Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Х. Хаханян, Независимость принципа униформизации от тезиса Чёрча в интуиционистской теории множеств, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2013, том 77, выпуск 6, 207–222

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7739>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 17:01:02

УДК 517.120

В. Х. Хаханян

Независимость принципа униформизации от тезиса Чёрча в интуиционистской теории множеств

Доказана независимость сильного принципа униформизации от тезиса Чёрча с выбором в интуиционистской теории множеств с аксиомой объемности, расширенной принципами Маркова и двойного дополнения множеств.

Библиография: 11 наименований.

Ключевые слова: интуиционистская логика, теория множеств, универсум множеств, рекурсивная реализуемость, тезис Чёрча, принцип униформизации, функция экстенциональности множества.

DOI: 10.4213/im7739

§ 1. Введение

Л. Э. Я. Брауэр в 1907 г. основал новое направление в математике под названием *интуиционизм* (он называл это направление *неоинтуиционизмом*). Формализация используемых в интуиционизме логических и арифметических принципов была осуществлена в 1920-х годах в трудах А. Н. Колмогорова, В. И. Гливенко и, главным образом, А. Гейтинга. В середине прошлого века был формализован математический анализ, а затем и аксиоматические системы теории множеств (АСТМ). Первые такие интуиционистские системы математического анализа и теории множеств появляются в конце 1960-х и начале 1970-х годов. Исследование коснулось практически всего спектра вопросов, аналогичных входящим в исследование АСТМ с подлежащей классической логикой, а также вопросов, связанных с чисто интуиционистской и конструктивной проблематиками.

Отметим некоторые наиболее важные результаты, полученные к настоящему времени. Были построены интуиционистские АСТМ, в которых была развита вся математика в стиле Брауэра, исследованы разного рода расширения таких систем и изучены вопросы совместности и независимости с различного рода дополнительными принципами интуиционистского, конструктивного и теоретико-множественного характера (среди последних стоит отметить разные, интуиционистски не эквивалентные, виды аксиомы выбора). Созданные в 1945 г. метод рекурсивной реализуемости Клини, в 1965 г. метод булевозначных моделей Вopenки и в том же году метод моделей Кришке нашли применения в исследованиях по интуиционистским АСТМ, а также как метод псевдобулевозначных моделей. Не имея возможности описать все исследования

прошлого века и все полученные (даже наиболее важные) результаты о формализованных интуиционистских системах, рассмотрим применение к АСТМ метода рекурсивной реализуемости. В этом случае исследовались вопросы равнонепротиворечивости классических систем и их интуиционистских аналогов, свойства эффективности интуиционистских АСТМ, свойства классов ординалов и кардиналов, имеющих в этих системах, и рассматривалась возможность построения в таких системах класса конструктивных множеств и других классов множеств. Наконец, методом рекурсивной реализуемости исследовались вопросы совместности и независимости различных важных принципов интуиционистского, конструктивного и теоретико-множественного характера.

К исследованиям последнего рода и относится настоящая работа, в которой рассматриваются соотношения между двумя видами неклассических принципов: тезисами Чёрча и принципами униформизации вместе с рядом других принципов при использовании поднятого на уровень теории множеств метода рекурсивной реализуемости Клини (различных его вариантов).

Приведем точные формулировки и комментарии рассматриваемых дополнительных схем аксиом, отражающих различную специфику понимания кванторов. Приводимые четыре принципа относятся к конструктивному пониманию кванторов и утверждений.

1. СТ – тезис Чёрча с выбором, или строгий (сильный) тезис Чёрча:

$$\forall n \exists m \varphi(n, m) \rightarrow \exists e \forall n \exists m (T_1(e, n, m) \wedge \varphi(n, U(m))).$$

Здесь $T_1(e, n, m)$ – арифметическая формула в точности с тремя свободными переменными, нумерически выражающая в арифметике Гейтинга (НА) следующий примитивно-рекурсивный предикат: $T_1(e, n, m)$ истинен тогда и только тогда, когда m – гёделев номер процесса вычисления значения функции с клиниевским номером e для аргумента n , а U – некоторый арифметический терм с единственным параметром, представляющий одноместную примитивно-рекурсивную функцию k такую, что если m – гёделев номер процесса вычисления для $e(n)$, то $k(m) = e(n)$, т.е. функция $k(m)$ представляет результат процесса вычисления (см., например, [1]). Тезис Чёрча с выбором утверждает, что если для всякого n найдется m такое, что выполняется условие $\varphi(n, m)$, то найдется общерекурсивная функция с номером e , которая по всякому n позволяет найти требуемое m , причем одновременно производится и выбор одного из таких m . Это отражает конструктивную специфику понимания кванторов всеобщности и существования. Более слабый вариант тезиса Чёрча требует единственности в посылке.

2. СТ! – тезис Чёрча с единственностью, или слабый:

$$\forall n \exists! m \varphi(n, m) \rightarrow \exists e \forall n \exists m (T_1(e, n, m) \wedge \varphi(n, U(m))).$$

Здесь $\exists! m \varphi(n, m)$ – стандартное сокращение для формулы $\exists m (\varphi(n, m) \wedge \forall k (\varphi(n, k) \rightarrow k = m))$.

Следующим принципом, также приемлемым с конструктивной точки зрения, является принцип конструктивного подбора (ленинградский принцип, или принцип Маркова).

3. М – сильный принцип Маркова:

$$[\forall n (\varphi(n) \vee \neg \varphi(n)) \wedge \neg \neg \exists n \varphi(n)] \rightarrow \exists n \varphi(n).$$

Приведем довод в пользу приемлемости принципа М: предположим, что мы можем устанавливать для каждого натурального числа n истинность $\varphi(n)$ или истинность $\neg\varphi(n)$ (в силу первой посылки); тогда найдется (эффективно) число n такое, что истинно $\varphi(n)$ в силу того, что процесс поиска такого n не может не завершиться (вторая посылка принципа). Отметим, что принцип Маркова невыводим в системах теорий множеств, рассматриваемых далее.

