = 1, 2$), $Y \approx R_1S_1R_2S_2$, $H = H_1Q_1H_2$ и $P = P_1Q_2P_2$, где R_i^{-1} и Q_i – участки примыкания и S_i^{-1} – переходные участки диаграммы Δ относительно S (см. рис. 58).

Рис. 58

Обозначим $R_i \equiv \mathcal{L}(R_i)$ и $S_i \equiv \mathcal{L}(S_i)$. Тогда E содержится в одном из четырех слов $W_1 \equiv R_1 S_1 R_2 S_2 R_1$, $W_2 \equiv S_1 R_2 S_2 R_1 S_1$, $W_3 \equiv R_2 S_2 R_1 S_1 R_2$ или $W_4 \equiv S_2 R_1 S_1 R_2 S_2$. В силу предложений 10.4 и 8.22, (i) каждое слово S_i не содержит элементарных 12-степеней ранга α и, как было замечено выше, слово R_1 не содержит элементарных $(n - q + 34)$ -степеней ранга α , а в слово R_2 не входят элементарные $(\frac{n}{2} + 78)$ -степени ранга α . Далее, если бы E содержалось в W_1 и вхождения $*R_1 * S_1 R_2 S_2 R_1$ и $R_1 S_1 R_2 S_2 * R_1 *$ в слово W_1 содержали бы соответственно подслова K и L слова E с $\ell_{\alpha, B}(K), \ell_{\alpha, B}(L) \geq 42$, то мы пришли бы к противоречию, дословно повторив рассуждения из случая 1. Если бы E содержалось в W_3 и вхождения $*R_2 * S_2 R_1 S_1 R_2$ и $R_2 S_2 R_1 S_1 * R_2 *$ в слово W_3 содержали бы подслова K и L слова E с $\ell_{\alpha, B}(K), \ell_{\alpha, B}(L) \geq p + 34$, то мы пришли бы к противоречию, используя рассуждения из случая 2. Так как

$$\ell_{\alpha, B}(E) \geq \frac{n}{2} + 4p + 312 = \max \left\{ n - q + 34, \frac{n}{2} + 78 \right\} + 2(p + 34) + 2 \cdot 12 + 2 \cdot 4,$$

то, используя предложение 8.14, (ii), легко видеть, что $\mathcal{L}(R_1) \sqsubseteq KL$ и $\mathcal{L}(R_2) \sqsubseteq MN$, где либо LS_1M входит в E и $\ell_{\alpha, B}(L), \ell_{\alpha, B}(M) \geq p + 34$, либо NS_2K входит в E и $\ell_{\alpha, B}(M), \ell_{\alpha, B}(K) \geq p + 34$. Эти два случая рассматриваются аналогично. Будем считать, что LS_1M входит в E и $\ell_{\alpha, B}(L), \ell_{\alpha, B}(M) \geq p + 34$.

Рассмотрим пути $\hat{R}_i, \hat{y}_i, \hat{Q}_i, \hat{z}_i, \hat{P}_i$ ($i = 1, 2$), $\hat{S}_1, \hat{u}, \hat{H}_2$ на $\Gamma_{\alpha-1}$ с метками соответственно $\mathcal{L}(R_i), \mathcal{L}(y_i), \mathcal{L}(Q_i), \mathcal{L}(z_i), \mathcal{L}(P_i), \mathcal{L}(S_1), u$ и $\mathcal{L}(H_2)$, расположенные, как на рис. 59.

Рис. 59

Пусть $\hat{R}_1 = KL$, $\hat{R}_2 = MN$, где метки путей K , L , M и N равны словам K , L , M и N соответственно, и пусть $\bar{L}$ и $\bar{M}$ – подпути путей L и M , для которых $\bar{L}, \bar{M} \in \text{ППер}_\alpha(B, p+34)$. Пусть $V, W \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, B, 2)$ – периодические основы для $\bar{L}$ и $\bar{M}$ соответственно. Так как $\bar{L}$ и $\bar{M}$ – подпути пути $L\hat{S}_1M \in \text{ППер}_\alpha(\Gamma_{\alpha-1}, B)$, то в силу предложения 8.9 имеем $\text{ПСогл}_\alpha(\bar{L}, \bar{M})$. По предложению 8.44, (ii) имеем $|\hat{Q}_2| \geq 2|A|$, а по предложению 8.38, (i) при $E := \bar{M}$, $P := W$, $F := \hat{R}_2$ и $Q := \hat{Q}_2$ получаем $\text{Согл}(W, \hat{Q}_2)$. Отсюда следует $\text{Согл}(V, \hat{Q}_2)$. Тогда, укоротив $\bar{L}$ в силу предложения 8.35 и используя предложение 8.10, найдем подпуть $L^* \in \text{ППер}_\alpha(A, p)$ пути $\bar{L}$ такой, что $\hat{P}_1\hat{Q}_2\hat{P}_2$ и периодическая основа V^* для L^* имеют общее периодическое продолжение $U \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$. Пусть P^* – подпуть пути U или U^{-1} , соединяющий вершины $\iota(V^*)$ и $\tau(\hat{P}_2)$, u^* – путь с $\mathcal{L}(u^*) \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$, соединяющий вершины $\iota(L^*)$ и $\iota(W^*)$, и Z – конец пути $\hat{Q}_1\hat{H}_2$, начинающийся с L^* (см. рис. 60).

Пути $Z\hat{u}\hat{P}_1\hat{Q}_2\hat{P}_2$ и u^*P^* имеют общие начальную и конечную вершины, следовательно, обозначив $Z \Leftarrow \mathcal{L}(Z)$, $u^* \Leftarrow \mathcal{L}(u^*)$ и $P^* \Leftarrow \mathcal{L}(P^*)$, получим

$$ZuP \stackrel{\alpha-1}{=} u^*P^*.$$

С учетом равенств $w \Leftarrow uPv$ и (12.16) отсюда следует

$$ZX_2X_1 \stackrel{\alpha}{=} u^*P^*v.$$

Так как Z есть конец слова H , то $H \Leftarrow H^*Z$ для некоторого H^* . Далее, так как $P^* \in \text{Пер}(A) \cup \text{Пер}(A^{-1})$, то $P^* \stackrel{\alpha}{=} P'$ для некоторого слова $P' \in \text{Пер}(A) \cup \text{Пер}(A^{-1})$ с $|P'| < n|A|$. Мы получили, что равенства (12.16) выполнены при $X_1 := X_1$, $X_2 := ZX_2$, $H := H^*$ и $w := u^*P'v$. Так как в Z входит элементарное слово $\mathcal{L}(\bar{M})$ ранга α , то Z непусто, следовательно, $|H^*| < |H|$. Получили противоречие с выбором слов X_1 , X_2 , H и w . Лемма 12.23 доказана.

Рис. 60

12.24. ПРЕДЛОЖЕНИЕ ($\alpha \geq 0$). *Любой элемент $1 \neq g \in B_\alpha$, не сопряженный при $\alpha \geq 1$ никакому элементу $h \in S_\alpha^+(A)$, где $A \in \bigcup_{1 \leq \beta \leq \alpha} \mathcal{E}_\beta$, сопряжен некоторому элементу $[A]_\alpha$, где A – период ранга $\alpha + 1$. В частности, это верно для любого элемента g бесконечного порядка группы B_α .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предложение тривиально при $\alpha = 0$. При $\alpha > 0$ первое утверждение непосредственно вытекает из индуктивного предположения, лемм 12.23, 12.22, 12.12 и определения 5.2 с учетом неравенства $\frac{n}{2} + 4p + 321 < n - q_0 - 2p - 102$, а второе следует из первого в силу предложения 7.14, (iii).

12.25. СЛЕДСТВИЕ. *Любой элемент конечного порядка группы $\mathbf{B}_\alpha$ сопряжен некоторому элементу $\mathbf{g} \in \mathbf{S}_\alpha^+(A)$ при $A \in \bigcup_{1 \leq \beta \leq \alpha} \mathcal{E}_\beta$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно лишь заметить, что в силу определения 5.2 и предложения 11.4 любой период ранга $\alpha + 1$ представляет элемент бесконечного порядка группы $\mathbf{B}_\alpha$.

12.26. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Для любого периода A ранга $\alpha + 1$ существует минимальный период B ранга $\alpha + 1$ такой, что слова A^t и B^{kt} сопряжены в группе $\mathbf{B}_\alpha$ при некоторых $k, t > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, A и B – периоды ранга $\alpha + 1$ и слова A^k и B^{kt} сопряжены в $\mathbf{B}_\alpha$ при некоторых $k, t > 0$. Если B не является минимальным периодом ранга $\alpha + 1$, то в силу определения 5.3 и предложения 12.24 найдется период C ранга $\alpha + 1$ такой, что слова B^r и C^{rs} сопряжены в $\mathbf{B}_\alpha$ при некоторых $r > 0$ и $s \geq 2$. Так как в этом случае мы имеем сопряженные в $\mathbf{B}_\alpha$ слова A^{tr} и C^{krt} , причем, $ts > t$, то, очевидно, достаточно ограничиться доказательством следующего факта:

$$\begin{aligned} &\text{если } A, B \text{ – периоды ранга } \alpha + 1 \text{ и слова } A^k \text{ и } B^{kt} \\ &\text{сопряжены в } \mathbf{B}_\alpha \text{ при } k, t > 0, \text{ то } t \leq |A| + 3. \end{aligned} \quad (12.17)$$

Пусть $\beta \leq \alpha$ – наибольший ранг такой, что некоторое слово B^r содержит элементарную q_4 -степень ранга β . Применив предложение 11.33 в случае $\beta < \alpha$, получаем, что слова A^k и B^{kt} сопряжены в группе $\mathbf{B}_\beta$. Увеличив k и заменив слова A и B на их некоторые циклические сдвиги, в силу следствия 11.32 можно считать $A^k \stackrel{\beta}{=} u^{-1}B^{kt}u$ для некоторого $u \in \mathcal{H}_\beta$. Следовательно, найдутся близкие в ранге β пути P и Q на графе Γ_β , где $\mathcal{L}(P) \stackrel{\beta}{=} A^t$ и $\mathcal{L}(Q) \stackrel{\beta}{=} B^{kt}$. В силу лемм 5.10 и 8.4 путь Q содержит $kt - 1$ подпутей $K, s_{B,Q}K, \dots, s_{B,Q}^{kt-2}K$, где $K \in \mathcal{E}_\beta(\Gamma_\beta, q_4 - 9)$. Так как в силу леммы 6.7 имеем $\neg \mathcal{E} \text{Cогл}_\beta(s_{B,Q}^i K, s_{B,Q}^j K)$ при $i \neq j$, то в силу следствия 11.23 для каждого $i = 1, 2, \dots, kt - 3$ найдется подпуть $L_i \in \mathcal{E}_\beta(\Gamma_\beta, q_4 - h - 9)$ пути P такой, что $\mathcal{E} \text{Cогл}_\beta(s_{B,Q}^i K, L_i)$. Тогда по предложению 8.41 каждый путь L_i содержит некоторый подпуть $\bar{L}_i \in \mathcal{E}_\beta(\Gamma_\beta, q_4 - h - 2p - 79)$, не имеющий общих ребер с L_j при $i \neq j$. Так как слова $\mathcal{L}(\bar{L}_i)$ непусты, то отсюда следует $kt - 3 \leq k|A|$, т.е. $t \leq |A| + \frac{3}{k} \leq |A| + 3$, что и требовалось.

12.27. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Если A – период ранга $\alpha + 1$, то некоторый циклический сдвиг слова A содержит элементарную 109 -степень ранга α .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 8.41 достаточно доказать, что некоторое слово A^k содержит элементарную 118 -степень ранга α . По предложению 12.26 для некоторых $B \in \mathcal{M}_{\alpha+1}$ и $k, t > 0$ слова A^k и B^{kt} сопряжены в $\mathbf{B}_\alpha$. Как мы видели в доказательстве предложения 12.26, заменяя A и B на их циклические сдвиги, можно считать, что $A^k \stackrel{\beta}{=} u^{-1}B^{kt}u$ для некоторого $u \in \mathcal{H}_\beta$ при $\beta \leq \alpha$ и в слово B^{kt} входит элементарная $(q_4 - 9)$ -степень ранга β . Увеличив k , можно считать $kt \geq 5$. Если $\beta = \alpha$, то точно так же, как в доказательстве предложения 12.26, устанавливается, что слово A^k содержит элементарную $(q_4 - h - 9)$ -степень ранга α . Если $\beta < \alpha$, то слова A^k и B^{kt} близки в ранге $\alpha - 1$, и тогда можно воспользоваться предложениями 8.34 и 8.27 и леммой 5.13.

§ 13. Нормальная форма и сопряженность элементов конечного порядка группы $\mathbf{B}_\alpha$

13.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Элементарный период A ранга α назовем *нормализованным*, если слово A начинается или оканчивается на элементарную q_2 -степень ранга $\rho(A)$. Множество нормализованных элементарных периодов ранга α обозначим через $\bar{\mathcal{E}}_\alpha$.

Из определения вытекает, что если $A \in \bar{\mathcal{E}}_\alpha$, то $A^{-1} \in \bar{\mathcal{E}}_\alpha$. Кроме того, в силу определения 5.15 и леммы 7.6 для любого $A \in \mathcal{E}_\alpha$ некоторый циклический сдвиг слова A принадлежит $\bar{\mathcal{E}}_\alpha$.

13.2. ЛЕММА. Для любого элементарного периода $A \in \bar{\mathcal{E}}_\alpha$ верны следующие утверждения:

- (i) любой элемент $\mathbf{g} \in \mathbf{N}_{\alpha-1}^*(A)$ можно представить словом $w \in \mathcal{H}_{\rho(A)}$;
- (ii) любой элемент $\mathbf{g} \in \mathbf{N}_{\alpha-1}^+(A)$ можно представить словом $A^t w$, где $w \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$, $t \equiv \text{ind}_A(\mathbf{g})$ и $[w]_{\alpha-1} \in \mathbf{N}_{\alpha-1}^*(A)$;
- (iii) любой элемент $\mathbf{g} \in \mathbf{N}_{\alpha-1}^-(A)$ можно представить словом вида Pw , где P – начало слова A^t или A^{-t} и $w \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$, и словом вида $A^r PwA^{-r}$, где P – начало слова A или A^{-1} и $w \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$;
- (iv) если $\mathbf{G}$ – подгруппа группы $\mathbf{N}_{\alpha-1}(A)$ и $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{N}_{\alpha-1}^*(A) \cup \mathbf{N}_{\alpha-1}^-(A)$, то для некоторого $r \in \mathbb{Z}$ каждый элемент $\mathbf{g} \in \mathbf{G}$ можно представить словом вида $A^r PwA^{-r}$, где P – начало слова A или A^{-1} и $w \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменяя, если нужно, A на A^{-1} , можно считать, что $A \stackrel{\alpha}{=} EX$, где E – элементарная q_2 -степень ранга $\rho(A)$.

(i) Пусть $\mathbf{g} \in \mathbf{N}_{\alpha-1}^*(A)$. Рассмотрим путь $\mathbf{R}$ на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ с $\mathcal{L}(\mathbf{R}) \stackrel{\alpha}{=} A^2$, $\iota(\mathbf{R}) = 1$, и пусть $\mathbf{E}$ – начало пути $\mathbf{R}$ с $\mathcal{L}(\mathbf{E}) \stackrel{\alpha}{=} E$. В силу предложений 7.3, 7.8 и следствия 7.11 имеем $\mathcal{E}\text{Согл}_{\rho(A)}(\mathbf{E}, \mathbf{gE})$. Если $\rho(A) = 0$, то согласно определению 5.14 $\mathbf{E} = \mathbf{gE}$, т.е. $\mathbf{g} = 1$ и в этом случае в качестве w можно взять пустое слово. В случае $\rho(A) > 0$ по индуктивному предположению 8.45 найдется путь w с $w \equiv \mathcal{L}(w) \in \mathcal{H}_{\rho(A)}$, соединяющий вершины $\iota(\mathbf{E}) = 1$ и $\iota(\mathbf{gE}) = \mathbf{g}$. Тогда w – искомое слово, представляющее элемент $\mathbf{g}$.

(ii) По предложению 7.10, (iii), (iv) имеем $[A]_{\alpha-1}^{-t} \mathbf{g} \in \mathbf{N}_{\alpha-1}^*(A)$, где $t \equiv \text{ind}_A(\mathbf{g})$, и тогда утверждение вытекает из (i).

(iii) Как в доказательстве (i), пусть R – путь на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ с $\mathcal{L}(R) \sqsupseteq A^2$, $\iota(R) = 1$, и пусть E – начало R с $\mathcal{L}(E) \sqsupseteq E$. По предложению 7.3 имеем $\text{Cогл}(R, \mathbf{g}R^{-1})$. Тогда, используя предложение 7.7 и лемму 8.2, (iii), найдем путь $F \in \mathcal{E}_{\rho(A)}(\bar{R}, q_1)$ такой, что $\partial \text{Cогл}_{\rho(A)}(\mathbf{g}E^{-1}, F)$, где $\bar{R}$ – некоторое периодическое продолжение R . Пусть P – подпуть пути $\bar{R}$ или $\bar{R}^{-1}$, соединяющий вершины $1 = \iota(R)$ и $\iota(F)$. Очевидно, $P \sqsupseteq \mathcal{L}(P)$ есть начало слова вида $A^{\pm t}$. Если $\rho(A) = 0$, то из непустоты множества $\mathbf{N}_{\alpha-1}^-(A)$ и предложения 11.33 легко вытекает бы, что для некоторого $t \neq 0$ слова A^t и A^{-t} сопряжены в свободной группе $\mathbf{B}_0$. Следовательно, $\rho(A) > 0$. Тогда по индуктивному предположению 8.45 вершины $\iota(F)$ и $\tau(\mathbf{g}E) = \mathbf{g}$ соединены некоторым путем w с $w \sqsupseteq \mathcal{L}(w) \in \mathcal{H}_{\rho(A)} \subseteq \mathcal{H}_{\alpha-1}$. Так как $\mathbf{g} = [\mathcal{L}(Pw)]_{\alpha-1}$, то тем самым доказано первое утверждение. Докажем второе. В силу лемм 7.21 и 3.2, (v) для любого $r \in \mathbb{Z}$ имеем $\partial \text{Cогл}_{\rho(A)}(s_{A, \mathbf{g}R}^r \mathbf{g}E^{-1}, s_{A, \bar{R}}^{-r} F)$. Соединим вершины $s_{A, \bar{R}}^{-r} \iota(F)$ и $s_{A, \mathbf{g}R}^r \iota(\mathbf{g}E)$ путем w_1 с $w_1 \sqsupseteq \mathcal{L}(w_1) \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$. Очевидно, имеем путь на $\Gamma_{\alpha-1}$, где над стрелками указаны метки соответствующих подпутей и A_1 – циклический сдвиг слова A , для которого $P^{-1}AP \stackrel{0}{=} A_1$:

$$\begin{array}{ccccccc} & P & & A_1^{-r} & & w_1 & & A^{-r} \\ \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ 1 = \iota(R) & & \iota(F) & & s_{A, \bar{R}}^{-r} \iota(F) & & s_{A, \mathbf{g}R}^r \iota(\mathbf{g}E) & & \iota(\mathbf{g}E) = \mathbf{g} \end{array}$$

Отсюда следует

$$\mathbf{g} = [PA_1^{-r}w_1A^{-r}]_{\alpha-1} = [A^{-r}Pw_1A^{-r}]_{\alpha-1} = [A^r \cdot A^{-2r}P \cdot w_1 \cdot A^{-r}]_{\alpha-1}.$$

Так как P – начало слова вида $A^{\pm t}$, то для некоторого r имеем $A^{-2r}P \stackrel{0}{=} P_1$, где P_1 – начало слова $A^{\pm 1}$. Тогда в качестве искомого слова $A^r PwA^{-r}$ можно взять $A^r P_1 w_1 A^{-r}$.

(iv) Если $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{N}_{\alpha-1}^*(A)$, то, взяв $r = 0$, можно воспользоваться уже доказанным утверждением (i). Пусть $\mathbf{G} \cap \mathbf{N}_{\alpha-1}^-(A) \neq \emptyset$. Для любых двух элементов $\mathbf{g}, \mathbf{h} \in \mathbf{G} \cap \mathbf{N}_{\alpha-1}^-(A)$ выполнено $\mathbf{g}^{-1}\mathbf{h} \in \mathbf{N}_{\alpha-1}^+(A)$, и так как по условию имеем $\mathbf{G} \cap \mathbf{N}_{\alpha-1}^+(A) \subseteq \mathbf{N}_{\alpha-1}^*(A)$, то $\mathbf{g}^{-1}\mathbf{h} \in \mathbf{N}_{\alpha-1}^*(A)$. Тогда в силу предложений 7.3, 7.8 и следствия 7.11 имеем $\partial \text{Cогл}_{\rho(A)}(\mathbf{g}E, \mathbf{h}E)$ для любых $\mathbf{g}, \mathbf{h} \in \mathbf{G} \cap \mathbf{N}_{\alpha-1}^-(A)$, и, как видно из доказательства (iii), элементы $\mathbf{g} \in \mathbf{G} \cap \mathbf{N}_{\alpha-1}^-(A)$ представляются словами искомого вида $A^r PwA^{-r}$, где r – общее для всех $\mathbf{g}$. Так как $[A]_{\alpha-1}^r \mathbf{N}_{\alpha-1}^*(A)[A]_{\alpha-1}^{-r} = \mathbf{N}_{\alpha-1}^*(A)$, то в силу (i) каждый элемент из $\mathbf{G} \cap \mathbf{N}_{\alpha-1}^*(A)$ представляется словом вида $A^r wA^{-r}$, где $w \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$.

13.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для любого $A \in \bar{\mathcal{E}}_\beta$ при $1 \leq \beta \leq \alpha$ любой элемент $\mathbf{g} \in \mathbf{S}_\alpha(A)$ может быть представлен словом вида $Pw \in \mathcal{H}_\beta$, где P – начало слова A^n или A^{-n} и $w \in \mathcal{H}_{\beta-1}$. Если при этом $\mathbf{g} \in \mathbf{S}_\alpha^+(A) \setminus \mathbf{S}_\alpha^*(A)$, то $\mathbf{g}$ представляется словом $A^t w \in \mathcal{H}_\beta$, где $0 < t < n$, $w \in \mathcal{H}_{\beta-1}$ и $[w]_{\beta-1} \in \mathbf{N}_{\beta-1}^*(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{g} = \pi_{\beta-1, \alpha}(\tilde{\mathbf{g}})$, где $\tilde{\mathbf{g}} \in \mathbf{N}_{\beta-1}(A)$ и в случаях $\mathbf{g} \in \mathbf{S}_{\alpha}^{+}(A)$ или $\mathbf{g} \in \mathbf{S}_{\alpha}^{-}(A)$ элемент $\tilde{\mathbf{g}}$ лежит соответственно в $\mathbf{N}_{\beta-1}^{+}(A)$ или $\mathbf{N}_{\beta-1}^{-}(A)$. Если $\tilde{\mathbf{g}} \in \mathbf{N}_{\beta-1}^{-}(A)$, то по лемме 13.2, (iii) имеем $\tilde{\mathbf{g}} = [Pw]_{\beta-1}$, где P – начало слова вида $A^{\pm t}$ и $w \in \mathcal{H}_{\beta-1}$. Тогда $\mathbf{g} = [Pw]_{\alpha}$, и так как $A^n \stackrel{\alpha}{=} 1$, то в качестве P можно взять некоторое начало слова $A^{\pm n}$. В этом случае в силу определения 5.8 имеем $Pw \in \mathcal{H}_{\beta}$. Пусть $\tilde{\mathbf{g}} \in \mathbf{N}_{\beta-1}^{+}(A)$. По лемме 13.2, (ii) представим элемент $\tilde{\mathbf{g}}$ словом $A^t w$, где $w \in \mathcal{H}_{\beta-1}$ и $[w]_{\beta-1} \in \mathbf{N}_{\beta-1}^{*}(A)$. Тогда $\mathbf{g} = [A^t w]_{\alpha}$ и в силу равенства $A^n \stackrel{\alpha}{=} 1$ можно считать $0 \leq t < n$. Так как $[w]_{\alpha} \in \mathbf{S}_{\alpha}^{*}(A)$, то в случае $\mathbf{g} \in \mathbf{S}_{\alpha}^{+}(A) \setminus \mathbf{S}_{\alpha}^{*}(A)$ имеем $t \neq 0$. Остается заметить, что $A^t w \in \mathcal{H}_{\beta}$ в силу определения 5.8.

13.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Слово вида $A^t w$ (формально – пару слов A^t и w), где $A \in \bar{\mathcal{E}}_{\beta}$, $1 \leq \beta \leq \alpha$, $0 < t < n$, $w \in \mathcal{H}_{\beta-1}$ и $[w]_{\beta-1} \in \mathbf{N}_{\beta-1}^{*}(A)$, будем называть *нормальной формой ранга β* (участие ранга α в этом определении связано только с тем, что подгруппа $\mathbf{N}_{\beta-1}^{*}(A)$ формально определена только для $\beta \leq \alpha$, см. определения 7.12, 7.9).

Из определения непосредственно вытекает, что любая нормальная форма $A^t w$ ранга $\beta \leq \alpha$ представляет в группе $\mathbf{B}_{\alpha}$ элемент из $\mathbf{S}_{\alpha}(A)$. В силу предложения 7.14, (iii) любой такой элемент имеет конечный порядок. Покажем, что с точностью до сопряженности любой элемент конечного порядка группы $\mathbf{B}_{\alpha}$ может быть представлен некоторой нормальной формой ранга $\beta \leq \alpha$.

13.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Всякий нетривиальный элемент конечного порядка группы $\mathbf{B}_{\alpha}$ сопряжен элементу вида $[A^t w]_{\alpha}$, где $A^t w$ – нормальная форма ранга $\beta \leq \alpha$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $1 \neq \mathbf{g} \in \mathbf{B}_{\alpha}$ и $\mathbf{g}$ имеет конечный порядок. Пусть β – наименьший ранг, для которого существует элемент $\tilde{\mathbf{g}} \in \mathbf{B}_{\beta}$ конечного порядка такой, что $\pi_{\beta, \alpha}(\tilde{\mathbf{g}}) = \mathbf{g}$. Ясно, что $\beta \geq 1$. В силу следствия 12.25 элемент $\tilde{\mathbf{g}}$ сопряжен некоторому элементу $\mathbf{h} \in \mathbf{S}_{\beta}^{+}(A)$, где $A \in \mathcal{E}_{\gamma}$ и $\gamma \leq \beta$. В силу леммы 7.20 можно считать $A \in \bar{\mathcal{E}}_{\gamma}$. Если $\mathbf{h} \in \mathbf{S}_{\beta}^{*}(A)$, то согласно определению 7.13 для некоторого $\tilde{\mathbf{h}} \in \mathbf{N}_{\gamma-1}^{*}(A)$ выполнено $\pi_{\gamma-1, \beta}(\tilde{\mathbf{h}}) = \mathbf{h}$, и в силу предложения 7.14, (ii) $\tilde{\mathbf{h}}$ – элемент конечного порядка, что противоречит выбору β . Следовательно, $\mathbf{h} \in \mathbf{S}_{\beta}^{+}(A) \setminus \mathbf{S}_{\beta}^{*}(A)$, и тогда утверждение вытекает из предложения 13.3.

13.6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Если $A^t w$ – нормальная форма ранга $\beta \leq \alpha$, то $[A^t w]_{\alpha} \neq 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, $A^t w$ – нормальная форма ранга $\beta \leq \alpha$ и $A^t w \stackrel{\alpha}{=} 1$. Так как $A^t w \in \mathcal{H}_{\beta}$, то по предложению 11.3 имеем $A^t w \stackrel{\beta}{=} 1$. Применяя предложение 11.2 при $\alpha := \beta$, $X := u := Y := 1$ и $v := A^t w$, получаем $A^{t'} w \stackrel{\beta-1}{=} 1$, где $t' = t$ или $t' = n - t$. Но это невозможно, так как в силу предложения 7.10, (iii) $\text{ind}_A([A^{t'} w]_{\beta-1}) = t' \neq 0$, т.е. $[A^{t'} w]_{\beta-1} \neq 1$.

13.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (i) Если $\mathbf{G} \leq \mathbf{B}_\beta$ – конечная подгруппа группы $\mathbf{B}_\beta$ при $\beta \leq \alpha$, то эпиморфизм $\pi_{\beta,\alpha}$ индуцирует изоморфизм $\mathbf{G} \rightarrow \pi_{\beta,\alpha}(\mathbf{G})$. В частности, для любого $A \in \mathcal{E}_\beta$ естественный эпиморфизм $\mathbf{S}_\beta(A) \rightarrow \mathbf{S}_\alpha(A)$ является изоморфизмом.

(ii) Для любого $A \in \mathcal{E}_\beta$ при $1 \leq \beta \leq \alpha$ ядро естественного эпиморфизма $\mathbf{N}_{\beta-1}(A) \rightarrow \mathbf{S}_\alpha(A)$ есть циклическая подгруппа, порожденная элементом $[A]_{\beta-1}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) непосредственно вытекает из предложений 13.5, 13.6 и 7.14, (iii). Докажем (ii). Очевидно, $[A]_{\beta-1}^n \in \ker \pi_{\beta-1,\alpha}$. Докажем, что $\ker \pi_{\beta-1,\alpha} \cap \mathbf{N}_{\beta-1}(A) \subseteq \langle [A]_{\beta-1}^n \rangle$. Ввиду (i) достаточно рассмотреть случай $\beta = \alpha$. В силу леммы 7.2, (iii), заменяя слово A на его циклический сдвиг, можно считать $A \in \bar{\mathcal{E}}_\alpha$. Если $\mathbf{g} \in \mathbf{N}_{\alpha-1}^-(A)$, то $\mathbf{g} \neq 1$ в силу леммы 7.14, (ii) и $\mathbf{g}$ имеет конечный порядок в силу следствия 7.17 и предложения 7.14, (ii). Тогда $\pi_{\alpha-1,\alpha}(\mathbf{g}) \neq 1$ в силу предложений 13.5 и 13.6. Пусть $\mathbf{g} \in \mathbf{N}_{\alpha-1}^+(A)$. Предположим, $\pi_{\alpha-1,\alpha}(\mathbf{g}) = 1$. По предложению 13.2, (i) имеем $\mathbf{g} = [A^{t'}w]_{\alpha-1}$, где $[w]_{\alpha-1} \in \mathbf{N}_{\alpha-1}^*(A)$. Пусть $t' \equiv t \pmod{n}$ и $0 \leq t' < n$. Так как $[A^{t'}w]_\alpha = [A^t w]_\alpha = \pi_{\alpha-1,\alpha}(\mathbf{g}) = 1$, то по предложению 13.6 имеем $t' = 0$, иначе $A^{t'}w$ – нормальная форма ранга α . Тогда в силу (i) и конечности $\mathbf{N}_{\alpha-1}^*(A)$ получаем $[w]_{\alpha-1} = 1$. Следовательно, $\mathbf{g} = [A]_{\alpha-1}^{kn}$ для некоторого k , что и требовалось.

Перейдем к анализу соотношений сопряженности элементов конечного порядка группы $\mathbf{B}_\alpha$.

13.8. ЛЕММА. Пусть $T^{-1}uT'$ – путь на графе Γ_α с $\mathcal{L}(T) \sqsupseteq \mathcal{L}(T') \in \mathcal{R}_\alpha$ и $[\mathcal{L}(u)]_\alpha \in \mathbf{S}_\alpha(A)$ для некоторого $A \in \bigcup_{\beta \leq \alpha} \bar{\mathcal{E}}_\beta$. Пусть $E \in \mathcal{E}_\alpha(T, h+8)$, $F \in \mathcal{E}_\alpha(T', h+8)$ и $\partial \text{Cогл}_\alpha(E, F)$. Тогда $\partial \text{Cогл}_\alpha(\mathbf{g}E, F)$, где $\mathbf{g} \Rightarrow \iota(T')(\iota(T))^{-1}$ – элемент группы $\mathbf{B}_\alpha$, для которого $T' = \mathbf{g}T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, $\neg \partial \text{Cогл}_\alpha(\mathbf{g}E, F)$. Так как $\mathbf{g}E$ и F – подпути пути T' , то по предложению 8.40 имеем либо $\mathbf{g}E <_{T'} F$, либо $F <_{T'} \mathbf{g}E$. Заметим, что утверждение леммы симметрично относительно замены $T^{-1}uT' \rightarrow T'^{-1}u^{-1}T$, $E \rightarrow F$, $F \rightarrow E$ и $\mathbf{g} \rightarrow \mathbf{g}^{-1}$. Так как из $F <_{T'} \mathbf{g}E$ следует $\mathbf{g}^{-1}F <_T E$, то достаточно ограничиться рассмотрением случая, когда $\mathbf{g}E <_{T'} F$. Мы получим противоречие, указав сколь угодно большое число попарно различных подпутей пути T . Более точно, индукцией по $k \geq 0$ мы докажем следующее утверждение:

$$\begin{aligned} & \text{существуют подпути } E_0 \Rightarrow E, E_1, E_2, \dots, E_k \in \mathcal{E}_\alpha(T) \text{ пути } T, \\ & \text{обладающие следующими свойствами:} \\ & \text{(i) } E_k \ll_T E_{k-1} \ll_T \dots \ll_T E_0; \\ & \text{(ii) } \partial \text{Cогл}_\alpha(\mathbf{g}^i E, E_i) \text{ (} i = 0, 1, \dots, k \text{).} \end{aligned} \tag{13.1}$$

При $k = 0$ доказывать нечего. Докажем, что из (i) и (ii) вытекает существование пути $E_{k+1} \in \mathcal{E}_\alpha(T)$ такого, что $E_{k+1} \ll_T E_k$ и $\partial \text{Cогл}_\alpha(\mathbf{g}^{k+1} E, E_{k+1})$. Пусть $T' = UFV$ и $T = WE_kZ$. Мы хотим применить предложение 11.17 при $X := \mathbf{g}^k(UF)$, $Y := W$ и $E := \mathbf{g}^{k+1}E$. Так как $\mathbf{g}E <_{T'} F$, то $\mathbf{g}^{k+1}E <_{\mathbf{g}^k T'} \mathbf{g}^k F$, т.е. $\mathbf{g}^{k+1}E$

содержится в $\mathbf{g}^k(\text{UF})$. Далее, из $\mathcal{E}Cогл_\alpha(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ и (ii) следует $\mathcal{E}Cогл_\alpha(\mathbf{E}_k, \mathbf{g}^k\mathbf{F})$, а из $\neg\mathcal{E}Cогл_\alpha(\mathbf{g}\mathbf{E}, \mathbf{F})$ следует $\neg\mathcal{E}Cогл_\alpha(\mathbf{g}^{k+1}\mathbf{E}, \mathbf{g}^k\mathbf{F})$. Тогда по лемме 11.19 конечные вершины $\iota(\mathbf{E}_k)$ и $\tau(\mathbf{g}^k\mathbf{F})$ путей $\mathbf{W}$ и $\mathbf{g}^k(\text{UF})$ могут быть соединены путем $\mathbf{v}$ с $\mathcal{L}(\mathbf{v}) \in \mathcal{H}_\alpha$, относительно которого устойчив путь $\mathbf{g}^{k+1}\mathbf{E}$. Докажем, что вершины $\iota(\mathbf{g}^k(\text{UF})) = \iota(\mathbf{g}^{k+1}\mathbf{T})$ и $\iota(\mathbf{W}) = \iota(\mathbf{T})$ также могут быть соединены путем $\mathbf{x}$ с $\mathcal{L}(\mathbf{x}) \in \mathcal{H}_\alpha$, относительно которого устойчив $\mathbf{g}^{k+1}\mathbf{E}$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= (\iota(\mathbf{g}^{k+1}\mathbf{T}))^{-1}\iota(\mathbf{T}) = ((\iota(\mathbf{T}))^{-1}\mathbf{g}\iota(\mathbf{T}))^{-k-1} \\ &= ((\iota(\mathbf{T}))^{-1}\iota(\mathbf{T}'))^{-k-1} = [\mathcal{L}(\mathbf{u})]_\alpha^{-k-1} \in \mathbf{S}_\alpha(A). \end{aligned}$$

Пусть $A \in \bar{\mathcal{E}}_\beta$, где $\beta \leq \alpha$. В силу предложения 13.3 представим $\mathbf{h}$ словом $Pw \in \mathcal{H}_\beta$, где P – начало слова $A^{\pm n}$ и $w \in \mathcal{H}_{\beta-1}$. Тогда вершины $\iota(\mathbf{g}^{k+1}\mathbf{T})$ и $\iota(\mathbf{T})$ соединены путем $\mathbf{x} = Pw$ с $\mathcal{L}(\mathbf{x}) \subseteq P$ и $\mathcal{L}(\mathbf{w}) \subseteq w$. Если $\beta < \alpha$, то устойчивость $\mathbf{g}^{k+1}\mathbf{E}$ относительно $\mathbf{x}$ непосредственно вытекает из определения 11.11. Пусть $\beta = \alpha$. Допустим, $\mathbf{G} = \mathbf{g}^{k+1}\mathbf{E}$ не устойчив относительно $\mathbf{x}$. Согласно определению 11.11 имеем $|\mathbf{P}| \geq 2|A|$ и для некоторых прообразов $\bar{\mathbf{G}}$ и $\bar{\mathbf{P}}$ на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ путей $\mathbf{G}$ и $\mathbf{P}$ и некоторого $\epsilon = \pm 1$ выполнено $Cогл(\mathbf{Q}, \bar{\mathbf{P}}^\epsilon)$, где $\mathbf{Q}$ – периодическая основа для $\bar{\mathbf{G}}$. Пусть $\mathbf{f} \in \mathbf{N}_{\alpha-1}(A)$ – элемент группы $\mathbf{B}_{\alpha-1}$, для которого $\pi_{\alpha-1, \alpha}(\mathbf{f}) = [\mathcal{L}(\mathbf{u})]_\alpha$. По предложению 7.3 имеем $Cогл(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{g}}\bar{\mathbf{P}})$ или $Cогл(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{g}}\bar{\mathbf{P}}^{-1})$, где $\bar{\mathbf{g}} = \iota(\bar{\mathbf{P}})\mathbf{f}(\iota(\bar{\mathbf{P}}))^{-1}$. Отсюда следует $Cогл(\mathbf{Q}, \bar{\mathbf{g}}\mathbf{Q}^\delta)$ для некоторого $\delta = \pm 1$. Так как $\pi_{\alpha-1, \alpha}(\iota(\bar{\mathbf{P}})) = \iota(\mathbf{P}) = \iota(\mathbf{T})$, то $\pi_{\alpha-1, \alpha}(\bar{\mathbf{g}}) = \iota(\mathbf{T})[\mathcal{L}(\mathbf{u})]_\alpha(\iota(\mathbf{T}))^{-1} = \iota(\mathbf{T}')(\iota(\mathbf{T}))^{-1} = \mathbf{g}$. Тогда согласно определениям 5.18 и 5.20 получаем $\mathcal{E}Cогл_\alpha(\mathbf{G}, \mathbf{g}\mathbf{G})$ и, следовательно, $\mathcal{E}Cогл_\alpha(\mathbf{E}, \mathbf{g}\mathbf{E})$. Но по условию $\mathcal{E}Cогл_\alpha(\mathbf{E}, \mathbf{F})$, и мы получаем противоречие с допущением $\neg\mathcal{E}Cогл_\alpha(\mathbf{g}\mathbf{E}, \mathbf{F})$. Мы доказали, что $\mathbf{g}^{k+1}\mathbf{E}$ устойчив относительно $\mathbf{x}$, и тем самым проверили выполнение всех условий посылки предложения 11.17 (при $\mathbf{X} := \mathbf{g}^k(\text{UF})$, $\mathbf{uYv} := \mathbf{xWv}$ и $\mathbf{E} := \mathbf{g}^{k+1}\mathbf{E}$). В силу этого предложения найдется подпуть $\mathbf{E}_{k+1} \in \mathcal{E}л_\alpha(\mathbf{T})$ пути $\mathbf{W}$ такой, что $\mathcal{E}Cогл_\alpha(\mathbf{g}^{k+1}\mathbf{E}, \mathbf{E}_{k+1})$. Так как $\mathbf{E}_{k+1} \ll_{\mathbf{T}} \mathbf{E}_k$, то тем самым завершён индуктивный переход от k к $k+1$, и, таким образом, (13.1) установлено для всех значений k . В частности, согласно (i) для любого k должно существовать k различных подпутей пути $\mathbf{T}$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

13.9. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для любого слова T существует слово T^* , обладающее следующим свойством: для любых ограниченных в ранге α слов $u, v \in \mathcal{H}_\alpha$ таких, что $[u]_\alpha \in \mathbf{S}_\alpha(A)$, $[v]_\alpha \in \mathbf{S}_\alpha(B)$ для некоторых $A, B \in \bigcup_{\beta \leq \alpha} \bar{\mathcal{E}}_\beta$, из $u \stackrel{\alpha}{=} TvT^{-1}$ следует $u \stackrel{\alpha-1}{=} T^*vT^{*-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 12.13 достаточно ограничиться рассмотрением случая $T \in \mathcal{R}_\alpha$. Если T не содержит в качестве подслов элементарных q_4 -степеней ранга α , то в силу предложения 11.3 можно положить $T^* = T$. Пусть T содержит хотя бы одну элементарную q_4 -степень ранга α . Рассмотрим путь $\mathbf{T}$ на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ с $\mathcal{L}(\mathbf{T}) \subseteq T$ и, используя предложение 8.38, (ii), найдем подпути $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_t \in \mathcal{E}л_\alpha(\mathbf{T}, q_4)$, удовлетворяющие следующим условиям:

- (i) $\neg PCогл_\alpha(\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j)$ при $i \neq j$ и $\mathbf{E}_1 <_{\mathbf{T}} \mathbf{E}_2 <_{\mathbf{T}} \dots <_{\mathbf{T}} \mathbf{E}_t$;
- (ii) если $\mathbf{E} \in \mathcal{E}л_\alpha(\mathbf{T}, q_4)$, то $PCогл_\alpha(\mathbf{E}_i, \mathbf{E})$ для некоторого i .

Выберем для каждого E_i периодическую основу $N_i \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, C_i, 2)$, где $C_i \in \mathcal{E}_\alpha$. Без ограничения общности можно считать, что слово $\mathcal{L}(N_i)$ начинается с C_i . Пусть $X_i E_i$ – начало пути T , и пусть f_i – произвольный путь, соединяющий вершины $\iota(E_i)$ и $\iota(N_i)$. Обозначим $X_i \rightleftharpoons \mathcal{L}(X_i)$ и $f_i \rightleftharpoons \mathcal{L}(f_i)$. Мы докажем, что слово

$$T^* \rightleftharpoons \left(\prod_{i=1}^t X_i f_i C_i^{n/2} f_i^{-1} X_i^{-1} \right) T \quad (13.2)$$

является искомым.

Пусть слова $u, v \in \mathcal{H}_\alpha$ таковы, как указано в условии предложения, т.е. $[u]_\alpha \in \mathbf{S}_\alpha(A)$, $[v]_\alpha \in \mathbf{S}_\alpha(B)$ для некоторых $A, B \in \bigcup_{\beta \leq \alpha} \bar{\mathcal{E}}_\beta$, u и v ограничены в ранге α и имеет место равенство $u \stackrel{\alpha}{=} T v T^{-1}$. Нам нужно доказать соотношение

$$u \stackrel{\alpha-1}{=} \left(\prod_{i=1}^t X_i f_i C_i^{n/2} f_i^{-1} X_i^{-1} \right) T v T^{-1} \left(\prod_{i=1}^t X_i f_i C_i^{n/2} f_i^{-1} X_i^{-1} \right)^{-1}. \quad (13.3)$$

По предложению 11.2 при $X := Y := T$, $u := u$ и $v := v^{-1}$ либо имеет место равенство

$$T \stackrel{\alpha-1}{=} u T v^{-1}, \quad (13.4)$$

либо для некоторого $r \geq 1$ существуют слова K_i, L_i ($i = 0, 1, \dots, r$), $G_i, H_i, S_i, U_i, T_i, V_i$, элементарные периоды $D_i \in \mathcal{E}_\alpha$ и слова $x_i, y_i, z_i, w_i \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$ ($i = 1, 2, \dots, r$) такие, что выполнены соотношения:

$$T \sqsubseteq K_0 G_1 K_1 \dots G_r K_r \sqsubseteq L_0 H_1 L_1 \dots H_r L_r, \quad (13.5)$$

$$S_i^{-1} U_i T_i V_i \approx D_i^n \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad (13.6)$$

$$G_i \stackrel{\alpha-1}{=} x_i S_i y_i, \quad H_i \stackrel{\alpha-1}{=} z_i T_i w_i \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad (13.7)$$

$$K_0 \stackrel{\alpha-1}{=} u L_0 z_1 U_1^{-1} x_1^{-1}, \quad (13.8)$$

$$K_i \stackrel{\alpha-1}{=} y_i^{-1} V_i^{-1} w_i L_i z_{i+1} U_{i+1}^{-1} x_{i+1}^{-1} \quad (i = 1, 2, \dots, r-1), \quad (13.9)$$

$$K_r \stackrel{\alpha-1}{=} y_r^{-1} V_r^{-1} w_r L_r v^{-1}, \quad (13.10)$$

$$|S_i|, |T_i| > (q - 2p - 32)|D_i| \quad (i = 1, 2, \dots, r). \quad (13.11)$$

Будем считать $r = 0$ в случае, когда имеет место равенство (13.4). Согласно (13.5) представим T в виде

$$T = K_0 G_1 K_1 \dots G_r K_r, \quad \mathcal{L}(K_i) \sqsubseteq K_i, \quad \mathcal{L}(G_i) \sqsubseteq L_i.$$

Согласно равенствам (13.7) для каждого i выберем путь $x_i S_i y_i$ с теми же, что и у пути G_i , начальной и конечной вершинами, где метки путей x_i , S_i и y_i равны соответственно x_i , S_i и y_i . Так как пути G_i и S_i близки в ранге $\alpha - 1$ и в силу (13.6), (13.11) имеем $S_i \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, D_i^{-1}, q - 2p - 32)$, то по предложению 8.23 найдется подпуть $G_i^* \in \text{ППер}_\alpha(D_i^{-1}, q_4)$ пути G_i с периодической основой

$S_i^* \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, D_i^{-1}, 2)$, содержащейся в S_i . В силу условия (ii) для каждого i найдется индекс k_i такой, что $\text{ПСогл}_\alpha(G_i^*, E_{k_i})$. Заметим, что $\neg \text{ПСогл}_\alpha(G_i^*, G_j^*)$ при $i \neq j$, так как иначе, воспользовавшись предложениями 8.35 и 8.11, мы получили бы противоречие с приведенностью слова T в ранге α и леммой 12.12. Тогда из (i) и предложения 8.39 следует $k_1 < k_2 < \dots < k_r$. Обозначим

$$Z_0 \equiv u,$$

$$Z_i \equiv K_0 G_1 \dots K_{i-1} G_i y_i^{-1} V_i^{-1} w_i H_i^{-1} L_{i-1}^{-1} \dots H_1^{-1} L_0^{-1} \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Докажем соотношения

$$\left\{ \begin{array}{ll} X_i f_i C_i^{-n/2} f_i^{-1} X_i^{-1} Z_j X_i f_i C_i^{n/2} f_i^{-1} X_i^{-1} \stackrel{\alpha-1}{=} Z_j, & \text{если } r = 0, \\ \begin{array}{l} j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, t, \\ j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k_1 - 1, \\ 1 \leq j \leq r - 1, \quad i = k_j + 1, k_j + 2, \dots, k_{j+1} - 1, \\ j = r, \quad i = k_r + 1, k_r + 2, \dots, t \end{array} & \text{если } r > 0, \end{array} \right. \quad (13.12)$$

$$X_i f_i C_i^{-n/2} f_i^{-1} X_i^{-1} Z_j X_i f_i C_i^{n/2} f_i^{-1} X_i^{-1} \stackrel{\alpha-1}{=} Z_{j+1} \quad (0 \leq j \leq r - 1, i = k_{j+1}). \quad (13.13)$$

Заметим, что на основе (13.12) и (13.13) легко выводится искомое равенство (13.3). Действительно, из (13.12), (13.13) и $Z_0 \equiv u$ следует

$$\left(\prod_{i=1}^t X_i f_i C_i^{n/2} f_i^{-1} X_i^{-1} \right)^{-1} u \left(\prod_{i=1}^t X_i f_i C_i^{n/2} f_i^{-1} X_i^{-1} \right) \stackrel{\alpha-1}{=} Z_r,$$

и для вывода (13.3) нужно лишь заметить, что в случае $r = 0$ из (13.4) следует $Z_0 \stackrel{\alpha-1}{=} T v T^{-1}$, а в случае $r > 0$ из (13.5), (13.10) следует $Z_r \stackrel{\alpha-1}{=} T v T^{-1}$.

В зависимости от условий на j и r возможны четыре случая:

- (a) $j = 0, r = 0$,
- (b) $j = 0, r > 0$,
- (c) $1 \leq j \leq r - 1, r > 0$,
- (d) $j = r, r > 0$.

В этих случаях доказательство равенств (13.12) и (13.13) различается незначительно (а случаи (a) и (b) отпадают при доказательстве (13.13)), и мы проведем подробные рассуждения лишь в случае (c), имеющем наиболее общий вид.

Итак, пусть $1 \leq j \leq r - 1$ и $r > 0$. В соответствии с равенствами (13.7), (13.9) рассмотрим пути на графе $\Gamma_{\alpha-1}$, изображенные на рис. 61, обозначенные теми же буквами, что и их метки. Обозначим $T' \equiv L_0 H_1 L_1 \dots H_r L_r$. Заметим, что из (13.6)–(13.9) легко вытекает $Z_j \stackrel{\alpha}{=} u$. Отсюда следует, что начальные вершины путей $\pi_{\alpha-1, \alpha}(T)$ и $\pi_{\alpha-1, \alpha}(T')$ соединены некоторым путем $\hat{u}$ с $\mathcal{L}(\hat{u}) \equiv u$

Рис. 61

и, таким образом, мы можем пользоваться леммой 13.8 при $T := \pi_{\alpha-1, \alpha}(T)$ и $T' := \pi_{\alpha-1, \alpha}(T')$.

Перейдем непосредственно к доказательству соотношений (13.12) и (13.13). Зафиксируем i в интервале $k_j + 1 \leq i \leq k_{j+1} - 1$. Из $PCozl_\alpha(G_j^*, E_{k_j})$, $PCozl_\alpha(G_{j+1}^*, E_{k_{j+1}})$, (i) и предложения 8.39 следует $G_j^* <_T E_i <_T G_{j+1}^*$, т.е. E_i содержится в $G_j K_j G_{j+1}$. Кроме того, в силу (i) имеем $\neg PCozl_\alpha(G_j^*, E_i)$ и $\neg PCozl_\alpha(G_{j+1}^*, E_i)$, и так как $S_j V_j^{-1}$ и $U_{j+1}^{-1} S_{j+1}$ – периодические продолжения для S_j^* и S_{j+1}^* , то отсюда следует $\neg Cозл(S_j V_j^{-1}, N_i)$ и $\neg Cозл(U_{j+1}^{-1} S_{j+1}, N_i)$. По лемме 11.10 найдется подпуть $F \in \text{ППер}_\alpha(C_i, q_4 - h)$ пути L_j такой, что $PCozl_\alpha(E_i, F)$. Так как $\mathcal{E}Cозл_\alpha(\pi_{\alpha-1, \alpha}(E_i), \pi_{\alpha-1, \alpha}(F))$, то по лемме 13.8 имеем $\mathcal{E}Cозл_\alpha(\pi_{\alpha-1, \alpha}(gE_i), \pi_{\alpha-1, \alpha}(F))$, где $g = \iota(T')(\iota(T))^{-1}$ – элемент группы $B_{\alpha-1}$, для которого $T' = gT$. Так как gE_i и F_i – подпути пути T' , то в силу предложений 11.24 и 8.46 получаем $PCozl_\alpha(F, gE_i)$ и, следовательно, $PCozl_\alpha(E_i, gE_i)$. Так как gN_i – периодическая основа для gE_i и слово $\mathcal{L}(N_i)$ начинается с C_i , то по предложению 7.3

$$(\iota(N_i))^{-1} \iota(gN_i) \in N_{\alpha-1}^+(C_i).$$

Теперь заметим, что $(\iota(N_i))^{-1} \iota(gN_i) = [\mathcal{L}(W)]_{\alpha-1}$, где W – произвольный путь, соединяющий вершины $\iota(N_i)$ и $\iota(gN_i)$. Пусть

$$Z_j = K_0 G_1 \dots K_{j-1} G_j y_j^{-1} V_j^{-1} w_j H_j^{-1} L_{j-1}^{-1} \dots H_1^{-1} L_0^{-1}.$$

Рассматривая в качестве W путь $f_i^{-1} X_i^{-1} Z_j (gX_i)(gf_i)$ и учитывая, что $\mathcal{L}(Z_j) \supseteq Z_j$, получаем

$$(\iota(N_i))^{-1} \iota(gN_i) = [f_i^{-1} X_i^{-1} Z_j X_i f_i]_{\alpha-1}. \quad (13.14)$$

Следовательно, $[f_i^{-1} X_i^{-1} Z_j X_i f_i]_{\alpha-1} \in N_{\alpha-1}^+(C_i)$. По предложению 7.18 элемент $[C_i]_{\alpha-1}^{n/2}$ лежит в центре подгруппы $N_{\alpha-1}^+(C_i)$. Поэтому

$$C_i^{-n/2} f_i^{-1} X_i^{-1} Z_j X_i f_i C_i^{n/2} \stackrel{\alpha-1}{=} f_i^{-1} X_i^{-1} Z_j X_i f_i,$$

что и доказывает (13.12).

Докажем (13.13). Из соотношений (13.7) при $i := j + 1$ и (13.9) при $i := j$ вытекает

$$Z_{j+1}Z_j^{-1} \overset{\alpha-1}{=} K_0G_1K_1 \dots G_jK_jx_{j+1} \cdot S_{j+1}V_{j+1}^{-1}T_{j+1}^{-1}U_{j+1}^{-1} \\ \times x_{j+1}^{-1}K_j^{-1}G_j^{-1} \dots K_1^{-1}G_1^{-1}K_0^{-1}.$$

Следовательно, с учетом (13.6), считая, что слово S_{j+1} начинается с D_{j+1}^{-1} , имеем

$$Z_{j+1}Z_j^{-1} \overset{\alpha-1}{=} K_0G_1K_1 \dots G_jK_jx_{j+1}D_{j+1}^{-n}x_{j+1}^{-1}K_j^{-1}G_j^{-1} \dots K_1^{-1}G_1^{-1}K_0^{-1}. \quad (13.15)$$

Обозначим $i := k_{j+1}$. Из $PCozl_\alpha(G_{j+1}^*, E_i)$ следует $Cozl(S_{j+1}^*, N_i)$, а значит, и $Cozl(S_{j+1}, N_i)$. Пусть U – произвольный путь, соединяющий вершины $\iota(N_i)$ и $\iota(S_{j+1})$. Так как слова $\mathcal{L}(N_i)$ и $\mathcal{L}(S_{j+1})$ начинаются с C_i и D_{j+1}^{-1} , то из $Cozl(S_{j+1}, N_i)$ следует, что для некоторого $t > 0$

$$\mathcal{L}(U)D_{j+1}^{-t}\mathcal{L}(U)^{-1} \overset{\alpha-1}{=} C_i^t.$$

Тогда имеем $[\mathcal{L}(U)D_{j+1}^{-1}\mathcal{L}(U)^{-1}]_{\alpha-1} \in N_{\alpha-1}^+(C_i)$, и в силу предложения 7.10, (iii), (iv) $\text{ind}_{C_i}[\mathcal{L}(U)D_{j+1}^{-1}\mathcal{L}(U)^{-1}]_{\alpha-1} = 1$. По предложению 7.18, (i)

$$\mathcal{L}(U)D_{j+1}^{-n}\mathcal{L}(U)^{-1} \overset{\alpha-1}{=} C_i^n.$$

Рассматривая теперь в качестве U путь $f_i^{-1}X_i^{-1}K_0G_1K_1 \dots G_jK_jx_{j+1}$, получаем

$$f_i^{-1}X_i^{-1}K_0G_1K_1 \dots G_jK_jx_{j+1}D_{j+1}^{-n}x_{j+1}^{-1}K_j^{-1}G_j^{-1} \dots K_1^{-1}G_1^{-1}K_0^{-1}X_if_i \overset{\alpha-1}{=} C_i^n,$$

после чего, подставив в (13.15), находим, что

$$Z_{j+1}Z_j^{-1} \overset{\alpha-1}{=} X_if_iC_i^n f_i^{-1}X_i^{-1}. \quad (13.16)$$

По предложению 8.23 найдем подпуть $H_{j+1}^* \in \text{ППер}_\alpha(D_{j+1}, q_4)$ пути H_{j+1} с периодической основой $T_{j+1}^* \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, D_{j+1}, 2)$, содержащейся в T_{j+1} . Так как периодические основы $(S_{j+1}^*)^{-1}$ и T_{j+1}^* для $(G_{j+1}^*)^{-1}$ и F_{j+1}^* имеют общее периодическое продолжение $S_{j+1}^{-1}U_{j+1}T_{j+1}$ (см. рис. 61), то $PCozl_\alpha((G_{j+1}^*)^{-1}, F_{j+1}^*)$, и, следовательно, $\mathcal{E}Cozl_\alpha(\pi_{\alpha-1, \alpha}(G_{j+1}^*), \pi_{\alpha-1, \alpha}(F_{j+1}^*))$. Тогда по лемме 13.8 имеем $\mathcal{E}Cozl_\alpha(\pi_{\alpha-1, \alpha}(gG_{j+1}^*), \pi_{\alpha-1, \alpha}(F_{j+1}^*))$, откуда в силу предложений 11.24 и 8.46 вытекает $PCozl_\alpha(gG_{j+1}^*, F_{j+1}^*)$. Так как $PCozl_\alpha((G_{j+1}^*)^{-1}, F_{j+1}^*)$ и $PCozl_\alpha(G_{j+1}^*, E_i)$, то отсюда следует $PCozl_\alpha(gE_i, E_i^{-1})$. Тогда по предложению 7.3

$$(\iota(N_i))^{-1}\iota(gN_i) \in N_{\alpha-1}^-(C_i).$$

Воспользовавшись полученным выше равенством (13.14) (которое сохраняет силу и при $i = k_{j+1}$), получаем

$$[f_i^{-1}X_i^{-1}Z_jX_if_i]_{\alpha-1} \in \mathbf{N}_{\alpha-1}^-(C_i).$$

Отсюда по предложению 7.18, (iii) следует

$$C_i^{n/2}f_i^{-1}X_i^{-1}Z_jX_if_i \stackrel{\alpha-1}{=} f_i^{-1}X_i^{-1}Z_jX_if_iC_i^{-n/2},$$

или, вместе с (13.16),

$$Z_{j+1} \stackrel{\alpha-1}{=} X_if_iC_i^{n/2}f_i^{-1}X_i^{-1}Z_jX_if_iC_i^{-n/2}f_i^{-1}X_i^{-1},$$

что и требовалось. Мы доказали соотношения (13.12) и (13.13) в случае (с). В остальных случаях (а), (b) и (d) рассуждения повторяются почти дословно, с той лишь модификацией, что вместо одного или обоих путей $x_jS_jV_j^{-1}w_j$ и $z_{j+1}U_{j+1}^{-1}S_{j+1}y_{j+1}$ на рис. 61 будут пути u или соответственно v^{-1} , где $\mathcal{L}(u) \supseteq u$ и $\mathcal{L}(v) \supseteq v$, и при этом пути G_j, H_j или соответственно G_{j+1}, H_{j+1} будут отсутствовать.

13.10. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть A^tw и B^sv – нормальные формы рангов α и $\beta \leq \alpha$ соответственно, $T \in \mathcal{R}_\alpha$ и $A^tw \stackrel{\alpha}{=} TB^svT^{-1}$. Тогда $\alpha = \beta$ и $A^{t'k} \stackrel{\alpha-1}{=} TB^{s'k}T^{-1}$ для некоторых $k > 0$ и t', s' , где $t' \equiv t, s' \equiv s \pmod{n}$ и $|t'| = |s'|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим предложение 11.2 при $X := Y := T, u_1 := 1, Q := A^t, u_2 := w, v_1 := v^{-1}, R := B^{-s}$ и $v_2 := 1$. Согласно этому предложению либо $T \stackrel{\alpha-1}{=} A^{t'}wTv^{-1}B^{-s'}$, где $t' = t - \epsilon n, s' = s - \delta n$ для некоторых $\delta, \epsilon \in \{0, 1\}$, либо имеет место утверждение 11.2, (ii), т.е. для некоторого $r \geq 1$ существуют слова K_i, L_i ($i = 0, 1, \dots, r$), $G_i, H_i, S_i, U_i, T_i, V_i$, элементарные периоды $D_i \in \mathcal{E}_\alpha$ и слова $x_i, y_i, z_i, w_i \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$ ($i = 1, 2, \dots, r$), удовлетворяющие соотношениям

$$T \supseteq K_0G_1K_1 \dots G_rK_r \supseteq L_0H_1L_1 \dots H_rL_r, \quad (13.17)$$

$$S_i^{-1}U_iT_iV_i \approx D_i^n \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad (13.18)$$

$$G_i \stackrel{\alpha-1}{=} x_iS_iy_i, \quad H_i \stackrel{\alpha-1}{=} z_iT_iw_i \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad (13.19)$$

$$K_0 \stackrel{\alpha-1}{=} A^{t'}wL_0z_1U_1^{-1}x_1^{-1}, \quad (13.20)$$

$$K_i \stackrel{\alpha-1}{=} y_i^{-1}V_i^{-1}w_iL_iz_{i+1}U_{i+1}^{-1}x_{i+1}^{-1} \quad (i = 1, 2, \dots, r-1), \quad (13.21)$$

$$K_r \stackrel{\alpha-1}{=} y_r^{-1}V_r^{-1}w_rL_rv^{-1}B^{-s'}, \quad (13.22)$$

$$|S_i|, |T_i| > (q - 2p - 32)|D_i| \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad (13.23)$$

где t' и s' таковы, как указано выше. Предположим, имеет место первый случай $T \stackrel{\alpha-1}{=} A^{t'}wTv^{-1}B^{-s'}$, т.е. $A^{t'}w \stackrel{\alpha-1}{=} TB^{s'}vT^{-1}$. Так как $[A^{t'}w]_{\alpha-1} \in \mathbf{N}_{\alpha-1}^+(A)$,

$\text{ind}_A([A^{t'}w]_{\alpha-1}) = t'$, $[B^{s'}v]_{\beta-1} \in \mathbf{N}_{\beta-1}^+(B)$ и $\text{ind}_B([B^{s'}v]_{\beta-1}) = s'$ в силу определения 13.4 и предложения 7.10, (iii), то в силу предложения 7.10, (i) для некоторого $k > 0$ имеем $A^{t'k} \stackrel{\alpha-1}{=} TB^{s'k}T^{-1}$. Тогда из бесконечности порядка элемента $[A]_{\alpha-1}$ и конечности порядка элемента $[B]_{\alpha-1}$ при $\beta \leq \alpha - 1$ вытекает $\alpha = \beta$. Кроме того, так как $[A]_{\alpha-1} \in [T]_{\alpha-1}\mathbf{N}_{\alpha-1}^+(B)[T]_{\alpha-1}^{-1}$, то, используя предложение 7.10, (i), получаем $A^i \stackrel{\alpha-1}{=} TB^{ij}T^{-1}$ для некоторых $i, j \neq 0$, откуда легко выводим, что s' кратно t' . Аналогично доказывается, что t' кратно s' , т.е. $|t'| = |s'|$, и, следовательно, выполнены все условия заключения предложения 13.10.

Рис. 62

Таким образом, остается доказать невозможность случая 11.2, (ii). Допустим, этот случай имеет место. В соответствии с равенствами (13.19) при $i = 1$ и (13.20) рассмотрим пути $K_0, G_1, x_1, S_1, y_1, Q, w, L_0, z_1, U_1, H_1, T_1, w_1$ на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ с метками соответственно $K_0, G_1, x_1, S_1, y_1, A^{t'}, w, L_0, z_1, U_1, H_1, T_1$ и w_1 , расположенные, как указано на рис. 62. В силу (13.17) можно считать, что K_0G_1 есть начало пути T и L_0H_1 есть начало пути T' с $\mathcal{L}(T) \stackrel{\alpha}{=} \mathcal{L}(T') \stackrel{\alpha}{=} T$. Используя соотношения (13.18), (13.23) и предложение 8.23, найдем подпути G^* и H^* путей G_1 и H_1 такие, что $G^* \in \text{ППер}_\alpha(D_1^{-1}, q_4)$, $H^* \in \text{ППер}_\alpha(D_1, q_4)$ и периодические основы S^* для G^* и T^* для H^* содержатся в S_1 и в T_1 соответственно. Заменяя слово D_1 на его циклический сдвиг, можно считать, что слово $\mathcal{L}(S^*)$ начинается с D_1^{-1} . Так как в силу (13.18) при $i := 1$ пути S^{*-1} и T^* имеют общее периодическое продолжение $S_1^{-1}U_1T_1$, то $\text{ПСогл}_\alpha(G^{*-1}, H^*)$ и, следовательно, $\mathcal{ЭСогл}_\alpha(\pi_{\alpha-1, \alpha}(G^*), \pi_{\alpha-1, \alpha}(H^*))$. По лемме 13.8 при $T^{-1}uT' := \pi_{\alpha-1, \alpha}(T^{-1}QwT')$ получаем $\mathcal{ЭСогл}_\alpha(\pi_{\alpha-1, \alpha}(gG^*), \pi_{\alpha-1, \alpha}(H^*))$, где

$$g \Rightarrow \iota(T')(\iota(T))^{-1} = \iota(T)[A^{t'}w]_{\alpha-1}(\iota(T))^{-1}$$

– элемент группы $\mathbf{B}_{\alpha-1}$, для которого $T' = gT$. Тогда в силу предложений 11.24 и 8.46 имеем $\text{ПСогл}_\alpha(gG^*, H^*)$ и, следовательно, $\text{ПСогл}_\alpha(gG^*, G^{*-1})$. По предложению 7.3

$$(\iota(S^*))^{-1}g\iota(S^*) \in \mathbf{N}_{\alpha-1}^-(D_1),$$

откуда в силу следствия 7.17 и предложения 7.14, (ii) вытекает, что g имеет конечный порядок. Но g сопряжен элементу $[A^{t'}w]_{\alpha-1} \in \mathbf{N}_{\alpha-1}^+(A)$ с $\text{ind}_A([A^{t'}w]_{\alpha-1}) = t' \neq 0$, который в силу предложения 7.10, (i) и леммы 6.7 имеет бесконечный порядок. Получили противоречие. Предложение доказано.

13.11. СЛЕДСТВИЕ. Если $A \in \mathcal{E}_\alpha$, $\mathbf{g}, \mathbf{h} \in \mathbf{S}_\alpha^+(A) \setminus \mathbf{S}_\alpha^*(A)$ и $\mathbf{g} = \mathbf{f}\mathbf{h}\mathbf{f}^{-1}$, то $\mathbf{f} \in \mathbf{S}_\alpha(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменяя элементарный период A на его циклический сдвиг и используя лемму 7.20, можно считать $A \in \bar{\mathcal{E}}_\alpha$. Используя предложения 13.3 и 12.13, представим элементы $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$ нормальными формами $A^t w$ и $A^s v$ ранга α , а элемент $\mathbf{f}$ – словом $T \in \mathcal{R}_\alpha$. Так как $A^t w \stackrel{\alpha}{=} T A^s v T^{-1}$, то по предложению 13.10 в группе $\mathbf{B}_{\alpha-1}$ имеет место равенство $A^r \stackrel{\alpha-1}{=} T A^{\epsilon r} T^{-1}$, где $r \neq 0$ и $\epsilon = \pm 1$. Тогда согласно определению 7.1 имеем $[T]_{\alpha-1} \in \mathbf{N}_{\alpha-1}(A)$, и, следовательно, $\mathbf{f} \in \mathbf{S}_\alpha(A)$.

13.12. СЛЕДСТВИЕ. Если $A^t w$ и $B^s v$ – нормальные формы рангов $\beta, \gamma \leq \alpha$ соответственно, представляющие сопряженные элементы группы $\mathbf{B}_\alpha$, то $\beta = \gamma$ и верно одно из равенств $t = s$ или $t + s = n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать $\gamma \leq \beta$. По условию имеем $A^t w \stackrel{\alpha}{=} T B^s v T^{-1}$ для некоторого T . Применяя последовательно предложение 13.9 при $\alpha := \alpha, \alpha - 1, \dots, \beta + 1$, найдем слово T^* такое, что $A^t w \stackrel{\beta}{=} T^* B^s v T^{*-1}$. Тогда, выбрав слово T^* приведенным в ранге β в силу предложения 12.13 и воспользовавшись предложением 13.10, получим $\beta = \gamma$ и $t \equiv \pm s \pmod{n}$, что с учетом неравенств $0 < t < n$ и $0 < s < n$ влечет $t = s$ или $t + s = n$.

13.13. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathbf{g} \in \mathbf{B}_\alpha$ – неединичный элемент конечного порядка, и пусть $A^t w$ – нормальная форма ранга $\beta \leq \alpha$, представляющая сопряженный ему элемент группы $\mathbf{B}_\alpha$. Число β будем называть *рангом элемента $\mathbf{g}$* и обозначать *ранг $\mathbf{g}$* . Число t будем называть *степенью элемента $\mathbf{g}$* .

По определению полагаем также $\text{ранг } 1 = 0$.

Если $\mathbf{G} \leq \mathbf{B}_\alpha$ – конечная подгруппа группы $\mathbf{B}_\alpha$, то по определению

$$\text{ранг } \mathbf{G} = \max\{\text{ранг } \mathbf{g} \mid \mathbf{g} \in \mathbf{G}\}.$$

Из следствия 13.12 и предложения 13.6 вытекает, что ранг любого элемента $\mathbf{g} \in \mathbf{B}_\alpha$ конечного порядка определен однозначно, а если $\mathbf{g} \neq 1$, то степень $\mathbf{g}$ может принимать лишь два значения t и s , связанные соотношением $t + s = n$. Если $\mathbf{g}, \mathbf{h}$ – сопряженные элементы конечного порядка группы $\mathbf{B}_\alpha$, то, очевидно, $\text{ранг } \mathbf{g} = \text{ранг } \mathbf{h}$ и степени $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$ совпадают.

13.14. ЛЕММА. (i) $\text{ранг } \mathbf{g} = \text{ранг } \mathbf{g}^{-1}$.

(ii) Если $\mathbf{g}$ имеет степень t , $k > 0$ и $kt < n$, то $\text{ранг } \mathbf{g}^k = \text{ранг } \mathbf{g}$ и $\mathbf{g}^k$ имеет степень kt .

(iii) Если $\beta < \alpha$ и $\mathbf{g} \in \mathbf{B}_\beta$ – элемент конечного порядка, то $\text{ранг } \mathbf{g} = \text{ранг } \pi_{\beta, \alpha}(\mathbf{g})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i), (ii): Пусть $\mathbf{g} \neq 1$ и элемент $\mathbf{g}$ сопряжен элементу $\mathbf{h} = [A^t w]_\alpha$, где $A^t w$ – нормальная форма ранга $\gamma = \text{ранг } \mathbf{g}$. Так как согласно определению 7.12 $\mathbf{N}_{\gamma-1}^*(A) \trianglelefteq \mathbf{N}_{\gamma-1}^+(A)$, то $[A^t w^{-1} A^{-t}]_{\gamma-1} \in \mathbf{N}_{\gamma-1}^*(A)$ и для любого $k > 0$ $[A^{-kt} (A^t w)^k]_{\gamma-1} \in \mathbf{N}_{\gamma-1}^*(A)$. Тогда в силу леммы 13.2, (i) элементы $\mathbf{h}^{-1}$ и $\mathbf{h}^k$ при $kt < n$ представляются нормальными формами $(A^{-1})^t w_1$

и $A^{kt}w_2$ ранга γ соответственно для некоторых w_1 и w_2 . Отсюда следует, что $\text{ранг } \mathbf{g}^{-1} = \text{ранг } \mathbf{g}^k = \gamma$ и $\mathbf{g}^k$ имеет степень kt .

(iii): Если $\mathbf{g} = 1$, то доказывать нечего. Если $\mathbf{g} \neq 1$ и $\mathbf{g}$ сопряжен элементу $\mathbf{h} = [A^t w]_\beta$, где $A^t w$ – нормальная форма ранга $\gamma = \text{ранг } \mathbf{g}$, то элемент $\pi_{\beta, \alpha}(\mathbf{g})$ сопряжен элементу $\pi_{\beta, \alpha}(\mathbf{h})$, который также представляется нормальной формой $A^t w$ ранга γ .

13.15. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $A \in \mathcal{E}_\beta$, $\beta \leq \alpha$. Тогда $\text{ранг}[A]_\alpha^t = \beta$ для любого $0 < t < n$, $\text{ранг } \mathbf{S}_\alpha(A) = \beta$ и для любого $\mathbf{g} \in \mathbf{S}_\alpha(A)$ выполнено

$$\text{ранг } \mathbf{g} = \beta \Leftrightarrow \mathbf{g} \in \mathbf{S}_\alpha^+(A) \setminus \mathbf{S}_\alpha^*(A).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Переходя к циклическому сдвигу слова A , можно считать $A \in \bar{\mathcal{E}}_\beta$. В силу предложения 13.3 для любого элемента $\mathbf{g} \in \mathbf{S}_\alpha^+(A) \setminus \mathbf{S}_\alpha^*(A)$ имеем $\text{ранг } \mathbf{g} = \beta$, и так как согласно определению 13.4 слово A^t при $0 < t < n$ есть нормальная форма ранга β , то $\text{ранг}[A]_\alpha^t = \beta$. Для доказательства предложения остается проверить, что $\text{ранг } \mathbf{g} < \beta$ при $\mathbf{g} \in \mathbf{S}_\alpha^*(A) \cup \mathbf{S}_\alpha^-(A)$. В силу индуктивного предположения 13.5 и леммы 13.4, (iii) для этого достаточно убедиться, что $\mathbf{g} = \pi_{\alpha-1, \alpha}(\tilde{\mathbf{g}})$ для некоторого элемента $\tilde{\mathbf{g}} \in \mathbf{B}_{\alpha-1}$ конечного порядка. Для $\mathbf{g} \in \mathbf{S}_\alpha^*(A)$ это следует из предложения 7.14, (ii). Для $\mathbf{g} \in \mathbf{S}_\alpha^-(A)$ нужно воспользоваться еще следствием 7.17.

13.16. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $A \in \mathcal{E}_\beta$, $\beta \leq \alpha$, $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_r, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_r \in \mathbf{S}_\alpha(A)$ и $\mathbf{g}_i = \mathbf{x}\mathbf{h}_i\mathbf{x}^{-1}$ ($i = 1, 2, \dots, r$). Тогда если ранг хотя бы одного из элементов $\mathbf{g}_i$ или $\mathbf{h}_i$ равен β , то существует элемент $\mathbf{y} \in \mathbf{S}_\alpha(A)$ такой, что $\mathbf{g}_i = \mathbf{y}\mathbf{h}_i\mathbf{y}^{-1}$ ($i = 1, 2, \dots, r$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сопрягая элементы $\mathbf{g}_i, \mathbf{h}_i, \mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ одним и тем же подходящим элементом группы $\mathbf{B}_\alpha$ и используя лемму 7.20, можно считать $A \in \bar{\mathcal{E}}_\beta$. Без ограничения общности можно считать $\text{ранг } \mathbf{g}_1 = \text{ранг } \mathbf{h}_1 = \beta$. По предложению 13.3 представим каждый элемент $\mathbf{g}_i$ словом $x_i \in \mathcal{H}_\beta$, а каждый элемент $\mathbf{h}_i$ – словом $y_i \in \mathcal{H}_\beta$, где $[x_i]_\beta, [y_i]_\beta \in \mathbf{S}_\beta(A)$ при всех i . Имеем $x_i \stackrel{\alpha}{=} Ty_iT^{-1}$ при всех i , и по предложению 13.9 найдется слово T^* такое, что $x_i \stackrel{\beta}{=} T^*y_iT^{*-1}$ при всех i . Так как в силу предложения 13.15 $[x_1]_\beta, [y_1]_\beta \in \mathbf{S}_\beta^+(A) \setminus \mathbf{S}_\beta^*(A)$, то в силу следствия 13.11 имеем $[T^*]_\beta \in \mathbf{S}_\beta(A)$. Тогда можно положить $\mathbf{y} = [T^*]_\alpha$.

13.17. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $A, B \in \bigcup_{\beta \leq \alpha} \mathcal{E}_\beta$ и $\mathbf{S}_\alpha(A) = \mathbf{x}\mathbf{S}_\alpha(B)\mathbf{x}^{-1}$, то $\mathbf{S}_\alpha^+(A) = \mathbf{x}\mathbf{S}_\alpha^+(B)\mathbf{x}^{-1}$, $\mathbf{S}_\alpha^-(A) = \mathbf{x}\mathbf{S}_\alpha^-(B)\mathbf{x}^{-1}$ и $\mathbf{S}_\alpha^*(A) = \mathbf{x}\mathbf{S}_\alpha^*(B)\mathbf{x}^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что в силу предложения 13.15 элементарные периоды A и B имеют один и тот же ранг β . В силу леммы 7.20 достаточно ограничиться рассмотрением случая, когда $A, B \in \bar{\mathcal{E}}_\beta$. Пусть $\mathbf{S}_\alpha(A) = \{\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_k\}$ и $\mathbf{S}_\alpha(B) = \{\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_k\}$, где $\mathbf{g}_i = \mathbf{x}\mathbf{h}_i\mathbf{x}^{-1}$ и $\text{ранг } \mathbf{g}_0 = \text{ранг } \mathbf{h}_0 = \beta$. По предложению 13.3 представим каждый элемент $\mathbf{g}_i$ словом $x_i \in \mathcal{H}_\beta$, а каждый элемент $\mathbf{h}_i$ – словом $y_i \in \mathcal{H}_\beta$, причем $x_0 \stackrel{\alpha}{=} A^t w$ и $y_0 \stackrel{\alpha}{=} B^r v$ – нормальные формы ранга β . Представим также элемент $\mathbf{x}$ произвольным словом T . Так как $x_i \stackrel{\alpha}{=} Ty_iT^{-1}$ при всех i ,

то по предложению 13.9 найдется слово T^* такое, что $x_i \stackrel{\beta}{=} T^* y_i T^{*-1}$ при всех i . Заменяя T^* на приведенное в ранге β слово и применяя предложение 13.10 и лемму 7.20, получаем, что все требуемые в предложении равенства выполнены, если $\mathbf{x}$ заменить на $\mathbf{y} \doteq [T^*]_\alpha$. Но так как $\mathbf{y} \mathbf{h}_i \mathbf{y}^{-1} = \mathbf{x} \mathbf{h}_i \mathbf{x}^{-1}$ при всех i , то эти равенства выполнены и для первоначального $\mathbf{x}$.

§ 14. Вложение конечных подгрупп группы $\mathbf{B}_\alpha$ в полные конечные подгруппы

14.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Конечную подгруппу $\mathbf{G}$ группы $\mathbf{B}_\alpha$ вида $\mathbf{G} = \mathbf{g} \mathbf{S}_\alpha(A) \mathbf{g}^{-1}$ при $A \in \bigcup_{\beta \leq \alpha} \mathcal{E}_\alpha$ будем называть *полной* конечной подгруппой группы $\mathbf{B}_\alpha$ (не путать с понятием полной группы, т.е. группы $\mathbf{G}$, для которой уравнение $\mathbf{x}^k = \mathbf{g}$ в $\mathbf{G}$ разрешимо для любых $\mathbf{g} \in \mathbf{G}$ и $k > 0$).

Если $\mathbf{H} \leq \mathbf{G}$, где $\mathbf{H}$ – конечная подгруппа группы $\mathbf{B}_\alpha$, $\mathbf{G}$ – полная конечная подгруппа группы $\mathbf{B}_\alpha$, и $\text{rang } \mathbf{G} = \text{rang } \mathbf{H}$, то $\mathbf{G}$ будем называть *пополнением* $\mathbf{H}$.

14.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2$ – два пополнения конечной подгруппы $\mathbf{H} \leq \mathbf{B}_\alpha$, то $\mathbf{G}_1 = \mathbf{z} \mathbf{G}_2 \mathbf{z}^{-1}$ для некоторого $\mathbf{z} \in \mathbf{B}_\alpha$, коммутирующего со всеми элементами из $\mathbf{H}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сопрягая подгруппы $\mathbf{H}, \mathbf{G}_1$ и $\mathbf{G}_2$ с помощью подходящего элемента группы $\mathbf{B}_\alpha$ и используя лемму 7.20, можно считать, что $\mathbf{G}_1 = \mathbf{S}_\alpha(A)$ и $\mathbf{G}_2 = \mathbf{g} \mathbf{S}_\alpha(B) \mathbf{g}^{-1}$, где A, B – нормализованные элементарные периоды, причем по предложению 13.15 имеем $A, B \in \bar{\mathcal{E}}_\beta$, где $\beta \doteq \text{rang } \mathbf{H}$. Пусть $\mathbf{H} = \{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_r\}$, и пусть $\text{rang } \mathbf{h}_1 = \beta$. В силу предложения 13.15 имеем также $\mathbf{h}_1 \in \mathbf{S}_\alpha^+(A) \setminus \mathbf{S}_\alpha^*(A)$ и $\mathbf{g}^{-1} \mathbf{h}_1 \mathbf{g} \in \mathbf{S}_\alpha^+(B) \setminus \mathbf{S}_\alpha^*(B)$. По предложению 13.3 представим каждый элемент $\mathbf{h}_i$ словом u_i и каждый элемент $\mathbf{g}^{-1} \mathbf{h}_i \mathbf{g}$ словом v_i , где $u_i, v_i \in \mathcal{H}_\beta$ и $u_1 \sqsupseteq A^t w, v_1 \sqsupseteq B^s v$ – нормальные формы ранга β . В силу предложения 12.13 представим элемент $\mathbf{g}$ словом $T \in \mathcal{R}_\alpha$. Имеем

$$u_i \stackrel{\alpha}{=} T v_i T^{-1} \quad (i = 1, 2, \dots, r). \quad (14.1)$$

Применив предложение 13.9 последовательно при $\alpha := \alpha, \alpha - 1, \dots, \beta + 1$, найдем слово T^* такое, что

$$u_i \stackrel{\beta}{=} T^* v_i T^{*-1} \quad (i = 1, 2, \dots, r). \quad (14.2)$$

В силу предложения 12.13 можно считать $T^* \in \mathcal{R}_\beta$, и тогда из (14.2) при $i := 1$ в силу предложения 13.10 и леммы 7.20 следует $\mathbf{S}_\alpha(A) = [T^*]_\alpha \mathbf{S}_\alpha(B) [T^*]_\alpha^{-1}$. Полагая $\mathbf{z} \doteq [T^* T^{-1}]_\alpha$, получаем $\mathbf{G}_1 = \mathbf{z} \mathbf{G}_2 \mathbf{z}^{-1}$, а из равенств (14.1) и (14.2) следует, что $\mathbf{z}$ коммутирует со всеми элементами $\mathbf{h}_i$.

Основная цель параграфа – доказательство следующего утверждения.

14.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Всякая неединичная конечная подгруппа группы $\mathbf{B}_\alpha$ обладает некоторым пополнением.

14.4. ЛЕММА. Для любой нормальной формы $A^t w$ ранга $\beta \leq \alpha$ существуют период X ранга β и слово U , обладающие следующими свойствами:

- (i) $A^t w \stackrel{\beta-1}{=} U^{-1} X U$;
- (ii) никакой циклический сдвиг слова X не содержит элементарных 12-степеней ранга γ при $\beta + 1 \leq \gamma \leq \alpha$;
- (iii) если $t \leq n - q - 75$, то X – циклически приведенное в ранге α слово;
- (iv) пусть X и UR – пути на графе $\Gamma_{\beta-1}$ с общей начальной вершиной, где $\mathcal{L}(X) \subseteq X$, $\mathcal{L}(U) \subseteq U$ и $\mathcal{L}(R) \subseteq A^2$; тогда существует путь $ZXZ' \in \text{ППер}_\beta(A) \cap \text{Пер}(\Gamma_{\beta-1}, X, 2)$ такой, что $|Z|, |Z'| \geq |X|$ и некоторое периодическое продолжение для R является периодической основой для ZXZ' ;
- (v) если $t \geq 4$, то для любого циклического сдвига X' слова X выполнено $\ell_{\alpha, A}(X') \geq t - 3$ (в смысле определения 8.13);
- (vi) если Y – путь на графе $\Gamma_{\beta-1}$ с $\mathcal{L}(Y) \subseteq X^2$ и $E \in \text{ППер}_\beta(B, p + 34)$, $F \in \text{ППер}_\beta(C, p + 34)$ ($B, C \in \mathcal{E}_\beta$) – подпути пути Y , то $\text{ПСогл}_\beta(E, F)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $[A^t w]_{\beta-1}$ – элемент бесконечного порядка, то по индуктивному предположению 12.24 найдутся период X ранга β и слово U такие, что $A^t w \stackrel{\beta-1}{=} U^{-1} X U$, т.е. имеет место утверждение (i) леммы. Заметим, что (ii) вытекает из (iv) в силу предложения 8.17 и леммы 8.16. Докажем утверждения (iii)–(vi) в следующей последовательности: (iv), (v), (iii) и (vi).

Пусть X и UR – пути на графе $\Gamma_{\beta-1}$ с общей начальной вершиной, где $\mathcal{L}(X) \subseteq X$, $\mathcal{L}(U) \subseteq U$ и $\mathcal{L}(R) \subseteq A^2$. Рассмотрим путь VXV' , где $\mathcal{L}(V) \subseteq \mathcal{L}(V') \subseteq X$. Так как $[A^t w]_{\beta-1} \in \mathbf{N}_{\beta-1}^+(A)$, то по предложению 7.10, (i) имеем $A^{tk} \stackrel{\beta-1}{=} U^{-1} X^k U$ для некоторого $k > 0$, откуда следует $s_{A, R}^{tk} = s_{X, VXV'}^k$. В силу предложения 7.7 найдем строго близкие в ранге $\rho(A)$ периодические продолжения $\bar{R}$ для R и $\bar{X} = ZXZ'$ для VXV' , где для некоторых $K \in \mathcal{E}_{\rho(A)}(\bar{R}, q_3)$, $L, L' \in \mathcal{E}_{\rho(A)}(\bar{X}, q_1)$ и $r \geq 1$ выполнено $\bar{R} = K \cup_{\bar{R}} s_{A, \bar{R}}^r K$, $\bar{X} = L \cup_{\bar{X}} L'$, $\mathcal{E}\text{Согл}_{\rho(A)}(K, L)$ и $\mathcal{E}\text{Согл}_{\rho(A)}(s_{A, \bar{R}}^r K, L')$. Тогда $\bar{X} \in \text{ППер}_\beta(A)$ и $\bar{R}$ – периодическая основа для $\bar{X}$. Тем самым доказано (iv).

Обозначим $L_0 \Leftarrow L$ и $L_r \Leftarrow L'$. Используя лемму 8.2, (iii) и предложение 8.41, найдем $L_i \in \mathcal{E}_{\rho(A)}(\bar{X}, q_1)$ ($i = 1, 2, \dots, r-1$) такие, что $\mathcal{E}\text{Согл}_{\rho(A)}(s_{A, \bar{R}}^i K, L_i)$ и $L_0 \ll_E L_1 \ll_E \dots \ll_E L_r$. По лемме 7.21 для любых $0 \leq i \leq r$ и $j \in \mathbb{Z}$ выполнено $\mathcal{E}\text{Согл}_{\rho(A)}(s_{A, \bar{R}}^{jt+i} K, s_{X, \bar{X}}^j L_i)$. Отсюда следует

$$\mathcal{E}\text{Согл}_{\rho(A)}(s_{X, \bar{X}} L_i, L_{i+t}) \quad (0 \leq i \leq r-t). \quad (14.3)$$

Пусть $t \geq 4$ и X' – произвольный циклический сдвиг слова X . Так как $|\bar{X}| \geq 3|X|$, то для некоторого подпути X' пути $\bar{X}$ имеем $\mathcal{L}(X') \subseteq X'$. Пусть i и j – соответственно максимальный и минимальный индексы такие, что X' содержится в $L_i \cup_{\bar{X}} L_j$. В силу (14.3) и индуктивного предположения 11.25 имеем $L_{i+t-1} <_{\bar{X}} s_{X, \bar{X}} L_i$. Так как $|X'| = |X|$, то отсюда следует $j - i \geq t - 1$. В силу выбора i и j пути L_{i+1} и L_{j-1} содержатся в X' . Так как $L_{i+1} \cup_{\bar{X}} L_{j-1} \in \text{ППер}_\beta(A, t-3)$, то мы получили $\ell_{\beta, A}(X') \geq t - 3$, что и доказывает (v).

Для доказательства (iii) в силу (ii) и леммы 12.12 достаточно убедиться, что при $t \leq n - q - 75$ никакой циклический сдвиг слова X не содержит элементарных

$(n - q - 36)$ -степеней ранга β . Допустим, $t \leq n - q - 75$ и в некоторый циклический сдвиг слова X входит элементарная $(n - q - 36)$ -степень E ранга β . Пусть $\mathbf{E}$ – подпути пути $\bar{X}$ с $\mathcal{L}(\mathbf{E}) \subseteq E$, т.е. $\mathbf{E} \in \text{ППер}_\beta(B, n - q - 36)$, где $B \in \mathcal{E}_\beta$. В силу леммы 8.2, (ii) и предложения 8.36 имеем $\text{Cогл}(\bar{R}, Q)$, где Q – периодическая основа для $\mathbf{E}$. Тогда в силу леммы 7.22 и предложения 8.35 для некоторого подпути $\mathbf{F}$ пути $\mathbf{E}$ имеем $\mathbf{F} \in \text{ППер}_\beta(A, n - q - 72)$. Пусть $\mathbf{S} \in \text{Пер}(\Gamma_{\beta-1}, A, n - q - 72)$ – периодическая основа для $\mathbf{F}$. В силу лемм 8.4 и 8.2, (iii) найдем $\mathbf{M}, \mathbf{s}_{A, \mathbf{S}} \mathbf{M}, \dots, \mathbf{s}_{A, \mathbf{S}}^{n-q-74} \mathbf{M} \in \mathcal{Эл}_{\rho(A)}(\mathbf{S}, q_2)$, $\mathbf{N}_0, \mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_{n-q-74} \in \mathcal{Эл}_{\rho(A)}(\mathbf{F}, q_1)$, где $\mathcal{ЭCогл}_{\rho(A)}(\mathbf{s}_{A, \mathbf{S}}^i \mathbf{M}, \mathbf{N}_i)$ при всех i и $\mathbf{N}_0 <_{\mathbf{F}} \mathbf{N}_1 <_{\mathbf{F}} \dots <_{\mathbf{F}} \mathbf{N}_{n-q-74}$. Аналогично соотношению (14.3) выводим $\mathcal{ЭCогл}_{\rho(A)}(\mathbf{s}_{X, \bar{X}} \mathbf{N}_i, \mathbf{N}_{i+t})$ ($0 \leq i \leq n - q - 74 - t$). Тогда с учетом допущения $t \leq n - q - 75$ по индуктивному предположению 11.25 имеем $\mathbf{s}_{X, \bar{X}} \mathbf{N}_0 <_{\mathbf{F}} \mathbf{N}_{t+1}$ и, следовательно, $|\mathbf{F}| \geq |\mathbf{N}_0 \cup_{\mathbf{F}} \mathbf{N}_{t+1}| > |X|$. Но это невозможно, так как в силу нашего допущения слово $\mathcal{L}(\mathbf{F})$ входит в некоторый циклический сдвиг слова X .

(vi) Очевидно, достаточно ограничиться рассмотрением случая, когда $\mathbf{Y}$ содержится в $\mathbf{ZXZ}'$. В этом случае утверждение легко вытекает из предложения 8.38, (ii).

14.5. ЛЕММА. Пусть $x, y \in \mathcal{H}_\alpha$, $[x]_\alpha \in \mathbf{S}_\alpha(A)$, $[y]_\alpha \in \mathbf{S}_\alpha(B)$ для некоторых $A, B \in \bigcup_{\beta \leq \alpha} \mathcal{E}_\beta$ и слова x, y имеют вид $x \subseteq x_1 Q x_2$ и $y \subseteq y_1 R y_2$, где $x_i, y_i \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$ ($i = 1, 2$), $Q \in \text{Пер}(A)$, $R \in \text{Пер}(B)$, $|Q| < 2|A|$ и $|R| < 2|B|$. Пусть $T \in \mathcal{R}_\alpha$, элемент $[T^{-1}xTy]_\alpha$ имеет конечный порядок и $\text{ранг}[T^{-1}xTy]_\alpha \leq \alpha - 1$. Тогда верны следующие утверждения:

- (i) если слово T не содержит элементарных q_4 -степеней ранга α , то элемент $[T^{-1}xTy]_{\alpha-1}$ имеет конечный порядок и $\text{ранг}[T^{-1}xTy]_{\alpha-1} = \text{ранг}[T^{-1}xTy]_\alpha$;
- (ii) пусть $\mathbf{T}$ – путь на графе Γ_α с $\mathcal{L}(\mathbf{T}) \subseteq T$; положим $\mathbf{g} = \iota(\mathbf{T})[x]_\alpha^{-1}(\iota(\mathbf{T}))^{-1}$ и $\mathbf{h} = \tau(\mathbf{T})[y]_\alpha(\tau(\mathbf{T}))^{-1}$; тогда для любого $\mathbf{E} \in \mathcal{Эл}_\alpha(\mathbf{T}, 2h + 3p + 233)$ имеет место хотя бы одно из соотношений

$$\mathcal{ЭCогл}_\alpha(\mathbf{E}, \mathbf{gE}) \quad \text{или} \quad \mathcal{ЭCогл}_\alpha(\mathbf{E}, \mathbf{hE}). \quad (14.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай, когда $T^{-1}xTy \stackrel{\alpha}{=} 1$. Тогда (i) верно в силу предложения 11.3. Докажем (ii). Пусть $\mathbf{T}$ – путь на графе Γ_α с $\mathcal{L}(\mathbf{T}) \subseteq T$. Рассмотрим замкнутый путь $\mathbf{T}'^{-1}xTy$ на Γ_α , где $\mathcal{L}(\mathbf{T}') \subseteq T$, $\mathcal{L}(x) \subseteq x$ и $\mathcal{L}(y) \subseteq y$. Заметим, что $\mathbf{T}' = \mathbf{gT}$, где $\mathbf{g} = \iota(\mathbf{T})[x]_\alpha^{-1}(\iota(\mathbf{T}))^{-1}$ – элемент, указанный в (ii). Из посылки леммы и определения 11.11 следует, что любой путь $\mathbf{E} \in \mathcal{Эл}_\alpha(\Gamma_\alpha)$ устойчив относительно x^{-1} и y^{-1} . Тогда по предложению 11.17 при $\mathbf{X} := \mathbf{T}$ и $\mathbf{uYv} := x^{-1}\mathbf{T}'y^{-1}$ для любого $\mathbf{E} \in \mathcal{Эл}_\alpha(\mathbf{T}, 2h + 3p + 233)$ найдется $\mathbf{F} \in \mathcal{Эл}_\alpha(\mathbf{T}', h + 3p + 233)$ такой, что $\mathcal{ЭCогл}_\alpha(\mathbf{E}, \mathbf{F})$. По лемме 13.8 имеем $\mathcal{ЭCогл}_\alpha(\mathbf{gE}, \mathbf{F})$, т.е. $\mathcal{ЭCогл}_\alpha(\mathbf{E}, \mathbf{gE})$, что и доказывает (ii) в случае $T^{-1}xTy \stackrel{\alpha}{=} 1$.