В работе [2] была доказана независимость принципа сильной униформизации от тезиса Чёрча с выбором в интуиционистской теории множеств без аксиомы объемности и с добавленными принципами Маркова (сильным) и двойного дополнения множеств DCS. Принцип сильной униформизации U имеет вид

$$\forall x \exists n \varphi(x, n) \rightarrow \exists n \forall x \varphi(x, n)$$

и впервые появился в работе [3] для арифметики второго порядка со “специями” (переменными по множествам натуральных чисел). Формула φ в U является произвольной формулой в двусортном (с сортами переменных по натуральным числам и по множествам) языке теории множеств с предикатами равенства натуральных чисел и принадлежности натурального числа множеству и, соответственно, множества множеству.

Аналогичный принцип U! содержит в посылке перед квантором существования требование единственности натурального n и выводится из U. Приведенные выше формы тезисов Чёрча (с выбором (сильный тезис) СТ и единственностью (слабый тезис) СТ!) и сильный принцип Маркова могут быть найдены в [4], [5] или [1]. Отметим, что слабый принцип униформизации выводится из слабого тезиса Чёрча в теории множеств (для интуиционистской теории типов доказательство было дано в [6], и это же доказательство остается верным в интуиционистской теории множеств типа Цермело–Френкеля, рассматриваемой в настоящей работе).

Дадим еще формулировку классически верного принципа DCS (двойного дополнения множеств), который в двусортном языке имеет вид

$$\forall a \exists x [\forall n (\neg n \in a \rightarrow n \in x) \wedge \forall u (\neg u \in a \rightarrow u \in x)].$$

В [5] было доказано, что все отмеченные выше принципы совместны с полной теорией множеств на основе интуиционистской логики предикатов (полной в том смысле, что в формулировке аксиом этой теории присутствуют все аксиомы и схемы аксиом стандартной аксиоматической теории множеств Цермело–Френкеля с заменой аксиомы регулярности на схему аксиом трансфинитной индукции). В [4] была использована модель, в которой все аксиомы теории множеств и все отмеченные выше принципы также выполняются, *кроме принципа униформизации*, который не удавалось ни доказать, ни опровергнуть.

Задача исследования зависимостей принципов U, U!, СТ, СТ! на уровне теории множеств связана, в первую очередь, с доказательством невыводимости сильных принципов из слабых, а также с доказательством невыводимости принципов униформизации из тезисов Чёрча и выяснением роли аксиомы объемности в последнем случае. В конце работы будет дана полная сводка имеющихся для бестиповой теории множеств результатов (включая и доказываемый

в настоящей работе). Отметим, что для теории типов с интуиционистской логикой соответствующие результаты были получены Г.Ф. Шварцем в [6], где также была выяснена роль аксиомы объемности.

В настоящей работе будет доказана невыводимость принципа униформизации в двусортной теории множеств с аксиомой объемности, принципами Маркова (сильным) и двойного дополнения множеств и тезисом Чёрча с выбором, тем самым усилен результат из [2] и решены все открытые проблемы из [2]. Результат был анонсирован в [7]. Мы докажем, что в модели из [4] принцип униформизации все же опровергается. Отсюда будет следовать, что модели, приведенные в [4] и [5] для интуиционистской теории множеств, являются различными. В приводимом контрпримере принципа униформизации формула будет содержать только один параметр (задача: привести контрпример принципа униформизации, в котором формула не содержит параметров). Отметим также, что при чтении настоящей статьи желательно и полезно знакомство с работами [2], [4], [5], хотя полные формулировки теории множеств с интуиционистской логикой и всех дополнительных принципов, а также все необходимые результаты и их доказательства из [4] будут приведены.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Далее придерживаемся следующих обозначений: переменные по натуральным числам обозначим через n, m, p, l, k, h, s, t , переменные по множествам – через a, b, x, y, z, u, v, w .

§ 2. Описание формальных теорий

Приведем точную формулировку теорий ZFIR2 и ZFIC2. Логические аксиомы теории ZFIR2 – интуиционистская двусортная логика предикатов. Собственные аксиомы включают аксиомы НА (арифметики Гейтинга) и следующие аксиомы и схемы аксиом теории множеств:

1) аксиома объемности

$$\forall xyz [\forall n (n \in x \leftrightarrow n \in y) \wedge \forall u (u \in x \leftrightarrow u \in y) \wedge x \in z \rightarrow y \in z];$$

2) аксиома пары

$$\forall abnm \exists x (a \in x \wedge b \in x \wedge n \in x \wedge m \in x);$$

3) аксиома суммы

$$\forall a \exists x \forall w [\forall n (n \in w \wedge w \in a \rightarrow n \in x) \wedge \forall z (z \in w \wedge w \in a \rightarrow z \in x)];$$

4) аксиома степени

$$\forall a \exists x \forall z [\forall u (u \in z \rightarrow u \in a) \wedge \forall n (n \in z \rightarrow n \in a) \rightarrow z \in x];$$

5) схема выделения

$$\forall a \exists v [\forall n (n \in v \leftrightarrow n \in a \wedge \varphi(n)) \wedge \forall z (z \in v \leftrightarrow z \in a \wedge \psi(z))],$$

где формулы φ и ψ допускают любые параметры и v не входит в φ и ψ свободно;

6) схема трансфинитной индукции

$$\forall x [\forall y (y \in x \rightarrow \varphi(y)) \rightarrow \varphi(x)] \rightarrow \forall x \varphi(x);$$

7) аксиома бесконечности

$$\exists x \forall n (n \in x);$$

8) схема подстановки

$$\begin{aligned} \forall a \{ [\forall x \in a \exists ! y \varphi(x, y) \wedge \forall n \in a \exists ! y \psi(n, y)] \\ \rightarrow \exists b [\forall x \in a \exists y \in b \varphi(x, y) \wedge \forall n \in a \exists y \in b \psi(n, y)] \}, \end{aligned}$$

где, как и ранее, формулы φ и ψ допускают любые параметры.