Пусть $T^{-1}xTy \stackrel{\alpha}{\neq} 1$. Тогда по условию и в силу определения 13.13 слово $T^{-1}xTy$ сопряжено в группе $\mathbf{B}_\alpha$ некоторой нормальной форме U ранга $\beta \leq \alpha - 1$.

По лемме 14.4 слово U сопряжено в группе $\mathbf{B}_{\beta-1}$ циклически приведенному в ранге α слову Z такому, что никакой циклический сдвиг Z не содержит элементарных 12-степеней ранга α . Рассмотрим кольцевую B -диаграмму Δ ранга α с граничными циклами $\tilde{T}'^{-1}\tilde{x}_1\tilde{Q}\tilde{x}_2\tilde{T}\tilde{y}_1\tilde{R}\tilde{y}_2$ и Z^{-1} , где метки путей $\tilde{T}'$, $\tilde{x}_i$, $\tilde{Q}$, $\tilde{T}$, $\tilde{y}_i$, $\tilde{R}$ и Z равны словам T , x_i , Q , T , y_i , R и Z соответственно,

$$\mathcal{X}_\alpha(\Delta) = \{\tilde{T}'^{-1}, \tilde{T}, Z^{-1}\}, \quad \mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta) = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2\} \quad \text{и} \quad \mathcal{Z}_\alpha(\Delta) = \{\tilde{Q}, \tilde{R}\}.$$

В силу предложений 9.9 и 9.19 можно считать, что Δ – приведенная B -диаграмма ранга α и $\mathcal{S}$ – некоторая карта примыканий ранга $\alpha - 1$ на $\Delta^{\alpha-1}$.

Докажем утверждение (i). Если диаграмма Δ не имеет областей ранга α , то слова $T^{-1}xTy$ и Z сопряжены в группе $\mathbf{B}_{\alpha-1}$. Так как по выбору Z элемент $[Z]_{\alpha-1}$ имеет конечный порядок, то в этом случае по лемме 13.14, (iii) $[T^{-1}xTy]_{\alpha-1}$ – элемент конечного порядка и $\text{rang}[T^{-1}xTy]_{\alpha-1} = \text{rang}[T^{-1}xTy]_\alpha$, что и требовалось. Поэтому достаточно доказать, что если Δ имеет хотя бы одну область ранга α , то в слово T входит элементарная q_4 -степень ранга α .

Пусть $A \in \mathbf{R}_\alpha(\Delta)$ – произвольная область. Пусть $\mathcal{L}(\delta A) \approx C^n$, где $C \in \mathcal{E}_\alpha$. Пусть $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_r \in \mathcal{S}$ – все поддиаграммы примыкания граничного цикла области A к участкам границы $\tilde{T}$ и $\tilde{T}'^{-1}$ диаграммы $\Delta^{\alpha-1}$. Пусть $\tilde{P}_i, \tilde{G}_i$ – участки примыкания поддиаграммы примыкания Π_i , входящие соответственно в δA и в $\tilde{T}$ или $\tilde{T}'^{-1}$. По предложению 10.9, (ii) имеется не более одной поддиаграммы примыкания $\Pi \in \mathcal{S}$ граничного цикла области A к Z^{-1} . Так как никакой циклический сдвиг слова Z^{-1} не содержит элементарных 12-степеней ранга α , то в силу предложения 8.24, если Π – такая поддиаграмма примыкания и P – ее участок примыкания, входящий в δA , то $|\mathcal{L}(P)| < 48|C|$. Тогда по предложению 10.13, (ii)

$$\sum_{i=1}^r |\mathcal{L}(\tilde{P}_i)| \geq (n - 6p - 112)|C|. \quad (14.5)$$

Так как $T \in \mathcal{R}_\alpha$, то для каждого i

$$|\mathcal{L}(\tilde{P}_i)| < (n - q)|C|. \quad (14.6)$$

По предложению 10.9, (ii) имеем $r \leq 3$. Так как $n - 6p - 112 > n - q + 2(h + 44)$, то из (14.5) и (14.6) следует, что имеется не более одной поддиаграммы Π_i , для которой $|\mathcal{L}(\tilde{P}_i)| < (h + 44)|C|$. Исключив из рассмотрения такую поддиаграмму Π_i , если она существует, вместо неравенства (14.5) получим

$$\sum_{i=1}^r |\mathcal{L}(\tilde{P}_i)| \geq (n - h - 6p - 156)|C|, \quad (14.7)$$

но теперь для всех i будем иметь

$$|\mathcal{L}(\tilde{P}_i)| > (h + 44)|C|. \quad (14.8)$$

Заметим, что для нового значения r неравенство $r \leq 3$ по-прежнему имеет место. С другой стороны, из (14.6) и (14.7) следует $r \geq 2$.

Если $r = 2$, то из (14.8) следует $\mathcal{L}(\tilde{P}_i) \geq \frac{1}{2}(n - h - 6p - 156)|C|$ при $i = 1$ или $i = 2$. Тогда по предложению 8.24 в слово T входит элементарная t -степень ранга α , где $t \geq \frac{1}{2}(n - h - 6p - 156) - 36 > q_4$, что и требовалось.

Пусть $r = 3$. С точностью до нумерации Π_i , возможны два случая:

- 1) $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2$ входят в $\tilde{T}$, $\tilde{G}_3$ входит в $\tilde{T}'^{-1}$;
- 2) $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2$ входят в $\tilde{T}'^{-1}$, $\tilde{G}_3$ входит в $\tilde{T}$.

Рис. 63

Случай 1): $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2$ входят в $\tilde{T}$, $\tilde{G}_3$ входит в $\tilde{T}'^{-1}$. Можно считать, что $\tilde{T}$ имеет вид $\tilde{T} = \tilde{K}\tilde{G}_1\tilde{L}\tilde{G}_2\tilde{M}$. В силу леммы 10.8, (i) поддиаграмма диаграммы Δ , обозначенная через Θ на рис. 63, не может быть односвязной. Так как Δ – кольцевая диаграмма, то Θ – кольцевая диаграмма, а диаграмма $\Delta - \Theta$ односвязна. Рассмотрим отображение ω множества путей на диаграмме $\Delta - \Theta$ во множество путей на графе Γ_α (см. 4.12), где $\omega(\iota(\tilde{K})) = \iota(T)$. Если $\tilde{X}$ – некоторый путь на $\Delta - \Theta$, то обозначим $X = \omega(\tilde{X})$. Очевидно, $\tilde{K}\tilde{G}_1$ есть начало пути T , $\tilde{G}_3^{-1}$ содержится в T' и $\tilde{G}_2\tilde{M}$ есть конец некоторого пути T^* с $\mathcal{L}(T) \supseteq \mathcal{L}(T^*) \supseteq T$ (см. рис. 63). В силу (14.8) и леммы 11.15 каждый путь $\tilde{G}_i$ содержит подпуть $F_i \in \mathcal{E}_\alpha(\Gamma_\alpha, h + 8)$ с периодической основой, содержащейся в P_i^{-1} , причем,

$$\ell_\alpha(F_i) \geq |\mathcal{L}(\tilde{P}_i)|/|C| - 37 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (14.9)$$

По лемме 11.14 имеем $\mathcal{E}Cогл_\alpha(F_1, F_3^{-1})$ и $\mathcal{E}Cогл_\alpha(F_2^{-1}, F_3)$. Тогда, применяя вначале лемму 13.8 при $T^{-1}uT' := T^{-1}x^{-1}T'$, $E := F_1$ и $F := F_3^{-1}$, получаем $\mathcal{E}Cогл_\alpha(gF_1, F_3^{-1})$, а затем при $T^{-1}uT' := T^*yT'^{-1}$, $E := F_2^{-1}$ и $F := F_3$, получаем $\mathcal{E}Cогл_\alpha(fF_2^{-1}, F_3)$, где g и f – элементы группы $\mathbf{B}_\alpha$, для которых $T' = gT$ и $T' = fT^*$. Отсюда следует $\mathcal{E}Cогл_\alpha(F_1, g^{-1}fF_2)$. Так как $g^{-1}fT^* = T$, то $g^{-1}fF_2$ – подпуть пути T . Очевидно, $F_1 \ll_T g^{-1}fF_2$. Тогда, используя предложения 11.24, 8.46 и 8.11, легко видеть, что $\bar{F} = F_1 \cup_T g^{-1}fF_2 \in \mathcal{E}_\alpha(\Gamma_\alpha)$ и

$$\ell_\alpha(\bar{F}) \geq \ell_\alpha(F_1) + \ell_\alpha(F_2) - 1 \geq \frac{1}{|C|}(|\mathcal{L}(\tilde{P}_1)| + |\mathcal{L}(\tilde{P}_2)|) - 75.$$

С учетом (14.9) и (14.7) имеем

$$\ell_\alpha(\bar{F}) + \ell_\alpha(F_3) \geq n - h - 6p - 268 > 2q_4.$$

Отсюда следует, что слово T содержит элементарную q_4 -степень ранга α , что и требовалось доказать.

Случай 2): $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2$ входят в $\tilde{T}'^{-1}$, $\tilde{G}_3$ входит в $\tilde{T}$. Этот случай рассматривается аналогично случаю 1), с той лишь разницей, что роли путей $\tilde{T}$ и $\tilde{T}'$ меняются местами.

Утверждение (i) доказано.

Перейдем к доказательству (ii). Пусть T – путь на графе Γ_α с $\mathcal{L}(T) \supseteq T$, и пусть $E \in \mathcal{E}_\alpha(\Gamma_\alpha, 2h + 3p + 233)$ – подпуть пути T . Рассмотрим путь $T'^{-1}xTyT''^{-1}$ на Γ_α , где $\mathcal{L}(T') \supseteq \mathcal{L}(T'') \supseteq T$, $\mathcal{L}(x) \supseteq x$ и $\mathcal{L}(y) \supseteq y$. Заметим, что

$$gT = T' \quad \text{и} \quad hT = T'',$$

где $g = \iota(T)[x]_\alpha^{-1}(\iota(T))^{-1}$ и $h = \tau(T)[y]_\alpha(\tau(T))^{-1}$ – элементы группы B_α , указанные в (ii).

Предположим, граничный цикл некоторой области $A \in R_\alpha(\Delta)$ имеет две поддиаграммы примыкания $P_1, P_2 \in \mathcal{S}$ к одному участку границы $\tilde{T}$ или $\tilde{T}'^{-1}$. Пусть $\delta P_i = \tilde{P}_i \tilde{u}_i \tilde{G}_i \tilde{v}_i$, где $\mathcal{L}(\tilde{u}_i), \mathcal{L}(\tilde{v}_i) \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$ и $\tilde{P}_i, \tilde{G}_i$ – участки примыкания, входящие соответственно в δA и в $\tilde{T}$ или $\tilde{T}'^{-1}$.

Рассмотрим сначала более простой

Случай 1: $\tilde{G}_1$ и $\tilde{G}_2$ входят в $\tilde{T}'^{-1}$. Можно считать, что $\tilde{T}'$ имеет вид $\tilde{T}' = \tilde{K} \tilde{G}_1^{-1} \tilde{L} \tilde{G}_2^{-1} \tilde{M}$. Пусть Θ – поддиаграмма диаграммы Δ , “заключенная” между A, P_1, P_2 и $\tilde{T}$ (см. рис. 64). По лемме 10.8, (i) Θ – кольцевая диаграмма. Следовательно, поддиаграмма $\Delta - \Theta$ диаграммы Δ односвязна. Рассмотрим отображение ω множества путей на диаграмме $\Delta - \Theta$ во множество путей на графе Γ_α , где $\omega(\iota(\tilde{T})) = \iota(T)$. Для любого пути $\tilde{X}$ на $\Delta - \Theta$ обозначим $\hat{X} \rightleftharpoons \omega(\tilde{X})$. Очевидно, $\hat{T} = T$, $\hat{x} = x$, $\hat{y} = y$, $\hat{K} \hat{G}_1^{-1}$ есть начало пути T' и $\hat{G}_2^{-1} \hat{M}$ есть конец пути T'' . Из неравенств (14.5) и (14.6) вытекает $|\mathcal{L}(\tilde{P}_1)| + |\mathcal{L}(\tilde{P}_2)| \geq (q - 6p - 112)|C|$, следовательно, для $i = 1$ или $i = 2$ имеем $|\mathcal{L}(\tilde{P}_i)| \geq \frac{1}{2}(q - 6p - 112)|C| > h + 44$. По лемме 11.5 путь $\hat{G}_i$ содержит подпуть $G^* \in \mathcal{E}_\alpha(\Gamma_\alpha, h + 8)$ с периодической основой, содержащейся в $\hat{P}_i^{-1}$.

Если $\mathcal{E} \text{Cогл}_\alpha(E, G^*)$ и $i = 1$, то, применив лемму 13.8 при $T^{-1}uT' := T^{-1}x^{-1}T'$, $E := E$ и $F := G^*$, получим $\mathcal{E} \text{Cогл}_\alpha(E, gE)$, т.е. имеет место первое из соотношений (14.4).

Если $\mathcal{E} \text{Cогл}_\alpha(E, G^*)$ и $i = 2$, то по лемме 13.8 при $T^{-1}uT' := TyT''^{-1}$, $E := E^{-1}$ и $F := G^{*-1}$ получаем $\mathcal{E} \text{Cогл}_\alpha(E, hE)$, т.е. второе соотношение (14.4).

Пусть $\neg \mathcal{E} \text{Cогл}_\alpha(E, G^*)$. Пусть $\tilde{W}$ – подпуть δA , соединяющий вершины $\tau(\tilde{P}_2)$ и $\iota(\tilde{P}_1)$. По лемме 11.16 путь E устойчив относительно $\hat{v}_1 \hat{W}^{-1} \hat{u}_2$. Так как согласно определению 11.11 E устойчив относительно x и y и по условию

$$\ell_\alpha(E) \geq (3p + 217) + 2(h + 8),$$

Рис. 64

то по предложению 11.30 найдется подпуть $F \in \mathcal{E}l_\alpha(\Gamma_\alpha, h + 8)$ одного из путей $\hat{K}$ или $\hat{M}$ такой, что $\mathcal{E}Cogl_\alpha(E, H)$. Тогда аналогично предыдущему, используя лемму 13.8, получаем $\mathcal{E}Cogl_\alpha(E, gE)$ в случае, если F содержится в $\hat{K}$, и $\mathcal{E}Cogl_\alpha(E, hE)$ в случае, если F содержится в $\hat{M}$.

Случай 2: $\tilde{G}_1$ и $\tilde{G}_2$ входят в $\tilde{T}$. Можно считать, что $\tilde{T}$ имеет вид $\tilde{T} = \tilde{K}\tilde{G}_1\tilde{L}\tilde{G}_2\tilde{M}$. Как и в случае 1, поддиаграмма Θ диаграммы Δ , “заключенная” между A , Π_1 , Π_2 и $\tilde{T}$, является кольцевой диаграммой и, следовательно, диаграмма $\Delta - \Theta$ односвязна. Рассмотрим отображение $\omega: \tilde{X} \mapsto \hat{X}$ множества путей на диаграмме $\Delta - \Theta$ во множество путей на графе Γ_α такое, что $\omega(\iota(\tilde{T})) = \iota(T)$. Очевидно, $\hat{T}' = T'$, $\hat{x} = x$, $\hat{K}\hat{G}_1$ есть начало пути T , а $\hat{G}_2\hat{M}$ есть конец некоторого пути T^* с $\mathcal{L}(T^*) \supseteq T$ (см. рис. 65). Рассуждая аналогично тому, как при рассмотрении случая 1, рассматривая вместо подпути E пути T подпуть gE пути T' , получаем $\mathcal{E}Cogl_\alpha(gE, E)$ или $\mathcal{E}Cogl_\alpha(gE, f^{-1}gE)$, где f – элемент группы $\mathbf{B}_\alpha$, для которого $T' = fT^*$. Если $\mathcal{E}Cogl_\alpha(gE, E)$, то доказывать больше нечего. В случае $\mathcal{E}Cogl_\alpha(gE, f^{-1}gE)$ имеем $\mathcal{E}Cogl_\alpha(E, g^{-1}fgE)$, поэтому достаточно убедиться в том, что $g^{-1}fg = h$. Из определений g и f следует $f^{-1}gT = T^*$, откуда вытекает $f^{-1}g(T\gamma T'^{-1}) = T^*\hat{\gamma}T'^{-1}$ (см. рис. 65) и, следовательно, $f^{-1}gT'' = T'$. Последнее равенство можно переписать в виде $f^{-1}ghT = gT$, т.е. $f^{-1}gh = g$, что и требовалось.

Таким образом, можно предполагать, что граничный цикл каждой области $A \in \mathbf{R}_\alpha(\Delta)$ имеет не более одной поддиаграммы примыкания $\Pi \in \mathcal{S}$ к каждому из участков границы $\tilde{T}$ и $\tilde{T}'^{-1}$ диаграммы $\Delta^{\alpha-1}$. Из (14.5) и (14.6) следует, что для каждой области $A \in \mathbf{R}_\alpha(\Delta)$ таких поддиаграмм примыкания ровно одна для $\tilde{T}$ и ровно одна для $\tilde{T}'^{-1}$. Пусть $\mathbf{R}_\alpha(\Delta) = \{A_1, A_2, \dots, A_t\}$. Пусть Π_i – поддиаграмма примыкания δA к $\tilde{T}$ и Π'_i – поддиаграмма примыкания δA к $\tilde{T}'^{-1}$. Пусть $\tilde{P}_i$, $\tilde{G}_i$ – участки примыкания поддиаграммы примыкания Π_i , входящие соответственно в δA и в $\tilde{T}$, и $\tilde{S}_i$, $\tilde{H}_i$ – участки примыкания поддиаграммы примыкания Π'_i , входящие соответственно в δA и в $\tilde{T}'^{-1}$. Перенумеровав A_i , можно считать, что $\tilde{T}$ и $\tilde{T}'$ имеют вид $\tilde{T} = \tilde{K}_0\tilde{G}_1\tilde{K}_1 \dots \tilde{G}_t\tilde{K}_t$ и $\tilde{T}' = \tilde{L}_0\tilde{H}_1^{-1}\tilde{L}_1 \dots \tilde{H}_t^{-1}\tilde{L}_t$. Пусть $\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_t$ – связ-

Рис. 65

ные компоненты поддиаграммы диаграммы Δ , полученной удалением из Δ всех областей A_i и поддиаграмм Π_i, Π'_i (см. рис. 66). Так как Δ – кольцевая диаграмма, то ровно одна из поддиаграмм Θ_i является кольцевой диаграммой, а остальные – дисковыми диаграммами. Пусть Θ_k – кольцевая диаграмма. Пусть диаграмма $\bar{\Delta}$ получена из Δ удалением поддиаграммы Θ_k , за исключением ребер, составляющих путь $\tilde{K}_k$. Рассмотрим отображение $\omega: \tilde{X} \mapsto \hat{X}$ множества путей на $\bar{\Delta}$ во множество путей на графе Γ_α такое, что $\omega(\iota(\tilde{T})) = \iota(T)$. Ясно, что $\hat{T} = T$, путь $\hat{L}_0 \hat{H}_1^{-1} \dots \hat{L}_{k-1} \hat{H}_k^{-1}$ есть начало пути T' и путь $\hat{H}_{k+1}^{-1} \hat{L}_{k+1} \dots \hat{H}_t^{-1} \hat{L}_t$ есть конец пути T'' .

Используя леммы 11.15 и 11.14, для каждого i найдем подпути $G_i^*, H_i^* \in \mathcal{E}_\alpha(\Gamma_\alpha, h+8)$ путей $\hat{G}_i, \hat{H}_i^{-1}$ соответственно такие, что $\mathcal{E}Cогл_\alpha(G_i^*, H_i^*)$. Используя лемму 13.8 сперва при $T^{-1}uT' := T^{-1}x^{-1}T'$, $E := G_i^*$, $F := H_i^*$ ($1 \leq i \leq k$), а затем при $T^{-1}uT' := TyT''^{-1}$, $E := G_i^{*-1}$, $F := H_i^{*-1}$ ($k+1 \leq i \leq t$), получаем

$$\mathcal{E}Cогл_\alpha(gG_i^*, H_i^*) \quad (1 \leq i \leq k) \quad \text{и} \quad \mathcal{E}Cогл_\alpha(hG_i^*, H_i^*) \quad (k+1 \leq i \leq t). \quad (14.10)$$

Если $\mathcal{E}Cогл_\alpha(E, G_i^*)$ для некоторого i , то из (14.10) и $\mathcal{E}Cогл_\alpha(G_i^*, H_i^*)$ следует $\mathcal{E}Cогл_\alpha(E, gE)$ в случае $i \leq k$ и $\mathcal{E}Cогл_\alpha(E, hE)$ в случае $i \geq k+1$.

Пусть $\neg \mathcal{E}Cогл_\alpha(E, G_i^*)$ ни для какого i . Если $k \geq 1$ и $E <_T G_k^*$, то, применяя лемму 11.16 и предложение 11.17 при $X := \hat{K}_0 \hat{G}_1 \dots \hat{K}_{k-1} \hat{G}_k$ и $Y := \hat{L}_0 \hat{H}_1^{-1} \dots \hat{L}_{k-1} \hat{H}_k^{-1}$, найдем подпути $F \in \mathcal{E}_\alpha(\Gamma_\alpha, h+8)$ пути T' такой, что $\mathcal{E}Cогл_\alpha(E, F)$, и, как мы уже видели выше, из существования F в силу леммы 13.8 вытекает $\mathcal{E}Cогл_\alpha(E, gE)$. Аналогично, если $k \leq t-1$ и $G_k^* <_T E$, то в силу леммы 11.16 и предложения 11.17 найдется подпути $F \in \mathcal{E}_\alpha(\Gamma_\alpha, h+8)$ пути T' такой, что $\mathcal{E}Cогл_\alpha(E, F)$, откуда по лемме 13.8 будет следовать $\mathcal{E}Cогл_\alpha(E, hE)$. Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением случая, когда $G_k^* <_T E <_T G_{k+1}^*$ (соответственно $E <_T G_1^*$ при $k=0$ и $G_t^* <_T E$ при $k=t$). Так как из (14.10) в силу предложения 11.25 следует $E <_T G_i^* \Leftrightarrow gE <_{T'} H_i^*$, то имеем также

$$H_k^* <_{T'} gE <_{T'} H_{k+1}^* \quad (gE <_{T'} H_1^* \text{ при } k=0 \text{ и } H_t^* <_{T'} gE \text{ при } k=t). \quad (14.11)$$

Рис. 66

Обозначим $E \rightleftharpoons \mathcal{L}(E)$, и пусть $E \in \text{ПШер}_\alpha(D, 2h + 3p + 233)$, где $D \in \mathcal{E}_\alpha$. Предположим, $\Pi_0 \in \mathcal{S}$ – поддиаграмма примыкания $\tilde{T}$ к $\tilde{T}'^{-1}$, $\delta\Pi_0 \approx \tilde{P}\tilde{u}\tilde{S}\tilde{v}$, где $\tilde{P}, \tilde{S}$ – участки примыкания, входящие соответственно в $\tilde{T}$ и в $\tilde{T}'^{-1}$, и общая часть вхождения слова E в T и одного из вхождений слова $\mathcal{L}(P)$ или $(\mathcal{L}(S))^{-1}$ в T содержит подслово E' слова E такое, что $\ell_{\alpha, D}(E') \geq h + 42$. Поддиаграмма Π_0 содержится в Θ_k и разбивает Θ_k на две связных компоненты Θ' и Θ'' , одна из которых является кольцевой диаграммой, а другая односвязна (см. рис. 67). Пусть для определенности поддиаграмма Θ' односвязна. Доопределим отображение ω на поддиаграммах Θ' и Π_0 , рассматривая вместо $\bar{\Delta}$ объединение $\bar{\Delta}$ и поддиаграмм Θ', Π_0 . Переходя к прообразу на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ замкнутого пути $\hat{P}\hat{u}\hat{S}\hat{v}$ и используя предложение 8.26, находим подпуть $F \in \mathcal{Эл}_\alpha(\Gamma_\alpha, h + 8)$ пути T' такой, что $\mathcal{ЭCогл}_\alpha(E, F)$. Как мы уже видели выше, отсюда в силу леммы 13.8 следует $\mathcal{ЭCогл}_\alpha(E, \mathbf{g}E)$. Аналогично, если Θ'' односвязна, то найдется подпуть $F \in \mathcal{Эл}_\alpha(\Gamma_\alpha, h + 8)$ пути T'' такой, что $\mathcal{ЭCогл}_\alpha(E, F)$, откуда вытекает $\mathcal{ЭCогл}_\alpha(E, \mathbf{h}E)$.

Рис. 67

Итак, нам остается доказать существование поддиаграммы примыкания $\Pi_0 \in \mathcal{S}$, метка одного из участков примыкания которой покрывает подслово E' слова E , для которого $\ell_{\alpha, D}(E') \geq h + 42$.

Предположим, имеется поддиаграмма примыкания $\Pi \in \mathcal{S}$ участка границы $\tilde{T}'^{-1}$ к самому себе. Диаграмма $\Delta - \Pi$ состоит из двух связных компонент Δ_1 и Δ_2 (см. рис. 68). Диаграмма Δ_1 не может быть односвязной в силу леммы 10.8, (ii), следовательно, Δ_2 – односвязная диаграмма. В этом случае уже не существует поддиаграммы примыкания пути $\tilde{T}$ к самому себе. Таким образом, $\mathcal{S}$ не содержит одновременно поддиаграммы примыкания $\tilde{T}$ к $\tilde{T}$ и $\tilde{T}'^{-1}$ к $\tilde{T}'^{-1}$. В силу полной аналогии можно ограничиться рассмотрением случая, когда $\mathcal{S}$ не содержит поддиаграммы примыкания пути $\tilde{T}$ к самому себе.

Рис. 68

Дальнейшие рассуждения будут слегка различаться в зависимости от того, является или не является поддиаграмма Θ_k крайней. Формально, мы рассмотрим четыре случая:

1. $0 < k < t$;
2. $k = 0, t > 0$;
3. $k = t, t > 0$;
4. $k = t = 0$.

Случай 1: $0 < k < t$. Пусть $\tilde{K}_k = w_0 N_1 w_1 \dots N_s w_s$, где $N_1, N_2, \dots, N_s$ – участки примыкания поддиаграмм примыкания $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_s \in \mathcal{S}$ и w_i – переходные участки диаграммы $\Delta^{\alpha-1}$ относительно $\mathcal{S}$. Обозначим через $\tilde{G}_k, \tilde{w}_0, \tilde{N}_1, \tilde{w}_1, \dots, \tilde{N}_s, \tilde{w}_s, \tilde{G}_{k+1}$ подслова слова E , которые покрываются соответствующими вхождениями слов $\mathcal{L}(\tilde{G}_k), \mathcal{L}(w_0), \mathcal{L}(N_1), \mathcal{L}(w_1), \dots, \mathcal{L}(N_s), \mathcal{L}(w_s)$ и $\mathcal{L}(\tilde{G}_{k+1})$ в T (т.е. общие части вхождений слова E и указанных слов; если вхождения не пересекаются, то их общую часть будем считать пустым словом). Так как E содержится в $\mathcal{L}(\tilde{G}_k \tilde{K}_k \tilde{G}_{k+1})$, то

$$E \sqsubseteq \tilde{G}_k \tilde{w}_0 \tilde{N}_1 \tilde{w}_1 \dots \tilde{N}_s \tilde{w}_s \tilde{G}_{k+1}.$$

(При рассмотрении случая, когда нет поддиаграмм примыкания $\tilde{T}'^{-1}$ к $\tilde{T}'^{-1}$, нужно воспользоваться соотношением (14.11), из которого следует, что E содержится в $\mathcal{L}(\tilde{N}_k^{-1} \tilde{L}_k \tilde{N}_{k+1}^{-1})$.) Заметим, что все поддиаграммы примыкания Σ_i содержатся

в Θ_k . По лемме 9.22 множество $\mathcal{S}_1$ поддиаграмм примыкания $\Pi \in \mathcal{S}$, содержащихся в Θ_k , образует карту примыканий ранга $\alpha - 1$ на Θ_k . По лемме 9.23, (ii) среди Σ_i не более одной поддиаграммы примыкания $\tilde{T}$ к Z^{-1} и не более двух поддиаграмм примыкания $\tilde{T}$ к $\tilde{T}'^{-1}$ (по предположению других поддиаграмм примыкания быть не может). В частности, $s \leq 3$. По предложению 10.4 имеем $\sum_{i=0}^s \mathcal{W}_{\alpha-1}(\mathcal{L}(w_i)) \leq 4\eta$. Тогда по предложению 8.22, (i)

$$\sum_{i=0}^s \ell_{\alpha,D}(\bar{w}_i) \leq 13 \cdot 4\eta + 4 < 25.$$

Так как никакой циклический сдвиг слова Z не содержит элементарных 12-степеней ранга α , то в силу предложения 8.27, если Σ_i – поддиаграмма примыкания $\tilde{T}$ к Z^{-1} , выполнено $\ell_{\alpha,D}(\bar{N}_i) < 46$.

Если бы выполнялось $\ell_{\alpha,D}(\bar{G}_k) \geq p + 34$, то, переходя к путям на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ и используя предложение 8.38, (ii), получили бы $\partial \text{Cогл}_\alpha(E, G_k^*)$ вопреки предположению. Следовательно, $\ell_{\alpha,D}(\bar{G}_k) < p + 34$. Аналогично имеем $\ell_{\alpha,D}(\bar{G}_{k+1}) < p + 34$.

Так как

$$\ell_{\alpha,D}(E) \geq 2h + 3p + 233 > 2(h + 42) + 2(p + 34) + 46 + 25 + 2 \cdot 6, \quad (14.12)$$

то, используя предложение 8.14, (ii), получаем, что по крайней мере одна из Σ_i – поддиаграмма примыкания $\tilde{T}$ к $\tilde{T}'^{-1}$, причем $\ell_{\alpha,D}(\bar{N}_i) \geq h + 42$, что и требовалось доказать.

Случай 2: $k = 0$, $t > 0$. В этом случае слово E содержится в $\mathcal{L}(\tilde{K}_0 \tilde{G}_1)$. В отличие от случая 1, поддиаграмма Θ_0 может содержать поддиаграммы примыкания $\tilde{T}$ к $\tilde{Q}$. Пусть $\tilde{K}_0 = w_0 N_1 w_1 \dots N_s w_s$, где $N_1, N_2, \dots, N_s$ – участки примыкания поддиаграмм примыкания $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_s \in \mathcal{S}$ и w_i – переходные участки диаграммы $\Delta^{\alpha-1}$ относительно $\mathcal{S}$, либо, возможно, w_0 – пустой путь. Как и в случае 1, через $\bar{w}_0, \bar{N}_1, \bar{w}_1, \dots, \bar{N}_s, \bar{w}_s, \bar{G}_1$ обозначим общие части вхождений слова E и соответствующих слов $\mathcal{L}(w_0), \mathcal{L}(N_1), \mathcal{L}(w_1), \dots, \mathcal{L}(N_s), \mathcal{L}(w_s)$ и $\mathcal{L}(\tilde{G}_1)$ в слово T . В силу лемм 9.22 и 9.23, (ii) среди Σ_i не более одной поддиаграммы примыкания $\tilde{T}$ к Z^{-1} и не более двух поддиаграмм примыкания $\tilde{T}$ к каждому из участков границы $\tilde{T}'^{-1}$ и $\tilde{Q}$, причем по две поддиаграммы примыкания к $\tilde{T}'^{-1}$ и $\tilde{Q}$ одновременно быть не может.

Так как по условию леммы $|\tilde{Q}| < 2|A|$, где $\mathcal{L}(\tilde{Q}) \in \text{Пер}(A)$ и $A \in \mathcal{E}_\alpha$, то в силу предложения 8.44, (ii), в случае, если Σ_i – поддиаграмма примыкания $\tilde{T}$ к $\tilde{Q}$, имеем $\ell_{\alpha,D}(\bar{N}_i) < p + 34$.

Далее можно повторить рассуждения из случая 1, принимая во внимание, что в случае, если среди Σ_i имеются две поддиаграммы примыкания $\tilde{T}$ к $\tilde{T}'^{-1}$, поддиаграмм примыкания $\tilde{T}$ к $\tilde{Q}$ не более одной (так как $h + 42 > p + 34$, то отсюда следует, что для $\ell_{\alpha,D}(E)$ достаточно нижней оценки (14.12), с увеличением правой части неравенства (14.12) на 5 из-за новой оценки $s \leq 4$ вместо $s \leq 3$).

Случай 3: $k = t$, $t > 0$. Этот случай симметричен случаю 2.

Случай 4: $k = t = 0$. Рассматривается аналогично случаю 2, с тем отличием, что Θ_0 может содержать поддиаграммы примыкания $\tilde{T}$ к двум участкам границы $\tilde{Q}$ и $\tilde{R}$ (см. замечание в конце случая 2).

14.6. ЛЕММА. *Если $1 \leq \beta \leq \alpha$, $A \in \mathcal{E}_\beta$ и $G \subseteq S_\alpha^*(A) \cup S_\alpha^-(A)$ – подгруппа группы B_α , то существует конечная подгруппа $\tilde{G}$ группы $B_{\beta-1}$ такая, что $G = \pi_{\beta-1,\alpha}(\tilde{G})$ и $\tilde{G} \subseteq N_{\beta-1}^*(A) \cup N_{\beta-1}^-(A)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $G \subseteq S_\alpha^*(A)$, то в качестве $\tilde{G}$ можно взять подгруппу $\pi_{\beta-1,\alpha}^{-1}(G) \cap N_{\beta-1}^*(A)$, которая конечна в силу предложения 7.14, (ii). Пусть найдется хотя бы один элемент $g_0 \in G \cap S_\alpha^-(A)$. Заметим, что в силу предложений 13.7, (ii) и 7.2, (ii) множества $S_\alpha^+(A)$ и $S_\alpha^-(A)$ образуют смежные классы группы $S_\alpha(A)$ по ее нормальной подгруппе $S_\alpha^+(A)$ индекса 2. Следовательно, $G = H \cup g_0 H$, где $H \trianglelefteq G \cap S_\alpha^+(A) = G \cap S_\alpha^*(A)$. Выберем прообраз $\tilde{g}_0 \in N_{\beta-1}^-(A)$ в группе $B_{\beta-1}$ элемента g_0 и положим $\tilde{G} \trianglelefteq \langle \tilde{H}, \tilde{g}_0 \rangle$, где $\tilde{H} \trianglelefteq \pi_{\beta-1,\alpha}^{-1}(H) \cap N_{\beta-1}^*(A)$. Тогда имеем $\pi_{\beta-1,\alpha}(\tilde{G}) = G$, а конечность подгруппы $\tilde{G}$ легко вытекает из предложения 7.14, (ii) и следствий 7.16, 7.17.

14.7. ЛЕММА. *Пусть $1 \leq \beta \leq \alpha - 1$, $1 \leq \gamma \leq \alpha - 1$, $x_1, x_2, \dots, x_k$ – слова, представляющие все элементы некоторой подгруппы $H \subseteq S_\alpha(A)$, где $A \in \bar{\mathcal{E}}_\beta$, и пусть y – нормальная форма ранга γ . Пусть дано слово T такое, что для каждого i элемент $[T^{-1}x_iTy]_\alpha$ группы B_α имеет конечный порядок и $\text{rang}[T^{-1}x_iTy]_\alpha \leq \alpha - 1$. Тогда существуют слова $x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*$, T^* и нормальная форма y^* ранга γ такие, что для некоторых U, V выполнены соотношения*

$$T \triangleq UT^*V, \quad U^{-1}x_iU \triangleq x_i^* \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad VyV^{-1} \triangleq y^*, \quad (14.13)$$

для каждого i элемент $[T^{*-1}x_i^*T^*y^*]_{\alpha-1}$ группы $B_{\alpha-1}$ имеет конечный порядок, $\text{rang}[T^{*-1}x_i^*T^*y^*]_{\alpha-1} = \text{rang}[T^{-1}x_iTy]_\alpha$, $H^* \trianglelefteq \{[x_i^*]_{\alpha-1}\}_i$ – подгруппа группы $B_{\alpha-1}$ и $H^* \subseteq S_{\alpha-1}(A^*)$ для некоторого $A^* \in \bar{\mathcal{E}}_\beta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала более слабое утверждение, изменив заключение леммы следующим образом: вместо условия, чтобы слово y^* было нормальной формой ранга γ , потребуем только, чтобы элемент $[y^*]_{\alpha-1}$ имел конечный порядок, а вместо условия $H^* \subseteq S_{\alpha-1}(A^*)$ ($A^* \in \bar{\mathcal{E}}_\beta$) потребуем, чтобы H^* была конечной подгруппой группы $B_{\alpha-1}$.

В силу предложения 12.13 можно считать $T \in \mathcal{R}_\alpha$. В силу условия $H \subseteq S_\alpha(A)$ ($A \in \bar{\mathcal{E}}_\beta$), предложения 13.3 и замечания после определения 13.4 (при $\alpha := \alpha - 1$) можно считать $x_i \in \mathcal{H}_\beta \subseteq \mathcal{H}_{\alpha-1}$ при всех i , причем элементы $[x_i]_{\alpha-1}$ образуют некоторую конечную подгруппу группы $B_{\alpha-1}$. Выберем произвольный путь T на $\Gamma_{\alpha-1}$ с $\mathcal{L}(T) \supseteq T$. Положим

$$\begin{aligned} \hat{T} &\triangleq \pi_{\alpha-1,\alpha}(T), & \mathbf{g}_i &\triangleq \iota(\hat{T})[x_i]_\alpha^{-1} (\iota(\hat{T}))^{-1} \quad (i = 1, 2, \dots, k), \\ \mathbf{h} &\triangleq \tau(\hat{T})[y]_\alpha (\tau(\hat{T}))^{-1}. \end{aligned}$$

Пусть $E \in \text{ППер}_\alpha(C, p)$ – подпуть пути T , где $C \in \mathcal{E}_\alpha$. Назовем E *x-зависимым*, если при всех i выполнено $\partial \text{Cогл}_\alpha(\pi_{\alpha-1, \alpha}(E), \mathbf{g}_i \pi_{\alpha-1, \alpha}(E))$, и *y-зависимым*, если $\partial \text{Cогл}_\alpha(\pi_{\alpha-1, \alpha}(E), \mathbf{h} \pi_{\alpha-1, \alpha}(E))$. Очевидно,

$$\begin{aligned} & \text{если } E \in \text{ППер}_\alpha(C, p), \quad F \in \text{ППер}_\alpha(D, p) \quad (C, D \in \mathcal{E}_\alpha) \text{ – подпути пути } T, \\ & \text{и } \text{П} \text{Cогл}_\alpha(E, F) \text{ и } E \text{ } x\text{-зависим (y-зависим), то } F \text{ } x\text{-зависим (y-зависим).} \end{aligned} \quad (14.14)$$

Кроме того, согласно лемме 14.5, (ii)

$$\begin{aligned} & \text{если } E \in \text{ППер}_\alpha(C, 2h + 3p + 233) \quad (C \in \mathcal{E}_\alpha) \text{ – подпуть пути } T, \\ & \text{то } E \text{ } x\text{-зависим или y-зависим.} \end{aligned} \quad (14.15)$$

Если T содержит хотя бы один *x-зависимый* подпуть, представим T в виде $T = XW$, где $X = X_1E$, E – *x-зависимый* подпуть пути T и W не содержит *x-зависимых* подпутей T . В противном случае, если T не содержит *x-зависимых* подпутей, положим $W \Rightarrow T$. Если теперь W содержит хотя бы один *y-зависимый* подпуть, представим W в виде $W = YZ$, где $Z = FZ_1$, F – *y-зависимый* подпуть W и Y не содержит таких подпутей. В противном случае положим $Y \Rightarrow W$. С учетом (14.14) получаем, что имеет место один из четырех случаев:

- (i) T не содержит *x-зависимых* или *y-зависимых* подпутей;
- (ii) $T = XY$, где $X = X_1E$, E – *x-зависимый* подпуть и Y не содержит *x-зависимых* или *y-зависимых* подпутей;
- (iii) $T = YZ$, где $Z = FZ_1$, F – *y-зависимый* подпуть и Y не содержит *x-зависимых* или *y-зависимых* подпутей;
- (iv) $T = XYZ$, где $X = X_1E$, $Z = FZ_1$, E – *x-зависимый* подпуть, F – *y-зависимый* подпуть, $\neg \text{П} \text{Cогл}_\alpha(E, F)$ и Y не содержит *x-зависимых* или *y-зависимых* подпутей.

Случай (i) самый простой. В этом случае в силу (14.15) слово T не содержит элементарных $(2h + 3p + 233)$ -степеней ранга α , и тогда в силу леммы 14.5, (i) можно положить $x_i^* \Rightarrow x_i$, $T^* \Rightarrow T$, $y^* \Rightarrow y$ и $U \Rightarrow V \Rightarrow 1$. Из трех оставшихся случаев подробно рассмотрим только (iv). Рассуждения в случаях (ii) и (iii) будут получаться несложной модификацией рассуждений для случая (iv).

Итак, пусть $T = XYZ$, $X = X_1E$, $Z = FZ_1$, $E \in \text{ППер}_\alpha(C, p)$, $F \in \text{ППер}_\alpha(D, p)$ ($C, D \in \mathcal{E}_\alpha$), E – *x-зависимый* подпуть, F – *y-зависимый* подпуть, $\neg \text{П} \text{Cогл}_\alpha(E, F)$ и Y не содержит *x-зависимых* или *y-зависимых* подпутей. Пусть $P \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, C, 2)$ – периодическая основа для E и $Q \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, D, 2)$ – периодическая основа для F . Будем считать, что слово $\mathcal{L}(P)$ оканчивается на C , а слово $\mathcal{L}(Q)$ начинается с D . Заметим, что в этом случае $C, D \in \bar{\mathcal{E}}_\alpha$ в силу определений 5.16, 13.1 и леммы 7.6. В силу леммы 8.2, (ii) соединим вершины $\tau(P)$ и $\tau(E)$ путем u с $\mathcal{L}(u) \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$, а вершины $\iota(F)$ и $\iota(Q)$ путем v с $\mathcal{L}(v) \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$. Через X, Y, Z , u и v обозначим метки путей X, Y, Z , u и v соответственно. Из $\partial \text{Cогл}_\alpha(\pi_{\alpha-1, \alpha}(E), \mathbf{g}_i \pi_{\alpha-1, \alpha}(E))$ следует $\text{Cогл}(P, \tilde{\mathbf{g}}_i P)$ или $\text{Cогл}(P, \tilde{\mathbf{g}}_i P^{-1})$ для некоторого $\tilde{\mathbf{g}}_i \in \mathbf{B}_{\alpha-1}$, где $\pi_{\alpha-1, \alpha}(\tilde{\mathbf{g}}_i) = \mathbf{g}_i$. Тогда по предложению 7.3 при $P := P^{-1}$ и $\mathbf{g} := \tilde{\mathbf{g}}_i$

$$(\tau(P))^{-1} \tilde{\mathbf{g}}_i \tau(P) \in \mathbf{N}_{\alpha-1}(C),$$

откуда, применив к обеим частям $\pi_{\alpha-1,\alpha}$ и используя выражение для $\mathbf{g}_i$, выводим

$$\pi_{\alpha-1,\alpha}((\tau(\mathbf{P}))^{-1}\iota(\mathbf{T})) [x_i]_{\alpha} \pi_{\alpha-1,\alpha}((\iota(\mathbf{T}))^{-1}\tau(\mathbf{P})) \in \mathbf{S}_{\alpha}(C).$$

Так как вершины $\tau(\mathbf{P})$ и $\iota(\mathbf{T})$ соединены путем uX^{-1} , то последнее включение можно переписать в виде

$$[uX^{-1}x_iXu^{-1}]_{\alpha} \in \mathbf{S}_{\alpha}(C) \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Аналогично, из y -зависимости пути $\mathbf{F}$, применяя предложение 7.3 при $\mathbf{P} := \mathbf{Q}$ и $\mathbf{g} := \tilde{\mathbf{h}}$ для некоторого $\tilde{\mathbf{h}}$, где $\pi_{\alpha-1,\alpha}(\tilde{\mathbf{h}}) = \mathbf{h}$, выводим

$$[v^{-1}ZyZ^{-1}v]_{\alpha} \in \mathbf{S}_{\alpha}(D).$$

Так как по условию и в силу предложения 13.15 имеем $\text{rang}[x_i]_{\alpha} \leq \beta \leq \alpha - 1$, то снова в силу предложения 13.15 $\{[uX^{-1}x_iXu^{-1}]_{\alpha}\}_i \subseteq \mathbf{S}_{\alpha}^{*}(C) \cup \mathbf{S}_{\alpha}^{-}(C)$. Так как, кроме того, $\{[uX^{-1}x_iXu^{-1}]_{\alpha}\}_i$ — подгруппа группы $\mathbf{S}_{\alpha}(C)$, то, используя леммы 14.6 и 13.2, (iv), найдем $r \in \mathbb{Z}$ и ограниченные в ранге α слова $x_i^{*} \in \mathcal{H}_{\alpha}$ такие, что

$$uX^{-1}x_iXu^{-1} \stackrel{\alpha}{\equiv} C^{-r}x_i^{*}C^r \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (14.16)$$

и элементы $[x_i^{*}]_{\alpha-1}$ образуют конечную подгруппу $\mathbf{H}^{*}$ группы $\mathbf{B}_{\alpha-1}$. Аналогично, в силу предложения 13.15 $[v^{-1}ZyZ^{-1}v]_{\alpha} \in \mathbf{S}_{\alpha}^{*}(D) \cup \mathbf{S}_{\alpha}^{-}(D)$, и тогда в силу леммы 13.2, (i), (iii) для некоторого $s \in \mathbb{Z}$ и некоторого ограниченного в ранге α слова $y^{*} \in \mathcal{H}_{\alpha}$ имеет место равенство

$$v^{-1}ZyZ^{-1}v \stackrel{\alpha}{\equiv} D^{-s}y^{*}D^s, \quad (14.17)$$

причем $[y^{*}]_{\alpha-1}$ — элемент конечного порядка (последнее вытекает из предложения 7.14, (ii) и следствия 7.17). Так как в силу следствия 7.19 элементы $[C]_{\alpha}^{n/2}$ и $[D]_{\alpha}^{n/2}$ лежат в центрах подгрупп $\mathbf{S}_{\alpha}(C)$ и $\mathbf{S}_{\alpha}(D)$ соответственно, то можно считать $|r|, |s| \leq n/4$.

Выберем слово $T^{*} \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ такое, что

$$T^{*} \stackrel{\alpha-1}{\equiv} C^r uYvD^{-s}. \quad (14.18)$$

Заметим, что из равенств $T \stackrel{\alpha}{\equiv} XYZ$ и (14.16)–(14.18) следует

$$\begin{aligned} T^{-1}x_iTy &\stackrel{\alpha}{\equiv} Z^{-1}Y^{-1}X^{-1} \cdot Xu^{-1}C^{-r}x_i^{*}C^r uX^{-1} \cdot XYZ \cdot Z^{-1}vD^{-s}y^{*}D^sv^{-1}Z \\ &\stackrel{\alpha}{\equiv} Z^{-1}vD^{-s}(T^{*-1}x_i^{*}T^{*}y^{*})D^sv^{-1}Z. \end{aligned}$$

Поэтому для каждого i элемент $[T^{*-1}x_i^{*}T^{*}y^{*}]_{\alpha}$ имеет конечный порядок и ранги элементов $[T^{*-1}x_i^{*}T^{*}y^{*}]_{\alpha}$ и $[T^{-1}x_iTy]_{\alpha}$ совпадают. Кроме того, непосредственно проверяется выполнение соотношений (14.13) при $U := Xu^{-1}C^{-r}$ и

$V := D^s v^{-1} Z$. Остается доказать, что элемент $[T^{*-1} x_i^* T^* y^*]_{\alpha-1}$ группы $\mathbf{B}_{\alpha-1}$ имеет конечный порядок и $\text{rang}[T^{*-1} x_i^* T^* y^*]_{\alpha-1} = \text{rang}[T^{*-1} x_i^* T^* y^*]_\alpha$. В силу леммы 14.5, (i) для этого достаточно проверить, что слово T^* не содержит элементарных q_4 -степеней ранга α .

В силу равенства (14.18) на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ имеется путь $P_1^{-1} T^* Q_1$ с началом в $\iota(uYv)$ и с концом в $\tau(uYv)$, где метки P_1 , T^* и Q_1 равны C^r , T^* и D^s соответственно (см. рис. 69). Допустим, $G \in \text{ППер}_\alpha(B, q_4)$ – подпути пути T^* для некоторого $B \in \mathcal{E}_\alpha$. Так как $|r|, |s| \leq n/4$, то в силу леммы 8.2, (ii) и предложения 8.44, (ii) для любого подпути $H \in \text{ППер}_\alpha(B)$ пути P_1 или Q_1^{-1} имеем $\ell_{\alpha, B}(H) \leq n/4 + 77$. Кроме того, в силу (14.15) путь Y не содержит подпути $H \in \text{ППер}_\alpha(B, 2h + 3p + 233)$. Тогда в силу леммы 11.7, (ii) при $X := Y$, $Y := Y$, $W := u^{-1} P_1^{-1} T^* Q_1 v^{-1}$, $Z_1 := P_1^{-1}$, $Z_2 := T^*$, $Z_3 := Q_1$ и неравенства

$$q_4 - 45 \cdot 3 + 5 > \max \left\{ \frac{n}{4} + 77, 2h + 3p + 233 \right\} + p$$

найдутся подпути $H_1, H_2 \in \text{ППер}_\alpha(B, p)$ двух различных путей P_1, Y или Q_1^{-1} такие, что $\text{ПСогл}_\alpha(H_1, H_2)$. Вывод искомого противоречия разбивается на три случая.

Рис. 69

Случай 1: H_1 содержится в P_1 , H_2 содержится в Q_1^{-1} . По предложению 8.44, (i) имеем $|P_1| > 2|C|$, $|Q_1| > 2|D|$. По предложению 8.36 получаем $\text{Согл}(P_1, R_1)$ и $\text{Согл}(Q_1^{-1}, R_2)$, где $R_i \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, B, 2)$ – периодическая основа для H_i . Так как $\text{ПСогл}_\alpha(H_1, H_2)$, то отсюда следует $\text{Согл}(P_1, Q_1^{-1})$. Так как слово $\mathcal{L}(P)$ оканчивается на C и $\mathcal{L}(P_1) \sqsupseteq C^r$, то при некотором $\epsilon = \pm 1$ пути P и P_1^ϵ имеют общее периодическое продолжение. По той же причине при некотором $\delta = \pm 1$ пути Q и Q_1^δ имеют общее периодическое продолжение. Тогда из $\text{Согл}(P_1, Q_1^{-1})$ следует $\text{Согл}(P, Q)$ или $\text{Согл}(P, Q^{-1})$, т.е. $\text{ПСогл}_\alpha(E, F)$ или $\text{ПСогл}_\alpha(E, F^{-1})$. Но первое соотношение невозможно в силу предположения случая (iv), а второе – в силу предложения 8.46.

Случай 2: H_1 содержится в P_1 , H_2 содержится в Y . Тогда, рассуждая аналогично случаю 1, получаем $\text{ПСогл}_\alpha(E, H_2)$ или $\text{ПСогл}_\alpha(E, H_2^{-1})$. В первом случае получаем противоречие с (14.14) и условием на Y в (iv), а во втором – с предложением 8.46.

Случай 3: H_1 содержится в Y , H_2 содержится в Q_1^{-1} . В этом случае аналогично случаю 1 получаем $ПСогл_\alpha(F, H_1)$ или $ПСогл_\alpha(F, H_1^{-1})$. Противоречие с (14.14), условием на Y в (iv) и предложением 8.46.

Случай (iv) рассмотрен.

Аналогичные рассуждения проходят и в случаях (ii) и (iii). При этом в (ii) нужно положить $x_i^* \Rightarrow x_i$ при всех i , а в (iii) нужно положить $y^* \Rightarrow y$. Соответственно, в случае (ii) на рис. 69 будут отсутствовать пути E, P, u, P_1 , и пути T^* и Y будут иметь общую начальную вершину, а в случае (iii) будут отсутствовать пути F, Q, v, Q_1 и пути T^* и Y будут иметь общую конечную вершину.

Тем самым мы доказали утверждение леммы в ослабленном варианте, т.е. с требованием, что $[y^*]_{\alpha-1}$ – элемент конечного порядка и $H^* \Rightarrow \{[x_i^*]_{\alpha-1}\}_i$ – конечная подгруппа. Выберем теперь нормальную форму y' ранга γ , где $M^{-1}y^*M \stackrel{\alpha-1}{=} y'$ для некоторого M , и по индуктивному предположению 14.3 найдем подгруппу $H' \Rightarrow \{[x'_i]_{\alpha-1}\}_i \subseteq S_{\alpha-1}(A^*)$ ($A^* \in \bar{E}_\beta$) такую, что $Nx_i^*N^{-1} \stackrel{\alpha-1}{=} x'_i$ для некоторого N при всех i (равенства $\text{rang}[y^*]_{\alpha-1} = \gamma$ и $\text{rang}H^* = \beta$ выполнены ввиду леммы 13.14, (iii); кроме того, чтобы найти пополнение подгруппы H^* вида $[N]_{\alpha-1}^{-1}S_{\alpha-1}(A^*)[N]_{\alpha-1}$, где A^* – нормализованный элементарный период ранга β , помимо индуктивного предположения 14.3 нужно воспользоваться еще леммой 7.20). Непосредственно проверяется, что все требуемые условия заключения леммы 14.7 сохраняют силу, если слова x_i^*, y^*, T^*, U и V заменить соответственно на x'_i, y', NT^*M, UN^{-1} и $M^{-1}V$. Лемма 14.7 доказана.

14.8. ЛЕММА. Пусть $g \in S_\alpha^+(A) \setminus S_\alpha^*(A)$, где $A \in \mathcal{E}_\alpha$, и пусть $4p + 304 \leq \text{степень } g \leq n - 4p - 304$. Тогда если $h_1, h_2 \in B_\alpha$ – элементы конечного порядка и $g = h_1h_2$, то $h_1, h_2 \in S_\alpha(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать $A \in \bar{E}_\alpha$ и $h_1, h_2 \neq 1$. Пусть $g = [A^t w]_\alpha$, где $A^t w$ – нормальная форма ранга α и $4p + 304 \leq t \leq n - 4p - 304$. Представим каждый элемент h_i в виде

$$h_i = [T_i^{-1}B_i^{s_i}z_iT_i]_\alpha \quad (i = 1, 2), \quad (14.19)$$

где $B_i^{s_i}z_i$ – нормальная форма ранга $\beta_i \leq \alpha$. Заменяя A^t и $B_i^{s_i}$ при необходимости на $(A^{-1})^{n-t}$ и $(B_i^{-1})^{n-s_i}$, можно считать $t, s_i \leq n/2$. По лемме 14.4 найдем слова U, X и V_i, Y_i ($i = 1, 2$) такие, что выполнены соответствующие условия (i)–(v); в частности,

$$A^t w \stackrel{\alpha-1}{=} U^{-1}XU, \quad (14.20)$$

$$B_i^{s_i}z_i \stackrel{\alpha-1}{=} V_i^{-1}Y_iV_i \quad (i = 1, 2). \quad (14.21)$$

Равенство $g = h_1h_2$ можно переписать в виде

$$U^{-1}XUT_2^{-1}V_2^{-1}Y_2^{-1}V_2T_2T_1^{-1}V_1^{-1}T_1Y_1^{-1}V_1T_1 \stackrel{\alpha}{=} 1. \quad (14.22)$$

Пусть $\tilde{\Delta}$ – дисковая диаграмма ранга α с граничным циклом

$$\delta\tilde{\Delta} \approx U'^{-1}XUT_2'^{-1}V_2'^{-1}Y_2^{-1}V_2T_2T_1'^{-1}V_1'^{-1}Y_1^{-1}V_1T_1,$$

где метки соответствующих подпутьей равны словам из левой части равенства (14.22). Пусть диаграмма Δ с тремя граничными циклами X , Y_1^{-1} и Y_2^{-1} получена из $\tilde{\Delta}$ склеиванием участков границы вдоль пар путей U и U' , V_2T_2 и $V_2'T_2'$, V_1T_1 и $V_1'T_1'$, как описано в 4.6 (см. рис. 70).

Рис. 70

Группа $\pi_1(\Delta, \iota(X))$ порождается двумя классами гомотопных петель $[UT_i^{-1}V_i^{-1}Y_iV_iT_iU^{-1}]_\Delta$ ($i = 1, 2$), и так как из (14.19), (14.21) следует

$$[\mathcal{L}(UT_i^{-1}V_i^{-1}Y_iV_iT_iU^{-1})]_\alpha = [UT_i^{-1}V_i^{-1}Y_iV_iT_iU^{-1}]_\alpha = [U]_\alpha \mathbf{h}_i [U]_\alpha^{-1},$$

то заключение леммы равносильно включению

$$[\mathcal{L}]_\alpha(\pi_1(\Delta, \iota(X))) \subseteq [U]_\alpha \mathbf{S}_\alpha(A) [U]_\alpha^{-1}, \quad (14.23)$$

где $[\mathcal{L}]_\alpha$ – отображение, сопоставляющее классу гомотопных путей $[P]_\Delta$ элемент $[\mathcal{L}(P)]_\alpha$ группы $\mathbf{B}_\alpha$. В силу условия (iii) леммы 14.4 слова X и Y_i циклически приведены в ранге α . Следовательно, диаграмму Δ можно рассматривать как B -диаграмму ранга α , для которой

$$X_\alpha(\Delta) = \{X, Y_1^{-1}, Y_2^{-1}\} \text{ и } Y_{\alpha-1}(\Delta) = Z_\alpha(\Delta) = \emptyset.$$

По предложению 9.9 найдется приведенная B -диаграмма Δ' ранга α , полученная из Δ некоторой последовательностью внутренних преобразований ранга α и

добавлений областей ранга α . Так как $\mathcal{Z}_\alpha(\Delta) = \emptyset$, то в последовательности преобразований, переводящей Δ в Δ' , могут встретиться только внутренние преобразования ранга α , т.е. измельчения и замены дисковых или кольцевых поддиаграмм (см. определение 9.4). Тогда по лемме 4.11 для некоторого элемента $\mathbf{f} \in \mathbf{B}_\alpha$, коммутирующего с $[\mathcal{L}(X)]_\alpha = [U]_\alpha \mathbf{g}[U]_\alpha^{-1}$, выполнено

$$[\mathcal{L}]_\alpha(\pi_1(\Delta', \iota(X))) = \mathbf{f} [\mathcal{L}]_\alpha(\pi_1(\Delta, \iota(X))) \mathbf{f}^{-1}.$$

В силу следствия 13.11 имеем $\mathbf{f} \in [U]_\alpha \mathbf{S}_\alpha(A) [U]_\alpha^{-1}$. Тогда включение (14.23) равносильно тому же включению с заменой Δ на Δ' , и, следовательно, для доказательства (14.23) с самого начала можно считать, что Δ есть приведенная B -диаграмма ранга α . По той же причине можно считать, что на $\Delta^{\alpha-1}$ задана карта примыканий $\mathcal{S}$ ранга $\alpha - 1$. В зависимости от наличия или отсутствия областей ранга α у диаграммы Δ доказательство включения (14.23) разбивается на два основных случая. Предварительно заметим, что группа $\pi_1(\Delta, \iota(X))$ порождается двумя классами гомотопных петель, в качестве одного из которых можно взять $[X]_\Delta$ и для которого в силу (14.20) уже имеем $[\mathcal{L}(X)]_\alpha \in [U]_\alpha \mathbf{S}_\alpha(A) [U]_\alpha^{-1}$. Наша задача будет состоять в том, чтобы подходящим образом указать второй порождающий $[W]_\Delta$ и доказать для него включение $[\mathcal{L}(W)]_\alpha \in [U]_\alpha \mathbf{S}_\alpha(A) [U]_\alpha^{-1}$.

Случай 1: $\mathbf{R}_\alpha(\Delta) \neq 0$. Выберем произвольную область $A \in \mathbf{R}_\alpha(\Delta)$. Пусть $\mathcal{L}(\delta A) \approx C^n$, $C \in \mathcal{E}_\alpha$, и пусть $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k \in \mathcal{S}$ – поддиаграммы примыкания δA к граничным циклам X и Y_i^{-1} . Пусть $\delta \Pi_i \approx P_i x_i Q_i y_i$, где P_i, Q_i – участки примыкания, P_i входит в δA и $\mathcal{L}(x_i), \mathcal{L}(y_i) \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$. По предложению 10.9, (iii) имеем $k \leq 4$. По предложению 10.13, (iii)

$$\sum_{i=1}^k |\mathcal{L}(P_i)| \geq (n - 6p - 68)|C|. \quad (14.24)$$

Покажем, что из поддиаграмм $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k$ можно выбрать две Π_{i_0} и Π_{i_1} таким образом, что участки примыкания Q_{i_0} и Q_{i_1} входят в разные граничные циклы X, Y_1^{-1} и Y_2^{-1} диаграммы Δ и при этом имеют место неравенства

$$|\mathcal{L}(P_{i_0})|, |\mathcal{L}(P_{i_1})| \geq (p + 70)|C|.$$

Предположим, поддиаграммы Π_i упорядочены по убыванию длин меток путей P_i . В качестве Π_{i_0} возьмем поддиаграмму Π_1 , для которой в силу (14.24)

$$|\mathcal{L}(P_1)| \geq \frac{1}{4}(n - 6p - 68)|C| > (p + 70)|C|.$$

Так как $|\mathcal{L}(P_1)| < (n - q)|C|$ в силу циклической приведенности слова X в ранге α , то

$$|\mathcal{L}(P_2)| \geq \frac{1}{3}(q - 6p - 68)|C| > (p + 70)|C|.$$

Если Q_1 и Q_2 входят в разные граничные циклы X , Y_1^{-1} и Y_2^{-1} , то можно взять $i_1 = 2$. Пусть Q_1 и Q_2 входят в один граничный цикл X , Y_1^{-1} или Y_2^{-1} , для определенности, скажем, в X . Из предложения 8.23 следует тогда, что при $i = 1, 2$ в подслово $\mathcal{L}(Q_i)$ некоторого циклического сдвига X' слова X входит слово $E_i \in \text{ППер}_\alpha(C^{-1}, p + 34)$, где $\ell_{\alpha, C^{-1}}(E_i) \geq |\mathcal{L}(P_i)|/|C| - 37$. Используя условие (vi) леммы 14.4 и предложение 8.11, получаем, что в X' входит слово $E \in \text{ППер}_\alpha(C^{-1})$ с $\ell_{\alpha, C^{-1}}(E) \geq (|\mathcal{L}(P_1)| + |\mathcal{L}(P_2)|)/|C| - 75$, откуда по лемме 12.12 вытекает $|\mathcal{L}(P_1)| + |\mathcal{L}(P_2)| \leq (n - q + 75)|C|$. Тогда, используя (14.24), получаем $|\mathcal{L}(P_3)| \geq (p + 70)|C|$, но теперь уже в силу предложения 10.9, (iii) путь Q_3 не может входить в X и можно положить $i_1 = 3$.

Итак, перенумеровав Π_i , можно считать, что Q_1 и Q_2 входят в разные граничные циклы X , Y_1^{-1} и Y_2^{-1} (на самом деле выполнение этого условия не играет принципиальной роли в рассуждениях, а лишь позволяет уменьшить количество рассматриваемых подслучаев) и

$$|\mathcal{L}(P_1)|, |\mathcal{L}(P_2)| \geq (p + 70)|C|. \quad (14.25)$$

В силу полной аналогии достаточно ограничиться двумя подслучаями: Q_1, Q_2 входят в X, Y_1^{-1} и Q_1, Q_2 входят в Y_1^{-1} и Y_2^{-1} . Пусть

$$\delta A \approx P_1 S_1 P_2 S_2.$$

Рис. 71

Случай 1A: Q_1 и Q_2 входят в X и Y_1^{-1} соответственно. Заметим, что в этом случае из условия (ii) леммы 14.4 для $A^t w := B_1^{s_1} z_1$, $X := Y_1$ и следствия 8.24 вытекает $\beta_1 = \alpha$. Пусть M – начало пути X с $\tau(M) = \iota(Q_1)$ и M_1 – начало пути Y_1 с $\tau(M) = \iota(Q_2^{-1})$. Группа $\pi_1(\Delta, \iota(X))$ порождается классами $[X]_\Delta$

и $[Mx_1^{-1}S_1y_2^{-1}M_1^{-1}Y_1M_1y_2S_1^{-1}x_1M^{-1}]_\Delta$ (см. рис. 71), поэтому достаточно проверить включение

$$[\mathcal{L}(Mx_1^{-1}S_1y_2^{-1}M_1^{-1}Y_1M_1y_2S_1^{-1}x_1M^{-1})]_\alpha \in [U]_\alpha S_\alpha(A)[U]_\alpha^{-1}. \quad (14.26)$$

Для этого рассмотрим пути на графе $\Gamma_{\alpha-1}$, расположенные, как на рис. 72, где $\mathcal{L}(U) \subseteq U$, $\mathcal{L}(R) \subseteq A^2$, $\mathcal{L}(V_1) \subseteq V_1$, $\mathcal{L}(R_1) \subseteq B_1^2$ и метки остальных путей равны меткам соответствующих путей на диаграмме Δ .

Рис. 72

Пусть $\hat{X}$ и $\hat{Y}_1$ – пути на $\Gamma_{\alpha-1}$ с $\mathcal{L}(\hat{X}) \subseteq X$, $\mathcal{L}(\hat{Y}_1) \subseteq Y_1$ и начальными вершинами $\iota(\hat{M})$ и $\iota(\hat{M}_1)$ соответственно. В силу 14.4, (iv) найдутся $Z\hat{X}Z' \in \text{ППер}_\alpha(A) \cap \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, X, 2)$ и периодическая основа $\bar{R} \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$ для $Z\hat{X}Z'$ такие, что $|Z|, |Z'| \geq |X|$ и $\bar{R}$ есть периодическое продолжение R . В силу 14.4, (iv) для $A^t w := B_1^{s_1} z_1$, $X := Y_1$ и $U := V_1$ найдутся $Z_1\hat{Y}_1Z'_1 \in \text{ППер}_\alpha(B_1) \cap \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, Y_1, 2)$ и периодическая основа $\bar{R}_1 \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, B_1, 2)$ для $Z_1\hat{Y}_1Z'_1$, где $|Z_1|, |Z'_1| \geq |Y_1|$ и $\bar{R}_1$ есть периодическое продолжение R_1 . Так как $\mathcal{L}(\hat{M}\hat{Q}_1)$ есть начало слова X^2 и $|Z'| \geq |X|$, то $\hat{M}\hat{Q}_1$ есть начало пути $\hat{X}Z'$. Так как $\mathcal{L}(\hat{M}_1\hat{Q}_2^{-1})$ есть начало слова Y_1^2 и $|Z'_1| \geq |Y_1|$, то $\hat{M}_1\hat{Q}_2^{-1}$ есть начало пути $\hat{Y}_1Z'_1$. Так как $|\mathcal{L}(\hat{P}_1)| \geq (p+70)|C|$, то по предложению 8.23 в $\hat{Q}_1$ входит путь $G \in \text{ППер}_\alpha(C^{-1}, p+34)$ с периодической основой, содержащейся в $\hat{P}_1^{-1}$. Тогда в силу предложения 8.38, (i) получаем $\text{Cогл}(\hat{P}_1^{-1}, \bar{R})$. Аналогично выводим $\text{Cогл}(\hat{P}_2, \bar{R}_1)$. Так как $\hat{P}_1\hat{S}_1\hat{P}_2$ – общее периодическое продолжение для $\hat{P}_1$ и $\hat{P}_2$, то отсюда следует $\text{Cогл}(\bar{R}, \bar{R}_1^{-1})$, и, таким образом, получаем $\text{Cогл}(R, R_1^{-1})$. В силу определения 3.3 и леммы 3.2, (v) для некоторого $r > 0$ имеет место равенство $\iota(R)[A]_{\alpha-1}^r(\iota(R))^{-1} = \iota(R_1)[B_1]_{\alpha-1}^{-r}(\iota(R_1))^{-1}$, т.е.

$$[A]_{\alpha-1}^r = ((\iota(R))^{-1}\iota(R_1))[B_1]_{\alpha-1}^{-r}((\iota(R))^{-1}\iota(R_1))^{-1}.$$

Так как вершины $\iota(R)$ и $\iota(R_1)$ соединены путем $U^{-1}\hat{M}\hat{x}_1^{-1}\hat{S}_1\hat{y}_2^{-1}\hat{M}_1^{-1}V_1$, то последнее равенство можно переписать в виде

$$A^r \stackrel{\alpha-1}{=} \mathcal{L}(U^{-1}\hat{M}\hat{x}_1^{-1}\hat{S}_1\hat{y}_2^{-1}\hat{M}_1^{-1}V_1) B_1^{-r} (\mathcal{L}(U^{-1}\hat{M}\hat{x}_1^{-1}\hat{S}_1\hat{y}_2^{-1}\hat{M}_1^{-1}V_1))^{-1},$$

откуда в силу леммы 7.20

$$\mathbf{S}_\alpha(A) = [\mathcal{L}(U^{-1}\hat{M}\hat{x}_1^{-1}\hat{S}_1\hat{y}_2^{-1}\hat{M}_1^{-1}V_1)]_\alpha \mathbf{S}_\alpha(B_1) [\mathcal{L}(U^{-1}\hat{M}\hat{x}_1^{-1}\hat{S}_1\hat{y}_2^{-1}\hat{M}_1^{-1}V_1)]_\alpha^{-1}.$$

Тогда в силу (14.21) и включения $[B_1^{s_1}z_1]_\alpha \in \mathbf{S}_\alpha(B_1)$ получаем

$$[\mathcal{L}(U^{-1}\hat{M}\hat{x}_1^{-1}\hat{S}_1\hat{y}_2^{-1}\hat{M}_1^{-1})]_\alpha [Y_1]_\alpha [\mathcal{L}(U^{-1}\hat{M}\hat{x}_1^{-1}\hat{S}_1\hat{y}_2^{-1}\hat{M}_1^{-1})]_\alpha^{-1} \in \mathbf{S}_\alpha(A),$$

что и доказывает искомое включение (14.26).

Случай 1B: Q_1 и Q_2 входят в Y_1^{-1} и Y_2^{-1} соответственно. Соединим вершины $\iota(X)$ и $\iota(Y_1)$ диаграммы Δ произвольным простым путем W (для этого, например, можно взять путь, соединяющий $\iota(X)$ и $\iota(Y_1)$ и содержащий наименьшее возможное число ориентированных ребер). Группа $\pi_1(\Delta, \iota(X))$ порождается классами $[X]_\Delta$ и $[WY_1W^{-1}]_\Delta$, поэтому достаточно установить включение

$$[\mathcal{L}(WY_1W^{-1})]_\alpha \in [U]_\alpha \mathbf{S}_\alpha(A) [U]_\alpha^{-1}. \quad (14.27)$$

Для этого мы докажем равенство

$$\mathbf{S}_\alpha(B_1) = [V_1^{-1}(\mathcal{L}(W))^{-1}U]_\alpha \mathbf{S}_\alpha(A) [U^{-1}\mathcal{L}(W)V_1]_\alpha, \quad (14.28)$$

откуда с учетом (14.21) будет непосредственно вытекать (14.27).

Рис. 73

Рис. 74

Заметим, что из выполнения условия (ii) леммы 14.4 для $A^t w := B_i^{s_i} z_i$, $X := Y_i$ и следствия 8.24 вытекает $\beta_1 = \beta_2 = \alpha$. Обозначим через M_i ($i = 1, 2$) начало пути Y_i с $\tau(M_i) = \tau(Q_i)$. Аналогично случаю 1A рассмотрим пути на графе $\Gamma_{\alpha-1}$, расположенные, как на рис. 74, где $\mathcal{L}(V_i) \sqsubseteq V_i$, $\mathcal{L}(R_i) \sqsubseteq B_i^2$ ($i = 1, 2$) и метки остальных путей равны меткам соответствующих путей на диаграмме Δ (см. рис. 73).

Используя условие (iv) леммы 14.4 для $A^t w := B_i^{s_i} z_i$, $X := Y_i$ и $U := V_i$ ($i = 1, 2$), неравенства $|\mathcal{L}(\hat{P}_i)| \geq (p + 70)|C|$, предложения 8.23 и 8.38, (i), аналогично тому, как при рассмотрении случая 1A, получаем $Coz\mathcal{L}(R_1, R_2)$. Так как вершины $\iota(R_1)$ и $\iota(R_2)$ соединены путем $V_1^{-1} \hat{M}_1 \hat{y}_1 \hat{P}_1 \hat{S}_1 \hat{y}_2^{-1} \hat{M}_2^{-1} V_2$, то отсюда следует, что для некоторого $r > 0$ имеет место равенство

$$B_1^r \stackrel{\alpha-1}{=} \mathcal{L}(V_1^{-1} \hat{M}_1 \hat{y}_1 \hat{P}_1 \hat{S}_1 \hat{y}_2^{-1} \hat{M}_2^{-1} V_2) B_2^r (\mathcal{L}(V_1^{-1} \hat{M}_1 \hat{y}_1 \hat{P}_1 \hat{S}_1 \hat{y}_2^{-1} \hat{M}_2^{-1} V_2))^{-1}.$$

Тогда по лемме 7.20

$$\mathbf{S}_\alpha(B_1) = [\mathcal{L}(V_1^{-1} \hat{M}_1 \hat{y}_1 \hat{P}_1 \hat{S}_1 \hat{y}_2^{-1} \hat{M}_2^{-1} V_2)]_\alpha \mathbf{S}_\alpha(B_2) [\mathcal{L}(V_1^{-1} \hat{M}_1 \hat{y}_1 \hat{P}_1 \hat{S}_1 \hat{y}_2^{-1} \hat{M}_2^{-1} V_2)]_\alpha^{-1},$$

откуда с учетом (14.21) и включения $[B_2^{s_2} z_2]_\alpha \in \mathbf{S}_\alpha(B_2)$ выводим

$$[\mathcal{L}(\hat{M}_1 \hat{y}_1 \hat{P}_1 \hat{S}_1 \hat{y}_2^{-1} \hat{M}_2^{-1})]_\alpha [Y_2]_\alpha [\mathcal{L}(\hat{M}_1 \hat{y}_1 \hat{P}_1 \hat{S}_1 \hat{y}_2^{-1} \hat{M}_2^{-1})]_\alpha^{-1} \in [V_1]_\alpha \mathbf{S}_\alpha(B_1) [V_1]_\alpha^{-1}. \quad (14.29)$$

Заметим, что путь X на диаграмме Δ гомотопен пути

$$WM_1 y_1 P_1 S_1 y_2^{-1} M_2^{-1} Y_2 M_2 y_2 S_1^{-1} P_1^{-1} y_1^{-1} M_1^{-1} Y_1 W^{-1}$$

(этот факт легко усматривается, например, из того, что при разрезании диаграммы Δ вдоль путей W и $y_1 P_1 S_1 y_2^{-1}$ получается дисковая диаграмма и ее граничный цикл стягиваем). Следовательно, в силу леммы 4.2

$$X \stackrel{\alpha}{=} \mathcal{L}(WM_1 y_1 P_1 S_1 y_2^{-1} M_2^{-1} Y_2 M_2 y_2 S_1^{-1} P_1^{-1} y_1^{-1} M_1^{-1} Y_1 W^{-1}).$$

Так как в силу (14.21) $[\mathcal{L}(Y_1)]_\alpha \in [V_1]_\alpha \mathbf{S}_\alpha(B_1)[V_1]_\alpha^{-1}$ и в силу (14.29)

$$[\mathcal{L}(M_1 Y_1 P_1 S_1 Y_2^{-1} M_2^{-1} Y_2 M_2 Y_1 P_1 S_1 Y_2^{-1} M_1^{-1})]_\alpha \in [V_1]_\alpha \mathbf{S}_\alpha(B_1)[V_1]_\alpha^{-1},$$

то отсюда следует

$$[\mathcal{L}(W)]_\alpha^{-1} [X]_\alpha [\mathcal{L}(W)]_\alpha \in [V_1]_\alpha \mathbf{S}_\alpha(B_1)[V_1]_\alpha^{-1}. \quad (14.30)$$

Обозначим

$$\mathbf{d} \doteq [V_1^{-1}(\mathcal{L}(W))^{-1} X \mathcal{L}(W) V_1]_\alpha = [V_1^{-1}(\mathcal{L}(W))^{-1} U A^t w U^{-1} \mathcal{L}(W) V_1]_\alpha.$$

Так как в силу следствия 13.12 имеем $\text{rang } \mathbf{d} = \text{rang}[A^t w]_\alpha = \alpha$, то в силу (14.30) и предложения 13.15 $\mathbf{d} \in \mathbf{S}_\alpha^+(B_1) \setminus \mathbf{S}_\alpha^*(B_1)$. Пусть $B_1^r v$ – нормальная форма ранга α , представляющая элемент $\mathbf{d}$, существующая в силу предложения 13.3. Так как

$$B_1^r v \stackrel{\alpha}{\equiv} V_1^{-1}(\mathcal{L}(W))^{-1} U A^t w U^{-1} \mathcal{L}(W) V_1,$$

то, выбрав слово $N \in \mathcal{R}_\alpha$, равное в $\mathbf{B}_\alpha$ слову $V_1^{-1}(\mathcal{L}(W))^{-1} U$, и применив предложение 13.10 и лемму 7.20, получим

$$\mathbf{S}_\alpha(B_1) = [V_1^{-1}(\mathcal{L}(W))^{-1} U]_\alpha \mathbf{S}_\alpha(A) [U^{-1} \mathcal{L}(W) V_1]_\alpha,$$

т.е. искомое равенство (14.28). Рассмотрение случая 1B, а значит, и случая 1, завершено.

Случай 2: Δ не имеет областей ранга α . Тогда $\mathcal{S}$ – карта примыканий ранга $\alpha - 1$ на диаграмме $\Delta = \Delta^{\alpha-1}$. Пусть $X \approx P_1 S_1 P_2 S_2 \dots P_k S_k$, где P_i – участки примыкания поддиаграмм примыкания $\Pi \in \mathcal{S}$ и S_i – переходные участки диаграммы Δ относительно $\mathcal{S}$, входящие в X . Заметим, что в силу леммы 9.23, (iv) $k \leq 4$. В силу 14.4, (v) имеем $\ell_{\alpha,A}(\mathcal{L}(P_1 S_1 P_2 S_2 \dots P_k S_k)) \geq t - 3$. По предложению 10.4 имеем $\sum_{i=1}^k \mathcal{W}_{\alpha-1}(\mathcal{L}(S_i)) \leq 2\eta$, откуда в силу предложения 8.22, (ii) следует $\sum_{i=1}^k \ell_{\alpha,A}(\mathcal{L}(S_i)) \leq 13 \cdot 2\eta + 4 < 15$. Тогда в силу предложения 8.14, (ii)

$$\begin{aligned} \ell_{\alpha,A}(\mathcal{L}(P_1 S_1 P_2 S_2 \dots P_k S_k)) &\leq \sum_{i=1}^k \ell_{\alpha,A}(\mathcal{L}(P_i)) + \sum_{i=1}^k \ell_{\alpha,A}(\mathcal{L}(S_i)) + 14 \\ &< \sum_{i=1}^k \ell_{\alpha,A}(\mathcal{L}(P_i)) + 29. \end{aligned}$$

Так как по условию $t - 3 \geq 4(p + 68) + 29$, то отсюда следует, что для некоторого i_0 выполнено $\ell_{\alpha,A}(\mathcal{L}(P_{i_0})) \geq p + 68$.

Рис. 75

Обозначим $P \Leftarrow P_{i_0}$, и пусть P входит в граничный цикл поддиаграммы примыкания $\Pi \in \mathcal{S}$. Пусть $\delta\Pi \approx PxQy$, где P, Q – участки примыкания и x, y – невырожденные связки ранга $\alpha - 1$ (см. определение 9.13). В зависимости от того, в какой из граничных циклов X или Y_i^{-1} входит путь Q , рассмотрим два подслучая.

Случай 2А: Q входит в X (см. рис. 75). Пусть M и N – начала пути X с конечными вершинами $\iota(P)$ и $\iota(Q)$ соответственно. Диаграмма $\Delta - \Pi$ состоит из двух связных компонент Δ_1 и Δ_2 , ни одна из которых не может быть односвязной в силу невырожденности связок x и y ранга $\alpha - 1$ и определения 9.11. Следовательно, Δ_1 и Δ_2 – кольцевые диаграммы. В этом случае легко видеть, что группа $\pi_1(\Delta, \iota(X))$ порождается классами $[X]_\Delta$ и $[MPxN^{-1}]_\Delta$. Поэтому достаточно установить включение

$$[\mathcal{L}(MPxN^{-1})]_\alpha \in [U]_\alpha \mathbf{S}_\alpha(A) [U]_\alpha^{-1}. \quad (14.31)$$

Рассмотрим пути на графе $\Gamma_{\alpha-1}$, расположенные, как на рис. 76, где $\mathcal{L}(U) \sqsubseteq \mathcal{L}(U') \sqsubseteq U$, $\mathcal{L}(R) \sqsubseteq \mathcal{L}(R') \sqsubseteq A^2$ и метки остальных путей совпадают с метками соответствующих путей на диаграмме Δ .

Рис. 76

$$[\mathcal{L}(U^{-1}\widehat{M}\widehat{P}\widehat{x}\widehat{N}^{-1}U')]_{\alpha-1} \in \mathbf{N}_{\alpha-1}(A),$$

Случай 2В: Q входит в Y_1^{-1} или в Y_2^{-1} . В силу симметрии ограничимся рассмотрением случая, когда Q входит в Y_1^{-1} (рис. 77). Пусть M – начало пути X с $\tau(M) = \iota(P)$ и N – начало пути Y_1 с $\tau(N) = \tau(Q)$. Так как группа $\pi_1(\Delta, \iota(X))$ порождается классами $[X]_\Delta$ и $[My^{-1}N^{-1}Y_1NyM^{-1}]_\Delta$, то достаточно убедиться в истинности включения

$$[\mathcal{L}(\text{My}^{-1}\text{N}^{-1}\text{Y}_1\text{N}_y\text{M}^{-1})]_\alpha \in [U]_\alpha \mathbf{S}_\alpha(A) [U]_\alpha^{-1}. \quad (14.32)$$

Рис. 77

Рассмотрим соответствующие пути на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ (см. рис. 78), где $\mathcal{L}(U) \underline{\varXi} U$, $\mathcal{L}(R) \underline{\varXi} A^2$, $\mathcal{L}(V_1) \underline{\varXi} V_1$ и $\mathcal{L}(R_1) \underline{\varXi} B_1^2$. Как и в случае 2A, рассмотрим подпуть $E \in \text{ППер}_\alpha(A, p+68)$ пути $\widehat{P}$ и подпуть $F \in \text{ППер}_\alpha(A, p+34)$ пути $\widehat{Q}^{-1}$, где $\text{ПСозл}_\alpha(E, F)$. Заметим, что из наличия F и выполнения условия 14.4, (ii) для $A^t w := B_1^{s_1} z_1$, $X := Y_1$ и $U := V_1$ вытекает $\beta_1 = \alpha$. Далее, так как $\ell_{\alpha, A}(F) \geq$

$p + 34$, то, используя 14.4, (iv) для $A^t w := B_1^{s_1} z_1$, $X := Y_1$, $U := V_1$ и предложение 8.38, (i), выводим $\text{Cогл}(\mathbf{R}_1, \mathbf{T}')$, где $\mathbf{T}'$ – периодическая основа для $\mathbf{F}$. Отсюда следует $\text{Cогл}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_1)$. Тогда, аналогично тому, как это делалось выше, для некоторого $r > 0$ получаем

$$A^r \stackrel{\alpha-1}{=} \mathcal{L}(U^{-1} \hat{M} \hat{y}^{-1} \hat{N}^{-1} V_1) B_1^r (\mathcal{L}(U^{-1} \hat{M} \hat{y}^{-1} \hat{N}^{-1} V_1))^{-1},$$

и, следовательно, по лемме 7.20

$$\mathbf{S}_\alpha(A) = [\mathcal{L}(U^{-1} \hat{M} \hat{y}^{-1} \hat{N}^{-1} V_1)]_\alpha \mathbf{S}_\alpha(B_1) [(\mathcal{L}(U^{-1} \hat{M} \hat{y}^{-1} \hat{N}^{-1} V_1))]_\alpha^{-1}.$$

Тогда с учетом (14.21)

$$[\mathcal{L}(U^{-1} \hat{M} \hat{y}^{-1} \hat{N}^{-1})]_\alpha [Y_1]_\alpha [(\mathcal{L}(U^{-1} \hat{M} \hat{y}^{-1} \hat{N}^{-1}))_\alpha]^{-1} \in \mathbf{S}_\alpha(A),$$

что влечет искомое включение (14.32).

Рис. 78

Доказательство леммы 14.8 завершено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 14.3. Пусть $\mathbf{G} \neq 1$ – конечная подгруппа группы $\mathbf{B}_\alpha$ и $\beta = \text{ранг } \mathbf{G} \geq 1$. Выберем произвольный элемент $\mathbf{g}_0 \in \mathbf{G}$ такой, что $\text{ранг } \mathbf{g}_0 = \beta$. Заменяя $\mathbf{g}_0$ на некоторую его степень в силу леммы 13.14, (ii), можно считать $n/4 \leq \text{степень } \mathbf{g}_0 \leq 3n/4$. В силу определения 13.13 и предложения 13.15 элемент $\mathbf{g}_0$ сопряжен некоторому элементу из $\mathbf{S}_\alpha^+(A_0) \setminus \mathbf{S}_\alpha^*(A_0)$, где $A_0 \in \bar{\mathcal{E}}_\beta$. Докажем вспомогательный факт, из которого утверждение предложения 14.3 вытекает в силу очевидной индукции.

Пусть $\mathbf{H}$ – конечная подгруппа группы $\mathbf{B}_\alpha$, содержащая элемент $\mathbf{g}_0$, и $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{f}^{-1} \mathbf{S}_\alpha(A) \mathbf{f}$ для некоторых $\mathbf{f} \in \mathbf{B}_\alpha$ и $A \in \bar{\mathcal{E}}_\beta$. Пусть $\mathbf{g} \in \mathbf{B}_\alpha$ и для любого $\mathbf{h} \in \mathbf{H}$ элемент $\mathbf{gh}$ имеет конечный порядок и $\text{ранг } \mathbf{gh} \leq \beta$. Тогда $\langle \mathbf{H}, \mathbf{g} \rangle \subseteq \mathbf{f}^{*-1} \mathbf{S}_\alpha(A^*) \mathbf{f}^*$ для некоторых $\mathbf{f}^* \in \mathbf{B}_\alpha$ и $A^* \in \bar{\mathcal{E}}_\beta$.

(14.33)

Пусть верна посылка (14.33). В силу следствия 13.12 и предложения 13.15 имеем $\mathbf{h}_0 = \mathbf{f}\mathbf{g}_0\mathbf{f}^{-1} \in \mathbf{S}_\alpha^+(A) \setminus \mathbf{S}_\alpha^*(A)$. Если $\beta = \alpha$, то из соотношения $\mathbf{h}_0 = \mathbf{f}\mathbf{g}^{-1}\mathbf{f}^{-1} \times \mathbf{f}\mathbf{g}\mathbf{g}_0\mathbf{f}^{-1}$, неравенства $n/4 \geq 4p + 304$ и конечности порядка элементов $\mathbf{g}^{-1}$ и $\mathbf{g}\mathbf{g}_0$ (которая вытекает из посылки (14.33) при $\mathbf{h} := 1$ и $\mathbf{h} := \mathbf{g}_0$) по лемме 14.8 получаем $\mathbf{g}^{-1} \in \mathbf{f}^{-1}\mathbf{S}_\alpha(A)\mathbf{f}$. В этом случае $\langle \mathbf{H}, \mathbf{g} \rangle \subseteq \mathbf{f}^{-1}\mathbf{S}_\alpha(A)\mathbf{f}$ и можно положить $\mathbf{f}^* = \mathbf{f}$, $A^* = A$. Пусть $\beta < \alpha$. Пусть

$$\mathbf{f}\mathbf{H}\mathbf{f}^{-1} = \{\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_k\} \quad \text{и} \quad \mathbf{h}_i = [x_i]_\alpha \quad \text{для некоторых } x_i.$$

Представим $\mathbf{g}$ в виде

$$\mathbf{g} = \mathbf{e}^{-1}[y]_\alpha \mathbf{e}, \quad (14.34)$$

где y – нормальная форма некоторого ранга $\gamma \leq \alpha - 1$. Выберем произвольное слово T такое, что

$$\mathbf{f}\mathbf{e}^{-1} = [T]_\alpha. \quad (14.35)$$

Так как элемент $\mathbf{f}^{-1}\mathbf{h}_i\mathbf{f}\mathbf{g}$ сопряжен элементу $[T^{-1}x_iTy]_\alpha$, то согласно посылке (14.33) для каждого i элемент $[T^{-1}x_iTy]_\alpha$ имеет конечный порядок и $\text{ранг}[T^{-1}x_iTy]_\alpha \leq \beta$. Так как $\text{ранг}\mathbf{g} \leq \text{ранг}\mathbf{H} = \beta$, то $\gamma \leq \beta$. Применяя лемму 14.7 последовательно при $\alpha := \alpha, \alpha - 1, \dots, \beta + 1$, найдем слова U_γ, V_γ ($\gamma = \alpha, \alpha - 1, \dots, \beta + 1$), $x_{i,\gamma}, T_\gamma$ и y_γ ($\gamma = \alpha, \alpha - 1, \dots, \beta$) такие, что $x_i \stackrel{\gamma}{\sim} x_{i,\alpha}$, $T \stackrel{\gamma}{\sim} T_\alpha$, $y \stackrel{\gamma}{\sim} y_\alpha$,

$$T_\gamma \stackrel{\gamma}{\sim} U_\gamma T_{\gamma-1} V_\gamma \quad (\gamma = \alpha, \alpha - 1, \dots, \beta + 1), \quad (14.36)$$

$$U_\gamma^{-1} x_{i,\gamma} U_\gamma \stackrel{\gamma}{\sim} x_{i,\gamma-1}, \quad V_\gamma y_\gamma V_\gamma^{-1} \stackrel{\gamma}{\sim} y_{\gamma-1} \quad (\gamma = \alpha, \alpha - 1, \dots, \beta + 1), \quad (14.37)$$

для каждого i элемент $[T_\beta^{-1}x_{i,\beta}T_\beta y_\beta]_\beta$ имеет конечный порядок, $\text{ранг}[T_\beta^{-1}x_{i,\beta}T_\beta y_\beta]_\beta \leq \beta$ и элементы $[x_{i,\beta}]_\beta$ образуют подгруппу группы $\mathbf{S}_\beta(A^*)$ для некоторого $A^* \in \bar{\mathcal{E}}_\beta$. Имеем

$$x_{0,\beta} \stackrel{\beta}{\sim} T_\beta(T_\beta^{-1}x_{0,\beta}T_\beta y_\beta)T_\beta^{-1} \cdot T_\beta y_\beta^{-1} T_\beta^{-1},$$

и так как с учетом леммы 13.14, (i) $\text{ранг}[T_\beta y_\beta^{-1} T_\beta^{-1}]_\beta = \text{ранг}\mathbf{g}^{-1} \leq \beta$, то, применив индуктивное предположение 14.8, получим

$$[T_\beta y_\beta T_\beta^{-1}]_\beta \in \mathbf{S}_\beta(A^*). \quad (14.38)$$

Положим

$$U = U_\alpha U_{\alpha-1} \dots U_{\beta+1}, \quad V = V_{\beta+1} V_{\beta+2} \dots V_\alpha \quad \text{и} \quad \mathbf{f}^* = [U]_\alpha^{-1} \mathbf{f}.$$

Из равенств (14.36), (14.37) следует

$$T \stackrel{\alpha}{\sim} U T_\beta V, \quad U^{-1} x_i U \stackrel{\alpha}{\sim} x_{i,\beta} \quad (i = 0, 1, \dots, k), \quad V y V^{-1} \stackrel{\alpha}{\sim} y_\beta. \quad (14.39)$$

Тогда для любого элемента $\mathbf{f}^{-1}\mathbf{h}_i\mathbf{f}$ подгруппы $\mathbf{H}$ имеем

$$\mathbf{f}^*(\mathbf{f}^{-1}\mathbf{h}_i\mathbf{f})\mathbf{f}^{*-1} = [U]_{\alpha}^{-1}\mathbf{h}_i[U]_{\alpha} = [U^{-1}x_iU]_{\alpha} = [x_{i,\beta}]_{\alpha} \in \mathbf{S}_{\alpha}(A^*).$$

Кроме того, используя соотношения (14.34), (14.35), (14.38) и (14.39), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^*\mathbf{g}\mathbf{f}^{*-1} &= [U]_{\alpha}^{-1}\mathbf{f}\mathbf{e}^{-1}[y]_{\alpha}\mathbf{e}\mathbf{f}^{-1}[U]_{\alpha} = [U^{-1}TyT^{-1}U]_{\alpha} \\ &= [T_{\beta}VyV^{-1}T_{\beta}^{-1}]_{\alpha} = [T_{\beta}y_{\beta}T_{\beta}^{-1}]_{\alpha} \in \mathbf{S}_{\alpha}(A^*). \end{aligned}$$

Таким образом, $\langle \mathbf{H}, \mathbf{g} \rangle \subseteq \mathbf{f}^{*-1}\mathbf{S}_{\alpha}(A^*)\mathbf{f}^*$, что и требовалось.