Схема аксиом собирания (collection) отличается от схемы 8) только тем, что в посылках кванторы существования не содержат символа единственности. Отметим, что применяемые сокращения при нотации стандартны и из схемы собирания выводится схема подстановки.

Система ZFIR2 состоит из аксиом 1)–8), а система ZFIC2 – из аксиом 1)–7) и аксиомы собирания. Х. Фридман и А. Щедров в 1985 г. доказали, что система со схемой собирания дедуктивно сильнее системы со схемой подстановки (так как более слабая система обладает свойством полной экзистенциальности, а более сильная – не обладает).

В системах ZFIC2 и ZFIR2 арифметика Гейтинга содержится на первом уровне в явном виде, для чего и требуется сорт переменных по натуральным числам. В них схема аксиом математической индукции имеет стандартный вид, но формула φ может допускать параметры по всем сортам переменных.

§ 3. Модель

Опишем теперь модель для теории ZFIC2 (или ZFIR2) с добавленными принципами СТ, М, DCS (см. также [4]). Пусть ω – множество натуральных чисел. Построения универсума V и отношений $x \text{ ext}_\alpha h$ (множество x экстенционально на уровне ординала α с номером h частично рекурсивной функции (ч.р.ф.) от пяти переменных), $x \text{ ext}_\alpha$ (множество x экстенционально на уровне ординала α), $x \overset{\vec{h}}{\sim}_\alpha y$, где $\vec{h} = \langle h_1, h_2, h_3, h_4 \rangle$ (множества x и y эквивалентны на уровне ординала α с четверкой номеров ч.р.ф. от двух переменных) и $x \sim_\alpha y$ (множества x и y эквивалентны на уровне ординала α) проводятся одновременной индукцией по ординалам и могут быть формально проведены в теории ZFIR2.

Приведем точные определения (см. также [4] или [5]):

(i) $\alpha = 0$; тогда

$$x \text{ ext}_0 h \Leftrightarrow (x \subseteq \omega \times \omega) \wedge h \in \omega,$$

$$V_0 = \{x \mid \exists h (x \text{ ext}_0 h)\},$$

$$x \overset{\vec{h}}{\sim}_0 y \Leftrightarrow h_3 \in \omega \wedge h_4 \in \omega \wedge \forall nk (\langle k, n \rangle \in x \Rightarrow !h_1(k, n) \wedge \langle h_1(k, n), n \rangle \in y) \quad (1)$$

и для h_2 вместо h_1 получаем аналогичную (1) формулу с симметричной заменой x на y и y на x ;

(ii) $\alpha = \beta + 1$; тогда

$$\begin{aligned} x \text{ ext}_\alpha f &\Leftrightarrow (\exists \gamma \leq \beta) (x \text{ ext}_\gamma f) \vee \left[x \subseteq [(\omega \times \omega) \cup (\omega \times V_\beta)] \wedge (\forall \gamma \leq \beta) \right. \\ &\quad \left. \forall \vec{h} n y z \left[y \overset{\vec{h}}{\sim}_\gamma z \wedge \langle n, y \rangle \in x \Rightarrow !f(n, h_1, h_2, h_3, h_4) \wedge \langle f(n, h_1, h_2, h_3, h_4), z \rangle \in x \right] \right], \\ V_\alpha &= \{x \mid \exists h (x \text{ ext}_\alpha h)\} \end{aligned}$$

(здесь $\vec{h}$, как и ранее, есть $\langle h_1, h_2, h_3, h_4 \rangle$); далее,

$$\begin{aligned} y \overset{\vec{h}}{\sim}_\alpha z &\Leftrightarrow (\exists \gamma \leq \beta) \left(y \overset{\vec{h}}{\sim}_\gamma z \right) \vee \left[y \in V_\alpha \wedge z \in V_\alpha \wedge \right. \\ &\quad \forall n k x \left\{ [\langle n, k \rangle \in y \Rightarrow !h_1(n, k) \wedge \langle h_1(n, k), k \rangle \in z] \right. \\ &\quad \wedge [\langle n, k \rangle \in z \Rightarrow !h_2(n, k) \wedge \langle h_2(n, k), k \rangle \in y] \\ &\quad \wedge [\langle n, x \rangle \in y \wedge x \text{ ext}_\alpha h \Rightarrow !h_3(n, h) \wedge \langle h_3(n, h), x \rangle \in z] \\ &\quad \left. \left. \wedge [\langle n, x \rangle \in z \wedge x \text{ ext}_\alpha h \Rightarrow !h_4(n, h) \wedge \langle h_4(n, h), x \rangle \in y] \right\} \right]; \end{aligned}$$

(iii) α – предельный ординал; тогда $x \text{ ext}_\alpha h \Leftrightarrow (\exists \beta < \alpha) (x \text{ ext}_\beta h)$ и соответствующее данному ординальному уровню отношение $\sim_\alpha$, введенное выше, определяется стандартно, через объединение этого отношения на меньших уровнях, а именно

$$x \sim_\alpha y \Leftrightarrow (\exists \beta < \alpha) (x \sim_\beta y), \quad V_\alpha = \bigcup \{V_\beta \mid \beta < \alpha\}.$$

Теперь определяем

$$x \text{ ext}_\alpha \Leftrightarrow \exists h (x \text{ ext}_\alpha h), \quad V_\alpha = \{x : x \text{ ext}_\alpha\}, \quad x \text{ ext } h \Leftrightarrow \exists \alpha (x \text{ ext}_\alpha h).$$

Также полагаем

$$y \sim_\alpha z \Leftrightarrow \exists \vec{h} \left(y \overset{\vec{h}}{\sim}_\alpha z \right), \quad y \sim z \Leftrightarrow \exists \alpha (y \sim_\alpha z).$$

Наконец, пусть $V = \bigcup \{V_\alpha : \alpha \in \text{On}\}$.