В оставшейся части параграфа мы докажем некоторое усиление предложения 14.3 для случая конечной подгруппы ранга, меньшего α (предложение 14.12).

14.9. ЛЕММА. Пусть $T^{-1}uT'$ – путь на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ с $\mathcal{L}(T) \sqsubseteq \mathcal{L}(T') \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ и $[\mathcal{L}(u)]_{\alpha-1} \in \mathbf{S}_{\alpha-1}(D)$ для некоторого $D \in \bigcup_{\beta \leq \alpha-1} \bar{\mathcal{E}}_{\beta}$. Пусть $A \in \mathcal{E}_{\alpha}$ и $E, F \in \text{ППер}_{\alpha}(A, 42)$ – строго близкие в ранге $\rho(A)$ подпути путей T и T' соответственно. Тогда $\text{ПСогл}_{\alpha}(E, \mathbf{g}E)$, где $\mathbf{g} = \iota(T')(\iota(T))^{-1}$ – элемент группы $\mathbf{B}_{\alpha-1}$, для которого $T' = \mathbf{g}T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, $\neg \text{ПСогл}_{\alpha}(E, \mathbf{g}E)$. В силу леммы 8.12 $\text{ПСогл}_{\alpha}(E, F)$, и, следовательно, имеем $\neg \text{ПСогл}_{\alpha}(\mathbf{g}E, F)$. Тогда по предложению 8.9 имеем либо $\mathbf{g}E <_{T'} F$, либо $F <_{T'} \mathbf{g}E$. Заметим, что утверждение леммы симметрично относительно замены $T^{-1}uT' \rightarrow T'^{-1}u^{-1}T$, $E \rightarrow F$, $F \rightarrow E$ и $\mathbf{g} \rightarrow \mathbf{g}^{-1}$. Так как из $F <_{T'} \mathbf{g}E$ следует $\mathbf{g}^{-1}F <_T E$, то достаточно ограничиться рассмотрением случая, когда $\mathbf{g}E <_{T'} F$. Пусть $\bar{E}$ – устойчивая часть пути E (см. 8.28). Мы получим противоречие, указав сколь угодно большое число попарно различных подпутей пути T . Более точно, для любого $k \geq 0$ индукцией по k мы докажем следующее утверждение:

существуют подпути $G_0, G_1, \dots, G_k \in \text{ППер}_{\alpha}(A, 8)$ пути T ,

обладающие следующими свойствами:

- (i) $G_k \ll_T G_{k-1} \ll_T \dots \ll_T G_0$;
 - (ii) для каждого $i = 0, 1, \dots, k$ пути $\mathbf{g}^i \bar{E}$ и G_i строго близки в ранге $\rho(A)$.
- (14.40)

При $k = 0$ можно положить $G_0 = \bar{E}$ (тот факт, что путь G_0 строго близок в ранге $\rho(A)$ к самому себе, вытекает из определений 6.5 и 5.16). Докажем, что из (i) и (ii) вытекает существование подпути $G_{k+1} \in \text{ППер}_{\alpha}(A, 8)$ пути T такого, что $G_{k+1} \ll_T G_k$ и пути G_{k+1} и $\mathbf{g}^{k+1} \bar{E}$ строго близки в ранге $\rho(A)$. В силу замечания из 8.28 найдется устойчивая часть $\bar{F}$ для F такая, что пути $\bar{E}$ и $\bar{F}$ строго близки в ранге $\rho(A)$. Пусть $T' = U\bar{F}V$ и $T = WG_kZ$. Так как

$$\begin{aligned} (\iota(\mathbf{g}^k T'))^{-1} \iota(T) &= (\iota(\mathbf{g}^{k+1} T))^{-1} \iota(T) = ((\iota(T))^{-1} \mathbf{g} \iota(T))^{-k-1} \\ &= ((\iota(T))^{-1} \iota(T'))^{-k-1} = [\mathcal{L}(u)]_{\alpha-1}^{-k-1} \in \mathbf{S}_{\alpha-1}(D) \end{aligned}$$

и в силу индуктивного предположения 13.3 любой элемент из $\mathbf{S}_{\alpha-1}(D)$ представляется словом из $\mathcal{H}_{\alpha-1}$, то вершины $\iota(\mathbf{g}^k \mathbf{U}) = \iota(\mathbf{g}^k \mathbf{T}')$ и $\iota(W) = \iota(\mathbf{T})$ близки в ранге $\alpha - 1$. Заметим, что из $\mathbf{gE} <_{\mathbf{T}'} \mathbf{F}$ и $\neg \text{ПСогл}_\alpha(\mathbf{gE}, \mathbf{F})$ следует $\mathbf{g}^{k+1}\mathbf{E} <_{\mathbf{g}^{k+1}\mathbf{T}} \mathbf{g}^k \mathbf{F}$ и $\neg \text{ПСогл}_\alpha(\mathbf{g}^{k+1}\mathbf{E}, \mathbf{g}^k \mathbf{F})$. Так как $\mathbf{g}^k \bar{\mathbf{F}}$ – устойчивая часть $\mathbf{g}^k \mathbf{F}$, то верны утверждения (i) и (ii) леммы 8.25 для $\mathbf{E} := \mathbf{g}^k \mathbf{F}$ и $\bar{\mathbf{E}} := \mathbf{g}^k \bar{\mathbf{F}}$. Из $\neg \text{ПСогл}_\alpha(\mathbf{g}^{k+1}\mathbf{E}, \mathbf{g}^k \mathbf{F})$ в силу 8.25, (i) и предложения 8.9 вытекает $\mathbf{g}^{k+1}\mathbf{E} \ll_{\mathbf{g}^{k+1}\mathbf{T}} \mathbf{g}^k \bar{\mathbf{F}}$, т.е. $\mathbf{g}^{k+1}\mathbf{E}$ содержится в $\mathbf{g}^k \mathbf{U}$. Так как пути $\mathbf{g}^k \bar{\mathbf{F}}$ и $\mathbf{g}^k \bar{\mathbf{E}}$ строго близки в ранге $\rho(A)$, то в силу (ii) при $i := k$ и леммы 8.2, (i), (ii) пути $\mathbf{g}^k \bar{\mathbf{F}}$ и $\mathbf{G}_k$ близки в ранге $\rho(A)$. Следовательно, конечные вершины $\tau(\mathbf{g}^k \mathbf{U}) = \iota(\mathbf{g}^k \bar{\mathbf{F}})$ и $\tau(W) = \iota(\mathbf{G}_k)$ путей $\mathbf{g}^k \mathbf{U}$ и W , как и их начальные вершины, близки в ранге $\alpha - 1$. Тогда $\mathbf{g}^k \mathbf{U}$ и W – близкие в ранге $\alpha - 1$ пути и в силу 8.25, (ii) для $\mathbf{E} := \mathbf{g}^{k+1}\mathbf{E}$, $\bar{\mathbf{E}} := \mathbf{g}^{k+1}\bar{\mathbf{E}}$ при $\mathbf{X} := \mathbf{g}^k \mathbf{U}$, $\mathbf{Y} := W$ найдется подпуть $\mathbf{G}_{k+1} \in \text{ППер}_\alpha(A, 8)$ пути W такой, что $\mathbf{g}^{k+1}\bar{\mathbf{E}}$ и $\mathbf{G}_{k+1}$ – строго близкие в ранге $\rho(A)$ пути. Тем самым завершён индуктивный переход от k к $k + 1$ и (14.40) установлено для всех значений k . В частности, согласно (14.40) (i) для любого k должно существовать k различных подпутей пути $\mathbf{T}$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

14.10. ЛЕММА. Пусть $\beta \geq \alpha$ и $\mathbf{E} \in \mathcal{E}_\alpha(\Gamma_\beta)$. Тогда существуют элементарный период $A \in \bar{\mathcal{E}}_\alpha$ и слово $w \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$ такие, что для любого $\mathbf{g} \in \mathbf{B}_\beta$ из $\mathcal{E}\text{Согл}_\alpha(\mathbf{E}, \mathbf{gE})$ следует $(\tau(\mathbf{E}))^{-1} \mathbf{g} \tau(\mathbf{E}) \in [w]_\beta^{-1} \mathbf{S}_\beta(A) [w]_\beta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{\mathbf{E}} \in \text{ППер}_\alpha(A, 8)$ ($A \in \mathcal{E}_\alpha$) – прообраз $\mathbf{E}$ на графе $\Gamma_{\alpha-1}$ и $\mathbf{P} \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-1}, A, 2)$ – периодическая основа для $\bar{\mathbf{E}}$. Можно считать, что слово $\mathcal{L}(\mathbf{P})$ оканчивается на A . Тогда из определения 5.16 и леммы 7.6 следует $A \in \bar{\mathcal{E}}_\alpha$. Пусть $\mathbf{g} \in \mathbf{B}_\beta$ – произвольный элемент такой, что $\mathcal{E}\text{Согл}_\alpha(\mathbf{E}, \mathbf{gE})$. Для некоторого $\bar{\mathbf{g}} \in \mathbf{B}_{\alpha-1}$ имеем $\pi_{\alpha-1, \alpha}(\bar{\mathbf{g}}) = \mathbf{g}$ и $\text{ПСогл}_\alpha(\bar{\mathbf{E}}, \bar{\mathbf{g}}\bar{\mathbf{E}})$ или $\text{ПСогл}_\alpha(\bar{\mathbf{E}}, \bar{\mathbf{g}}\bar{\mathbf{E}}^{-1})$ и, следовательно, $\text{Согл}(\mathbf{P}, \bar{\mathbf{g}}\mathbf{P})$ или $\text{Согл}(\mathbf{P}, \bar{\mathbf{g}}\mathbf{P}^{-1})$. Тогда в силу предложения 7.3 при $\mathbf{P} := \mathbf{P}^{-1}$ и $A := A^{-1}$ получаем $(\tau(\mathbf{P}))^{-1} \bar{\mathbf{g}} \tau(\mathbf{P}) \in \mathbf{N}_{\alpha-1}(A)$. Так как в силу леммы 8.2, (ii) пути $\mathbf{P}$ и $\bar{\mathbf{E}}$ близки в ранге $\alpha - 1$, то для некоторого $w \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$ выполнено $(\tau(\mathbf{P}))^{-1} \tau(\bar{\mathbf{E}}) = [w]_{\alpha-1}$. Отсюда следует $(\tau(\bar{\mathbf{E}}))^{-1} \bar{\mathbf{g}} \tau(\bar{\mathbf{E}}) \in [w]_{\alpha-1}^{-1} \mathbf{N}_{\alpha-1}(A) [w]_{\alpha-1}$. Применяя $\pi_{\alpha-1, \beta}$, получаем $(\tau(\mathbf{E}))^{-1} \mathbf{g} \tau(\mathbf{E}) \in [w]_\beta^{-1} \mathbf{S}_\beta(A) [w]_\beta$, что и требовалось.

14.11. ЛЕММА ($\alpha \geq 2$). Для любых $A \in \bar{\mathcal{E}}_{\alpha-1}$ и $1 \neq \mathbf{G} \leq \mathbf{S}_{\alpha-1}(A)$ существуют элементарный период $D \in \bar{\mathcal{E}}_\beta$ ранга $\beta \Rightarrow \text{ранг } \mathbf{G}$, число $r \in \mathbb{Z}$ и слово $T \in \mathcal{R}_\alpha$, не содержащее элементарных $(p + 126)$ -степеней ранга $\alpha - 1$ и элементарных 16-степеней ранга α такие, что

$$\mathbf{G} \subseteq [A]_{\alpha-1}^{-r} [T]_{\alpha-1}^{-1} \mathbf{S}_{\alpha-1}(D) [T]_{\alpha-1} [A]_{\alpha-1}^r.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\beta = \alpha - 1$ можно положить $D \Rightarrow A$, $r \Rightarrow 0$ и $T \Rightarrow 1$. Пусть $\beta < \alpha - 1$. Тогда в силу индуктивных предположений 13.15 и 14.6 для некоторой конечной подгруппы $\tilde{\mathbf{G}}$ группы $\mathbf{B}_{\alpha-2}$ имеем $\mathbf{G} = \pi_{\alpha-2, \alpha-1}(\tilde{\mathbf{G}})$ и $\tilde{\mathbf{G}} \subseteq \mathbf{N}_{\alpha-2}^*(A) \cup \mathbf{N}_{\alpha-2}^-(A)$. Пусть $\tilde{\mathbf{G}} = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_k\}$. В силу индуктивного предположения 13.2, (iv) представим каждый элемент $\mathbf{g}_i$ в виде

$$\mathbf{g}_i = [A^{-r} P_i u_i A^r]_{\alpha-2},$$

где P_i – начало слова $A^{\pm 1}$ и $u_i \in \mathcal{H}_{\alpha-2}$. Обозначим

$$\mathbf{h}_i \Rightarrow [P_i u_i]_{\alpha-2} = [A]_{\alpha-2}^r \mathbf{g}_i [A]_{\alpha-2}^{-r}.$$

Используя индуктивное предположение 14.3, найдем пополнение $[T_0]_{\alpha-2}^{-1} \mathbf{S}_{\alpha-2}(D_0)[T_0]_{\alpha-2}$ подгруппы $\mathbf{H} \Rightarrow \{\mathbf{h}_i\}_i$. Заметим, что в силу леммы 13.14, (iii) $\text{rang } \mathbf{H} = \text{rang } \tilde{\mathbf{G}} = \text{rang } \mathbf{G} = \beta$. Тогда в силу леммы 13.15 имеем $D_0 \in \mathcal{E}_\beta$. В силу леммы 7.20 можно считать $D_0 \in \bar{\mathcal{E}}_\beta$. Кроме того, можно считать $T_0 \in \mathcal{R}_{\alpha-2}$.

Если в слово T_0 не входят элементарные $(p+126)$ -степени ранга $\alpha-1$ и элементарные 16-степени ранга α , то по лемме 12.12 имеем $T_0 \in \mathcal{R}_\alpha$ и можно положить $T \Rightarrow T_0$, $D \Rightarrow D_0$. Пусть в T_0 входит слово E , являющееся элементарной $(p+126)$ -степенью ранга $\alpha-1$ или элементарной 16-степенью ранга α .

Пусть $\mathbf{F} \in \text{ППер}_{\alpha-1}(B, 8)$, где $B \in \mathcal{E}_{\alpha-1}$. Пусть $\mathbf{F}$ назовем *плохим*, если для каждого i выполнено $\text{ПСогл}_{\alpha-1}(\mathbf{F}, \mathbf{h}_i \mathbf{F})$. Пусть $\mathbf{T}_0$ – путь на $\Gamma_{\alpha-2}$ с $\tau(\mathbf{T}_0) = 1$ и $\mathcal{L}(\mathbf{T}_0) \supseteq T_0$. Докажем, что $\mathbf{T}_0$ содержит хотя бы один плохой подпуть $\mathbf{F} \in \text{ППер}_{\alpha-1}(B, 118)$ для некоторого $B \in \mathcal{E}_{\alpha-1}$.

Используя индуктивное предположение 13.3, выберем слова $x_i \in \mathcal{H}_{\alpha-2}$ ($i = 1, 2, \dots, k$), представляющие элементы подгруппы $[T_0]_{\alpha-2} \mathbf{H} [T_0]_{\alpha-2}^{-1} \subseteq \mathbf{S}_{\alpha-2}(D_0)$, т.е.

$$x_i \stackrel{\alpha-2}{=} T_0 P_i u_i T_0^{-1} \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Для каждого i рассмотрим пути P_i, u_i, x_i и $\mathbf{T}_{0,i}$ с метками соответственно P_i, u_i, x_i и T_0 , расположенные, как на рис. 79. Так как $(\tau(\mathbf{T}_0))^{-1} \tau(\mathbf{T}_{0,i}) = [P_i u_i]_{\alpha-2} = \mathbf{h}_i$, то

$$\mathbf{T}_{0,i} = \mathbf{h}_i \mathbf{T}_0.$$

Пусть $\mathbf{E}$ – подпуть пути $\mathbf{T}_0$ с $\mathcal{L}(\mathbf{E}) \supseteq E$. Рассмотрим два случая.

Рис. 79

Случай 1: E – элементарная $(p+126)$ -степень ранга $\alpha-1$, т.е. $\mathbf{E} \in \text{ППер}_{\alpha-1}(B, p+126)$ для некоторого $B \in \mathcal{E}_{\alpha-1}$. Так как $|P_i| \leq |A|$, то в силу индуктивных предположений 8.2, (ii) и 8.44, (i) для любого подпути $\mathbf{G} \in \text{ППер}_{\alpha-1}(B)$ пути P_i имеем $\ell_{\alpha,B}(\mathbf{G}) \leq p-1$. Так как $p+126-2 \cdot 45+5 = p-1+42$, то в силу индуктивных предположений 11.7, (ii) при $\mathbf{X} := \mathbf{T}_0$, $\mathbf{W} := x_i \mathbf{T}_{0,i} u_i^{-1} P_i^{-1}$, $\mathbf{Z}_1 := \mathbf{T}_{0,i}$, $\mathbf{Z}_2 := P_i^{-1}$ и 8.12 для некоторого подпути $\mathbf{H} \in \text{ППер}_{\alpha-1}(B, 42)$ пути $\mathbf{T}_{0,i}$ имеем

$ПСогл_{\alpha-1}(\mathbf{E}, \mathbf{H})$, причем $\mathbf{H}$ и некоторый подпуть $\mathbf{H}' \in \text{ППер}_{\alpha-1}(B, 42)$ пути $\mathbf{E}$ строго близки в ранге $\rho(B)$. Тогда по лемме 14.9 (формально – по индуктивному предположению 14.9) при $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{T}' := \mathbf{T}_{0,i}^{-1}\mathbf{x}_i^{-1}\mathbf{T}_0$, $\mathbf{E} := \mathbf{H}$ и $\mathbf{F} := \mathbf{H}'$ для любого i имеем $ПСогл_{\alpha-1}(\mathbf{H}, \mathbf{h}_i^{-1}\mathbf{H})$, и, следовательно, $ПСогл_{\alpha-1}(\mathbf{E}, \mathbf{h}_i^{-1}\mathbf{E})$, т.е. путь $\mathbf{E}$ является плохим.

Случай 2: $\mathbf{E}$ – элементарная 16-степень ранга α . По лемме 8.16 путь $\mathbf{E}$ можно разложить в произведение $\mathbf{E} = \mathbf{U}_0\mathbf{M}_1\mathbf{U}_1 \dots \mathbf{M}_{15}\mathbf{U}_{15}$, где $\mathbf{M}_i \in \text{ППер}_{\alpha-1}(B_i, 118)$ и никакой путь $\mathbf{M}_k\mathbf{U}_k\mathbf{M}_{k+1} \dots \mathbf{U}_{k+9}\mathbf{M}_{k+10}$ не содержится в пути, близком в ранге $\alpha - 2$ к пути $\mathbf{R} \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-2}, C)$ при $C \in \mathcal{E}_{\alpha-1}$. В частности, $\mathbf{M}_4\mathbf{U}_4\mathbf{M}_5 \dots \mathbf{U}_{13}\mathbf{M}_{14}$ не содержится ни в каком пути, близком в ранге $\alpha - 2$ к подпути пути $\mathbf{P}_i^{-1}$. Применяя индуктивное предположение 11.7, (i) при $\mathbf{X} := \mathbf{Y} := \mathbf{T}_0$, $\mathbf{W} := \mathbf{x}_i\mathbf{T}_{0,i}\mathbf{u}_i^{-1}\mathbf{P}_i^{-1}$ и добавляя, если нужно, в полученное разложение пути $\mathbf{T}_0$ пустые пути, представим $\mathbf{T}_0$ в виде $\mathbf{T}_0 = \mathbf{w}_0\mathbf{S}_1\mathbf{w}_1\mathbf{S}_2\mathbf{w}_2$, где $\sum_{j=0}^2 \mathcal{W}_{\alpha-2}(\mathcal{L}(\mathbf{w}_j)) \leq \eta$ и каждый путь $\mathbf{S}_j$ либо пуст, либо входит в некоторый подпуть пути $\mathbf{T}_0$, близкий в ранге $\alpha - 2$ к некоторому подпути пути $\mathbf{T}_{0,i}$ при $j = 1$ или $\mathbf{P}_i^{-1}$ при $j = 2$. В силу индуктивных предположений 8.22, (i) и 8.20, (iv) $\mathbf{M}_1$ не содержится в $\mathbf{w}_0$ и $\mathbf{M}_{15}$ не содержится в $\mathbf{w}_2$. Следовательно, $\mathbf{M}_2\mathbf{U}_2\mathbf{M}_3 \dots \mathbf{U}_{13}\mathbf{M}_{14}$ содержится в $\mathbf{S}_1\mathbf{w}_1\mathbf{S}_2$. В силу замечания, сделанного выше, $\mathbf{M}_4\mathbf{U}_4\mathbf{M}_5 \dots \mathbf{U}_{13}\mathbf{M}_{14}$ не содержится в $\mathbf{S}_2$, и так как в силу индуктивных предположений 8.22, (i) и 8.20, (iv) $\mathbf{M}_3$ не содержится в $\mathbf{w}_1$, получаем, что $\mathbf{M}_2$ содержится в $\mathbf{S}_1$. По индуктивному предположению 8.25 устойчивая часть $\bar{\mathbf{M}}_2$ для $\mathbf{M}_2$ и некоторый подпуть $\mathbf{N} \in \text{ППер}_{\alpha-1}(B, 84)$ пути $\mathbf{T}_{0,i}$ строго близки в ранге $\rho(B)$. Тогда в силу индуктивного предположения 14.9 путь $\bar{\mathbf{M}}_2$ является плохим.

В силу доказанного достаточно выбрать элементарный период $D \in \bar{\mathcal{E}}_\beta$ и слово $T \in \mathcal{R}_{\alpha-2}$ такие, что $\mathbf{H} \subseteq [T]_{\alpha-2}^{-1}\mathbf{S}_{\alpha-2}(D)[T]_{\alpha-2}$ и соответствующий путь $\mathbf{T}$ на графе $\Gamma_{\alpha-2}$ с $\tau(\mathbf{T}) = 1$ и $\mathcal{L}(\mathbf{T}) \supseteq T$ не содержит плохих подпутьей $\mathbf{F} \in \text{ППер}_{\alpha-1}(B, 118)$ ($B \in \mathcal{E}_{\alpha-1}$).

Выберем плохой подпуть $\mathbf{F} \in \text{ППер}_{\alpha-1}(B, 8)$ ($B \in \mathcal{E}_{\alpha-1}$) пути $\mathbf{T}_0$ с тем условием, что $\mathbf{T}_0 = \mathbf{X}\mathbf{F}\mathbf{Y}$, где $\mathbf{Y}$ не содержит плохих подпутьей. Пусть $\mathbf{Q} \in \text{Пер}(\Gamma_{\alpha-2}, B, 2)$ – периодическая основа для $\mathbf{F}$. Без ограничения общности можно считать, что слово $\mathcal{L}(\mathbf{Q})$ оканчивается на B . Тогда из определения 5.16 и леммы 7.6 следует $B \in \bar{\mathcal{E}}_{\alpha-1}$. Так как $\mathbf{h}_i\mathbf{Q}$ – периодическая основа для $\mathbf{h}_i\mathbf{F}$, то из $ПСогл_{\alpha-1}(\mathbf{F}, \mathbf{h}_i\mathbf{F})$ следует $Согл(\mathbf{Q}, \mathbf{h}_i\mathbf{Q})$. По индуктивному предположению 7.3 каждый элемент $\mathbf{h}_i$ сопряжен некоторому $\mathbf{f}_i \in \mathbf{N}_{\alpha-2}^+(B)$. Так как в силу индуктивных предположений 7.10, (i) и 6.7 любой элемент из $\mathbf{N}_{\alpha-2}^+(B) \setminus \mathbf{N}_{\alpha-2}^*(B)$ имеет бесконечный порядок, то $\mathbf{f}_i \in \mathbf{N}_{\alpha-2}^*(B)$. Так как по условию $\mathbf{G} \neq 1$, то в силу индуктивного предположения 7.14, (i) имеем $\rho(B) > 0$. Пусть $\mathbf{Q}$ оканчивается на $\mathbf{K} \in \mathcal{Эл}_{\rho(B)}(\mathbf{Q}, q_2)$ и $\mathbf{F}$ оканчивается на $\mathbf{L} \in \mathcal{Эл}_{\rho(B)}(\mathbf{F}, q_1)$, где $\mathcal{ЭСогл}_{\rho(B)}(\mathbf{K}, \mathbf{L})$. Из $Согл(\mathbf{Q}, \mathbf{h}_i\mathbf{Q})$ и конечности порядка $\mathbf{h}_i$ в силу индуктивных предположений 7.8 и 7.11 вытекает $\mathcal{ЭСогл}_{\rho(B)}(\mathbf{K}, \mathbf{h}_i\mathbf{K})$. Следовательно, для каждого i имеем $\mathcal{ЭСогл}_{\rho(B)}(\mathbf{L}, \mathbf{h}_i\mathbf{L})$. По лемме 14.10 выберем $C \in \bar{\mathcal{E}}_{\rho(B)}$ и $w \in \mathcal{H}_{\rho(B)-1}$ такие, что $(\tau(\mathbf{L}))^{-1}\mathbf{H}\tau(\mathbf{L}) \subseteq [w]_{\alpha-2}^{-1}\mathbf{S}_{\alpha-2}(C)[w]_{\alpha-2}$. Так как $\tau(\mathbf{L}) = \iota(\mathbf{Y}) = [\mathbf{Y}]_{\alpha-2}^{-1}$, где $\mathbf{Y} = \mathcal{L}(\mathbf{Y})$, то отсюда следует

$$[w\mathbf{Y}]_{\alpha-2} \mathbf{H}[\mathbf{Y}^{-1}w^{-1}]_{\alpha-2} \subseteq \mathbf{S}_{\alpha-2}(C).$$

По индуктивному предположению леммы найдутся элементарный период $D \in \bar{\mathcal{E}}_\beta$, число s и слово $Z \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$, не содержащее элементарных 16-степеней ранга $\alpha - 1$, такие, что

$$[wY]_{\alpha-2} \mathbf{H}[Y^{-1}w^{-1}]_{\alpha-2} \subseteq [C]_{\alpha-2}^{-s} [Z]_{\alpha-2}^{-1} \mathbf{S}_{\alpha-2}(D) [Z]_{\alpha-2} [C]_{\alpha-2}^s. \quad (14.41)$$

Выберем слово $T \in \mathcal{R}_{\alpha-2}$ такое, что

$$T \stackrel{\alpha-2}{\equiv} ZC^s wY.$$

Тогда из (14.41) следует

$$\mathbf{H} \subseteq [T]_{\alpha-2}^{-1} \mathbf{S}_{\alpha-2}(D) [T]_{\alpha-2}.$$

Докажем, что D и T искомые, т.е. что путь $\mathbf{T}$ на $\Gamma_{\alpha-2}$ с $\tau(\mathbf{T}) = 1$ и $\mathcal{L}(\mathbf{T}) \not\subseteq T$ не содержит плохих подпутей $\mathbf{G} \in \text{ППер}_{\alpha-1}(B', 118)$ ($B' \in \mathcal{E}_{\alpha-1}$).

Допустим, такой подпуть $\mathbf{G}$ пути $\mathbf{T}$ найдется, т.е. для всех i выполнено $\text{ПСогл}_{\alpha-1}(\mathbf{G}, \mathbf{h}_i \mathbf{G})$. Рассмотрим пути $\mathbf{Z}$ и v на графе $\Gamma_{\alpha-2}$ с метками $\mathcal{L}(\mathbf{Z}) \not\subseteq Z$ и $\mathcal{L}(v) \not\subseteq C^s w \in \mathcal{H}_{\rho(B)} \subseteq \mathcal{H}_{\alpha-2}$, как изображено на рис. 80. Так как $\ell_{\alpha-1, B'}(\mathbf{G}) > 16 + 2 \cdot 45 - 5 + 8$, то по индуктивному предположению 11.7, (ii) для некоторого подпути $\mathbf{H} \in \text{ППер}_{\alpha-1}(B', 8)$ пути $\mathbf{Y}$ выполнено $\text{ПСогл}_{\alpha-1}(\mathbf{G}, \mathbf{H})$. Тогда для всех i имеем $\text{ПСогл}_{\alpha-1}(\mathbf{H}, \mathbf{h}_i \mathbf{H})$ и, следовательно, $\mathbf{H}$ – плохой путь. Но это противоречит выбору $\mathbf{Y}$. Лемма доказана.

Рис. 80

14.12. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\mathbf{G}, \mathbf{H} \leq \mathbf{B}_\alpha$ – конечные подгруппы, $1 \neq \mathbf{G} \subseteq \mathbf{H}$ и $\text{ранг } \mathbf{H} \leq \alpha - 1$. Тогда существует такое пополнение $\bar{\mathbf{G}}$ подгруппы $\mathbf{G}$, что для любых $\mathbf{g} \in \bar{\mathbf{G}}$ и $\mathbf{h} \in \mathbf{H}$ элемент $\mathbf{gh}$ имеет конечный порядок и $\text{ранг } \mathbf{gh} \leq \text{ранг } \mathbf{H} + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\beta \Leftarrow \text{ранг } \mathbf{H}$ и $\gamma \Leftarrow \text{ранг } \mathbf{G}$. Если $\gamma = \beta$, то в качестве $\bar{\mathbf{G}}$ можно взять любое пополнение подгруппы $\mathbf{H}$. Пусть $\gamma < \beta$. Рассматривая вместо подгруппы $\mathbf{H}$ ее пополнение и сопрягая $\mathbf{G}$ и $\mathbf{H}$ с помощью подходящего элемента группы $\mathbf{B}_\alpha$, можно считать, что $\mathbf{H} = \mathbf{S}_\alpha(A)$ для некоторого $A \in \bar{\mathcal{E}}_\beta$. По лемме 14.11 при $\alpha := \beta + 1$ и $\mathbf{G} := \pi_{\beta, \alpha}^{-1}(\mathbf{G})$ найдутся элементарный период $D \in \bar{\mathcal{E}}_\gamma$, число $r \in \mathbb{Z}$ и слово T , не содержащее элементарных 16-степеней ранга β и элементарных $(p + 126)$ -степеней ранга $\beta - 1$, такие, что $\pi_{\beta, \alpha}^{-1}(\mathbf{G}) \subseteq$

$[A]_\beta^{-r}[T]_\beta^{-1}\mathbf{S}_\beta(D)[T]_\beta[A]_\beta^r$. Докажем, что $\bar{\mathbf{G}} = [A]_\alpha^{-r}[T]_\alpha^{-1}\mathbf{S}_\alpha(D)[T]_\alpha[A]_\alpha^r$ – иско-
мое пополнение $\mathbf{G}$.

Пусть $\mathbf{g} \in \bar{\mathbf{G}}$ и $\mathbf{h} \in \mathbf{S}_\alpha(A)$ – произвольные элементы. Допустим, $\mathbf{gh}$ имеет бесконечный порядок или $\mathbf{gh}$ имеет конечный порядок, но $\text{rang } \mathbf{gh} \geq \beta + 2$. По предложению 13.3 представим элементы $[T]_\alpha[A]_\alpha^r\mathbf{g}[A]_\alpha^{-r}[T]_\alpha^{-1} \in \mathbf{S}_\alpha(D)$ и $[A]_\alpha^r\mathbf{h}[A]_\alpha^{-r} \in \mathbf{S}_\alpha(A)$ словами $x \in \mathcal{H}_\gamma \subseteq \mathcal{H}_{\beta-1}$ и $y \sqsubseteq Pw \in \mathcal{H}_\beta$, где P – подслово слова A^n и $w \in \mathcal{H}_{\beta-1}$. Заметим, что $\mathbf{gh}$ и $[T^{-1}xTy]_\alpha$ сопряжены. Если $[T^{-1}xTy]_\alpha$ имеет бесконечный порядок, то по предложению 12.24 слово $T^{-1}xTy$ сопряжено в группе $\mathbf{B}_\alpha$ некоторому периоду C ранга $\alpha + 1$. Если $[T^{-1}xTy]_\alpha$ имеет конечный порядок и $\text{rang}[T^{-1}xTy]_\alpha = \delta$ при $\beta + 2 \leq \delta \leq \alpha$, то, используя предложение 13.5 и лемму 14.4 (в нормальной форме $B^s v$ ранга δ , представляющей элемент, сопряженный $[T^{-1}xTy]_\alpha$, можно считать $s \leq \frac{n}{2}$), найдем период C ранга δ такой, что слова $T^{-1}xTy$ и C сопряжены в $\mathbf{B}_\alpha$ и C – циклически приведенное в ранге α слово. В обоих случаях слово C циклически приведено в ранге α и по лемме 5.10 является периодом ранга $\beta + 2$. Тогда по предложению 12.27 некоторый циклический сдвиг слова C содержит элементарную 109-степень ранга $\beta + 1$.

По предложению 11.34, заменяя, возможно, слово y на дополнительное (при этом вместо $P \in \text{Пер}(A)$ будем иметь $P \in \text{Пер}(A) \cup \text{Пер}(A^{-1})$), получаем, что слова $T^{-1}xTy$ и C сопряжены уже в группе $\mathbf{B}_{\beta-1}$. Рассмотрим кольцевую A -диаграмму Δ ранга $\beta - 1$ с двумя граничными циклами $T'^{-1}xTvPw$ и C^{-1} , где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(T') &\sqsubseteq \mathcal{L}(T) \sqsubseteq T, \quad \mathcal{L}(x) \sqsubseteq x, \quad \mathcal{L}(v) \sqsubseteq 1, \quad \mathcal{L}(P) \sqsubseteq P, \quad \mathcal{L}(w) \sqsubseteq w, \\ \mathcal{X}_{\beta-1}(\Delta) &= \{T'^{-1}, T, P, C^{-1}\} \quad \text{и} \quad \mathcal{Y}_{\beta-1}(\Delta) = \{x, v, w\}. \end{aligned}$$

По предложению 9.19 можно считать, что на Δ задана карта примыканий $\mathcal{S}$ ранга $\beta - 1$. Пусть $C \approx R_1 S_1 R_2 S_2 \dots R_\ell S_\ell$, где R_i^{-1} – содержащиеся в C^{-1} участки примыкания поддиаграмм примыкания $\Pi \in \mathcal{S}$ и S_i^{-1} – переходные участки границы диаграммы Δ относительно $\mathcal{S}$. По лемме 9.23, (iii) имеется не более одной поддиаграммы примыкания $\Pi \in \mathcal{S}$ граничного цикла C^{-1} к каждому из участков границы T'^{-1} , T и P и не существует поддиаграмм примыкания C^{-1} к C^{-1} . В частности, $\ell \leq 3$. Перенумеровав R_i , будем считать, что R_1 – участок примыкания поддиаграммы примыкания C^{-1} к T'^{-1} , R_2 – C^{-1} к T и R_3 – C^{-1} к P (некоторые из R_i теперь могут отсутствовать). Согласно лемме 9.14 каждое слово $\mathcal{L}(R_i)$ и некоторое подслово соответствующего слова T^{-1} , T или P близки в ранге $\beta - 1$.

Пусть $E \in \text{ППер}_{\beta+1}(B, 109)$ ($B \in \mathcal{E}_{\beta+1}$) – слово, входящее в циклический сдвиг слова C . Тогда E имеет вид $w_0 Q_1 w_1 \dots Q_t w_t$, где $t \leq 4$, Q_i – подслово некоторого слова $\mathcal{L}(R_{j_i})$ и w_i либо пусто, либо входит в некоторое слово $\mathcal{L}(S_{k_i})$, причем все j_i попарно различны, за исключением, возможно, пары j_1 и j_t . В силу индуктивных предположений 10.4 и 8.20, (ii) для каждого i имеем $W_\beta(w_i) \leq 3\eta$, откуда в силу индуктивного предположения 8.22, (i) вытекает $\ell_{\beta+1, B}(w_i) \leq 1$. Далее, с учетом индуктивного предположения 8.30 имеем $\ell_{\beta+1, B}(Q_i) \leq 23$, если $j_i = 1$ или $j_i = 2$, а так как в силу индуктивных предположений 8.15 и 8.2, (ii) слово P не содержит

элементарных 10-степеней ранга $\beta + 1$, то $\ell_{\beta+1,B}(Q_i) \leq 17$, если $j_i = 3$. Тогда, используя индуктивное предположение 8.14, (ii), получаем $\ell_{\beta+1,B}(E) \leq 3 \cdot 23 + 17 + 5 + 2 \cdot 8 = 107$. Противоречие.

Таким образом, для любых $\mathbf{g} \in \bar{\mathbf{G}}$ и $\mathbf{h} \in \mathbf{H}$ элемент $\mathbf{gh}$ имеет конечный порядок и $\text{rang } \mathbf{gh} \leq \beta + 1$.

§ 15. Строение конечных подгрупп группы $\mathbf{B}_\alpha$

15.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathbf{G} = \mathbf{x}^{-1}\mathbf{S}_\alpha(A)\mathbf{x}$ ($A \in \bigcup_{\beta \leq \alpha} \mathcal{E}_\beta$) – полная конечная подгруппа группы $\mathbf{B}_\alpha$.

Через $\mathbf{G}^+$, $\mathbf{G}^*$ и $\mathbf{G}^-$ будем обозначать соответственно подгруппы $\mathbf{x}^{-1}\mathbf{S}_\alpha^+(A)\mathbf{x}$, $\mathbf{x}^{-1}\mathbf{S}_\alpha^*(A)\mathbf{x}$ и множество $\mathbf{x}^{-1}\mathbf{S}_\alpha^-(A)\mathbf{x}$.

Элемент $\mathbf{x}^{-1}[A]_\alpha\mathbf{x}$ будем называть *базисным элементом* подгруппы $\mathbf{G}$.

Из предложения 13.17 вытекает, что обозначения $\mathbf{G}^+$, $\mathbf{G}^*$ и $\mathbf{G}^-$ корректны, т.е. не зависят от выбора представления группы $\mathbf{G}$ в виде $\mathbf{x}^{-1}\mathbf{S}_\alpha(A)\mathbf{x}$ при $A \in \bigcup_{\beta \leq \alpha} \mathcal{E}_\beta$. Сформулируем еще два непосредственных следствия из утверждений, доказанных в § 13 и § 14, которые понадобятся нам в дальнейшем.

15.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $\mathbf{G}_1$ и $\mathbf{G}_2$ – два пополнения конечной подгруппы $\mathbf{H} \leq \mathbf{B}_\alpha$, то $\mathbf{H} \cap \mathbf{G}_1^+ = \mathbf{H} \cap \mathbf{G}_2^+$, $\mathbf{H} \cap \mathbf{G}_1^* = \mathbf{H} \cap \mathbf{G}_2^*$ и $\mathbf{H} \cap \mathbf{G}_1^- = \mathbf{H} \cap \mathbf{G}_2^-$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вытекает из предложений 13.17 и 14.2.

15.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $\mathbf{G}$ – пополнение конечной подгруппы $\mathbf{H} \leq \mathbf{B}_\alpha$, $\mathbf{x} \in \mathbf{B}_\alpha$ и $\mathbf{x}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{x} \subseteq \mathbf{G}$, то найдется $\mathbf{y} \in \mathbf{G}$ такой, что $\mathbf{x}^{-1}\mathbf{h}\mathbf{x} = \mathbf{y}^{-1}\mathbf{h}\mathbf{y}$ для всех $\mathbf{h} \in \mathbf{H}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вытекает из предложения 13.16.

Наша цель сейчас – получить некоторое описание конечных подгрупп группы $\mathbf{B}_\alpha$ (предложение 15.9) и одновременно подготовить техническую базу для § 16, в доказательстве основного результата которого (предложение 16.1) свойства конечных подгрупп группы $\mathbf{B}_\alpha$ будут играть главную роль. Фактически мы уже сделали первый шаг в этом направлении: благодаря предложению 14.3 задача описания конечных подгрупп группы $\mathbf{B}_\alpha$ сводится к задаче описания ее полных конечных подгрупп. Ряд фактов о строении полных конечных подгрупп $\mathbf{B}_\alpha$ по существу был получен ранее, в предыдущих параграфах. Соберем эти факты вместе.

Прежде всего заметим, что в силу определения 7.13, предложения 13.7, (ii) и предложения 7.2, (ii) для любой полной конечной подгруппы $\mathbf{G} \leq \mathbf{B}_\alpha$ имеем либо $\mathbf{G} = \mathbf{G}^+$, либо $|\mathbf{G} : \mathbf{G}^+| = 2$ и во втором случае $\mathbf{G}/\mathbf{G}^+ = \{\mathbf{G}^+, \mathbf{G}^-\}$. Более существенную информацию о строении $\mathbf{G}$ можно получить, рассмотрев ее подгруппу $\mathbf{G}^*$, которая в силу следствия 7.16 нормальна в $\mathbf{G}$. В силу определения 7.12, предложения 7.10, (iii), (iv) и предложения 13.7, (ii) факторгруппа $\mathbf{G}^+/\mathbf{G}^*$ – циклическая группа порядка n , порожденная элементом $\mathbf{c}\mathbf{G}^*$, где

c – базисный элемент G . Более того, так как $c^n = 1$, то G^+ , а значит, и сама группа G в случае $G^- = \emptyset$, есть полупрямое произведение нормальной подгруппы G^* и циклической подгруппы $\langle c \rangle$. Теперь пусть $G^- \neq \emptyset$. В этом случае $|G : G^*| = |G : G^+| \cdot |G^+ : G^*| = 2n$. В силу следствия 7.17 для любого $a \in G^-$ имеем $a^2 \in G^*$, и, в частности, $|\langle G^*, a \rangle : G^*| = 2$. Так как $G = \langle G^+, a \rangle = \langle G^*, c, a \rangle$ и $ac \in G^-$, то факторгруппа G/G^* порождается двумя инволюциями aG^* и $a^{-1}cG^*$, где $a \in G^-$ – произвольный элемент. Отсюда следует, что G/G^* – диэдральная группа порядка $2n$. Из сказанного следует также, что G/G^* имеет задание $\langle \bar{a}, \bar{c} \mid \bar{a}^2 = (\bar{a}\bar{c})^2 = \bar{c}^n = 1 \rangle$, где $\bar{a} \Rightarrow aG^*$ и $\bar{c} \Rightarrow cG^*$. Мы будем пользоваться этим фактом для вычислений в группе G/G^* .

Таким образом, нам известно строение факторгруппы G/G^* . Наша задача сейчас – свести соотношения в группе G к соотношениям в конечной подгруппе $H \leq B_\alpha$ меньшего ранга, не теряя при этом информацию о соотношениях в G^* . Более точно, для любой полной конечной подгруппы $G \leq B_\alpha$ мы построим гомоморфизм G на некоторую подгруппу $H \leq B_\alpha$ с $\text{rang } H < \text{rang } G$, тождественный на G^* . Заметим, что если $H \leq B_\alpha$ – конечная подгруппа ранга $\beta < \alpha$, то в силу предложений 14.3 и 13.7, (i) в группе B_β найдется подгруппа $\tilde{H}$, изоморфная H . Так как мы действуем в рамках индукции по рангу α , то строение подгруппы H можно считать известным.

Нам понадобится описание элементов максимального ранга полной конечной подгруппы $G \in B_\alpha$, данное в предложении 13.15. Согласно этому предложению

$$\forall g \in G \begin{cases} \text{rang } g = \text{rang } G \Leftrightarrow g \in G^+ \setminus G^*, \\ \text{rang } g < \text{rang } G \Leftrightarrow g \in G^* \cup G^-. \end{cases} \quad (15.1)$$

Попутно заметим, что из (15.1) и сделанных выше замечаний легко вытекает следующая лемма, которая будет использоваться в § 16.

15.4. ЛЕММА. Пусть $G \leq B_\alpha$ – полная конечная подгруппа, $H \leq G$ и $\text{rang } H < \text{rang } G$. Тогда

- (i) $\text{rang } HG^* < \text{rang } G$;
- (ii) если $h \in H \cap G^-$, то $H \subseteq \langle G^*, h \rangle$;
- (iii) $|HG^* : G^*| \leq 2$ и $|H : H \cap G^*| \leq 2$.

Перейдем к построению указанного гомоморфизма полной конечной подгруппы $G \in B_\alpha$ на конечную подгруппу меньшего ранга.

15.5. ЛЕММА. Пусть G, H – конечные подгруппы группы B_α , $H \subseteq G$ и $|G : H| \leq 2$. Пусть $\bar{H}$ – пополнение подгруппы H . Тогда существует гомоморфизм $\phi: G \rightarrow \bar{H}$, тождественный на H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\text{rang } G = \text{rang } H$, то в силу предложений 14.3 и 14.2 имеем $G \subseteq z^{-1}\bar{H}z$ для некоторого элемента $z \in B_\alpha$, коммутирующего со всеми элементами из H . В этом случае в качестве ϕ можно взять вложение $G \rightarrow \bar{H}$,

определяемое равенством $\phi(g) = zg z^{-1}$. Пусть $\text{ранг } G > \text{ранг } H$. В силу очевидной индукции достаточно указать тождественный на H гомоморфизм $\psi: G \rightarrow B_\alpha$ такой, что $\text{ранг } \psi(G) < \text{ранг } G$. Выберем пополнение $\bar{G}$ подгруппы G , и пусть c – базисный элемент $\bar{G}$. Очевидно, $c^{n/2}$ – инволюция, и в силу следствия 7.19 элемент $c^{n/2}$ лежит в центре группы $\bar{G}$. Так как $|G : H| \leq 2$, то отображение $\psi: G \rightarrow B_\alpha$, задаваемое равенствами

$$\psi(g) = \begin{cases} g, & \text{если } g \in H, \\ c^{n/2}g, & \text{если } g \in G \setminus H, \end{cases}$$

является гомоморфизмом групп. Докажем, что $\text{ранг } \psi(g) < \text{ранг } G$ для любого $g \in G$. Если $g \in G \cap \bar{G}^-$, то $\psi(g) \in \bar{G}^-$, и тогда $\text{ранг } \psi(g) < \text{ранг } G$ согласно (15.1). Пусть $g \in G \cap \bar{G}^+$. Так как $g^2 \in H$, то $\text{ранг } g^2 < \text{ранг } G$, откуда в силу (15.1) имеем либо $g \in \bar{G}^*$, либо $g \in c^{n/2}\bar{G}^*$. В случае $g \in \bar{G}^*$ имеем $g \in H$, так как иначе взяв элемент $g' \in G \setminus H$ с $\text{ранг } g' = \text{ранг } G$, получим $gg' \in H$ и в силу (15.1) $\text{ранг } gg' = \text{ранг } G$ вопреки предположению. Следовательно, $\psi(g) = g \in \bar{G}^*$, и тогда $\text{ранг } \psi(g) < \text{ранг } G$. Наконец, если $g \in c^{n/2}\bar{G}^*$, то в этом случае $g \in G \setminus H$ ввиду $\text{ранг } g = \text{ранг } G$, и, следовательно, $\psi(g) \in \bar{G}^*$, откуда вытекает $\text{ранг } \psi(g) < \text{ранг } G$.