Приведем определение реализуемости формулы при оценках, используя [4]. Заметим, что это определение может быть выражено в рамках формализма теории ZFIR2. После этого докажем реализуемость всех аксиом и схем аксиом теории ZFIC2 в нашей модели, а также принципов СТ, М и DCS. Проверка всех постулатов также имеется в [4].

Приведем определение реализуемости формулы числом e при оценках f и g , где $f: \omega \rightarrow \omega$ и $g: \omega \rightarrow V$:

1) $R(e, f, g, s = t) \Leftrightarrow s(f) = t(f)$, где $s(f)$ – значение арифметического терма s при оценке f ; это значение определяется индукцией по построению арифметического терма обычным образом;

2) $R(e, f, g, s \in a_n) \Leftrightarrow \langle e, s(f) \rangle \in g(n)$;

3) $R(e, f, g, a_m \in a_n) \Leftrightarrow \langle e, g(m) \rangle \in g(n)$;

4) $\neg R(e, f, g, \perp)$;

- 5) $R(e, f, g, \varphi \wedge \psi) \Rightarrow e = \langle e_1, e_2 \rangle \wedge R(e_1, f, g, \varphi) \wedge R(e_2, f, g, \psi)$;
 6) $R(e, f, g, \varphi \vee \psi) \Rightarrow e = \langle e_1, e_2 \rangle \wedge [e_1 = 0 \Rightarrow R(e_2, f, g, \varphi)] \wedge [e_1 \neq 0 \Rightarrow R(e_2, f, g, \psi)]$;
 7) $R(e, f, g, \varphi \rightarrow \psi) \Rightarrow \forall n [R(n, f, g, \varphi) \Rightarrow !e(n) \wedge R(e(n), f, g, \psi)]$;
 8) $R(e, f, g, \forall a_n \varphi(a_n)) \Rightarrow \forall m [!e(m) \wedge R(e(m), f, g, \varphi(a_n))]$, где $f_m^n = f(k)$, если $k \neq n$, и $f_m^n = m$, если $k = n$; здесь n – номер связанной переменной a_n сорта 0;
 9) $R(e, f, g, \exists a_n \varphi(a_n)) \Rightarrow e = \langle e_1, e_2 \rangle \wedge R(e_1, f_{e_2}^n, g, \varphi(a_n))$;
 10) $R(e, f, g, \forall b_n \varphi(b_n)) \Rightarrow \forall xh [x \text{ ext } h \Rightarrow !e(h) \wedge R(e(h), f, g_x^n, \varphi(b_n))]$, где $g_x^n(k) = g(k)$, если $k \neq n$, и $g_x^n(n) = x$; здесь n – номер связанной переменной b_n сорта 1;
 11) $R(e, f, g, \exists b_n \varphi(b_n)) \Rightarrow e = \langle e_1, e_2 \rangle \wedge \exists x [x \text{ ext } e_2 \wedge R(e_1, f, g_x^n, \varphi(b_n))]$.

Определение реализуемости формулы завершено, и описание модели дано полностью.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Определение реализуемости формулы числом при оценках, данное в [5], отличается от только что приведенного лишь в пп. 3), 10), а это позволяет доказать реализуемость принципа униформизации.

§ 4. Основной результат

ТЕОРЕМА 3. $\text{ZFIC2} + \text{M} + \text{DCS} + \text{CT} \not\models \text{U}$.

ЛЕММА 4. Для всякой ч.р.ф. $f(n, h, k, p, s)$ существует множество x из универсума V такое, что данная функция не является его функцией экстенциональности.

СЛЕДСТВИЕ 5. Не существует ч.р.ф. такой, которая была бы функцией экстенциональности для всех множеств из универсума V . В частности, таковой не является функция $f(n, h, k, p, s)$, которая при некоторых h, k, p, s является тождественной по первому аргументу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Рассмотрим три группы функций, которые исчерпывают все ч.р.ф. от пяти аргументов, и для функции из каждой группы приведем нужное множество из универсума:

1) $\exists nhkps \neg !f(n, h, k, p, s)$; тогда $x = \{\langle n, \emptyset \rangle\}$ (заметим, что множество x имеет функцией экстенциональности тождественную функцию, т.е. принадлежит универсуму, и что пустое множество эквивалентно самому себе с любыми функциями);

2) $\exists nhkps (f(n, h, k, p, s) \neq n)$; тогда требуемое множество x то же самое, что и в п. 1);

3) $\forall nhkps (f(n, h, k, p, s) = n)$, т.е. для любых фиксированных h, k, p и s функция f как функция первого аргумента является тождественной; тогда требуемое множество следующее:

$$x = \{\langle 0, z \rangle : z \sim y\} \cup \{\langle 1, y \rangle\},$$

где $y \neq \emptyset$ и y принадлежит нашему универсуму (напомним, $z \sim y$ означает, что существуют ч.р.ф., сводящие z к y и y к z), функцией экстенциональности

множества x будет, например, функция $g(n, h, k, p, s)$ такая, что для всех h, k, p и s выполнено $g(n, h, k, p, s) = 0$, в частности $g(1, h, k, p, s) = 0$.

Тогда x и есть требуемое множество, так как исходная функция f по любым фиксированным второму, третьему, четвертому и пятому аргументам является тождественной.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. В лемме 4 вместо V можно взять V_α (например, для $\alpha = \omega$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 5 (не использующее лемму 4). Множество

$$y = \{\langle 0, x \rangle, \langle 1, x \rangle\} \cup \{\langle 1, z \rangle : z \sim x\}$$

из универсума V не имеет своей функцией экстенциональности функцию $f(n, h_1, h_2, h_3, h_4) = n$, где f является тождественной функцией при любых h_1, h_2, h_3, h_4 . Данное множество принадлежит V , так как $y \text{ ext } p$ находится на уровне ординала $\alpha + 1$, где $x \in V_\alpha$. Здесь $p(n, h_1, h_2, h_3, h_4) \equiv 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Свойство универсума V из следствия 5 можно попытаться использовать для получения контрпримера сильного принципа униформизации с целью доказательства независимости этого принципа от тезиса Чёрча с выбором в интуиционистской теории множеств. В неформальной записи этого контрпримера формула φ уже не будет содержать параметров. Однако для этого необходимо дать формальную запись формулы φ в языке теории множеств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Рассмотрим следующий пример сильного принципа униформизации (см. также [2]):

$$\begin{aligned} & \forall x \exists n \forall w [\forall k (k \in w \leftrightarrow k = n) \wedge \forall u (u \in w \leftrightarrow u = x) \wedge w \in a_r \rightarrow \perp] \\ & \rightarrow \exists n \forall xw [\forall k (k \in w \leftrightarrow k = n) \wedge \forall u (u \in w \leftrightarrow u = x) \wedge w \in a_r \rightarrow \perp], \quad (2) \end{aligned}$$

или в метазаписи:

$$\forall x \exists n (\neg\{n, x\} \in a_r) \rightarrow \exists n \forall x (\neg\{n, x\} \in a_r).$$

Здесь a_r – свободная переменная по множествам (т.е. сорта 1) с номером r . Значением оценки этой свободной переменной является множество y из универсума V , которое определяется следующим образом. Пусть

$$u = \{\langle 0, w \rangle : \exists x \in V_\alpha [x \neq \emptyset \wedge w = \{\langle n, h \rangle, \langle m, v \rangle : v \sim x\}]\},$$

где наборы m, n, h из упорядоченных пар не пустые и $\forall v h \neg(v \text{ ext } h)$ (например, для номеров нигде не определенной функции). Тогда множество y имеет вид

$$y = u \cup \{\langle 0, z \rangle : z \sim w \wedge \langle 0, w \rangle \in u\}.$$

Здесь $\alpha \geq \omega$ (см. замечание 6).

Докажем, что посылка примера сильного принципа униформизации реализуема, а заключение не реализуемо (при оценке свободной переменной на приведенное множество y).

Далее докажем, что множество y принадлежит V с функцией экстенциональности $h(n, h_1, h_2, h_3, h_4) = 0$. Каждое из множеств $w_x \in V$ с функцией

экстенциональности $h_{w_x}(n, h_1, h_2, h_3, h_4)$ равно такому m , что $\langle m, x \rangle \in w_x$. Число e такое, что $e(h) = j(s, h)$, где $s(n) = 0$, реализует посылку примера, так как если $x \text{ ext } h$, то

$$\neg \exists e R \left(e, \forall k (k \in w \leftrightarrow k = h) \right) \wedge \left(\forall u (u \in w \leftrightarrow u = x) \wedge w \in y \right),$$

потому что либо $x \notin V_\alpha$, либо $x \text{ ext } h$ и в любом случае $\langle 0, \{ \langle p, h \rangle, \langle m, x \rangle \} \rangle \notin y$. Тогда 0 реализует часть заключенной в квадратные скобки посылки в формуле (2).

Предположим теперь, что число e реализует заключение нашего примера. Тогда

$$\begin{aligned} e &= j(e_1, e_2), \\ \forall x h \left[x \text{ ext } h \rightarrow !e_1(h) \wedge R(e_1(h), \forall w \left[\forall k (k \in w \leftrightarrow k = e_2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \wedge \forall u (u \in w \leftrightarrow u = x) \wedge w \in y \rightarrow \perp \right] \right]. \end{aligned}$$

Это означает, что для всякого $x \in V$ (в том числе и для непустых $x \in V_\alpha$) выполняется

$$\neg \exists s R \left(s, \forall k (k \in w \leftrightarrow k = h) \wedge \forall u (u \in w \leftrightarrow u = x) \wedge w \in y \right),$$

т.е. $\langle 0, p, e_2, \langle m, x \rangle \rangle \notin y$.

Однако для набора непустых множеств $x \in V_\alpha$ это возможно только в случае, если выполняется $\forall x (x \text{ ext } e_2)$, но это невозможно в силу замечания 6. Поэтому заключение примера принципа униформизации, а с ним и сам пример оказываются не реализуемыми.

Для завершения доказательства теоремы необходимо проверить выполнимость в модели всех аксиом и схем аксиом (см. также [4]) теории ZFIC2 + CT + M + DCS.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Поскольку понятие реализуемости формулы при оценках для арифметических формул совпадает с понятием рекурсивной реализуемости Клини для арифметических формул, проверка реализуемости схем аксиом логики предикатов и собственных аксиом и схемы индукции арифметики, а также тезиса Чёрча и принципа Маркова проводится так же, как в [1, теоремы 5.4, 7.3] (следует учесть, что рассматриваются формализованный вариант рекурсивной реализуемости Клини и расширенный тезис Чёрча, из которого СТ выводится) или как в [8, § 82, теорема 62^N], где приводится оригинальный вариант доказательства Нельсона. Поэтому ниже будет приведено доказательство выполнимости в модели (следуя [4]) только всех теоретико-множественных аксиом.

При доказательстве часто будем отождествлять свободные переменные с их значениями при оценках. При доказательстве реализуемости аксиом и схем аксиом существования указываем множество из универсума и реализующее число. Гёделевы номера функций отождествляем с самими функциями там, где не возникает разночтений.