15.6. ЛЕММА. Пусть G – произвольная группа и $G = \langle K, a, b \rangle$, где $K \trianglelefteq G$, $|\langle K, a \rangle : K| \leq 2$, $|\langle K, b \rangle : K| \leq 2$ и элемент ab имеет порядок n или ∞ . Пусть H – некоторая группа периода n , и пусть гомоморфизмы $\phi: \langle K, a \rangle \rightarrow H$ и $\psi: \langle K, b \rangle \rightarrow H$ таковы, что $\phi|_K = \psi|_K$. Тогда ϕ и ψ продолжаются до гомоморфизма группы G в H , т.е. существует гомоморфизм $\omega: G \rightarrow H$ такой, что $\omega|_{\langle K, a \rangle} = \phi$ и $\omega|_{\langle K, b \rangle} = \psi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай, когда $|\langle K, a \rangle : K| = 2$ и $|\langle K, b \rangle : K| = 2$. Предположим сначала, что ab имеет порядок n . Пусть $F = \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$ – свободная группа ранга 2. Рассмотрим эпиморфизм π свободного произведения $K * F$ на G , определенный равенствами $\pi|_K = \text{id}$, $\pi(\bar{a}) = a$ и $\pi(\bar{b}) = b$. Мы утверждаем, что $\ker \pi$ есть нормальное замыкание в $K * F$ элементов

$$\begin{aligned} \bar{a}^2 a^{-2}, \quad \bar{b}^2 b^{-2}, \quad (\bar{a}\bar{b})^n, \quad \bar{a}^{-1} g \bar{a} a^{-1} g^{-1} a \quad (g \in K) \\ \text{и} \quad \bar{b}^{-1} g \bar{b} b^{-1} g^{-1} b \quad (g \in K). \end{aligned} \quad (15.2)$$

Для доказательства этого факта обозначим через N нормальное замыкание элементов (15.2) в $K * F$. Очевидно, $N \subseteq \ker \pi$. С учетом $K \trianglelefteq G$ для любого $g \in \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ имеем $g^{-1}Kg \subseteq (\pi(g))^{-1}K\pi(g)N = KN$, следовательно, $KN \trianglelefteq K * F$. Более того, из вида элементов (15.2) следует, что $K * F / KN$ есть диэдральная группа порядка $2n$. С другой стороны, из условия леммы следует, что $G/K \simeq K * F / K \ker \pi$ – также диэдральная группа порядка $2n$. Поэтому $KN = K \ker \pi$. Так как $K \cap \ker \pi = 1$, то отсюда следует $N = \ker \pi$.

Теперь определим гомоморфизм $\bar{\omega}: K * F \rightarrow H$ равенствами

$$\bar{\omega}|_K = \phi|_K = \psi|_K, \quad \bar{\omega}(\bar{a}) = \phi(a) \quad \text{и} \quad \bar{\omega}(\bar{b}) = \psi(b).$$

Так как $\bar{\omega}(\mathbf{g}) = 1$ для любого элемента $\mathbf{g}$ из списка (15.2), то $\ker \pi \subseteq \ker \bar{\omega}$ и, таким образом, $\bar{\omega}$ индуцирует гомоморфизм $\omega: \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}$, который, очевидно, является искомым.

В случае, когда $\mathbf{ab}$ имеет бесконечный порядок, рассуждения отличаются лишь тем, что в списке (15.2) будет отсутствовать элемент $(\bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{b}})^n$ и в доказательстве равенства $\mathbf{KN} = \mathbf{K} \ker \pi$ роль диэдральной группы порядка $2n$ играет бесконечная диэдральная группа $\mathbf{D}_\infty$ (при этом нужно использовать тот факт, что никакая нетривиальная факторгруппа группы $\mathbf{D}_\infty$ не изоморфна $\mathbf{D}_\infty$).

Теперь мы готовы доказать основную лемму.

15.7. ЛЕММА. Пусть $\mathbf{G}$ – полная конечная подгруппа группы $\mathbf{B}_\alpha$, и пусть $\mathbf{H}$ – пополнение $\mathbf{G}^*$. Тогда существует тождественный на $\mathbf{G}^*$ гомоморфизм $\phi: \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\text{rang } \mathbf{H} < \alpha$ ввиду (15.1), то в силу предложения 13.7, (i) и индуктивного предположения 15.10, (i) $\mathbf{H}$ – группа периода n . Пусть $\mathbf{c}$ – базисный элемент $\mathbf{G}$. Рассмотрим два случая.

Случай 1: $\mathbf{G}^- = \emptyset$. Так как $\mathbf{G} = \mathbf{G}^* \ltimes \langle \mathbf{c} \rangle$, то нам достаточно указать элемент $\phi(\mathbf{c}) \in \mathbf{H}$ такой, что $\mathbf{c}^{-1}\mathbf{g}\mathbf{c} = (\phi(\mathbf{c}))^{-1}\mathbf{g}\phi(\mathbf{c})$ для любого $\mathbf{g} \in \mathbf{G}^*$. Существование такого элемента $\phi(\mathbf{c})$ утверждается в предложении 15.3.

Случай 2: $\mathbf{G}^- \neq \emptyset$. Выберем произвольный $\mathbf{a} \in \mathbf{G}^-$. Тогда существование искомого гомоморфизма ϕ вытекает из леммы 15.5 и леммы 15.6 при $\mathbf{K} := \mathbf{G}^*$, $\mathbf{a} := \mathbf{a}$ и $\mathbf{b} := \mathbf{a}^{-1}\mathbf{c}$.

15.8. ЛЕММА. Для любой полной конечной подгруппы $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{B}_\alpha$ группа $\mathbf{G}^*$ является 2-группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду индукции и определения 7.13 достаточно проверить, что при $A \in \mathcal{E}_\alpha$ группа $\mathbf{N}_{\alpha-1}^*(A)$ является 2-группой, а в силу леммы 7.2, (iii) достаточно ограничиться рассмотрением случая $A \in \bar{\mathcal{E}}_\alpha$. Кроме того, в силу предложения 7.14, (i) можно считать $\rho(A) > 0$.

Сначала докажем, что

$$\mathbf{N}_{\alpha-1}^*(A) \subseteq \pi_{\rho(A), \alpha-1}(\mathbf{N}_{\rho(A)}^*(A)). \quad (15.3)$$

Пусть $\mathbf{g} \in \mathbf{N}_{\alpha-1}^*(A)$ – произвольный элемент. Представим $\mathbf{g}$ словом $w \in \mathcal{H}_{\rho(A)}$ согласно лемме 13.2, (i). Согласно определению 7.1 для некоторого $t > 0$ выполнено $A^t \stackrel{\alpha-1}{=} w^{-1}A^tw$. По индуктивному предположению 11.3 имеем $A^t \stackrel{\rho(A)}{=} w^{-1}A^tw$ и, следовательно, $[w]_{\rho(A)} \in \mathbf{N}_{\rho(A)}^*(A)$. Если $[w]_{\rho(A)} \notin \mathbf{N}_{\rho(A)}^*(A)$, то по предположению 7.10, (i) выполнено $w^k \stackrel{\rho(A)}{=} A^r$ для некоторых $k, r \neq 0$, откуда вытекает $w^k \stackrel{\alpha-1}{=} A^r$. Но $\mathbf{g} = [w]_{\alpha-1}$ – элемент конечного порядка в силу предложения 7.14, (ii), в то время как $[A]_{\alpha-1}$ имеет бесконечный порядок. Следовательно, $[w]_{\rho(A)} \in \mathbf{N}_{\rho(A)}^*(A)$ и тем самым для любого $\mathbf{g} \in \mathbf{N}_{\alpha-1}^*(A)$ мы указали элемент $\tilde{\mathbf{g}} \stackrel{=}{=} [w]_{\rho(A)} \in \mathbf{N}_{\rho(A)}^*(A)$, для которого $\pi_{\rho(A), \alpha-1}(\tilde{\mathbf{g}}) = \mathbf{g}$, что и доказывает (15.3).

В силу (15.3) достаточно проверить, что $\mathbf{N}_{\rho(A)}^*(A)$ – 2-группа. По предложению 7.14, (i) имеем $\mathbf{N}_{\rho(A)}(A) \subseteq \mathbf{x}^{-1}\mathbf{S}_{\rho(A)}(B)\mathbf{x}$ для некоторых $\mathbf{x} \in \mathbf{B}_{\rho(A)}$ и $B \in \mathcal{E}_{\rho(A)}$. Пусть $\mathbf{g} \in \mathbf{N}_{\rho(A)}^*(A)$ – произвольный элемент, и пусть $[A]_{\rho(A)}^t = \mathbf{g}^{-1}[A]_{\rho(A)}^t\mathbf{g}$, где $t > 0$. Если $\mathbf{xg}\mathbf{x}^{-1} \in \mathbf{S}_{\rho(A)}^+(B) \setminus \mathbf{S}_{\rho(A)}^*(B)$, то, применив индуктивное предположение 13.11 при $A := B$, $\mathbf{g} := \mathbf{h} := \mathbf{xg}\mathbf{x}^{-1}$ и $\mathbf{f} := \mathbf{x}[A]_{\rho(A)}^t\mathbf{x}^{-1}$, получим $\mathbf{x}[A]_{\rho(A)}^t\mathbf{x}^{-1} \in \mathbf{S}_{\rho(A)}(B)$ вопреки бесконечности порядка $[A]_{\rho(A)}$. Следовательно, $\mathbf{xg}\mathbf{x}^{-1} \in \mathbf{S}_{\rho(A)}^*(B) \cup \mathbf{S}_{\rho(A)}^-(B)$, и тогда $\mathbf{xg}^2\mathbf{x}^{-1} \in \mathbf{S}_{\rho(A)}^*(B)$. Так как по индуктивному предположению леммы $\mathbf{S}_{\rho(A)}^*(B)$ – 2-группа, то $\mathbf{g}^{2^k} = 1$ для некоторого k , что и требовалось доказать.

15.9. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Любая конечная подгруппа группы $\mathbf{B}_\alpha$ изоморфно вкладывается в конечное прямое произведение вида $\mathbf{D}_n \times \mathbf{D}_{\bar{n}} \times \mathbf{D}_{\bar{n}} \times \cdots \times \mathbf{D}_{\bar{n}}$, где $\bar{n}$ – наибольший делитель n вида 2^k .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{G} \leq \mathbf{B}_\alpha$ – конечная подгруппа. В силу предложения 14.3 можно считать, что $\mathbf{G}$ – полная конечная подгруппа. Как было замечено в начале параграфа, факторгруппа $\mathbf{G}/\mathbf{G}^*$ является либо циклической группой $\mathbf{C}_n = \langle \mathbf{c} \mid \mathbf{c}^n = 1 \rangle$, либо диэдральной группой $\mathbf{D}_n = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \mid \mathbf{a}^2 = (\mathbf{ac})^2 = \mathbf{c}^n = 1 \rangle$. Считая группу $\mathbf{C}_n$ вложенной в $\mathbf{D}_n$, получаем гомоморфизм $\pi: \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{D}_n$ с $\ker \pi = \mathbf{G}^*$. Выберем пополнение $\mathbf{H}$ подгруппы $\mathbf{G}^*$, и пусть $\phi: \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}$ – тождественный на $\mathbf{G}^*$ гомоморфизм, построенный по лемме 15.7. Мы имеем, таким образом, вложение

$$\pi \times \phi: \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{D}_n \times \mathbf{H}.$$

Так как $\text{rang } \mathbf{H} < \text{rang } \mathbf{G} \leq \alpha$, то в силу предложения 13.7, (i) и индуктивного предположения существует вложение

$$\lambda_1 \times \lambda_2 \times \cdots \times \lambda_r: \mathbf{H} \rightarrow \underbrace{\mathbf{D}_n \times \mathbf{D}_{\bar{n}} \times \mathbf{D}_{\bar{n}} \times \cdots \times \mathbf{D}_{\bar{n}}}_r.$$

Пусть $n = \bar{n}t$ и $\rho: \mathbf{D}_n \rightarrow \mathbf{D}_{\bar{n}}$ – эпиморфизм с $\ker \rho = \langle \mathbf{c}^t \rangle$. Докажем, что гомоморфизм

$$\pi \times \rho\lambda_1\phi \times \lambda_2\phi \times \cdots \times \lambda_r\phi: \mathbf{G} \rightarrow \underbrace{\mathbf{D}_n \times \mathbf{D}_{\bar{n}} \times \mathbf{D}_{\bar{n}} \times \cdots \times \mathbf{D}_{\bar{n}}}_{r+1}$$

является вложением. Пусть

$$\mathbf{g} \in \ker(\pi \times \rho\lambda_1\phi \times \lambda_2\phi \times \cdots \times \lambda_r\phi) = \ker \pi \cap \ker \rho\lambda_1\phi \cap \bigcap_{i=2}^r \ker \lambda_i\phi.$$

Так как $\mathbf{g} \in \ker \pi = \mathbf{G}^*$, то по лемме 15.8 порядок элемента $\mathbf{g}$, а значит, и элемента $\lambda_1\phi(\mathbf{g})$, есть число вида 2^k . С другой стороны, порядок любого элемента из $\ker \rho$ есть нечетное число. Следовательно, $\lambda_1\phi(\mathbf{g}) = 1$, и, значит,

$$\phi(\mathbf{g}) \in \bigcap_{i=1}^r \ker \lambda_i = \{1\}.$$

Отсюда вытекает $\mathbf{g} = 1$, что и требовалось.

15.10. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Любая конечная подгруппа группы B_α удовлетворяет тождествам:*

- (i) $x^n = 1$;
- (ii) $[x^{n/2}, y] = 1$;
- (iii) $[x^2, y^2] = 1$;
- (iv) $[x^{n/4}, y, z] = 1$;
- (v) $x^{-3}wx^3 = x^{-1}wx \cdot w^{-1} \cdot x^{-2}wx^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как группа D_n есть гомоморфный образ группы D_n , то в силу предложения 15.9 достаточно проверить выполнение указанных тождеств на группе $D_n = \langle a, c \mid a^2 = (ac)^2 = c^n = 1 \rangle$, что является несложным упражнением (тождество (iv) выполнено при n , кратном 8, для остальных тождеств достаточно потребовать, чтобы n было четным). Покажем, например, что для любых $x, w \in D_n$ имеет место равенство (v). Если $x \in D_n \setminus \langle c \rangle$, то $x^2 = 1$, и в этом случае (v) превращается в тривиальное равенство. Пусть $x \in \langle c \rangle$. Если $w \in \langle c \rangle$, то $x^{-1}wx = w$, и тогда равенство (v) снова становится тривиальным. Если же $w \in D_n \setminus \langle c \rangle$, то имеет место равенство $w^{-1}xw = x^{-1}$, и, следовательно, $[w, x^t] = w^{-1}x^{-t}wx^t = x^{2t}$. В частности, $[w, x^3] = [w, x][w, x^2]$, откуда сокращением слева на w^{-1} получаем требуемое соотношение (v).

15.11. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть $G \leq B_\alpha$ – конечная подгруппа и $x \in B_\alpha$ – элемент бесконечного порядка, лежащий в нормализаторе $N_{B_\alpha}(G)$ подгруппы G . Тогда верны следующие утверждения:*

- (i) $(xg)^n = x^n$ и $x^{n/2}g = gx^{n/2}$ для любого $g \in G$;
- (ii) если $h \in N_{B_\alpha}(G)$ и $h^2, (xh)^2 \in G$, то $h^{-1}x^{n/2}h = x^{-n/2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть $\bar{G}$ – пополнение подгруппы G . По предложению 15.3 найдется $y \in \bar{G}$ такой, что $x^{-1}gx = y^{-1}gy$ для любого $g \in G$. Так как, очевидно, группа $\langle G, x \rangle$ является полупрямым произведением своей нормальной подгруппы G и бесконечной циклической группы $\langle x \rangle$, то можно определить гомоморфизм $\phi: \langle G, x \rangle \rightarrow \bar{G}$, полагая $\phi|_G = \text{id}$ и $\phi(x) = y$. Для любого $g \in G$ имеем $(xg)^n x^{-n} \in G$ и $[x^{n/2}, g] \in G$, следовательно, используя предложение 15.10, (i), (ii), получаем

$$(xg)^n x^{-n} = \phi((xg)^n x^{-n}) = (\phi(x)g)^n (\phi(x))^{-n} = 1$$

и

$$[x^{n/2}, g] = \phi([x^{n/2}, g]) = [(\phi(x))^{n/2}, g] = 1.$$

(ii) Из посылки следует $|\langle G, h \rangle : G| \leq 2$ и $|\langle G, xh \rangle : G| \leq 2$. Тогда в силу бесконечности порядка элемента $x^{-1} = h(xh)^{-1}$, лемм 15.5, 15.6 и предложения 15.10, (i) существует тождественный на G гомоморфизм $\omega: \langle G, x, h \rangle \rightarrow \bar{G}$, где $\bar{G}$ – пополнение G . Из $h^{-1}xhx = h^{-2}(hx)^2 \in G$ и $G \trianglelefteq \langle G, x, h \rangle$ следует $h^{-1}x^{n/2}hx^{n/2} \in G$, поэтому, с учетом предложения 15.10, (i), (ii),

$$h^{-1}x^{n/2}hx^{n/2} = \omega(h^{-1}x^{n/2}hx^{n/2}) = [\omega(h), (\omega(x))^{-n/2}] (\omega(x))^n = 1.$$

§ 16. Цепи сопряженных элементов в группе B_α

Цель этого параграфа – доказательство следующего утверждения:

16.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если конечная подгруппа $G \leq B_\alpha$ и элементы $x, w \in B_\alpha$ таковы, что $x^{-i}wx^i \in G$ при $i = 0, 1, \dots, 5$, то $x^{-i}wx^i \in G$ при любом i .

16.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\bar{w} = (w_1, w_2, \dots, w_\ell)$ – конечная последовательность элементов группы B_α . Свяжем с $\bar{w}$ следующие подгруппы:

$$\begin{aligned} \langle \bar{w} \rangle &= \langle w_1, w_2, \dots, w_\ell \rangle, \\ M(\bar{w}) &= \text{нормальное замыкание } w_1^2, w_2, w_3, \dots, w_{\ell-1}, w_\ell^2 \text{ в } \langle \bar{w} \rangle, \\ L(\bar{w}) &= \langle M(\bar{w}), w_1 \rangle, \\ R(\bar{w}) &= \langle M(\bar{w}), w_\ell \rangle. \end{aligned}$$

Очевидно, $|L(\bar{w}) : M(\bar{w})| \leq 2$, $|R(\bar{w}) : M(\bar{w})| \leq 2$ и $\langle \bar{w} \rangle = \langle L(\bar{w}), R(\bar{w}) \rangle = \langle M(\bar{w}), w_1, w_\ell \rangle$.

16.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Конечную последовательность $\bar{w} = (w_1, w_2, \dots, w_\ell)$ элементов группы B_α назовем *цепью*, если для некоторого $x \in B_\alpha$ выполнено

$$x^{-1}w_i x = w_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, \ell - 1) \quad (16.1)$$

и подгруппа $M(\bar{w})$ конечна. Элемент x , удовлетворяющий равенствам (16.1), будем называть *сопрягающим элементом* цепи $\bar{w}$.

Если элементы x и w удовлетворяютсылке предложения 16.1, то последовательность $\bar{w} = (w, x^{-1}wx, \dots, x^{-5}wx^5)$ является цепью длины 6. На первый взгляд, использование этого понятия для доказательства предложения 16.1 кажется неудобным, так как в нем не участвует явно элемент x . Однако мы сведем сейчас условие заключения предложения 16.1 к некоторому свойству элементов из последовательности $\bar{w}$, не зависящему от x .

16.4. ЛЕММА. Пусть $\bar{w} = (w_1, w_2, \dots, w_\ell)$ – цепь длины $\ell \geq 4$ и x – сопрягающий элемент $\bar{w}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) группа $\langle \bar{w} \rangle$ конечна и $x^{-i}wx^i \in \langle \bar{w} \rangle$ при любом i ;
- (ii) $w_{i+3} = w_{i+1}w_i^{-1}w_{i+2}$ для некоторого (а значит, и для любого) i при $1 \leq i \leq \ell - 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) $\Rightarrow$ (ii): Выберем пополнение G подгруппы $\langle \bar{w} \rangle$. Так как $x^{-1}\langle \bar{w} \rangle x = \langle \bar{w} \rangle$, то по предложению 15.3 найдется $y \in G$ такой, что $x^{-1}gx = y^{-1}gy$ для любого $g \in \langle \bar{w} \rangle$. Тогда по предложению 15.10, (v) имеем $y^{-3}w_1y^3 = y^{-1}w_1y \cdot w_1^{-1} \cdot y^{-2}w_1y^2$, т.е. $w_4 = w_2w_1^{-1}w_3$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Обозначим $w_i = x^{-i+1}w_1x^{i-1}$ для любого $i \in \mathbb{Z}$. Сопрягая равенство $w_{i+3} = w_{i+1}w_i^{-1}w_{i+2}$ всевозможными степенями x , получаем, что при любом $i \in \mathbb{Z}$ подгруппа $\langle w_i, w_{i+1}, w_{i+2} \rangle$ содержит w_{i-1} и w_{i+3} . Отсюда следует

$$\langle w_i \rangle_{i \in \mathbb{Z}} \subseteq \langle w_2, w_3, w_4 \rangle \subseteq R(\bar{w}).$$

Остается заметить, что из конечности $M(\bar{w})$ вытекает конечность $R(\bar{w})$.

16.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Цепь $\bar{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_\ell)$ длины $\ell \geq 4$ назовем *регулярной*, если для некоторого (или, эквивалентно, для любого) $1 \leq i \leq \ell - 3$ выполнено $\mathbf{w}_{i+3} = \mathbf{w}_{i+1}\mathbf{w}_i^{-1}\mathbf{w}_{i+2}$.

Ввиду леммы 16.4 предложение 16.1 вытекает из следующего утверждения.

16.6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Любая цепь $\bar{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_\ell)$ длины $\ell \geq 6$ регулярна.

Доказательству предложения 16.6 посвящена оставшаяся часть параграфа. Мы будем использовать индукцию, шаг которой состоит в сведении контрпримера к предложению 16.6 к более простому контрпримеру. Роль параметра индукции будет играть число $\text{ранг } \mathbf{L}(\bar{\mathbf{w}}) + \text{ранг } \mathbf{R}(\bar{\mathbf{w}})$. Заметим, что если последовательность $\bar{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_\ell)$ является цепью, то любая ее подпоследовательность $\bar{\mathbf{v}} = (\mathbf{w}_r, \mathbf{w}_{r+1}, \dots, \mathbf{w}_{r+t})$ также является цепью, причем если $\bar{\mathbf{v}}$ имеет длину $t + 1 \geq 4$, то $\bar{\mathbf{w}}$ регулярна тогда и только тогда, когда регулярна $\bar{\mathbf{v}}$. Наша задача будет состоять в том, чтобы для нерегулярной цепи $\bar{\mathbf{w}}$ длины $\ell \geq 6$ построить новую цепь $\bar{\mathbf{w}}'$ той же длины, отличающуюся от $\bar{\mathbf{w}}$ лишь элементами $\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{w}_\ell$, но с меньшим параметром $\text{ранг } \mathbf{L}(\bar{\mathbf{w}}) + \text{ранг } \mathbf{R}(\bar{\mathbf{w}})$.

Заметим, что при выводе импликации (i) $\Rightarrow$ (ii) в доказательстве леммы 16.4 фактически доказана

16.7. ЛЕММА. Если $\bar{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_\ell)$ – цепь длины $\ell \geq 4$ и для некоторого сопрягающего элемента $\mathbf{x}$ цепи $\bar{\mathbf{w}}$ подгруппа $\langle \bar{\mathbf{w}}, \mathbf{x} \rangle$ конечна, то цепь $\bar{\mathbf{w}}$ регулярна.

16.8. ЛЕММА. Пусть $\bar{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_\ell)$ – цепь длины $\ell \geq 4$ и подгруппа $\langle \bar{\mathbf{w}} \rangle$ конечна. Если $\text{ранг} \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{\ell-1} \rangle = \text{ранг} \langle \bar{\mathbf{w}} \rangle$ или $\text{ранг} \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \dots, \mathbf{w}_\ell \rangle = \text{ранг} \langle \bar{\mathbf{w}} \rangle$, то $\bar{\mathbf{w}}$ – регулярная цепь.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\mathbf{H} \triangleq \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{\ell-1} \rangle$ и $\mathbf{K} \triangleq \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \dots, \mathbf{w}_\ell \rangle$. Предположим, $\text{ранг } \mathbf{H} = \text{ранг} \langle \bar{\mathbf{w}} \rangle$ или $\text{ранг } \mathbf{K} = \text{ранг} \langle \bar{\mathbf{w}} \rangle$. Выберем пополнение $\mathbf{G}$ подгруппы $\langle \bar{\mathbf{w}} \rangle$, и пусть $\mathbf{x}$ – сопрягающий элемент цепи $\bar{\mathbf{w}}$. Так как $\mathbf{x}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{K}$, то по предложению 15.3 найдется $\mathbf{y} \in \mathbf{G}$ такой, что $\mathbf{x}^{-1}\mathbf{g}\mathbf{x} = \mathbf{y}^{-1}\mathbf{g}\mathbf{y}$ для любого $\mathbf{g} \in \mathbf{H}$. Тогда $\mathbf{y}$ – также сопрягающий элемент цепи $\bar{\mathbf{w}}$, и нам остается воспользоваться леммой 16.7.

16.9. ЛЕММА. Пусть $\bar{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_\ell)$ – нерегулярная цепь длины $\ell \geq 4$, подгруппа $\langle \bar{\mathbf{w}} \rangle$ конечна и $\mathbf{G}$ – ее пополнение. Тогда $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_\ell \in \mathbf{G}^-$, $\mathbf{w}_1\mathbf{w}_\ell \in \mathbf{G}^+ \setminus \mathbf{G}^*$ и $\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \dots, \mathbf{w}_{\ell-1} \in \mathbf{G}^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 16.8

$$\text{ранг} \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{\ell-1} \rangle < \text{ранг} \langle \bar{\mathbf{w}} \rangle \quad \text{и} \quad \text{ранг} \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \dots, \mathbf{w}_\ell \rangle < \text{ранг} \langle \bar{\mathbf{w}} \rangle. \quad (16.2)$$

В частности, для любого i имеем $\text{ранг } \mathbf{w}_i < \text{ранг} \langle \bar{\mathbf{w}} \rangle$, и в силу (15.1) $\mathbf{w}_i \in \mathbf{G}^* \cup \mathbf{G}^-$. Если $\mathbf{w}_1 \in \mathbf{G}^*$, то $\langle \bar{\mathbf{w}} \rangle \subseteq \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \dots, \mathbf{w}_\ell \rangle \mathbf{G}^*$ вопреки второму неравенству (16.2)

и лемме 15.4, (i). Следовательно, $\mathbf{w}_1 \in \mathbf{G}^-$. Аналогично, $\mathbf{w}_\ell \in \mathbf{G}^-$. Тогда по лемме 15.4, (ii)

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{\ell-1} \rangle \subseteq \langle \mathbf{G}^*, \mathbf{w}_1 \rangle \text{ и } \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \dots, \mathbf{w}_\ell \rangle \subseteq \langle \mathbf{G}^*, \mathbf{w}_\ell \rangle,$$

и, следовательно, $\langle \bar{\mathbf{w}} \rangle \subseteq \langle \mathbf{G}^*, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_\ell \rangle$. Так как в силу (15.1) подгруппа $\langle \bar{\mathbf{w}} \rangle$ содержит элемент из $\mathbf{G}^+ \setminus \mathbf{G}^*$, то $\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_\ell \notin \mathbf{G}^*$, т.е. $\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_\ell \in \mathbf{G}^+ \setminus \mathbf{G}^*$. Наконец, если бы при каком-нибудь $2 \leq i \leq \ell - 1$ выполнялось $\mathbf{w}_i \in \mathbf{G}^-$, то один из элементов $\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_i$ или $\mathbf{w}_\ell \mathbf{w}_i$ лежал бы в $\mathbf{G}^+ \setminus \mathbf{G}^*$ вопреки (16.2).

16.10. ЛЕММА. Пусть $\bar{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_\ell)$ – цепь.

(i) Пусть $\phi: \mathbf{L}(\bar{\mathbf{w}}) \rightarrow \mathbf{B}_\alpha$ – гомоморфизм такой, что $\phi|_{\mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}})} = \text{id}$ и $\phi(\mathbf{w}_1) = \mathbf{y}^{-1} \mathbf{w}_1 \mathbf{y}$ для некоторого $\mathbf{y} \in \mathbf{B}_\alpha$, коммутирующего с $\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \dots, \mathbf{w}_{\ell-1}$. Тогда последовательность $\bar{\mathbf{w}}' = (\phi(\mathbf{w}_1), \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_\ell)$ является цепью, причем $\mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}}') = \mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}})$, $\mathbf{L}(\bar{\mathbf{w}}') = \phi(\mathbf{L}(\bar{\mathbf{w}}))$ и $\mathbf{R}(\bar{\mathbf{w}}') = \mathbf{R}(\bar{\mathbf{w}})$.

(ii) Пусть $\psi: \mathbf{R}(\bar{\mathbf{w}}) \rightarrow \mathbf{B}_\alpha$ – гомоморфизм такой, что $\psi|_{\mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}})} = \text{id}$ и $\psi(\mathbf{w}_\ell) = \mathbf{y}^{-1} \mathbf{w}_\ell \mathbf{y}$ для некоторого $\mathbf{y} \in \mathbf{B}_\alpha$, коммутирующего с $\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \dots, \mathbf{w}_{\ell-1}$. Тогда последовательность $\bar{\mathbf{w}}'' = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \psi(\mathbf{w}_\ell))$ является цепью, причем $\mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}}'') = \mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}})$, $\mathbf{L}(\bar{\mathbf{w}}'') = \mathbf{L}(\bar{\mathbf{w}})$ и $\mathbf{R}(\bar{\mathbf{w}}'') = \psi(\mathbf{R}(\bar{\mathbf{w}}))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения (i) и (ii) симметричны относительно замены порядка элементов $\mathbf{w}_i$ на обратный. Ограничимся доказательством утверждения (i).

Так как $\phi|_{\mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}})} = \text{id}$ и $\mathbf{w}_1^2 \in \mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}})$, то

$$(\phi(\mathbf{w}_1))^2 = \phi(\mathbf{w}_1^2) = \mathbf{w}_1^2,$$

и так как $\mathbf{w}_1^{-1} \mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}}) \mathbf{w}_1 = \mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}})$, то для любого $\mathbf{g} \in \mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}})$

$$(\phi(\mathbf{w}_1))^{-\epsilon} \mathbf{g} (\phi(\mathbf{w}_1))^\epsilon = \phi(\mathbf{w}_1^{-\epsilon} \mathbf{g} \mathbf{w}_1^\epsilon) = \mathbf{w}_1^{-\epsilon} \mathbf{g} \mathbf{w}_1^\epsilon \quad (\epsilon = \pm 1). \quad (16.3)$$

Тогда из $\mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}}) \trianglelefteq \langle \bar{\mathbf{w}} \rangle$ вытекает $\mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}}) \trianglelefteq \langle \bar{\mathbf{w}}' \rangle$, и так как элементы $(\phi(\mathbf{w}_1))^2$, $\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \dots, \mathbf{w}_{\ell-1}$, $\mathbf{w}_\ell^2$ лежат в $\mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}})$, то $\mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}}') \subseteq \mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}})$. С другой стороны, из (16.3) и $\mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}}') \trianglelefteq \langle \bar{\mathbf{w}}' \rangle$ вытекает $\mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}}') \trianglelefteq \langle \bar{\mathbf{w}} \rangle$, и так как элементы $\mathbf{w}_1^2$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3, \dots, \mathbf{w}_{\ell-1}$, $\mathbf{w}_\ell^2$ лежат в $\mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}}')$, то $\mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}}) \subseteq \mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}}')$. Следовательно, $\mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}}) = \mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}}')$. Отсюда вытекает $\mathbf{R}(\bar{\mathbf{w}}') = \mathbf{R}(\bar{\mathbf{w}})$ и $\mathbf{L}(\bar{\mathbf{w}}') = \langle \mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}}'), \phi(\mathbf{w}_1) \rangle = \phi(\langle \mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}}'), \mathbf{w}_1 \rangle) = \phi(\mathbf{L}(\bar{\mathbf{w}}))$. Остается заметить, что из равенств $\phi(\mathbf{w}_1) = \mathbf{y}^{-1} \mathbf{w}_1 \mathbf{y}$, $\mathbf{y}^{-1} \mathbf{w}_i \mathbf{y} = \mathbf{w}_i$ ($i = 2, 3, \dots, \ell - 1$) и $\mathbf{x}^{-1} \mathbf{w}_i \mathbf{x} = \mathbf{w}_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, \ell - 1$) следует $(\mathbf{y}^{-1} \mathbf{x})^{-1} \phi(\mathbf{w}_1) \mathbf{y}^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{w}_2$ и $(\mathbf{y}^{-1} \mathbf{x})^{-1} \mathbf{w}_i \mathbf{y}^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{w}_{i+1}$ ($i = 2, 3, \dots, \ell - 1$), и, таким образом, согласно определению 16.3 последовательность $\bar{\mathbf{w}}'$ является цепью.

16.11. ЛЕММА. Цепь $\bar{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_\ell)$ длины $\ell \geq 5$ регулярна тогда и только тогда, когда $\text{ранг } \mathbf{L}(\bar{\mathbf{w}}) = \text{ранг } \mathbf{R}(\bar{\mathbf{w}}) = \text{ранг } \mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\bar{w}$ – регулярная цепь длины $\ell \geq 5$, то согласно определению 16.5 имеем $\langle \bar{w} \rangle = \langle w_2, w_3, w_4 \rangle$ и, следовательно, $L(\bar{w}) = R(\bar{w}) = M(\bar{w})$. Докажем часть “тогда”. Допустим, $\text{rang } L(\bar{w}) = \text{rang } R(\bar{w}) = \text{rang } M(\bar{w})$, но $\bar{w}$ не является регулярной. Выберем пополнения G и H подгрупп $L(\bar{w})$ и $R(\bar{w})$ соответственно. Так как G и H являются также пополнениями $M(\bar{w})$, то по предложению 14.2 имеем $H = z^{-1}Gz$ для некоторого z , коммутирующего со всеми элементами из $M(\bar{w})$. Рассмотрим вложение $\phi: L(\bar{w}) \rightarrow B_\alpha$, определенное равенством $\phi(g) = z^{-1}gz$. По лемме 16.10 последовательность $\bar{w}' = (\phi(w_1), w_2, \dots, w_\ell)$ является цепью, для которой $M(\bar{w}') = M(\bar{w})$, $L(\bar{w}') = z^{-1}L(\bar{w})z \subseteq H$ и $R(\bar{w}') = R(\bar{w}) \subseteq H$. Так как $\langle \bar{w} \rangle = \langle L(\bar{w}), R(\bar{w}) \rangle$, то подгруппа $\langle \bar{w} \rangle$ конечна и H – ее пополнение. Тогда по лемме 16.9 с учетом включения $(H^-)^2 \subseteq H^*$ получаем $(\phi(w_1))^2, w_2, \dots, w_{\ell-1}, w_\ell^2 \in H^*$, откуда ввиду $H^* \trianglelefteq H$ следует $M(\bar{w}') \subseteq H^*$. Но это противоречит равенству $\text{rang } M(\bar{w}') = \text{rang } M(\bar{w}) = \text{rang } H$. Следовательно, $\bar{w}$ – регулярная цепь.

16.12. ЛЕММА. Пусть $\bar{w}$ – цепь длины $\ell \geq 5$. Тогда:

- (i) если $\text{rang } L(\bar{w}) > \text{rang } M(\bar{w})$ и G есть пополнение подгруппы $L(\bar{w})$, то $M(\bar{w}) \cap G^- \neq \emptyset$;
- (i) если $\text{rang } R(\bar{w}) > \text{rang } M(\bar{w})$ и H есть пополнение подгруппы $R(\bar{w})$, то $M(\bar{w}) \cap H^- \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу симметрии ограничимся доказательством утверждения (i). Пусть $\bar{w} = (w_1, w_2, \dots, w_\ell)$ – цепь длины $\ell \geq 5$, $\text{rang } L(\bar{w}) > \text{rang } M(\bar{w})$ и G – пополнение подгруппы $L(\bar{w})$. Допустим, $M(\bar{w}) \cap G^- = \emptyset$. Тогда $M(\bar{w}) \leq G^*$ в силу (15.1), и, следовательно, $L(\bar{w}) \subseteq \langle G^*, w_1 \rangle$. Так как при $w_1 \in G^* \cup G^-$ имели бы $\text{rang } L(\bar{w}) \leq \text{rang } \langle G^*, w_1 \rangle < \text{rang } G$, то $w_1 \in G^+ \setminus G^*$. Учитывая, что $w_i \in L(\bar{w})$ при $1 \leq i \leq \ell - 1$, получаем

$$\text{rang } \langle w_1, w_2, \dots, w_{\ell-2} \rangle = \text{rang } \langle w_1, w_2, \dots, w_{\ell-1} \rangle = \text{rang } G.$$

Тогда по лемме 16.8 цепь $(w_1, w_2, \dots, w_{\ell-1})$, а значит, и цепь $(w_1, w_2, \dots, w_\ell)$ регулярны. Но в этом случае по лемме 16.11 имеем $\text{rang } L(\bar{w}) = \text{rang } M(\bar{w})$ вопреки предположению. Следовательно, $M(\bar{w}) \cap G^- \neq \emptyset$.

Теперь займемся некоторое время изучением общей ситуации, когда дана полная конечная подгруппа $G \leq B_\alpha$ и ее подгруппа M .

16.13. ЛЕММА. Пусть $G_0 \leq B_\alpha$ – полная конечная подгруппа, $M \leq G_0$ и $\text{rang } M < \text{rang } G_0$. Тогда для некоторого $k \geq 1$ существует последовательность $G_0, G_1, \dots, G_k$ полных конечных подгрупп $G_i \leq B_\alpha$, удовлетворяющая следующим условиям:

- (i) $\text{rang } G_0 > \text{rang } G_1 > \dots > \text{rang } G_k$;
- (ii) $M \leq \bigcap_{i=0}^k G_i$;
- (iii) G_{i+1} есть пополнение подгруппы MG_i^* при всех $i = 0, 1, \dots, k-1$;
- (iv) $\text{rang } G_i^* < \text{rang } G_{i+1}$ при $i = 0, 1, \dots, k-2$;
- (v) $\text{rang } M = \text{rang } G_k$ или $\text{rang } G_{k-1}^* = \text{rang } G_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим индуктивно последовательность $\mathbf{G}_0, \mathbf{G}_1, \dots$ полных конечных подгрупп группы $\mathbf{B}_\alpha$, беря в качестве $\mathbf{G}_{i+1}$ произвольное пополнение подгруппы $\mathbf{M}\mathbf{G}_i^*$ (последняя конечна ввиду $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{G}_i$). Если $\text{ранг } \mathbf{M} < \text{ранг } \mathbf{G}_i$, то по лемме 15.4, (i) имеем $\text{ранг } \mathbf{M}\mathbf{G}_i^* < \text{ранг } \mathbf{G}_i$, и, следовательно, $\text{ранг } \mathbf{G}_{i+1} < \text{ранг } \mathbf{G}_i$. Таким образом, на некотором шаге $i = k$ выполнится условие (v), на котором мы и оборвем процесс построения подгрупп $\mathbf{G}_i$. Выполнение остальных условий (i)–(iv) очевидно.

16.14. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Последовательность $\mathbf{G}_0, \mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_k$ полных конечных подгрупп $\mathbf{G}_i$ группы $\mathbf{B}_\alpha$, удовлетворяющую условиям 16.13, (i)–(v), будем называть *лестницей над $\mathbf{M}$* .

16.15. ЛЕММА. Пусть $(\mathbf{G}_0, \mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_k)$ – лестница над конечной подгруппой $\mathbf{M} \leq \mathbf{B}_\alpha$. Пусть для каждого i $\mathbf{c}_i$ – базисный элемент $\mathbf{G}_i$. Тогда верны следующие утверждения:

- (i) При любом $1 \leq i \leq k-1$ последовательность $(\mathbf{G}_i, \mathbf{G}_{i+1}, \dots, \mathbf{G}_k)$ есть лестница над $\mathbf{M}$.
- (ii) Если $k \geq 2$, то $\mathbf{M} \cap \mathbf{G}_i^- \neq \emptyset$ при $i = 0, 1, \dots, k-1$ и $\mathbf{G}_i^* \cap \mathbf{G}_{i+1}^- \neq \emptyset$ при $i = 0, 1, \dots, k-2$.
- (iii) $\mathbf{M} \cap \mathbf{G}_i^* = \mathbf{M} \cap \mathbf{G}_{i+1}^*$ и $\mathbf{M} \cap \mathbf{G}_i^- = \mathbf{M} \cap \mathbf{G}_{i+1}^-$ при любом $0 \leq i \leq k-2$.
- (iv) Пусть $0 \leq i \leq k-2$ и $\mathbf{f} \in \mathbf{M} \cap \mathbf{G}_i^-$. Тогда

$$\mathbf{G}_i^* \mathbf{G}_{i+1}^* / \mathbf{G}_{i+1}^* = \{\mathbf{G}_{i+1}^*, \mathbf{c}_{i+1}^{n/2} \mathbf{f} \mathbf{G}_{i+1}^*\}$$

и

$$\mathbf{M}\mathbf{G}_i^* \mathbf{G}_{i+1}^* / \mathbf{G}_{i+1}^* = \{\mathbf{G}_{i+1}^*, \mathbf{f} \mathbf{G}_{i+1}^*, \mathbf{c}_{i+1}^{n/2} \mathbf{G}_{i+1}^*, \mathbf{c}_{i+1}^{n/2} \mathbf{f} \mathbf{G}_{i+1}^*\}.$$

(v) Пусть $0 \leq i \leq k-2$. Тогда для любого $\mathbf{g} \in \mathbf{M}\mathbf{G}_i^* \setminus \mathbf{G}_i^*$ из $\text{ранг } \mathbf{g} < \text{ранг } \mathbf{G}_{i+1}$ следует $\mathbf{g} \in \mathbf{M}\mathbf{G}_{i+1}^* \setminus \mathbf{G}_{i+1}^*$ и для любой подгруппы $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{M}\mathbf{G}_i^*$ из $\mathbf{H} \not\subseteq \mathbf{G}_i^*$ и $\text{ранг } \mathbf{H} < \text{ранг } \mathbf{G}_{i+1}$ следует $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{M}\mathbf{G}_{i+1}^*$ и $\mathbf{H} \not\subseteq \mathbf{G}_{i+1}^*$.

(vi) Если $k \geq 2$, то либо для некоторого r в интервале $2 \leq r \leq k-1$ имеем $\text{ранг } \mathbf{G}_0^* = \text{ранг } \mathbf{G}_r$ и $\mathbf{c}_1^{-n/4} \mathbf{G}_r \mathbf{c}_1^{n/4}$ есть пополнение $\mathbf{G}_0^*$, либо $\mathbf{G}_0^* \subseteq \mathbf{c}_1^{-n/4} \mathbf{G}_k \mathbf{c}_1^{n/4}$.

(vii) Если $\mathbf{M} \cap \mathbf{G}_0^- \neq \emptyset$, $\mathbf{u} \in \mathbf{G}_0$, $\text{ранг } \langle \mathbf{M}, \mathbf{u} \rangle = \text{ранг } \mathbf{G}_0$ и $|\langle \mathbf{M}, \mathbf{u} \rangle : \mathbf{M}| \leq 2$, то

$$\mathbf{c}_0^{n/2} \mathbf{u} \in \mathbf{M}\mathbf{G}_0^*,$$

и либо для некоторого $r \leq k-1$ выполнено $\text{ранг } \mathbf{u} = \text{ранг } \mathbf{G}_r$ и

$$\mathbf{c}_0^{-n/4} \mathbf{u} \mathbf{c}_0^{n/4} \in \mathbf{c}_r^{n/2} \mathbf{G}_r^*,$$

либо $\text{ранг } \mathbf{u} \leq \text{ранг } \mathbf{G}_k$ и

$$\mathbf{c}_0^{-n/4} \mathbf{u} \mathbf{c}_0^{n/4} \in \bigcap_{i=0}^{k-1} (\mathbf{M}\mathbf{G}_i^* \setminus \mathbf{G}_i^*).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) вытекает непосредственно из определения 16.14.

(ii): Имеем $\text{ранг } M < \text{ранг } G_i$ при $i = 0, 1, \dots, k-1$ в силу 16.13, (i), (ii). Далее, $M \not\subseteq G_i^*$ при $i = 0, 1, \dots, k-2$ в силу 16.13, (iii), (iv), а если допустить $M \subseteq G_{k-1}^*$, то из 16.13, (iv) при $i := k-2$ по лемме 15.4, (i) следовало бы $\text{ранг } MG_{k-2}^* < \text{ранг } G_{k-1}$ вопреки 16.13, (iii). Следовательно, с учетом (15.1) имеем $M \cap G_i^- \neq \emptyset$ при всех $i = 0, 1, \dots, k-1$.

Теперь пусть $0 \leq i \leq k-2$. Так как $\text{ранг } M \leq \text{ранг } G_k < \text{ранг } G_{i+1}$ и согласно 16.13, (iii) $\text{ранг } MG_i^* = \text{ранг } G_{i+1}$, то по лемме 15.4, (i) имеем $G_i^* \not\subseteq G_{i+1}^*$, откуда в силу 16.13, (iv) следует $G_i^* \cap G_{i+1}^- \neq \emptyset$.

(iii): Так как при $i \leq k-2$ имеем $\text{ранг } M < \text{ранг } G_{i+1} < \text{ранг } G_i$, то $M \subseteq G_i^* \cup G_i^-$ и $M \subseteq G_{i+1}^* \cup G_{i+1}^-$. Поэтому достаточно доказать, что $M \cap G_i^* = M \cap G_{i+1}^*$. Если бы существовал элемент $g \in (M \cap G_i^*) \setminus G_{i+1}^*$, то из $\text{ранг } M < \text{ранг } G_{i+1}$ и $\text{ранг } G_i^* < \text{ранг } G_{i+1}$ по лемме 15.4, (ii) следовало бы $M \subseteq \langle G_{i+1}^*, g \rangle$ и $G_i^* \subseteq \langle G_{i+1}^*, g \rangle$, т.е. $MG_i^* \subseteq \langle G_{i+1}^*, g \rangle$. Но в этом случае $\text{ранг } MG_i^* < \text{ранг } G_{i+1}$ вопреки 16.13, (iii). Следовательно, $M \cap G_i^* \subseteq G_{i+1}^*$. Так как из (ii) в силу леммы 15.4, (iii) следует $|M : M \cap G_i^*| = |M : M \cap G_{i+1}^*| = 2$, то $M \cap G_i^* = M \cap G_{i+1}^*$.

(iv): Выберем элемент $h \in G_i^* \cap G_{i+1}^-$, существующий согласно (ii). По лемме 15.4, (ii) имеем $G_i^* G_{i+1}^* = \langle G_{i+1}^*, h \rangle$ и $MG_{i+1}^* = \langle G_{i+1}^*, f \rangle$, следовательно, $hf^{-1} \notin G_{i+1}^*$, так как иначе получили бы $MG_i^* \subseteq MG_{i+1}^*$ вопреки 16.13, (i), (iii). Так как $\text{ранг } hf^{-1} \leq \text{ранг } MG_i^* = \text{ранг } G_{i+1} < \text{ранг } G_i$, то $(hf^{-1})^2 \in G_i^*$. Ввиду $G_i^* \subseteq G_{i+1}^* \cup G_{i+1}^-$ и $(hf^{-1})^2 \in G_{i+1}^+$ имеем $(hf^{-1})^2 \in G_{i+1}^*$. Но $hf^{-1} \in G_{i+1}^+$, следовательно, $hf^{-1} \in c_{i+1}^{n/2} G_{i+1}^*$, т.е. $h \in c_{i+1}^{n/2} f G_{i+1}^*$. Тогда $G_i^* G_{i+1}^* / G_{i+1}^* = \{G_{i+1}^*, h G_{i+1}^*\} = \{G_{i+1}^*, c_{i+1}^{n/2} f G_{i+1}^*\}$. Так как $h^2, f^2, (hf^{-1})^2 \in G_{i+1}^*$, то $MG_i^* G_{i+1}^* / G_{i+1}^* = \{G_{i+1}^*, f G_{i+1}^*, c_{i+1}^{n/2} G_{i+1}^*, c_{i+1}^{n/2} f G_{i+1}^*\}$.