Приведем доказательства реализуемости всех собственных постулатов.

1. Реализуемость аксиомы объемности

$$\forall xyz \left[\forall n (n \in x \leftrightarrow n \in y) \wedge \forall u (u \in x \leftrightarrow u \in y) \wedge x \in z \rightarrow y \in z \right].$$

Пусть p реализует посылку при выбранных оценках f и g , т. е. $p = \langle p_1, p_2, p_3 \rangle$, где $R(p_3, f, g, x \in z)$. Имеем

$$\begin{aligned} \forall k \left(R(p_1(k), f_k^n, g, a_n \in x \leftrightarrow a_n \in y) \right. \\ \Rightarrow p_1(k) = \langle p_4, p_5 \rangle \wedge \forall s \left[\left(R(s, f_k^n, g, a_n \in x) \right. \right. \\ \left. \left. \Rightarrow R(p_4(s), f_k^n, g, a_n \in y) \right) \Rightarrow (\langle s, k \rangle \in x \Rightarrow \langle p_4(s), k \rangle \in y) \right] \Big), \end{aligned}$$

и для p_5 получаем аналогичные формулы с заменой y на x и x на y .

Имеем

$$\begin{aligned} u \text{ ext } h \Rightarrow R(p_2(h), f, g_u^m, a_m \in x \leftrightarrow a_m \in y) \\ \Rightarrow p_2(h) = \langle p_7, p_8 \rangle \wedge \forall n \left(R(n, f, g_u^m, a_m \in x) \Rightarrow R(p_7(n), f, g_u^m, a_m \in y) \right), \end{aligned}$$

то есть

$$\langle n, u \rangle \in x \Rightarrow \langle p_7, u \rangle \in y,$$

и для p_8 получаем аналогичные формулы с заменой y на x и x на y .

Пусть

$$\begin{aligned} h_1(n, k) \simeq [p_1(k)]_1(n), \quad h_2(n, k) \simeq [p_1(k)]_2(n), \quad h_3(n, k) \simeq [p_2(n, k)]_1(n), \\ h_4(n, k) \simeq [p_2(n, k)]_2(n), \quad \vec{h} = \langle h_1, h_2, h_3, h_4 \rangle, \quad \text{rng } x = \alpha, \quad \text{rng } z = \beta. \end{aligned}$$

В силу того, что $\langle p_3, x \rangle \in z$, имеем $\alpha < \beta$.

Пусть

$$x^* = \{z \in V \mid \exists n (\langle n, z \rangle \in x)\} \cup \{k \mid \exists n (\langle n, k \rangle \in x)\}.$$

Из реализуемости посылки имеем $x^* = y^*$. Поскольку $\text{rng } x = \sup\{\text{rng } y + 1 \mid y \in x^*\}$, то $\text{rng } x = \text{rng } y = \alpha$ и $x \stackrel{\vec{h}}{\sim}_{\alpha} y \wedge \alpha < \beta$. Тогда в силу экстенциональности z с h_z на уровне ординала β получим

$$\langle h_z(p_3, \vec{h}), y \rangle \in z \Rightarrow R(h_z(p_3, \vec{h}), f, g, y \in z).$$

Следовательно, $e(h_x, h_y, h_z)(p) = h_z(p_3, \vec{h})$ с таким $\vec{h}$, который определен выше, реализует аксиому объемности.

2. Реализуемость аксиомы пары

$$\forall abnm \exists x (a \in x \wedge b \in x \wedge n \in x \wedge m \in x).$$

Пусть

$$x = \{\langle 0, n \rangle, \langle 0, m \rangle\} \cup \{\langle 0, v \rangle \mid v \sim a \vee v \sim b\},$$

множество x экстенционально с тождественной функцией на уровне ординала $\alpha = \max(\beta, \gamma) + 1$, где $\beta = \text{rng } a$ и $\gamma = \text{rng } b$. Реализующей функцией является $e(n, m, h_a, h_b) = \langle e_1, e_2 \rangle$, где e_2 – гёделев номер тождественной функции, а $e_1 = \langle 0, 0, 0, 0 \rangle$.

3. Реализуемость аксиомы суммы

$$\forall a \exists x \forall w [\forall n (n \in w \wedge w \in a \rightarrow n \in x) \wedge \forall z (z \in w \wedge w \in a \rightarrow z \in x)].$$

Пусть

$$\begin{aligned} v &= \{ \langle 0, n \rangle \mid \exists kl (\exists w \in V) (\langle k, n \rangle \in w \wedge \langle l, w \rangle \in a) \} \\ &\cup \{ \langle 0, u \rangle \mid \exists kl (\exists w \in V) (\langle k, u \rangle \in w \wedge \langle l, w \rangle \in a) \}, \\ x &= v \cup \{ \langle 0, y \rangle \mid \exists u \in v (u \sim y) \}. \end{aligned}$$

Тогда $e(h) = \langle e_1, k \rangle$, где k – гёделев номер тождественной функции, $e_1(h) = \langle e_2, e_3 \rangle$, $e_2(n) = e_3(n) = p$ и $p(n) \equiv 0$,

$$R(s, f, g, (z \in w \wedge w \in a)) \Rightarrow \langle s_1, z \rangle \in w \wedge \langle s_2, w \rangle \in a \Rightarrow \langle 0, z \rangle \in x,$$

$$R(s, f, g, (n \in w \wedge w \in a)) \Rightarrow \langle s_1, n \rangle \in w \wedge \langle s_2, w \rangle \in a \Rightarrow \langle 0, n \rangle \in x.$$

Следовательно, указанное e реализует аксиому суммы.