(v): Пусть $g \in MG_i^* \setminus G_i^*$ и $\text{ранг } g < \text{ранг } G_{i+1}$. Выберем элемент $f \in M \cap \bigcap_{i=0}^{k-1} G_i^-$, существующий в силу (ii) и (iii). Так как в силу (ii) и леммы 15.4 (iii) $|MG_i^* : G_i^*| = 2$ и в силу (iv) $|MG_i^* / MG_i^* \cap G_{i+1}^* : G_i^* / G_i^* \cap G_{i+1}^*| = |MG_i^* G_{i+1}^* : G_i^* G_{i+1}^*| = 2$, то $MG_i^* \cap G_{i+1}^* = G_i^* \cap G_{i+1}^*$. Отсюда и из (iv) следует $MG_i^* \setminus G_i^* \subseteq f G_{i+1}^* \cup c_{i+1}^{n/2} G_{i+1}^*$. Так как, кроме того, в силу леммы 15.4, (ii) $MG_{i+1}^* \setminus G_{i+1}^* = f G_{i+1}^*$, то $g \in f G_{i+1}^* = MG_{i+1}^* \setminus G_{i+1}^*$, что доказывает первое утверждение. Если $H \leq MG_i^*$, $H \not\subseteq G_i^*$ и $\text{ранг } H < \text{ранг } G_{i+1}$, то, выбрав элемент $g \in H \setminus G_i^*$, получим по доказанному $g \in MG_{i+1}^* \setminus G_{i+1}^*$. Так как $\text{ранг } g < \text{ранг } G_{i+1}$, то $g \in G_{i+1}^-$ и по лемме 15.4, (i), (ii) $H \subseteq \langle G_{i+1}^*, g \rangle = MG_{i+1}^*$. Наличие элемента $g \in H \cap G_{i+1}^-$ влечет также $H \not\subseteq G_{i+1}^*$.

(vi): Выберем элемент $f \in M \cap \bigcap_{i=0}^{k-1} G_i^-$ в силу (ii) и (iii). Согласно (iv) имеем $G_0^* \subseteq G_1^* \cup c_1^{n/2} f G_1^*$. Заметим, что $c_1^{n/4} G_1^* c_1^{-n/4} = G_1^*$, и так как в диэдральной группе $D_n = \langle a, c \mid a^2 = (ac)^2 = c^n = 1 \rangle$ для любых $x \in D_n \setminus \langle c \rangle$ и t имеет место равенство $c^t x c^t = x$, то $c_1^{n/4} (c_1^{-n/2} f G_1^*) c_1^{-n/4} = f G_1^*$. Следовательно,

$$c_1^{n/4} G_0^* c_1^{-n/4} \subseteq G_1^* \cup f G_1^* = MG_1^*.$$

Кроме того, в силу (ii)

$$c_1^{n/4} G_0^* c_1^{-n/4} \not\subseteq G_1^*.$$

Теперь предположим, что для некоторого $1 \leq i \leq k-1$ выполнено

$$\mathbf{c}_1^{n/4} \mathbf{G}_0^* \mathbf{c}_1^{-n/4} \subseteq \mathbf{M} \mathbf{G}_i^* \quad \text{и} \quad \mathbf{c}_1^{n/4} \mathbf{G}_0^* \mathbf{c}_1^{-n/4} \not\subseteq \mathbf{G}_i^*.$$

Если $i = k-1$ или $\text{rang } \mathbf{G}_0^* = \text{rang } \mathbf{G}_{i+1}$, то имеет место заключение утверждения (vi). В противном случае в силу (v)

$$\mathbf{c}_1^{n/4} \mathbf{G}_0^* \mathbf{c}_1^{-n/4} \subseteq \mathbf{M} \mathbf{G}_{i+1}^* \quad \text{и} \quad \mathbf{c}_1^{n/4} \mathbf{G}_0^* \mathbf{c}_1^{-n/4} \not\subseteq \mathbf{G}_{i+1}^*$$

и работает очевидная индукция.

(vii): Заметим, что из $\text{rang} \langle \mathbf{M}, \mathbf{u} \rangle = \text{rang } \mathbf{G}_0$ и $\text{rang } \mathbf{M} \mathbf{G}_0^* = \text{rang } \mathbf{G}_1 < \text{rang } \mathbf{G}_0$ следует $\mathbf{u} \notin \mathbf{M} \mathbf{G}_0^*$. Так как $\mathbf{u}^2 \in \mathbf{M}$, то $\text{rang } \mathbf{u}^2 \leq \text{rang } \mathbf{M} < \text{rang } \mathbf{G}_0$. Следовательно, $\mathbf{u} \in \mathbf{c}_0^{n/2} \mathbf{G}_0^* \cup \mathbf{G}_0^-$. Если $\mathbf{u} \in \mathbf{c}_0^{n/2} \mathbf{G}_0^*$, то утверждение (vii) верно при $r = 0$. Пусть $\mathbf{u} \in \mathbf{G}_0^-$. Выберем элемент $\mathbf{f} \in \mathbf{M} \cap \mathbf{G}_0^-$. Имеем $\mathbf{u} \mathbf{f}^{-1} \in \mathbf{G}_0^+ \setminus \mathbf{G}_0^*$, и так как $(\mathbf{u} \mathbf{f}^{-1})^2 \in \mathbf{M}$, то $\text{rang}(\mathbf{u} \mathbf{f}^{-1})^2 < \text{rang } \mathbf{G}_0$, откуда вытекает $\mathbf{u} \mathbf{f}^{-1} \in \mathbf{c}_0^{n/2} \mathbf{G}_0^*$. Тем самым доказана первая часть утверждения. Докажем вторую часть. Как было замечено в доказательстве (vi), в группе $\mathbf{G}_0 / \mathbf{G}_0^* \simeq \mathbf{D}_n$ имеет место равенство $\mathbf{c}_0^{n/4} (\mathbf{f} \mathbf{G}_0^*) \mathbf{c}_0^{n/4} = \mathbf{f} \mathbf{G}_0^*$. Поэтому

$$\mathbf{c}_0^{-n/4} \mathbf{u} \mathbf{c}_0^{n/4} \in \mathbf{f} \mathbf{G}_0^* = \mathbf{M} \mathbf{G}_0^* \setminus \mathbf{G}_0^*.$$

Теперь предположим, что при каком-нибудь $i \leq k-2$

$$\mathbf{c}_0^{-n/4} \mathbf{u} \mathbf{c}_0^{n/4} \in \mathbf{M} \mathbf{G}_i^* \setminus \mathbf{G}_i^*.$$

Если $\text{rang } \mathbf{u} = \text{rang } \mathbf{G}_{i+1}$, то в силу 16.13, (iii) искомое утверждение верно при $r := i+1$. Если же $\text{rang } \mathbf{u} < \text{rang } \mathbf{G}_{i+1}$, то в силу (v)

$$\mathbf{c}_0^{-n/4} \mathbf{u} \mathbf{c}_0^{n/4} \in \mathbf{M} \mathbf{G}_{i+1}^* \setminus \mathbf{G}_{i+1}^*$$

и проходит индукция.

16.16. ЛЕММА. Если $\mathbf{G}, \mathbf{H} \in \mathbf{B}_\alpha$ – конечные подгруппы, $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{H}$ и $|\mathbf{H} : \mathbf{G}| \leq 2$, то $(\mathbf{N}_{\mathbf{B}_\alpha}(\mathbf{H}))^4 \subseteq \mathbf{N}_{\mathbf{B}_\alpha}(\mathbf{G})$ (где, напомним, $\mathbf{X}^t$ обозначает $\{\mathbf{x}^t \mid \mathbf{x} \in \mathbf{X}\}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{x} \in \mathbf{N}_{\mathbf{B}_\alpha}(\mathbf{H})$. Докажем, что $\mathbf{x}^4 \in \mathbf{N}_{\mathbf{B}_\alpha}(\mathbf{G})$. Выберем пополнение $\bar{\mathbf{H}}$ подгруппы $\mathbf{H}$ и по предложению 15.3 найдем $\mathbf{y} \in \bar{\mathbf{H}}$ такой, что $\mathbf{y}^{-1} \mathbf{g} \mathbf{y} = \mathbf{x}^{-1} \mathbf{g} \mathbf{x}$ для любого $\mathbf{g} \in \mathbf{H}$. Достаточно проверить, что $\mathbf{y}^4 \in \mathbf{N}_{\mathbf{B}_\alpha}(\mathbf{G})$. Используя тождество 15.10, (v), для любого $\mathbf{g} \in \mathbf{G}$ выводим

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{-4} \mathbf{g} \mathbf{y}^4 &= \mathbf{y}^{-2} \mathbf{g} \mathbf{y}^2 \cdot \mathbf{y}^{-1} \mathbf{g}^{-1} \mathbf{y} \cdot \mathbf{y}^{-3} \mathbf{g} \mathbf{y}^3 \\ &= \mathbf{y}^{-2} \mathbf{g} \mathbf{y}^2 \cdot \mathbf{y}^{-1} \mathbf{g}^{-1} \mathbf{y} \cdot (\mathbf{y}^{-1} \mathbf{g} \mathbf{y} \cdot \mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{y}^{-2} \mathbf{g}^{-1} \mathbf{y}^2) \\ &= \mathbf{y}^{-2} \mathbf{g} \mathbf{y}^2 \cdot \mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{y}^{-2} \mathbf{g} \mathbf{y}^2. \end{aligned}$$

Так как по условию $|\mathbf{H} : \mathbf{G}| \leq 2$, то из $\mathbf{g} \in \mathbf{G}$ следует $\mathbf{h} \mathbf{g} \mathbf{h} \in \mathbf{G}$ для любого $\mathbf{h} \in \mathbf{H}$. Следовательно, $\mathbf{y}^{-4} \mathbf{g} \mathbf{y}^4 \in \mathbf{G}$, и, таким образом, $\mathbf{y}^4 \in \mathbf{N}_{\mathbf{B}_\alpha}(\mathbf{G})$.

16.17. ЛЕММА. Пусть $(G_0, G_1, \dots, G_k)$ – лестница над конечной подгруппой $M \leq B_\alpha$ и $\text{ранг } G_{k-1}^* < \text{ранг } G_k$. Тогда верны следующие утверждения:

- (i) $G_0 \cap G_k^* = \bigcap_{i=0}^k G_i^*$;
- (ii) если $u \in G_0$ и $|\langle M, u \rangle : M| \leq 2$, то $u^2 \in M \cap G_k^*$ и $[u, g] \in M \cap G_k^*$ для любого $g \in M$;
- (iii) $G_0^4 \subseteq N_{B_\alpha}(G_0^* \cap G_k^*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i): Достаточно доказать включение $G_0 \cap G_k^* \subseteq \bigcap_{i=0}^k G_i^*$. Воспользуемся индукцией по k . Сначала рассмотрим случай $k = 1$. Имеем $M \not\subseteq G_0^*$, так как иначе $MG_0^* = G_0^*$ и $\text{ранг } G_0^* = \text{ранг } G_1$ вопреки условию. Так как $\text{ранг } M < \text{ранг } G_0$, то отсюда следует $M \cap G_0^- \neq \emptyset$. Пусть $f \in M \cap G_0^-$. Так как $f \in G_1 \cap G_0^-$ и $\text{ранг}(G_0 \cap G_1) < \text{ранг } G_0$, то по лемме 15.4, (ii) имеем $G_0 \cap G_1 \subseteq \langle G_0^*, f \rangle = MG_0^*$. Поэтому для доказательства искомого включения $G_0 \cap G_1^* \subseteq G_0^*$ достаточно проверить, что $MG_0^* \cap G_1^* = G_0^* \cap G_1^*$. Имеем $\text{ранг } MG_0^* = \text{ранг } G_1 < \text{ранг } G_0$, следовательно, по лемме 15.4, (iii) $|MG_0^* : G_0^*| = 2$. Из $\text{ранг } G_0^* < \text{ранг } G_1$ в силу леммы 15.4, (i) вытекает $\text{ранг } G_0^* G_1^* < \text{ранг } G_1 = \text{ранг } MG_0^* G_1^*$, следовательно, $G_0^* G_1^* \subsetneq MG_0^* G_1^*$. Тогда $|MG_0^* / MG_0^* \cap G_1^* : G_0^* / G_0^* \cap G_1^*| = |MG_0^* G_1^* : G_0^* G_1^*| \geq 2$, откуда вытекает невозможность собственного включения $G_0^* \cap G_1^* \subsetneq MG_0^* \cap G_1^*$, что и доказывает равенство $MG_0^* \cap G_1^* = G_0^* \cap G_1^*$. Тем самым при $k = 1$ утверждение доказано.

Теперь пусть $k \geq 2$. Выберем элемент $f \in M \cap G_0^- \cap G_1^-$ согласно лемме 16.15, (ii), (iii). Имеем $f \in G_0^- \cap G_k$ и $\text{ранг}(G_0 \cap G_k) < \text{ранг } G_0$, поэтому по лемме 15.4, (ii) получаем $G_0 \cap G_k \subseteq \langle G_0^*, f \rangle = MG_0^*$. Так как $MG_0^* \subseteq G_1$, то, применив индуктивное предположение при $k := k - 1$ с учетом леммы 16.15, (i), выводим $G_0 \cap G_k^* = \bigcap_{i=1}^k G_i^*$. Остается заметить, что из $G_0 \cap G_k^* \subseteq MG_0^* \cap G_1^*$ и доказанного выше включения $MG_0^* \cap G_1^* \subseteq G_0^*$ следует $G_0 \cap G_k^* \subseteq G_0^*$.

(ii): Из $|\langle M, u \rangle : M| \leq 2$ следует $u^2 \in M$ и $[u, M] \subseteq M$ (где, по определению, $[x, Y] = \{[x, y] \mid y \in Y\}$), поэтому достаточно убедиться в истинности включений $u^2 \in G_k^*$ и $[u, g] \in G_k^*$ для любого $g \in M$. Воспользуемся индукцией по k . Пусть сначала $\text{ранг} \langle M, u \rangle = \text{ранг } G_0$. Как было установлено в доказательстве (i), $M \cap G_0^- \neq \emptyset$. Тогда по лемме 16.15, (vii) имеем $c_0^{n/2} u \in MG_0^*$. Полагая $u' = c_0^{n/2} u$ и замечая, что $c_0^{n/2}$ – центральная инволюция в G_0 в силу предложения 15.10, (i), (ii), получаем $|\langle M, u' \rangle : M| \leq 2$, $u^2 = u'^2$ и $[u, g] = [u', g]$ для любого $g \in M$, но теперь $\langle M, u' \rangle \subseteq MG_0^* \subseteq G_1$. Тем самым случай $\text{ранг} \langle M, u \rangle = \text{ранг } G_0$ сводится к случаю $\text{ранг} \langle M, u \rangle < \text{ранг } G_0$. Пусть $\text{ранг} \langle M, u \rangle < \text{ранг } G_0$. Выбрав элемент $f \in M \cap G_0^-$ и воспользовавшись леммой 15.4, (ii), получим

$$\langle M, u \rangle \subseteq \langle G_0^*, f \rangle = MG_0^*. \quad (16.4)$$

Для любого $g \in MG_0^*$ выполнено $\text{ранг } g \leq \text{ранг } G_1 < \text{ранг } G_0$, следовательно, с учетом (15.1) и включения $(G_0^-)^2 \subseteq G_0^*$ имеем $g^2 \in G_0^*$. Тогда $\text{ранг } g^2 \leq \text{ранг } G_0^* < \text{ранг } G_1$, и так как $g^2 \in G_1^+$, то $g^2 \in G_1^*$. Таким образом, $MG_0^* G_1^* / G_1^*$ – группа периода 2, и поэтому $u^2 \in G_1^*$ и $[u, g] \in G_1^*$ для любого $g \in M$. Тем самым мы рассмотрели случай $k = 1$. Так как из (16.4) следует

$\mathbf{u} \in \mathbf{G}_1$, то в случае $k \geq 2$ можно воспользоваться леммой 16.15, (i) и индуктивным предположением.

(iii): Индукция по k . Если $k = 1$, то из $\text{rang } \mathbf{G}_0^* < \text{rang } \mathbf{G}_1$ по лемме 15.4, (iii) следует $|\mathbf{G}_0^* : \mathbf{G}_0^* \cap \mathbf{G}_1^*| = 2$. Так как $\mathbf{G}_0 \subseteq \mathbf{N}_{\mathbf{B}_\alpha}(\mathbf{G}_0^*)$, то по лемме 16.16 получаем $\mathbf{G}_0^4 \subseteq \mathbf{N}_{\mathbf{B}_\alpha}(\mathbf{G}_0^* \cap \mathbf{G}_1^*)$.

Пусть $k \geq 2$. Пусть $\mathbf{c}_1$ – базисный элемент подгруппы $\mathbf{G}_1$. Так как n кратно 16, то по индуктивному предположению $\mathbf{c}_1^{n/4} \in \mathbf{N}_{\mathbf{B}_\alpha}(\mathbf{G}_1^* \cap \mathbf{G}_k^*)$. Тогда, используя (i) и лемму 16.15, (i), выводим

$$\mathbf{G}_0^* \cap \mathbf{G}_k^* \subseteq \mathbf{G}_1^* \cap \mathbf{G}_k^* = \mathbf{c}_1^{-n/4}(\mathbf{G}_1^* \cap \mathbf{G}_k^*)\mathbf{c}_1^{n/4} = \bigcap_{i=1}^k \mathbf{c}_1^{-n/4} \mathbf{G}_i^* \mathbf{c}_1^{n/4}$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_0^* \cap \mathbf{c}_1^{-n/4} \mathbf{G}_k^* \mathbf{c}_1^{n/4} &\subseteq \mathbf{G}_1 \cap \mathbf{c}_1^{-n/4} \mathbf{G}_k^* \mathbf{c}_1^{n/4} = \mathbf{c}_1^{-n/4}(\mathbf{G}_1 \cap \mathbf{G}_k^*)\mathbf{c}_1^{n/4} \\ &= \mathbf{c}_1^{-n/4}(\mathbf{G}_1^* \cap \mathbf{G}_k^*)\mathbf{c}_1^{n/4} \subseteq \mathbf{G}_k^*. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\mathbf{G}_0^* \cap \mathbf{G}_k^* = \mathbf{G}_0^* \cap \mathbf{c}_1^{-n/4} \mathbf{G}_k^* \mathbf{c}_1^{n/4} \quad (16.5)$$

и для любого $1 \leq r \leq k$

$$\mathbf{G}_0^* \cap \mathbf{G}_k^* = \mathbf{G}_0^* \cap \mathbf{c}_1^{-n/4}(\mathbf{G}_r^* \cap \mathbf{G}_k^*)\mathbf{c}_1^{n/4}. \quad (16.6)$$

Если $\text{rang } \mathbf{G}_0^* < \text{rang } \mathbf{G}_k$, то по лемме 16.15, (vi) имеем $\mathbf{G}_0^* \subseteq \mathbf{c}_1^{-n/4} \mathbf{G}_k^* \mathbf{c}_1^{n/4}$, а по лемме 15.4, (iii) $|\mathbf{G}_0^* : \mathbf{G}_0^* \cap \mathbf{c}_1^{-n/4} \mathbf{G}_k^* \mathbf{c}_1^{n/4}| \leq 2$. В этом случае по лемме 16.16 с учетом (16.5) получаем $\mathbf{G}_0^4 \subseteq \mathbf{N}_{\mathbf{B}_\alpha}(\mathbf{G}_0^* \cap \mathbf{G}_k^*)$. Пусть $\text{rang } \mathbf{G}_0^* \geq \text{rang } \mathbf{G}_k$. Тогда по лемме 16.15, (vi), принимая во внимание, что в случае $\mathbf{G}_0^* \subseteq \mathbf{c}_1^{-n/4} \mathbf{G}_k^* \mathbf{c}_1^{n/4}$ выполнено $\text{rang } \mathbf{G}_0^* = \text{rang } \mathbf{G}_k$, получаем, что для некоторого $2 \leq r \leq k$ подгруппа $\mathbf{c}_1^{-n/4} \mathbf{G}_r^* \mathbf{c}_1^{n/4}$ есть пополнение $\mathbf{G}_0^*$. Пусть $\mathbf{g} \in \mathbf{G}_0$ – произвольный элемент. Если $r = k$, то $\mathbf{c}_1^{-n/4} \mathbf{G}_k^* \mathbf{c}_1^{n/4}$ и $\mathbf{g}^{-1} \mathbf{c}_1^{-n/4} \mathbf{G}_k^* \mathbf{c}_1^{n/4} \mathbf{g}$ – два пополнения подгруппы $\mathbf{G}_0^*$ и в силу предложения 15.2

$$\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{G}_0^* \cap \mathbf{c}_1^{-n/4} \mathbf{G}_k^* \mathbf{c}_1^{n/4})\mathbf{g} = \mathbf{G}_0^* \cap \mathbf{c}_1^{-n/4} \mathbf{G}_k^* \mathbf{c}_1^{n/4},$$

т.е. ввиду (16.5) $\mathbf{g} \in \mathbf{N}_{\mathbf{B}_\alpha}(\mathbf{G}_0^* \cap \mathbf{G}_k^*)$. Пусть $r < k$. По предложению 15.3 найдется $\mathbf{y} \in \mathbf{c}_1^{-n/4} \mathbf{G}_r^* \mathbf{c}_1^{n/4}$ такой, что $\mathbf{g}^{-1} \mathbf{h} \mathbf{g} = \mathbf{y}^{-1} \mathbf{h} \mathbf{y}$ для любого $\mathbf{h} \in \mathbf{G}_0^*$. По индуктивному предположению $\mathbf{y}^4 \in \mathbf{N}_{\mathbf{B}_\alpha}(\mathbf{c}_1^{-n/4}(\mathbf{G}_r^* \cap \mathbf{G}_k^*)\mathbf{c}_1^{n/4})$. Так как $\mathbf{y} \in \mathbf{N}_{\mathbf{B}_\alpha}(\mathbf{G}_0^*)$, то ввиду (16.6) $\mathbf{y}^4 \in \mathbf{N}_{\mathbf{B}_\alpha}(\mathbf{G}_0^* \cap \mathbf{G}_k^*)$, а значит, и $\mathbf{g}^4 \in \mathbf{N}_{\mathbf{B}_\alpha}(\mathbf{G}_0^* \cap \mathbf{G}_k^*)$.

Следующее утверждение играет роль базы индукции для доказательства предложения 16.6.

16.18. ЛЕММА. Пусть $\bar{w} = (w_1, w_2, \dots, w_\ell)$ – цепь длины $\ell \geq 6$, G_0 и H_0 – пополнения подгрупп $L(\bar{w})$ и $R(\bar{w})$ соответственно. Предположим, что выполнены следующие условия:

- (i) либо $\text{rang } L(\bar{w}) = \text{rang } M(\bar{w})$, либо $\text{rang } L(\bar{w}) > \text{rang } M(\bar{w})$,
 $(G_0, G_1, \dots, G_k)$ – лестница над $M(\bar{w})$ и $\text{rang } G_{k-1}^* < \text{rang } G_k$;
- (ii) либо $\text{rang } R(\bar{w}) = \text{rang } M(\bar{w})$, либо $\text{rang } R(\bar{w}) > \text{rang } M(\bar{w})$,
 $(H_0, H_1, \dots, H_t)$ – лестница над $M(\bar{w})$ и $\text{rang } H_{t-1}^* < \text{rang } H_t$.

Тогда $\bar{w}$ – регулярная цепь.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, $\bar{w}$ не является регулярной. В этом случае в силу леммы 16.11 $\text{rang } L(\bar{w}) > \text{rang } M(\bar{w})$ или $\text{rang } R(\bar{w}) > \text{rang } M(\bar{w})$. Эти два случая симметричны, поэтому ограничимся рассмотрением случая, когда $\text{rang } L(\bar{w}) > \text{rang } M(\bar{w})$. Тогда по условию имеем $\text{rang } G_{k-1}^* < \text{rang } G_k$, где $(G_0, G_1, \dots, G_k)$ – лестница над $M(\bar{w})$ и в силу 16.13, (v) $\text{rang } M(\bar{w}) = \text{rang } G_k$. Мы утверждаем, что

$$M(\bar{w}) = \langle w_2, w_3, \dots, w_{\ell-1} \rangle (G_k^* \cap M(\bar{w})). \quad (16.7)$$

Так как $w_i \in M(\bar{w}) \subseteq G_k$ ($i = 2, 3, \dots, \ell - 1$), то $w_2, w_3, \dots, w_{\ell-1} \in N_{B_\alpha}(G_k^* \cap M(\bar{w}))$, поэтому правая часть равенства (16.7) является группой. Обозначим ее через P . Очевидно, $P \subseteq M(\bar{w})$. Докажем обратное включение. Из определения 16.2 видно, что для этого достаточно доказать включения $w_1^2 \in P$, $[w_1, P] \subseteq P$, $w_\ell^2 \in P$ и $[w_\ell, P] \subseteq P$. По лемме 16.17, (ii) имеем $w_1^2 \in G_k^* \cap M(\bar{w}) \subseteq P$ и $[w_1, P] \subseteq [w_1, M(\bar{w})] \subseteq G_k^* \cap M(\bar{w}) \subseteq P$. Для доказательства включений $w_\ell^2 \in P$ и $[w_\ell, P] \subseteq P$ рассмотрим два случая.

Случай 1: $\text{rang } R(\bar{w}) > \text{rang } M(\bar{w})$.

Тогда по условию для лестницы $(H_0, H_1, \dots, H_t)$ над $M(\bar{w})$ имеем $\text{rang } H_{t-1}^* < \text{rang } H_t$ и в силу 16.13, (v) $\text{rang } M(\bar{w}) = \text{rang } H_t$. В этом случае в силу леммы 16.17, (ii) и предложения 15.2

$$\begin{aligned} w_\ell^2 &\in H_t^* \cap M(\bar{w}) = G_k^* \cap M(\bar{w}) \subseteq P, \\ [w_\ell, P] &\subseteq [w_\ell, M(\bar{w})] \subseteq H_t^* \cap M(\bar{w}) = G_k^* \cap M(\bar{w}) \subseteq P. \end{aligned}$$

Случай 2: $\text{rang } R(\bar{w}) = \text{rang } M(\bar{w})$.

Тогда по предложению 15.2

$$G_k^* \cap M(\bar{w}) = H_0^* \cap M(\bar{w}). \quad (16.8)$$

Так как по лемме 16.8 при $\bar{w} := (w_2, w_3, \dots, w_\ell)$ имеем

$$\text{rang } w_\ell < \text{rang } \langle w_2, w_3, \dots, w_\ell \rangle \leq \text{rang } H_0,$$

то $w_\ell \in H_0^* \cup H_0^-$, и, следовательно, $w_\ell^2 \in H_0^*$, т.е.

$$w_\ell^2 \in H_0^* \cap M(\bar{w}) = G_k^* \cap M(\bar{w}) \subseteq P.$$

Ввиду $\mathbf{w}_\ell \in \mathbf{N}_{\mathbf{B}_\alpha}(\mathbf{H}_0^* \cap \mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}}))$ и (16.8) для доказательства включения $[\mathbf{w}_\ell, \mathbf{P}] \subseteq \mathbf{P}$ достаточно проверить, что

$$[\mathbf{w}_\ell, \mathbf{w}_i] \in \mathbf{H}_0^* \quad (i = 2, 3, \dots, \ell - 1). \quad (16.9)$$

Обозначим $\mathbf{F} = \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \dots, \mathbf{w}_\ell \rangle$. Если $\text{rang } \mathbf{F} < \text{rang } \mathbf{H}_0$, то по лемме 15.4, (iii) имеем $|\mathbf{F} : \mathbf{F} \cap \mathbf{H}_0^*| \leq 2$, что, очевидно, влечет выполнение (16.9). Пусть $\text{rang } \mathbf{F} = \text{rang } \mathbf{H}_0$. Тогда по лемме 16.9 при $\bar{\mathbf{w}} := (\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \dots, \mathbf{w}_\ell)$ имеем $\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_\ell \in \mathbf{H}_0^-$ и $\mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4, \dots, \mathbf{w}_{\ell-1} \in \mathbf{H}_0^*$, что влечет выполнение (16.9) при $i = 3, 4, \dots, \ell - 1$. Если $[\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_\ell] \notin \mathbf{H}_0^*$, то $[\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_\ell] \in \mathbf{H}_0^+ \setminus \mathbf{H}_0^*$, т.е. $\text{rang}[\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_\ell] = \text{rang } \mathbf{H}_0$. Но тогда

$$\text{rang}[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_{\ell-1}] = \text{rang}[\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_\ell] = \text{rang } \mathbf{H}_0 = \text{rang } \mathbf{G}_k$$

вопреки доказанному выше включению $[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_{\ell-1}] \in [\mathbf{w}_1, \mathbf{P}] \subseteq \mathbf{G}_k^*$. Следовательно, $[\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_\ell] \in \mathbf{H}_0^*$, что завершает доказательство (16.7).

Теперь уже несложно вывести противоречие для доказательства леммы 16.18. Из (16.7) в силу леммы 15.4, (i) вытекает

$$\text{rang} \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \dots, \mathbf{w}_{\ell-1} \rangle = \text{rang } \mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}}) = \text{rang } \mathbf{G}_k.$$

Тогда по лемме 16.9 при $\bar{\mathbf{w}} := (\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \dots, \mathbf{w}_{\ell-1})$ получаем $\mathbf{w}_{\ell-2} \in \mathbf{G}_k^*$ и

$$\text{rang } \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_{\ell-1} = \text{rang } \mathbf{G}_k.$$

По лемме 16.17, (i) имеем $\mathbf{G}_0 \cap \mathbf{G}_k^* \subseteq \mathbf{G}_0^*$, следовательно, $\mathbf{w}_{\ell-2} \in \mathbf{G}_0^* \cap \mathbf{G}_k^*$. Обозначив через $\mathbf{c}_0$ базисный элемент подгруппы $\mathbf{G}_0$, по лемме 16.17, (iii) получаем $\mathbf{c}_0^{n/4} \in \mathbf{N}_{\mathbf{B}_\alpha}(\mathbf{G}_0^* \cap \mathbf{G}_k^*)$, следовательно,

$$\mathbf{c}_0^{-n/4} \mathbf{w}_{\ell-2} \mathbf{c}_0^{n/4} \in \mathbf{G}_k^*.$$

Так как $\text{rang } \mathbf{w}_1 = \text{rang } \mathbf{w}_2 \leq \text{rang } \mathbf{G}_k$, то в силу лемм 16.12, (i) и 16.15, (vii) при $\mathbf{M} := \mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}})$ и $\mathbf{u} := \mathbf{w}_1$

$$\mathbf{c}_0^{-n/4} \mathbf{w}_1 \mathbf{c}_0^{n/4} \in \mathbf{G}_k.$$

Так как элементы $\mathbf{c}_0^{-n/4} \mathbf{w}_1 \mathbf{c}_0^{n/4}$ и $\mathbf{w}_{\ell-2}$ сопряжены, то

$$\text{rang } \mathbf{c}_0^{-n/4} \mathbf{w}_1 \mathbf{c}_0^{n/4} = \text{rang } \mathbf{w}_{\ell-2} < \text{rang } \mathbf{G}_k.$$

Следовательно, $\mathbf{c}_0^{-n/4} \mathbf{w}_1 \mathbf{c}_0^{n/4} \in \mathbf{G}_k^* \cup \mathbf{G}_k^-$. Тогда $\mathbf{c}_0^{-n/4} \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_{\ell-2} \mathbf{c}_0^{n/4} \in \mathbf{G}_k^* \cup \mathbf{G}_k^-$ и

$$\text{rang } \mathbf{c}_0^{-n/4} \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_{\ell-2} \mathbf{c}_0^{n/4} < \text{rang } \mathbf{G}_k.$$

Но с другой стороны, элементы $\mathbf{w}_2 \mathbf{w}_{\ell-1}$ и $\mathbf{c}_0^{-n/4} \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_{\ell-2} \mathbf{c}_0^{n/4}$ сопряжены и должно быть

$$\text{rang } \mathbf{c}_0^{-n/4} \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_{\ell-2} \mathbf{c}_0^{n/4} = \text{rang } \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_{\ell-1} = \text{rang } \mathbf{G}_k.$$

Лемма доказана.

16.19. ЛЕММА. Пусть $F, G, H \leq B_\alpha$ – конечные подгруппы, $G \subseteq F \cap H$, $\text{rang } F < \alpha$, $\text{rang } H < \alpha$, $|F : G| \leq 2$ и $|H : G| \leq 2$. Тогда существует тождественный на G гомоморфизм $\phi : F \rightarrow B_\alpha$ такой, что $\langle \phi(F), H \rangle$ – конечная подгруппа ранга, не превосходящего $\text{rang } H + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $G = 1$ можно взять тривиальный гомоморфизм $\phi : F \rightarrow 1 \leq B_\alpha$. Пусть $G \neq 1$. По предложению 14.12 существует пополнение $\bar{G}$ подгруппы G такое, что

$$\forall h \in H \quad \forall g \in \bar{G} \quad \text{rang } gh \leq \text{rang } H + 1. \quad (16.10)$$

По лемме 15.5 найдем гомоморфизм $\phi : F \rightarrow \bar{G}$, тождественный на G . Так как $|\phi(F) : G| \leq 2$ и $|H : G| \leq 2$, то $G \trianglelefteq \langle \phi(F), H \rangle$ и факторгруппа $\langle \phi(F), H \rangle / G$ порождается двумя инволюциями $g_0 G$ и $h_0 G$ для некоторых $g_0 \in \phi(F) \subseteq \bar{G}$ и $h_0 \in H$. Так как $(g_0 h_0)^n = 1$ в силу (16.10), то $\langle \phi(F), H \rangle / G$ есть гомоморфный образ диэдральной группы D_n . В частности, подгруппа $\langle \phi(F), H \rangle$ конечна. Нам остается доказать, что $\text{rang } \langle \phi(F), H \rangle \leq \text{rang } H + 1$.

Пусть K – пополнение подгруппы $\langle \phi(F), H \rangle$. Если $h_0 g_0 \in K^+ \setminus K^*$, то $\text{rang } \langle \phi(F), H \rangle \leq \text{rang } g_0 h_0 \leq \text{rang } H + 1$ в силу (16.10). Предположим, $h_0 g_0 \in K^* \cap K^-$. Тогда $(h_0 g_0)^2 \in K^*$. Любой элемент группы $\langle \phi(F), H \rangle / G$ имеет вид $(h_0 g_0)^{2t} z G$, где $z \in \{1, h_0, g_0, h_0 g_0\}$. Другими словами, для любого $x \in \langle \phi(F), H \rangle$ имеем $(h_0 g_0)^{-2t} x = z g$ для некоторых $g \in G$, t и некоторого z указанного вида. Тогда один из элементов $z g$ должен иметь ранг, равный рангу подгруппы $\langle \phi(F), H \rangle$. Но все они имеют ранг, не превосходящий $\text{rang } H + 1$ в силу (16.10). Следовательно, $\text{rang } \langle \phi(F), H \rangle \leq \text{rang } H + 1$.

16.20. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\bar{G} = (G_0, G_1, \dots, G_k)$ – лестница над некоторой конечной подгруппой M группы B_α . Набор $\bar{\phi} = (\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_k)$ гомоморфизмов $\phi_i : G_i \rightarrow B_\alpha$ назовем *понижающим отображением для $\bar{G}$* , если выполнены следующие условия:

- (i) $\phi_i|_{G_i \cap G_j} = \phi_j|_{G_i \cap G_j}$ при любых $0 \leq i < j \leq k$;
- (ii) $\phi_k = \text{id}$;
- (iii) $\text{rang}(\phi_i(G_i)) < \text{rang } G_i$ при $i = 0, 1, \dots, k-1$.

16.21. ЛЕММА. Пусть $\bar{G} = (G_0, G_1, \dots, G_k)$ – лестница над некоторой конечной подгруппой $M \leq B_\alpha$, $k \geq 2$ и $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k)$ – понижающее отображение для лестницы $(G_1, G_2, \dots, G_k)$ над M . Тогда существует гомоморфизм $\phi_0 : G_0 \rightarrow B_\alpha$ такой, что $(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_k)$ – понижающее отображение для $\bar{G}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем элемент $f \in M \cap \bigcap_{i=1}^{k-1} G_0^-$ по лемме 16.15, (ii), (iii). Для любого $1 \leq i \leq k$ имеем $\text{rang } G_0 \cap G_i < \text{rang } G_0$, следовательно, по лемме 15.4(ii)

$$G_0 \cap G_i \subseteq \langle G_0^*, f \rangle = M G_0^* \subseteq G_1.$$

Отсюда и из определения 16.20 видно, что нам достаточно указать гомоморфизм $\phi_0 : G_0 \rightarrow B_\alpha$, удовлетворяющий условиям

$$\phi_0|_{\langle G_0^*, f \rangle} = \phi_1|_{\langle G_0^*, f \rangle} \quad \text{и} \quad \text{rang } \phi_0(G_0) < \text{rang } G_0.$$

Пусть $\mathbf{c}_0$ и $\mathbf{c}_1$ – базисные элементы подгрупп $\mathbf{G}_0$ и $\mathbf{G}_1$. Обозначим $\mathbf{e} \Leftarrow \mathbf{f}^{-1}\mathbf{c}_0$. По лемме 16.15, (vi) либо для некоторого r при $2 \leq r \leq k-1$ подгруппа $\mathbf{c}_1^{-n/4}\mathbf{G}_r\mathbf{c}_1^{n/4}$ есть пополнение $\mathbf{G}_0^*$, либо $\mathbf{G}_0^* \subseteq \mathbf{c}_1^{-n/4}\mathbf{G}_k\mathbf{c}_1^{n/4}$. Рассмотрим эти два случая.

Случай 1: Для некоторого r при $2 \leq r \leq k-1$ подгруппа $\mathbf{c}_1^{-n/4}\mathbf{G}_r\mathbf{c}_1^{n/4}$ есть пополнение $\mathbf{G}_0^*$. Так как $\mathbf{e} \in \mathbf{G}_0^-$, то по лемме 15.5 найдется гомоморфизм

$$\omega: \langle \mathbf{G}_0^*, \mathbf{e} \rangle \rightarrow \mathbf{c}_1^{-n/4}\mathbf{G}_r\mathbf{c}_1^{n/4}$$

такой, что $\omega|_{\mathbf{G}_0^*} = \text{id}$. Определим, далее, гомоморфизм

$$\xi: \mathbf{c}_1^{-n/4}\mathbf{G}_r\mathbf{c}_1^{n/4} \rightarrow \mathbf{B}_\alpha$$

равенством

$$\xi(\mathbf{g}) \Leftarrow \phi_1(\mathbf{c}_1^{-n/4})\phi_r(\mathbf{c}_1^{n/4}\mathbf{g}\mathbf{c}_1^{-n/4})\phi_1(\mathbf{c}_1^{n/4}).$$

Из условия (i) определения 16.20 следует $\xi|_{\mathbf{G}_0^*} = \phi_1|_{\mathbf{G}_0^*}$. Далее, по лемме 16.19 при $\mathbf{F} := \xi\omega(\langle \mathbf{G}_0^*, \mathbf{e} \rangle)$, $\mathbf{G} := \phi_1(\mathbf{G}_0^*)$ и $\mathbf{H} := \phi_1(\langle \mathbf{G}_0^*, \mathbf{f} \rangle)$ существует гомоморфизм

$$\psi: \xi\omega(\langle \mathbf{G}_0^*, \mathbf{e} \rangle) \rightarrow \mathbf{B}_\alpha$$

такой, что $\psi|_{\phi_1(\mathbf{G}_0^*)} = \text{id}$, подгруппа

$$\mathbf{P} \Leftarrow \langle \phi_1(\langle \mathbf{G}_0^*, \mathbf{f} \rangle), \psi\xi\omega(\langle \mathbf{G}_0^*, \mathbf{e} \rangle) \rangle$$

конечна и

$$\text{ранг } \mathbf{P} \leq \text{ранг } \phi_1(\langle \mathbf{G}_0^*, \mathbf{f} \rangle) + 1 \leq \text{ранг } \phi_1(\mathbf{G}_1) + 1 \leq \text{ранг } \mathbf{G}_1.$$

Так как $\mathbf{G}_0 = \langle \mathbf{G}_0^*, \mathbf{e}, \mathbf{f} \rangle$, то по лемме 15.6 гомоморфизмы $\phi_1|_{\langle \mathbf{G}_0^*, \mathbf{f} \rangle}$ и $\psi\xi\omega$ продолжаются до гомоморфизма $\phi_0: \mathbf{G}_0 \rightarrow \mathbf{B}_\alpha$, который, очевидно, является искомым.

Случай 2: $\mathbf{G}_0^* \subseteq \mathbf{c}_1^{-n/4}\mathbf{G}_k\mathbf{c}_1^{n/4}$. Используя условия (i) и (ii) определения 16.20, для любого $\mathbf{g} \in \mathbf{G}_0^*$ получаем

$$\begin{aligned} \phi_1(\mathbf{g}) &= \phi_1(\mathbf{c}_1^{-n/4})\phi_1(\mathbf{c}_1^{n/4}\mathbf{g}\mathbf{c}_1^{-n/4})\phi_1(\mathbf{c}_1^{n/4}) = \\ &= \phi_1(\mathbf{c}_1^{-n/4})\phi_k(\mathbf{c}_1^{n/4}\mathbf{g}\mathbf{c}_1^{-n/4})\phi_1(\mathbf{c}_1^{n/4}) = \\ &= \phi_1(\mathbf{c}_1^{-n/4})\mathbf{c}_1^{n/4}\mathbf{g}\mathbf{c}_1^{-n/4}\phi_1(\mathbf{c}_1^{n/4}), \end{aligned}$$

т.е.

$$\phi_1(\mathbf{g}) = \mathbf{y}^{-1}\mathbf{g}\mathbf{y}, \quad \text{где } \mathbf{y} \Leftarrow \mathbf{c}_1^{-n/4}\phi_1(\mathbf{c}_1^{n/4}).$$

Пусть

$$\xi: \langle \mathbf{G}_0^*, \mathbf{e} \rangle \rightarrow \mathbf{B}_\alpha$$

– вложение, определенное равенством

$$\xi(\mathbf{g}) = \mathbf{y}^{-1}\mathbf{g}\mathbf{y}.$$

По лемме 16.19 при $\mathbf{F} := \xi(\langle \mathbf{G}_0^*, \mathbf{e} \rangle)$, $\mathbf{G} := \phi_1(\mathbf{G}_0^*)$ и $\mathbf{H} := \phi_1(\langle \mathbf{G}_0^*, \mathbf{f} \rangle)$ найдем гомоморфизм

$$\psi: \xi(\langle \mathbf{G}_0^*, \mathbf{e} \rangle) \rightarrow \mathbf{B}_\alpha$$

такой, что $\psi|_{\phi_1(\mathbf{G}_0^*)} = \text{id}$, подгруппа

$$\mathbf{P} = \langle \phi_1(\langle \mathbf{G}_0^*, \mathbf{f} \rangle), \psi\xi(\langle \mathbf{G}_0^*, \mathbf{e} \rangle) \rangle$$

конечна и

$$\text{ранг } \mathbf{P} \leq \text{ранг } \phi_1(\langle \mathbf{G}_0^*, \mathbf{f} \rangle) + 1 \leq \text{ранг } \phi_1(\mathbf{G}_1) + 1 \leq \text{ранг } \mathbf{G}_1.$$

Так как $\mathbf{G}_0 = \langle \mathbf{G}_0^*, \mathbf{e}, \mathbf{f} \rangle$ и $\psi\xi|_{\mathbf{G}_0^*} = \phi_1|_{\mathbf{G}_0^*}$, то по лемме 15.6 гомоморфизмы $\phi_1|_{\langle \mathbf{G}_0^*, \mathbf{f} \rangle}$ и $\psi\xi$ продолжаются до искомого гомоморфизма $\phi_0: \mathbf{G}_0 \rightarrow \mathbf{B}_\alpha$.

16.22. ЛЕММА. Пусть $\bar{\mathbf{G}} = (\mathbf{G}_0, \mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_k)$ – лестница над некоторой конечной подгруппой $\mathbf{M} \leq \mathbf{B}_\alpha$. Если $\text{ранг } \mathbf{G}_{k-1}^* = \text{ранг } \mathbf{G}_k$, то существует некоторое понижающее отображение для $\bar{\mathbf{G}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу лемм 16.15, (i), 16.21 и очевидной индукции достаточно рассмотреть случай $k = 1$. Из равенства $\text{ранг } \mathbf{G}_0^* = \text{ранг } \mathbf{G}_1$ и условия (iii) определения 16.14 следует, что в этом случае $\mathbf{G}_1$ есть пополнение подгруппы $\mathbf{G}_0^*$. Рассмотрим два случая.

Случай 1: $\mathbf{G}_1 \cap \mathbf{G}_0^- = \emptyset$. Тогда из $\text{ранг } \mathbf{G}_1 < \text{ранг } \mathbf{G}_0$ следует $\mathbf{G}_0 \cap \mathbf{G}_1 \subseteq \mathbf{G}_0^*$. По лемме 15.7 существует гомоморфизм $\phi_0: \mathbf{G}_0 \rightarrow \mathbf{G}_1$ такой, что $\phi_0|_{\mathbf{G}_0^*} = \text{id}$. В таком случае $(\phi_0, \text{id}_{\mathbf{G}_1})$ – искомое понижающее отображение.

Случай 2: $\mathbf{G}_1 \cap \mathbf{G}_0^- \neq \emptyset$. Выберем элемент $\mathbf{f} \in \mathbf{G}_1 \cap \mathbf{G}_0^-$ и пусть $\mathbf{c}_0$ – базисный элемент $\mathbf{G}_0$. По лемме 15.4, (ii)

$$\mathbf{G}_0 \cap \mathbf{G}_1 \subseteq \langle \mathbf{G}_0^*, \mathbf{f} \rangle.$$

Обозначив $\mathbf{e} = \mathbf{f}^{-1}\mathbf{c}_0$, по лемме 15.5 найдем гомоморфизм $\psi: \langle \mathbf{G}_0^*, \mathbf{e} \rangle \rightarrow \mathbf{G}_1$ такой, что $\psi|_{\mathbf{G}_0^*} = \text{id}$. По лемме 15.6 гомоморфизмы $\text{id}_{\langle \mathbf{G}_0^*, \mathbf{f} \rangle}$ и ψ продолжаются до гомоморфизма $\phi_0: \mathbf{G}_0 \rightarrow \mathbf{G}_1$. Тогда $(\phi_0, \text{id}_{\mathbf{G}_1})$ – искомое понижающее отображение.

Следующая лемма – индуктивный шаг доказательства предложения 16.6.

16.23. ЛЕММА. Пусть $\bar{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_\ell)$ – цепь длины $\ell \geq 5$, и пусть выполнено хотя бы одно из двух следующих условий:

- (i) $\text{ранг } \mathbf{L}(\bar{\mathbf{w}}) > \text{ранг } \mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}})$, $\mathbf{G}_0$ – пополнение подгруппы $\mathbf{L}(\bar{\mathbf{w}})$, $(\mathbf{G}_0, \mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_k)$ – лестница над $\mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}})$ и $\text{ранг } \mathbf{G}_{k-1}^* = \text{ранг } \mathbf{G}_k$; или
- (ii) $\text{ранг } \mathbf{R}(\bar{\mathbf{w}}) > \text{ранг } \mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}})$, $\mathbf{H}_0$ – пополнение подгруппы $\mathbf{R}(\bar{\mathbf{w}})$, $(\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_t)$ – лестница над $\mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}})$ и $\text{ранг } \mathbf{H}_{t-1}^* = \text{ранг } \mathbf{H}_t$;

Тогда существует цепь $\bar{\mathbf{w}}' = (\mathbf{w}'_1, \mathbf{w}'_2, \mathbf{w}'_3, \dots, \mathbf{w}'_{\ell-1}, \mathbf{w}'_\ell)$, для которой

$$\text{ранг } \mathbf{L}(\bar{\mathbf{w}}') + \text{ранг } \mathbf{R}(\bar{\mathbf{w}}') < \text{ранг } \mathbf{L}(\bar{\mathbf{w}}) + \text{ранг } \mathbf{R}(\bar{\mathbf{w}}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия (i) и (ii) симметричны относительно замены порядка элементов $\mathbf{w}_i$ на обратный. Поэтому без ограничения общности предположим, что выполнено условие (i). Выберем базисный элемент $\mathbf{c}_i$ каждой подгруппы $\mathbf{G}_i$. Так как $\mathbf{w}_2 \in \mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}})$, то

$$\text{ранг } \mathbf{w}_1 = \text{ранг } \mathbf{w}_2 \leq \text{ранг } \mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}}) \leq \text{ранг } \mathbf{G}_k.$$

Тогда в силу лемм 16.12, (i) и 16.15, (vii) при $\mathbf{M} := \mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}})$ и $\mathbf{u} := \mathbf{w}_1$

$$\mathbf{c}_0^{-n/4} \mathbf{w}_1 \mathbf{c}_0^{n/4} \in \bigcap_{i=0}^{k-1} (\mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}}) \mathbf{G}_i^* \setminus \mathbf{G}_i^*) \subseteq \bigcap_{i=0}^k \mathbf{G}_i. \quad (16.11)$$

При любом $2 \leq j \leq \ell - 1$ имеем $\mathbf{L}(\bar{\mathbf{w}}) = \langle \mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}}), \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_j \rangle$, и так как при $2 \leq j \leq \ell - 2$

$$\text{ранг } \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_j = \text{ранг } \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_{j+1} \leq \text{ранг } \mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}}) \leq \text{ранг } \mathbf{G}_k,$$

то снова по лемме 16.15, (vii)

$$\mathbf{c}_0^{-n/4} \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_j \mathbf{c}_0^{n/4} \in \bigcap_{i=0}^k \mathbf{G}_i \quad (j = 2, 3, \dots, \ell - 2).$$

Следовательно,

$$\mathbf{c}_0^{-n/4} \mathbf{w}_j \mathbf{c}_0^{n/4} \in \bigcap_{i=0}^k \mathbf{G}_i \quad (j = 1, 2, \dots, \ell - 2). \quad (16.12)$$

По лемме 16.22 найдем понижающее отображение $(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_k)$ для $(\mathbf{G}_0, \mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_k)$. Имеем

$$\phi_0(\mathbf{c}_0^{-n/4} \mathbf{w}_j \mathbf{c}_0^{n/4}) = \phi_k(\mathbf{c}_0^{-n/4} \mathbf{w}_j \mathbf{c}_0^{n/4}) = \mathbf{c}_0^{-n/4} \mathbf{w}_j \mathbf{c}_0^{n/4} \quad (j = 1, 2, \dots, \ell - 2),$$

т.е.

$$\phi_0(\mathbf{w}_j) = \mathbf{y}^{-1} \mathbf{w}_j \mathbf{y}, \quad \text{где } \mathbf{y} = \mathbf{c}_0^{n/4} \phi_0(\mathbf{c}_0^{-n/4}) \quad (j = 1, 2, \dots, \ell - 2).$$

С другой стороны, $\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \dots, \mathbf{w}_{\ell-2} \in \mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}}) \subseteq \mathbf{G}_k$, поэтому

$$\phi_0(\mathbf{w}_j) = \mathbf{w}_j \quad (j = 2, 3, \dots, \ell - 2).$$

Таким образом, $\mathbf{y}$ коммутирует с $\mathbf{w}_j$ при $j = 2, 3, \dots, \ell - 2$. Если $\text{ранг } \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_{\ell-1} \leq \text{ранг } \mathbf{G}_k$, то точно так же получим, что $\mathbf{y}$ коммутирует с $\mathbf{w}_{\ell-1}$, и тогда по лемме 16.10 в качестве искомой цепи $\bar{\mathbf{w}}'$ можно взять последовательность $(\phi_0(\mathbf{w}_1), \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \dots, \mathbf{w}_\ell)$. Поэтому будем предполагать, что

$$\text{ранг } \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_{\ell-1} > \text{ранг } \mathbf{G}_k.$$

Тогда в силу лемм 16.12, (i) и 16.15, (vii) для некоторого $0 \leq r \leq k-1$ имеем $\text{rang } \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_{\ell-1} = \text{rang } \mathbf{G}_r$ и

$$\mathbf{c}_0^{-n/4} \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_{\ell-1} \mathbf{c}_0^{n/4} \in \mathbf{c}_r^{n/2} \mathbf{G}_r^*. \quad (16.13)$$

Так как $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{\ell-2} \in \mathbf{c}_0^{n/4} \mathbf{G}_r \mathbf{c}_0^{-n/4}$ в силу (16.12), то $\mathbf{c}_0^{n/4} \mathbf{G}_r \mathbf{c}_0^{-n/4}$ – пополнение подгруппы $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{\ell-2} \rangle$.

Заметим, что

$$\text{rang } \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_\ell = \text{rang } \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_{\ell-1} > \text{rang } \mathbf{G}_k \geq \text{rang } \mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}}).$$

Отсюда следует $\text{rang } \mathbf{R}(\bar{\mathbf{w}}) > \text{rang } \mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}})$. Выберем пополнение $\mathbf{H}_0$ подгруппы $\mathbf{R}(\bar{\mathbf{w}})$ и по лемме 16.13 построим лестницу $(\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_t)$ над $\mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}})$. Выберем, далее, базисные элементы $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_t$ подгрупп $\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_t$. Если предположить $\text{rang } \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_\ell \leq \text{rang } \mathbf{H}_t$, то отсюда будет следовать $\text{rang } \mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}}) < \text{rang } \mathbf{H}_t$, и в силу условия 16.13, (v) определения 16.14 $\text{rang } \mathbf{H}_{t-1}^* = \text{rang } \mathbf{H}_t$. Но тогда симметрично рассмотренному выше случаю $\text{rang } \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_{\ell-1} \leq \text{rang } \mathbf{G}_k$ мы можем рассмотреть понижающее отображение $(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_t)$ для $(\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_t)$ и в качестве $\bar{\mathbf{w}}'$ взять последовательность $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{\ell-1}, \psi_0(\mathbf{w}_\ell))$. Поэтому будем считать

$$\text{rang } \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_\ell > \text{rang } \mathbf{H}_t.$$

В силу лемм 16.12, (ii) и 16.15, (vii) для некоторого $0 \leq s \leq t-1$

$$\mathbf{d}_0^{-n/4} \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_\ell \mathbf{d}_0^{n/4} \in \mathbf{d}_s^{n/2} \mathbf{H}_s^*. \quad (16.14)$$

Симметрично включениям (16.12) получаем

$$\mathbf{d}_0^{-n/4} \mathbf{w}_j \mathbf{d}_0^{n/4} \in \bigcap_{i=0}^t \mathbf{H}_i \quad (j = 3, 4, \dots, \ell), \quad (16.15)$$

откуда с учетом (16.14) следует, что $\mathbf{d}_0^{n/4} \mathbf{H}_s \mathbf{d}_0^{-n/4}$ – пополнение подгруппы $\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \dots, \mathbf{w}_\ell \rangle$.

Пусть $\mathbf{x}$ – сопрягающий элемент цепи $\bar{\mathbf{w}}$. Имеем

$$\mathbf{x}^{-1} \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{\ell-1} \rangle \mathbf{x} = \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \dots, \mathbf{w}_\ell \rangle,$$

и, следовательно, $\mathbf{c}_0^{n/4} \mathbf{G}_r \mathbf{c}_0^{-n/4}$ и $\mathbf{x} \mathbf{d}_0^{n/4} \mathbf{H}_s \mathbf{d}_0^{-n/4} \mathbf{x}^{-1}$ – два пополнения одной подгруппы $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{\ell-1} \rangle$. Тогда по предложению 14.2 найдется элемент $\mathbf{z} \in \mathbf{B}_\alpha$, коммутирующий с $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{\ell-1}$, для которого

$$\mathbf{z}^{-1} \mathbf{c}_0^{n/4} \mathbf{G}_r \mathbf{c}_0^{-n/4} \mathbf{z} = \mathbf{x} \mathbf{d}_0^{n/4} \mathbf{H}_s \mathbf{d}_0^{-n/4} \mathbf{x}^{-1}.$$

Очевидно, $\mathbf{zx}$ – также сопрягающий элемент цепи $\bar{\mathbf{w}}$, и, заменяя $\mathbf{x}$ на $\mathbf{zx}$, можно предполагать

$$(\mathbf{c}_0^{-n/4} \mathbf{x} \mathbf{d}_0^{n/4})^{-1} \mathbf{G}_r \mathbf{c}_0^{-n/4} \mathbf{x} \mathbf{d}_0^{n/4} = \mathbf{H}_s. \quad (16.16)$$

Теперь мы покажем, что, “подправив” подгруппы $\mathbf{H}_{s+j}$ при $j > 0$, их можно выбрать сопряженными соответствующим подгруппам $\mathbf{G}_{r+j}$, причем с помощью одного и того же элемента $\mathbf{h}$. Идея рассуждений состоит в следующем. Как видно из условия 16.13, (iii) определения 16.14, каждая подгруппа $\mathbf{G}_{i+1}$ определяется подгруппой $\mathbf{G}_i$ и некоторым элементом из $\mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}}) \mathbf{G}_i^* \setminus \mathbf{G}_i^*$, а каждая подгруппа $\mathbf{H}_{i+1}$ определяется подгруппой $\mathbf{H}_i$ и некоторым элементом из $\mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}}) \mathbf{H}_i^* \setminus \mathbf{H}_i^*$. Наша задача будет состоять в том, чтобы выбрать сопряженные элементы, лежащие во множествах $\mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}}) \mathbf{G}_i^* \setminus \mathbf{G}_i^*$ и $\mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}}) \mathbf{H}_i^* \setminus \mathbf{H}_i^*$. В качестве таких элементов будут рассмотрены $\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{d}_s^{-n/4} \mathbf{d}_0^{-n/4} \mathbf{w}_2 \mathbf{d}_0^{n/4} \mathbf{d}_s^{n/4}$.

Мы хотим теперь применить лемму 16.15, (vii) при $\bar{\mathbf{G}} := (\mathbf{H}_s, \mathbf{H}_{s+1}, \dots, \mathbf{H}_t)$, $\mathbf{M} := \mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}})$ и $\mathbf{u} := \mathbf{d}_0^{-n/4} \mathbf{w}_2 \mathbf{d}_0^{n/4}$. Заметим, что $\mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}}) \cap \mathbf{H}_s^- \neq \emptyset$ в силу лемм 16.12, (ii) и 16.15, (iii). Проверим выполнение остальных условий посылки леммы 16.15, (vii):

$$\mathbf{d}_0^{-n/4} \mathbf{w}_2 \mathbf{d}_0^{n/4} \in \mathbf{H}_s, \quad (16.17)$$

$$|\langle \mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}}), \mathbf{d}_0^{-n/4} \mathbf{w}_2 \mathbf{d}_0^{n/4} \rangle : \mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}})| \leq 2, \quad (16.18)$$

$$\text{rang} \langle \mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}}), \mathbf{d}_0^{-n/4} \mathbf{w}_2 \mathbf{d}_0^{n/4} \rangle = \text{rang} \mathbf{H}_s. \quad (16.19)$$

Включение (16.17) вытекает из (16.14) и (16.15). Из тождеств $[\mathbf{x}^{n/4}, \mathbf{y}^2] = 1$ и $[\mathbf{x}^{n/4}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] = 1$, выполненных на $\mathbf{H}_0$ в силу предложения 15.10, (iii), (iv), следует

$$\mathbf{d}_0^{-n/4} \mathbf{w}_2^2 \mathbf{d}_0^{n/4} = \mathbf{w}_2^2 \in \mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}})$$

и для любого $\mathbf{g} \in \mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}})$

$$\mathbf{d}_0^{-n/4} \mathbf{w}_2^{-1} \mathbf{d}_0^{n/4} \mathbf{g} \mathbf{d}_0^{-n/4} \mathbf{w}_2 \mathbf{d}_0^{n/4} = \mathbf{w}_2^{-1} \mathbf{g} \mathbf{w}_2 \in \mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}}).$$

Отсюда вытекает (16.18). Далее, по лемме 16.15, (vii) при $\bar{\mathbf{G}} := (\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_t)$, $\mathbf{M} := \mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}})$ и $\mathbf{u} := \mathbf{w}_\ell$, учитывая, что $\text{rang} \mathbf{w}_\ell = \text{rang} \mathbf{w}_2 \leq \text{rang} \mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}}) \leq \text{rang} \mathbf{H}_t$, имеем

$$\mathbf{d}_0^{-n/4} \mathbf{w}_\ell \mathbf{d}_0^{n/4} \in \mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}}) \mathbf{H}_s^* \setminus \mathbf{H}_s^* = \mathbf{g} \mathbf{H}_s^* \quad \text{для некоторого } \mathbf{g} \in \mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}}) \cap \mathbf{H}_s^-,$$

откуда с учетом (16.14) следует $\mathbf{d}_0^{-n/4} \mathbf{w}_2 \mathbf{d}_0^{n/4} \in \mathbf{d}_s^{n/2} \mathbf{g} \mathbf{H}_s^*$, т.е.

$$\mathbf{d}_0^{-n/4} \mathbf{w}_2 \mathbf{d}_0^{n/4} \mathbf{g}^{-1} \in \mathbf{d}_s^{n/2} \mathbf{H}_s^*.$$

Тем самым мы указали элемент подгруппы $\langle \mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}}), \mathbf{d}_0^{-n/4} \mathbf{w}_2 \mathbf{d}_0^{n/4} \rangle$, имеющий ранг, равный $\text{rang} \mathbf{H}_s$. Следовательно, имеет место равенство (16.19).

Итак, по лемме 16.15, (vii)

$$\mathbf{d}_s^{-n/4} \mathbf{d}_0^{-n/4} \mathbf{w}_2 \mathbf{d}_0^{n/4} \mathbf{d}_s^{n/4} \in \bigcap_{j=s}^{t-1} (\mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}}) \mathbf{H}_j^* \setminus \mathbf{H}_j^*). \quad (16.20)$$

Обозначим

$$\mathbf{h} \rightleftharpoons \mathbf{c}_0^{-n/4} \mathbf{x} \mathbf{d}_0^{n/4} \mathbf{d}_s^{n/4}. \quad (16.21)$$

Из (16.16) следует

$$\mathbf{h}^{-1} \mathbf{G}_r \mathbf{h} = \mathbf{H}_s,$$

откуда по предложению 13.17

$$\mathbf{h}^{-1} \mathbf{G}_r^* \mathbf{h} = \mathbf{H}_s^*.$$

Тогда, используя (16.20), (16.11) и лемму 15.4, (ii), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}}) \mathbf{H}_s^* &= \langle \mathbf{H}_s^*, \mathbf{d}_s^{-n/4} \mathbf{d}_0^{-n/4} \mathbf{w}_2 \mathbf{d}_0^{n/4} \mathbf{d}_s^{n/4} \rangle \\ &= \langle \mathbf{h}^{-1} \mathbf{G}_r^* \mathbf{h}, \mathbf{h}^{-1} \mathbf{c}_0^{-n/4} \mathbf{w}_1 \mathbf{c}_0^{n/4} \mathbf{h} \rangle \\ &= \mathbf{h}^{-1} \langle \mathbf{G}_r^*, \mathbf{c}_0^{-n/4} \mathbf{w}_1 \mathbf{c}_0^{n/4} \rangle \mathbf{h} \\ &= \mathbf{h}^{-1} (\mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}}) \mathbf{G}_r^*) \mathbf{h}. \end{aligned}$$

Так как в процессе построения лестницы $(\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_t)$ над $\mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}})$ в качестве $\mathbf{H}_{s+1}$ можно взять любое пополнение подгруппы $\mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}}) \mathbf{H}_s^*$ (см. доказательство леммы 16.13), то можно считать

$$\mathbf{H}_{s+1} = \mathbf{h}^{-1} \mathbf{G}_{r+1} \mathbf{h}.$$

Из предложения 15.2 и 16.13, (v) следует $t = s + 1 \Leftrightarrow k = r + 1$. Если $k > r + 1$, то аналогично предыдущему из (16.20), (16.11) и соотношения $\mathbf{H}_{s+1} = \mathbf{h}^{-1} \mathbf{G}_{r+1} \mathbf{h}$ получим, что в качестве $\mathbf{H}_{s+2}$ можно взять $\mathbf{h}^{-1} \mathbf{G}_{r+2} \mathbf{h}$. Продолжая этот процесс, в результате получим $t - s = k - r$ и

$$\mathbf{H}_{s+i} = \mathbf{h}^{-1} \mathbf{G}_{r+i} \mathbf{h} \quad (i = 0, 1, \dots, k - r).$$

Теперь определим гомоморфизмы $\psi_{s+i}: \mathbf{H}_{s+i} \rightarrow \mathbf{B}_\alpha$ при $i = 0, 1, \dots, k - r$ равенствами

$$\psi_{s+i}(\mathbf{h}^{-1} \mathbf{g} \mathbf{h}) \rightleftharpoons \mathbf{h}^{-1} \phi_{r+i}(\mathbf{g}) \mathbf{h} \quad (i = 0, 1, \dots, k - r). \quad (16.22)$$

Так как $(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_k)$ есть понижающее отображение для $(\mathbf{G}_0, \mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_k)$, то из определения 16.20 видно, что $(\psi_s, \psi_{s+1}, \dots, \psi_t)$ есть понижающее отображение для $(\mathbf{H}_s, \mathbf{H}_{s+1}, \dots, \mathbf{H}_t)$. Применяя лемму 16.21 в случае $s \geq 1$ (так как $s \leq t - 1$ в силу выбора s , то при $s \geq 1$ выполнено условие $k \geq 2$ леммы 16.21), найдем

понижающее отображение $(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_t)$ для $(\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_t)$. Мы докажем, что последовательность

$$\bar{\mathbf{w}}' \Rightarrow (\phi_0(\mathbf{w}_1), \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \dots, \mathbf{w}_{\ell-1}, \psi_0(\mathbf{w}_\ell))$$

является искомой цепью.

Из (16.21) следует

$$\mathbf{h}^{-1} \mathbf{c}_0^{-n/4} \mathbf{w}_j \mathbf{c}_0^{n/4} \mathbf{h} = \mathbf{d}_s^{-n/4} \mathbf{d}_0^{-n/4} \mathbf{w}_{j+1} \mathbf{d}_0^{n/4} \mathbf{d}_s^{n/4} \quad (j = 1, 2, \dots, \ell - 1). \quad (16.23)$$

При этом в силу (16.12), (16.13)

$$\mathbf{c}_0^{-n/4} \mathbf{w}_j \mathbf{c}_0^{n/4} \in \mathbf{G}_r$$

и в силу (16.15) и (16.17)

$$\mathbf{d}_s^{-n/4} \mathbf{d}_0^{-n/4} \mathbf{w}_{j+1} \mathbf{d}_0^{n/4} \mathbf{d}_s^{n/4} \in \mathbf{H}_s.$$

Применяя ψ_s к левой и правой частям соотношений (16.23), с учетом (16.22) получаем

$$\mathbf{h}^{-1} \phi_r(\mathbf{c}_0^{-n/4} \mathbf{w}_j \mathbf{c}_0^{n/4}) \mathbf{h} = \psi_s(\mathbf{d}_s^{-n/4} \mathbf{d}_0^{-n/4} \mathbf{w}_{j+1} \mathbf{d}_0^{n/4} \mathbf{d}_s^{n/4}) \quad (j = 1, 2, \dots, \ell - 1),$$

откуда, учитывая, что $\phi_r \mid_{\mathbf{G}_0 \cap \mathbf{G}_r} = \phi_0 \mid_{\mathbf{G}_0 \cap \mathbf{G}_r}$, $\psi_s \mid_{\mathbf{H}_0 \cap \mathbf{H}_s} = \psi_0 \mid_{\mathbf{H}_0 \cap \mathbf{H}_s}$, $\mathbf{w}_j \in \mathbf{L}(\bar{\mathbf{w}}) \subseteq \mathbf{G}_0$ и $\mathbf{w}_{j+1} \in \mathbf{R}(\bar{\mathbf{w}}) \subseteq \mathbf{H}_0$, выводим

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^{-1} \phi_0(\mathbf{c}_0^{-n/4}) \phi_r(\mathbf{w}_j) \phi_0(\mathbf{c}_0^{n/4}) \mathbf{h} &= \psi_s(\mathbf{d}_s^{-n/4}) \psi_0(\mathbf{d}_0^{-n/4}) \\ &\quad \times \psi_0(\mathbf{w}_{j+1}) \psi_0(\mathbf{d}_0^{n/4}) \psi_s(\mathbf{d}_s^{n/4}). \end{aligned}$$

Так как $\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \dots, \mathbf{w}_{\ell-1} \in \mathbf{M}(\bar{\mathbf{w}}) \subseteq \mathbf{G}_k \cap \mathbf{H}_t$, то

$$\phi_0(\mathbf{w}_j) = \psi_0(\mathbf{w}_j) = \mathbf{w}_j \quad \text{при } j = 2, 3, \dots, \ell - 1.$$

Следовательно, обозначив

$$\tilde{\mathbf{x}} \Rightarrow \phi_0(\mathbf{c}_0^{n/4}) \mathbf{h} \psi_s(\mathbf{d}_s^{-n/4}) \psi_0(\mathbf{d}_0^{-n/4}),$$

получим

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}^{-1} \phi_0(\mathbf{w}_1) \tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{w}_2, \\ \tilde{\mathbf{x}}^{-1} \mathbf{w}_j \tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{w}_{j+1} \quad (j = 2, 3, \dots, \ell - 2), \\ \tilde{\mathbf{x}}^{-1} \mathbf{w}_{\ell-1} \tilde{\mathbf{x}} &= \psi_0(\mathbf{w}_\ell). \end{aligned}$$

Далее, учитывая, что $\phi_0|_{M(\bar{\mathbf{w}})} = \phi_k|_{M(\bar{\mathbf{w}})} = \text{id}$ и $\psi_0|_{M(\bar{\mathbf{w}})} = \psi_t|_{M(\bar{\mathbf{w}})} = \text{id}$, имеем

$$(\phi_0(\mathbf{w}_1))^2 = \phi_0(\mathbf{w}_1^2) = \mathbf{w}_1^2, \quad (\psi_0(\mathbf{w}_\ell))^2 = \psi_0(\mathbf{w}_\ell^2) = \mathbf{w}_\ell^2$$

и для любого $\mathbf{g} \in M(\bar{\mathbf{w}})$ при $\epsilon = \pm 1$

$$\begin{aligned} (\phi_0(\mathbf{w}_1))^{-\epsilon} \mathbf{g} (\phi_0(\mathbf{w}_1))^\epsilon &= \phi_0(\mathbf{w}_1^{-\epsilon} \mathbf{g} \mathbf{w}_1^\epsilon) = \mathbf{w}_1^{-\epsilon} \mathbf{g} \mathbf{w}_1^\epsilon, \\ (\psi_0(\mathbf{w}_\ell))^{-\epsilon} \mathbf{g} (\psi_0(\mathbf{w}_\ell))^\epsilon &= \psi_0(\mathbf{w}_\ell^{-\epsilon} \mathbf{g} \mathbf{w}_\ell^\epsilon) = \mathbf{w}_\ell^{-\epsilon} \mathbf{g} \mathbf{w}_\ell^\epsilon. \end{aligned}$$

Отсюда легко видеть (см. доказательство леммы 16.10), что $M(\bar{\mathbf{w}}') = M(\bar{\mathbf{w}})$. Тогда согласно определению 16.3 $\bar{\mathbf{w}}'$ является цепью с сопрягающим элементом $\bar{\mathbf{x}}$. Наконец, заметим, что

$$L(\bar{\mathbf{w}}') = \langle M(\bar{\mathbf{w}}), \phi_0(\mathbf{w}_1) \rangle = \langle \phi_0(M(\bar{\mathbf{w}})), \phi_0(\mathbf{w}_1) \rangle = \phi_0(L(\bar{\mathbf{w}}))$$

и

$$R(\bar{\mathbf{w}}') = \langle M(\bar{\mathbf{w}}), \psi_0(\mathbf{w}_\ell) \rangle = \langle \psi_0(M(\bar{\mathbf{w}})), \psi_0(\mathbf{w}_\ell) \rangle = \psi_0(R(\bar{\mathbf{w}})),$$

откуда в силу условия (ii) определения 16.20 следует

$$\begin{aligned} \text{rang } L(\bar{\mathbf{w}}') + \text{rang } R(\bar{\mathbf{w}}') &\leq \text{rang } \phi_0(\mathbf{G}_0) + \text{rang } \psi_0(\mathbf{H}_0) \\ &< \text{rang } \mathbf{G}_0 + \text{rang } \mathbf{H}_0 \\ &= \text{rang } L(\bar{\mathbf{w}}) + \text{rang } R(\bar{\mathbf{w}}). \end{aligned}$$

Доказательство леммы завершено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 16.6. Допустим, найдется нерегулярная цепь $\bar{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_\ell)$ длины $\ell \geq 6$. В соответствии с индукцией будем считать, что $\bar{\mathbf{w}}$ выбрана с минимальным значением $\text{rang } L(\bar{\mathbf{w}}) + \text{rang } R(\bar{\mathbf{w}})$. Пусть $\mathbf{G}_0$ – пополнение подгруппы $L(\bar{\mathbf{w}})$ и $\mathbf{H}_0$ – пополнение подгруппы $R(\bar{\mathbf{w}})$. Согласно лемме 16.13 построим лестницу $(\mathbf{G}_0, \mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_k)$ над $M(\bar{\mathbf{w}})$ в случае $\text{rang } L(\bar{\mathbf{w}}) > \text{rang } M(\bar{\mathbf{w}})$ и лестницу $(\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_t)$ над $M(\bar{\mathbf{w}})$ в случае $\text{rang } R(\bar{\mathbf{w}}) > \text{rang } M(\bar{\mathbf{w}})$. Лемма 16.18 в точности утверждает выполнение одного из условий (i) или (ii) леммы 16.23. Тогда по лемме 16.23 существует цепь $\bar{\mathbf{w}}'$ той же длины ℓ , отличающаяся от $\bar{\mathbf{w}}$ лишь элементами $\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{w}_\ell$, с тем условием, что $\text{rang } L(\bar{\mathbf{w}}') + \text{rang } R(\bar{\mathbf{w}}') < \text{rang } L(\bar{\mathbf{w}}) + \text{rang } R(\bar{\mathbf{w}})$. Но поскольку элементы $\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \dots, \mathbf{w}_{\ell-1}$ общие для $\bar{\mathbf{w}}$ и $\bar{\mathbf{w}}'$, то из нерегулярности $\bar{\mathbf{w}}$ вытекает нерегулярность $\bar{\mathbf{w}}'$, и мы получаем противоречие с выбором $\bar{\mathbf{w}}$. Предложение 16.6 доказано.

Доказательство предложения 16.6 завершает совместную индукцию по рангу α , начатую в § 6. Тем самым все утверждения §6–16 доказаны для всех значений ранга α .

§ 17. Доказательство теорем

17.1. ЛЕММА. *Для любого слова X существует приведенное в ранге $\alpha \equiv |X| + 1$ слово Y такое, что $X \stackrel{\alpha-1}{=} Y$ и Y не содержит в качестве подслов элементарных слов ранга α .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по длине слова X . Если $X \subseteq 1$, то в силу предложения 8.18 можно положить $Y \equiv X$. Пусть $|X| \geq 1$ и $X \subseteq X'a^\epsilon$, где $a^\epsilon \in A^{\pm 1}$. По индуктивному предположению найдется слово $Y' \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ такое, что $X' \stackrel{\alpha-2}{=} Y'$ и Y' не содержит элементарных слов ранга $\alpha - 1$. Согласно предложению 12.13 при $\alpha := \alpha - 2$ выберем слово $Y \in \mathcal{R}_{\alpha-2}$ такое, что $Y'a^\epsilon \stackrel{\alpha-2}{=} Y'$. Тогда имеем $X \stackrel{\alpha-1}{=} Y$. В силу предложения 8.18 слово a^ϵ не содержит элементарных слов ранга $\alpha - 1$. Выбрав пути $Y'Z$ и Y на $\Gamma_{\alpha-2}$ с общими начальными и конечными вершинами, где $\mathcal{L}(Y') \subseteq Y'$, $\mathcal{L}(Z) \subseteq a^\epsilon$ и $\mathcal{L}(Y) \subseteq Y$, и применив лемму 11.7, (ii) при $\alpha := \alpha - 1$, $X := Y$, $Z_1 := Y'$ и $Z_2 := Z$, получим, что слово Y не содержит элементарных 101-степеней ранга $\alpha - 1$. Тогда в силу леммы 12.12 имеем $Y \in \mathcal{R}_\alpha$ и в силу леммы 8.16 Y не содержит элементарных слов ранга α , т.е. Y является искомым.

17.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Группа $\mathbf{B}(m, n)$ имеет задание*

$$\langle A \mid A^n = 1 \ (A \in \bigcup_{\alpha} \mathcal{E}_{\alpha}) \rangle, \quad (17.1)$$

или, другими словами, равенство слов X и Y в $\mathbf{B}(m, n)$ имеет место тогда и только тогда, когда $X \stackrel{\alpha}{=} Y$ для некоторого α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что для любого слова X в группе с заданием (17.1) имеет место соотношение $X^n = 1$, т.е. $X^n \stackrel{\alpha}{=} 1$ для некоторого α . По лемме 17.1 найдем $\alpha \geq 1$ и слово $Y \in \mathcal{R}_\alpha$, такие, что $X \stackrel{\alpha-1}{=} Y$ и Y не содержит элементарных слов ранга α . Допустим, $X^n \neq 1$. Тогда в силу предложения 15.10, (i) элемент $[X]_\alpha$ имеет бесконечный порядок и в силу предложения 12.24 элемент $[X]_\alpha$ сопряжен элементу $[Z]_\alpha$, где Z – период ранга $\alpha + 1$. В силу леммы 11.34 при $X := Y$, $u := Y := v := 1$ и $Z := Z$ слова Y и Z сопряжены в группе $\mathbf{B}_{\alpha-1}$.

Рассмотрим диаграмму Δ ранга $\alpha - 1$ с двумя граничными циклами Yu и Z^{-1} , где $\mathcal{L}(Y) \subseteq Y$, $\mathcal{L}(u) \subseteq 1$ и $\mathcal{L}(Z) \subseteq Z$. Можно считать, что Δ есть A -диаграмма ранга $\alpha - 1$ с $\mathcal{X}_{\alpha-1}(\Delta) = \{Y, Z^{-1}\}$ и $\mathcal{Y}_{\alpha-1}(\Delta) = \{u\}$. Кроме того, в силу предложения 9.19 можно считать, что на Δ задана карта примыканий $\mathcal{S}$ ранга $\alpha - 1$. В силу предложения 12.27 в некоторый циклический сдвиг слова Z входит элементарная 109-степень ранга α . В силу предложения 8.22, (i) имеем $\mathcal{W}_{\alpha-1}(Z^{-1}) \geq \frac{108}{13} > \eta$. Тогда в силу предложения 10.4 Z^{-1} не является переходным участком границы диаграммы Δ относительно $\mathcal{S}$, т.е. $Z = Sw$, где S^{-1} – участок примыкания некоторой поддиаграммы примыкания $\Pi \in \mathcal{S}$. Так как в силу предложения 9.23, (iii) в $\mathcal{S}$ содержится не более одной поддиаграммы примыкания Z^{-1} к Y и нет поддиаграмм примыкания Z^{-1} к Z^{-1} , то Π – поддиаграмма

примыкания Z^{-1} к Y и w^{-1} – переходный участок границы диаграммы Δ относительно $\mathcal{S}$. Обозначив $S \Leftarrow \mathcal{L}(S)$ и $w \Leftarrow \mathcal{L}(w)$, получаем, что слово S и некоторое подслово слова Y близки в ранге $\alpha - 1$ и по предложению 10.4 $W_{\alpha-1}(w) \leq \eta$.

Пусть $E \in \text{ППер}_\alpha(A, 109)$ ($A \in \mathcal{E}_\alpha$) – элементарная 109-степень ранга α , входящая в некоторый циклический сдвиг слова Z . Тогда E имеет один из видов $S'w'S''$ или $w'S'w''$, где S', S'' – непересекающиеся подслова слова S и w', w'' – подслова слова w . Так как в силу предложения 8.22, (i) имеем $\ell_{\alpha,A}(w) < 7$, то, используя предложение 8.14, (ii), получаем, что в одно из слов S' или S'' входит некоторое слово $F \in \text{ППер}_\alpha(A, 50)$. Тогда в силу предложения 8.27 в Y должна входить некоторая элементарная 16-степень ранга α . Но это противоречит выбору Y . Следовательно, $X^n \stackrel{\alpha}{=} 1$.

17.3. ЛЕММА. Любая элементарная q_4 -степень ранга $\alpha \geq 1$ содержит непустое подслово вида A^{q_4-32} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $E \in \text{ППер}_\alpha(A, q_4)$, где $A \in \mathcal{E}_\alpha$. Без ограничения общности можно считать, что E не содержит в качестве подслов элементарных q_4 -степеней ранга β при $1 \leq \beta \leq \alpha - 1$. В силу леммы 8.2, (ii) слово E и некоторое слово $P \in \text{Пер}(A, q_4)$ близки в ранге $\alpha - 1$. Тогда в силу следствия 11.9 и предложения 8.22, (ii) некоторое подслово P' слова P длины $|P'| \geq (q_4 - 32)|A|$ и некоторое подслово E' слова E близки в ранге 0, т.е. $P' \sqsupseteq E'$. Таким образом, E содержит подслово B^{q_4-32} , где B – некоторый циклический сдвиг слова A .

Заметим, что теорема 1 непосредственно вытекает из п. (i) теоремы 2 и существования бесконечного слова в двухбуквенном алфавите $\{a_1, a_2\}$, не содержащего непустых подслов вида A^3 (см., например, [1, § I.3]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. (i): Пусть X – непустое несократимое слово, равное 1 в группе $\mathbf{B}(m, n)$. По предложению 17.2 для некоторого α имеем $X \stackrel{\alpha}{=} 1$. Тогда по предложению 11.4 получаем $X \notin \mathcal{R}_\alpha$, и так как $X \in \mathcal{R}_0$, то $X \in \mathcal{R}_{\beta-1} \setminus \mathcal{R}_\beta$ для некоторого $1 \leq \beta \leq \alpha$. По лемме 12.12 в этом случае слово X содержит в качестве подслова некоторую элементарную $(n - q - 36)$ -степень ранга α и нам остается воспользоваться леммой 17.3.

Пункт (ii) теоремы 2 по существу вытекает из п. (i) и следующего факта, доказанного в [1, VI.2.15]: число всех несократимых слов длины s в 2-буквенном групповом алфавите $\{a_1^{\pm 1}, a_2^{\pm 1}\}$, не содержащих непустых подслов вида A^8 , не меньше $4(\frac{29}{10})^{s-1}$. Действительно, из теоремы 2, (i) следует, что любые два графически неравных слова указанного вида представляют разные элементы группы $\mathbf{B}(m, n)$. Поэтому функция роста $\gamma(s)$ группы $\mathbf{B}(m, n)$ относительно канонического множества порождающих $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ при $m \geq 2$ удовлетворяет неравенству $\gamma(s) \geq 4(\frac{29}{10})^{s-1}$, т.е. является экспоненциальной.

(iii): Если бы группа $\mathbf{B}(m, n)$ была конечно определена, то для ее задания было бы достаточно конечного числа определяющих соотношений из (17.1), т.е. имели бы $\mathbf{B}(m, n) \simeq \mathbf{B}_\alpha$ для некоторого α . Поэтому достаточно для каждого α указать элемент бесконечного порядка в группе $\mathbf{B}_\alpha$. Для этого мы построим бесконечную последовательность $A_1, A_2, \dots$ элементарных периодов A_α ранга α . Тогда из лем-

мы 6.7 будет следовать, что группа $\mathbf{B}_\alpha$ содержит элемент $[A_{\alpha+1}]_\alpha$ бесконечного порядка.

Положим

$$A_1 \Rightarrow a_1 \text{ и } A_\alpha \Rightarrow \theta^{\alpha-1}(A_1) \quad (\alpha \geq 2),$$

где $\theta(X)$ обозначает результат подстановки $a_1 \rightarrow a_1^p a_2$, $a_2 \rightarrow a_2 a_1^p$ в слово X . Индукцией по α докажем, что

(i) если B – непустое простое слово и слово B^r входит в слово A_α^t при $r \geq 4$, то $B \approx A_\beta$ для некоторого $\beta \leq \alpha$, а если $r \geq 2p+1$, то $B \approx A_\alpha$;

(ii) A_α – простое слово.

Оба утверждения тривиальны при $\alpha = 1$. Пусть $\alpha > 1$. Предположим,

$$A_\alpha^t \supseteq XB^rY,$$

где $r \geq 4$ и B – непустое простое слово. Если $|B| = 1$, то, очевидно, $B \supseteq a_1 \supseteq A_1$, причем A_α^t не содержит вхождений слова a_1^{2p+1} . Пусть $|B| > 1$. Обозначим

$$w_1 \Rightarrow a_1^p a_2 \text{ и } w_2 \Rightarrow a_2 a_1^p.$$

Заметим, что A_α^t имеет вид

$$A_\alpha^t \supseteq w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_\ell}, \quad (17.2)$$

где все слова w_{i_j} имеют длину $p+1$. Если $|B| < p+1$, то B – подслово слова вида w_i или $w_i w_j$. Как легко видеть, в этом случае B может иметь только один из видов $a_1^k a_2 a_1^s$ ($1 \leq k+s \leq p-1$) или $a_1^k a_2^2 a_1^s$ ($0 \leq k+s \leq p-2$). Тогда либо слово $a_2 a_1^{k+s} a_2$ ($1 \leq k+s \leq p-1$), либо слово a_2^4 входит в A_α^t , что невозможно. Следовательно, $|B| \geq p+1$. Тогда $A_\alpha^t \supseteq X'B'^3Y'$, где $|X'| \equiv 0 \pmod{p+1}$, B' – циклический сдвиг слова B и B' начинается с некоторого w_i .

Допустим, $|B| \not\equiv 0 \pmod{p+1}$. Пусть, например, $B' \supseteq w_1 B_1 \supseteq a_1^p a_2 B_1$. Вхождение $X'B'a_1^p a_2 B_1 B'Y'$ буквы a_2 в слово A_α^t является либо концом некоторого вхождения w_1 в (17.2), либо началом некоторого вхождения w_2 . В первом случае $|B|$ кратно $p+1$ вопреки допущению. Следовательно, указанное вхождение буквы a_2 есть начало некоторого w_2 в (17.2) и тогда, очевидно, $|B| \equiv 1 \pmod{p+1}$. Но, рассмотрев вместо вхождения $X'Ba_1^p a_2 B_1 B'Y'$ вхождение $X'B^2 a_1^p a_2 B_1 Y'$, точно так же получим $2|B| \equiv 1 \pmod{p+1}$. Противоречие. Аналогично, в случае, если B' начинается с w_2 , получим противоречие $|B| \equiv -1$ и $2|B| \equiv -1 \pmod{p+1}$. Следовательно, $|B| \equiv 0 \pmod{p+1}$.

Если теперь $|X| \not\equiv 0 \pmod{p+1}$, то для некоторого w_i имеем $w_i \supseteq w'_i w''_i$, где w'_i, w''_i непусты, $X \supseteq X_1 w'_i$, $B \supseteq w''_i B_1$ и $|X_1| \equiv 0 \pmod{p+1}$. Так как непустые концы у слов w_1 и w_2 различны, то вхождение $X*B*w''_i B_1 B^{r-2}Y$ оканчивается на w'_i , т.е. $B \supseteq B_2 w'_i$. Тогда $A_\alpha^t \supseteq X_1 (w'_i B_2)^r w'_i Y$ и, заменяя слово B на его циклический сдвиг $w'_i B_2$ и слова X, Y соответственно на X_1 и $w'_i Y$, можно считать $|X| \equiv 0 \pmod{p+1}$. В таком случае $A_{\alpha-1}^t \supseteq \tilde{X} \tilde{B}^r \tilde{Y}$, где $\theta(\tilde{X}) \supseteq X$, $\theta(\tilde{B}) \supseteq B$ и $\theta(\tilde{Y}) \supseteq Y$, и утверждение (i) сводится к индуктивному предположению.

Используя те же рассуждения, легко свести к индуктивному предположению и (ii). Если $A_\alpha \varpi B^r$ при $r \geq 3$, то, как мы видели выше, $|B| \equiv 0 \pmod{p+1}$. Тогда $A_{\alpha-1} \varpi \tilde{B}^r$, где $\theta(\tilde{B}) \varpi B$, и работает индукция. Если $r = 2$, то невозможен случай $|B| \equiv \pm 1 \pmod{p+1}$. Тогда, используя предыдущие рассуждения, снова получаем $|B| \equiv 0 \pmod{p+1}$. Снова противоречие с индуктивным предположением.

Используя индукцию по α , докажем теперь, что A_α – элементарный период ранга α . Для $\alpha = 1$ это непосредственно вытекает из определений § 5. Пусть $\alpha > 1$.

Допустим, в слово A_α^t при $t > 0$ входит элементарная q_1 -степень E ранга $1 \leq \beta \leq \alpha - 1$, порожденная некоторым периодом $B \in \mathcal{E}_\beta$. Выберем минимальное такое β . Так как согласно определению 5.16 слово E содержит некоторую элементарную q_1 -степень ранга $\rho(B)$, то $\rho(B) = 0$. В силу леммы 8.2, (ii) и следствия 11.3 слово E и некоторое слово $P \in \text{Пер}(B, q_1)$ близки в ранге 0, т.е. $E \varpi P$. Тогда в силу (i) $B \approx A_\alpha$. Но так как A_β – подслово слова A_α , то согласно определению 5.5 имеем $B \in \mathcal{N}_{\beta,0}$, и, следовательно, $B \notin \mathcal{E}_\beta$. Получили противоречие. Следовательно, в слово A_α^t не входят элементарные q_1 -степени рангов $1 \leq \beta \leq \alpha - 1$. Отсюда в силу леммы 12.12 вытекает $A_\alpha^t \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ и, таким образом, согласно определению 5.2 слово A_α есть период ранга α .

Допустим, A_α не является минимальным периодом ранга α . Тогда в силу определения 5.3 и предложения 12.24 для некоторого периода B ранга α и некоторых $t \geq 1$ и $r \geq 2$ слова A^t и B^{tr} сопряжены в группе $\mathbf{B}_{\alpha-1}$. В силу предложения 11.33 слова A^t и B^{tr} сопряжены в свободной группе $\mathbf{B}_0$. Но это невозможно в силу (ii). Следовательно, $A_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha$.

Наконец, допустим, $A_\alpha \notin \mathcal{E}_\alpha$. Тогда $A_\alpha \in \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{N}_{\alpha,i}$ и в силу предложения 8.34 слово A_α^2 содержит элементарную 152-степень ранга α . Как показывают предыдущие рассуждения, в этом случае в A_α^2 входит некоторое слово $P \in \text{Пер}(B, 152)$, где $B \in \mathcal{E}_\alpha$. В силу (i) $B \approx A_\beta$ для некоторого $\beta < \alpha$. Но по индуктивному предположению A_β – элементарный период ранга β , и мы вновь приходим к противоречию, так как $\mathcal{E}_\beta \cap \mathcal{E}_\alpha = \emptyset$ (последнее вытекает, например, из того, что для любого $C \in \mathcal{E}_\beta$ порядок элемента $[C]_{\alpha-1}$ конечен, а для любого $C \in \mathcal{E}_\alpha$ элемент $[C]_{\alpha-1}$ имеет бесконечный порядок).

Таким образом, мы доказали, что при любом α слово A_α есть элементарный период ранга α . Тем самым завершено доказательство п. (iii) теоремы 2.

Для доказательства п. (iv) теоремы 2 заметим, что в силу предложения 17.2 для любой конечной подгруппы $\mathbf{G}$ группы $\mathbf{B}(m, n)$ существует изоморфная ей подгруппа группы $\mathbf{B}_\alpha$ при некотором α . Тогда в силу предложения 15.9 $\mathbf{G}$ вкладывается в конечное прямое произведение $\mathbf{D}_n \times \mathbf{D}_{\bar{n}} \times \cdots \times \mathbf{D}_{\bar{n}}$, где $\bar{n}$ – наибольший делитель n вида 2^k . Теорема доказана.

Список литературы

1. Адян С.И. Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975.
2. Адян С.И. Исследования по проблеме Бернсайда и связанным с ней вопросам // Тр. Матем. ин-та им. В.А.Стеклова. 1984. Т. 168. С. 179–205.
3. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1977.

4. *Лысенко И. Г.* Бесконечность бернсайдовых групп периода 2^k при $k \geq 13$ // УМН. 1992. Т. 47. № 2. С. 201–202.
5. *Новиков П. С., Адян С. И.* Бесконечные периодические группы. I–III // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т. 32. С. 212–244, 251–524, 709–731.
6. *Ольшанский А. Ю.* О теореме Новикова–Адяна // Матем. сб. 1982. Т. 118. № 2. С. 203–235.
7. *Ольшанский А. Ю.* Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989.
8. *Санов И. Н.* Решение проблемы Бернсайда для показателя 4 // Учен. Записки Ленингр. Унив. Сер. матем. 1940. Т. 10. С. 166–170.
9. *Adian S. I. and Lysionok I. G.* The method of classification of periodic words and the Burnside problem // Contemporary Math. Part 1. 1992. V. 131. P. 13–28.
10. *Burnside W.* On an unsettled question in the theory of discontinuous groups // Quart. J. Math. 1902. V. 33. P. 230–238.
11. *Hall M.* Solution of the Burnside problem for exponent six // Illinois J. Math. 1958. V. 2. P. 764–786.
12. *Ivanov S. V.* On the Burnside problem on periodic groups // Bull. of Amer. Math. Soc. 1992. V. 27. P. 257–260.
13. *Ivanov S. V.* The free Burnside groups of sufficiently large exponents // Int. J. of Algebra and Computation. 1994. V. 4. P. 1–307.

Математический институт РАН
им. В. А. Стеклова

Поступило в редакцию
28.IV.1995