4. Реализуемость аксиомы степени

$$\forall a \exists x \forall z [\forall u (u \in z \rightarrow u \in a) \wedge \forall n (n \in z \rightarrow n \in a) \rightarrow z \in x].$$

Пусть

$$\begin{aligned} x &= \{ \langle 0, z \rangle \mid z \in V \wedge \forall k (\exists n (\langle n, k \rangle \in z) \Rightarrow \exists n (\langle n, k \rangle \in a)) \\ &\quad \wedge \forall v \in V (\exists n (\langle n, v \rangle \in z) \Rightarrow \exists n (\langle n, v \rangle \in a)) \}. \end{aligned}$$

Множество x экстенционально с тождественной функцией. Полагаем $e(h) = \langle e_1, \ulcorner p \urcorner \rangle$, p – номер тождественной функции, и $\{e_1(h)\}(n) = 0$. Указанное e является искомым. Пусть m_1 и m_2 реализуют два конъюнктивных члена посылки. Тогда

$$\begin{aligned} \exists p (\langle p, n \rangle \in z) &\Rightarrow \exists p R(p, f_n^{n_0}, g, n_0 \in z) \Rightarrow R(\{n_2(n)\}(p), f_n^{n_0}, g, n \in a) \\ &\Rightarrow \exists p (\langle p, n \rangle \in a) \Rightarrow (\exists s (\langle s, n \rangle \in z) \Rightarrow \exists s (\langle s, n \rangle \in a)). \end{aligned}$$

Аналогично, для множественной части имеем

$$\begin{aligned} \exists p (\langle p, u \rangle \in z) &\Rightarrow \exists p R(p, f, g_u^{u_1}, u_1 \in z) \\ &\Rightarrow \exists p R(\{n_1(h_u)\}(p), f, g_u^{u_1}, z \in a) \Rightarrow \exists p (\langle p, u \rangle \in a). \end{aligned}$$

Тогда $\langle 0, z \rangle \in x$. Это доказывает реализуемость аксиомы степени.

5. Реализуемость аксиомы бесконечности

$$\exists x \forall n (n \in x).$$

Полагаем $e_1(n) = 0$, $e_2(n) = n$, $x = \omega \times \omega$, $e = \langle e_1, e_2 \rangle$.

6. Реализуемость схемы аксиом выделения

$$\forall a \exists v [\forall n (n \in v \leftrightarrow n \in a \wedge \varphi(n)) \wedge \forall z (z \in v \leftrightarrow z \in a \wedge \psi(z))].$$

Полагаем $e(h_a) = \langle e_1, h_v \rangle$, где $e_1 = \langle e_2, e_3 \rangle$, $e_2(n) = \langle e_4, e_5 \rangle$, $e_3(h_z) = \langle e_6, e_7 \rangle$ и e_4, e_5, e_6, e_7 – гёделевы номера тождественной функции. Пусть

$$v = \{ \langle k, n \rangle \mid R(k, f_n^m, g, a_m \in a \wedge \varphi(a_m)) \} \cup \{ \langle k, z \rangle \mid R(k, f, g_z^m, a_m \in a \wedge \psi(a_m)) \}.$$

Ясно, что $\text{rng } v \leq \text{rng } a = \alpha$. Докажем, что рекурсивно по h_a можно найти h_v такое, что $v \text{ ext}_\gamma h_v, \gamma \leq \alpha$, где $\gamma = \sup(\text{rng } z + 1 \mid z \in v^*)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. Для любых формул φ и ψ языка теории ZFIC2 существует ч.р.ф. f такая, что $\forall \vec{n} \vec{h} t (a \text{ ext } t \wedge \vec{p} \text{ ext } \vec{h} \Rightarrow !f(\vec{n}, \vec{h}, t) \wedge v \text{ ext}_\gamma f(\vec{n}, \vec{h}, t))$, где γ такое, как указано выше.

УТВЕРЖДЕНИЕ 10. Для всякой формулы ψ языка теории ZFIC2 существует ч.р.ф. ρ такая, что

$$\forall zy\vec{h}e \left[x \stackrel{\vec{h}}{\sim} y \wedge R(e, f, g_z^k, \psi(a_k)) \Rightarrow !\rho(e, \vec{h}) \wedge R(\rho(e, \vec{h}), f, g_y^k, \psi(a_k)) \right],$$

причем ρ рекурсивно зависит от списков номеров свободных переменных по натуральным числам и по множествам, входящих в формулу ψ как параметры (коллизии номеров переменных по множествам и по числам нет). Таким образом, $\rho = F(h_a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 9 следует из утверждения 10:

$$\begin{aligned} \langle e, z \rangle \in v \wedge x \stackrel{\vec{h}}{\sim} y &\Rightarrow \langle e_1, z \rangle \in a \wedge R(e_2, f, g_z^k, \psi(a_k)) \\ &\Rightarrow R(\{F(h_a)\}(e_2, \vec{h}), f, g_y^k, \psi(a_k)) \\ &\Rightarrow \langle \langle h_a(e_1, \vec{h}), \{F(h_a)\}(e_2, \vec{h}) \rangle, y \rangle \in v. \end{aligned}$$

Тем самым описана функция h_v , рекурсивно зависящая от списков номеров свободных переменных по натуральным числам и по множествам, входящих в формулу ψ , и от функции h_a .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 10. Проведем индукцию по построению формулы ψ . Атомарная функция ψ может иметь один из видов: $\perp$, $s = t$, $s \in a$, $s \in p$, $a \in p$, $p \in a$ (здесь s, t – арифметические термы, p – параметр, входящий в формулу ψ). Случаи $\perp$, $s = t$, $s \in p$ тривиальны. Рассмотрим остальные случаи:

(i) $\psi \Leftrightarrow s \in a$; тогда

$$\begin{aligned} R(e, f, g_z^k, s \in a) &\Rightarrow \langle e, s(f) \rangle \in z \\ &\Rightarrow \langle h_1(e, s(f)), s(f) \rangle \in y \Rightarrow R(h_1(e, s(f)), f, g_y^k, s \in a); \end{aligned}$$

(ii) $\psi \Leftrightarrow a \in p$; тогда

$$\begin{aligned} R(e, f, g_{z,p}^{k,m}, a \in p) &\Rightarrow \langle e, z \rangle \in p \\ &\Rightarrow \langle h_p(e, \vec{h}), y \rangle \in p \Rightarrow R(h_p(e, \vec{h}), f, g_{y,p}^{k,m}, a \in p); \end{aligned}$$

(iii) $\psi \Leftrightarrow p \in a$; тогда

$$\begin{aligned} R(e, f, g_{z,p}^{k,m}, p \in a) &\Rightarrow \langle e, p \rangle \in z \\ &\Rightarrow \langle h_3(e, h_p), p \rangle \in y \Rightarrow R(h_3(e, h_p), f, g_{y,p}^{k,m}, p \in a). \end{aligned}$$

В случаях (ii), (iii) функция h_p является функцией экстенциональности множества p .

Во всех рассмотренных случаях искомая функция ρ рекурсивно зависит только от списков номеров свободных переменных по натуральным числам и по множествам, входящих в формулу ψ , и от функции h_a .

Индукционный шаг следующий:

а) $\psi \Leftrightarrow \psi_1 \wedge \psi_2$; в этом случае

$$\begin{aligned} R(e, f, g_z^k, \psi_1 \wedge \psi_2) &\Rightarrow R(e_1, f, g_z^k, \psi_1) \wedge R(e_2, f, g_z^k, \psi_2) \\ &\Rightarrow R(\rho(e_1, \vec{h}), f, g_y^k, \psi_1) \wedge R(\rho(e_2, \vec{h}), f, g_y^k, \psi_2) \\ &\Rightarrow R(\langle \rho(e_1, \vec{h}), \rho(e_2, \vec{h}) \rangle, f, g_y^k, \psi_1 \wedge \psi_2); \end{aligned}$$

б) $\psi \Leftrightarrow \psi_1 \vee \psi_2$; в этом случае $R(e, f, g_z^k, \psi_1 \vee \psi_2)$ и

$$\rho(e, \vec{h}) \simeq \begin{cases} \langle e_1, \rho_1(e_2, \vec{h}) \rangle, & \text{если } e_1 = 0, \\ \langle e_1, \rho_2(e_2, \vec{h}) \rangle, & \text{если } e_1 \neq 0; \end{cases}$$

в) $\psi \Leftrightarrow \psi_1 \rightarrow \psi_2$; в этом случае

$$R(e, f, g_z^k, \psi_1 \rightarrow \psi_2) \Rightarrow R(\rho_2(e(\rho_1(p, \vec{h}^1)), \vec{h}), f, g_y^k, \psi_1 \rightarrow \psi_2),$$

где

$$R(p, f, g_y^k, \psi_1) \wedge \vec{h}^1 = \langle h_2, h_1, h_4, h_3 \rangle \wedge \vec{h} = \langle h_1, h_2, h_3, h_4 \rangle;$$

д) $\psi = \forall s \psi_1(s, a)$; в этом случае

$$\begin{aligned} \forall s R(e(s), f_s^m, g_z^k, \psi_1(s, a)) &\Rightarrow R(\rho_1(e(s), \vec{h}), f_s^m, g_y^k, \psi_1(s, a)), \\ &\{ \rho(e, \vec{h}) \}(s) \simeq \rho_1(e(s), \vec{h}), \end{aligned}$$

причем ρ_1 рекурсивно зависит от s , оценки остальных параметров фиксированы;

е) $\psi = \exists n \psi_1(n, a)$; в этом случае

$$\rho(e, \vec{h}) \simeq \langle \rho_1(e_1, \vec{h}), e_2 \rangle$$

и ρ_1 рекурсивно зависит от e_2 ;

ф) $\psi = \forall x \psi_1(x, a)$; в этом случае

$$\begin{aligned} R(e, f, g_z^k, \forall x \psi_1(x, z)) &\Rightarrow \forall x h [x \text{ ext } h \Rightarrow R(e(h), f, g_{z,x}^{k,m}, \psi_1(x, z))] \\ &\Rightarrow \forall x h [x \text{ ext } h \Rightarrow R(\rho_1(e(h), \vec{h}), f, g_{y,x}^{k,m}, \psi_1(x, y))], \\ &\{ \rho(e, \vec{h}) \}(h) \simeq \rho_1(e(h), \vec{h}), \end{aligned}$$

причем ρ_1 рекурсивно зависит от h ;

г) $\psi = \exists x \psi_1(x, a)$; в этом случае

$$\rho(e, \vec{h}) \simeq \langle \rho_1(e_1, \vec{h}), e_2 \rangle$$

и ρ_1 рекурсивно зависит от e_2 ,

$$\begin{aligned} R(e, f, g_z^k, \exists x \psi_1(x, z)) &\Rightarrow e = \langle e_1, e_2 \rangle \wedge \exists x [x \text{ ext } e_2 \wedge R(e_1, f, g_{z,x}^{k,m}, \psi_1(x, z)) \\ &\Rightarrow R(\langle \rho_1(e_1, \vec{h}), e_2 \rangle, f, g_y^k, \exists x \psi_1(x, y))]. \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

7. Реализуемость схемы аксиом собирания (collection)

$$\forall a \{ [\forall x \in a \exists y \varphi(x, y) \wedge \forall n \in a \exists y \psi(n, y)] \\ \rightarrow \exists b [\forall x \in a \exists y \in b \varphi(x, y) \wedge \forall n \in a \exists y \in b \psi(n, y)] \}.$$

Предположим, что p реализует посылки, т. е.

$$p = \langle p_1, p_2 \rangle \wedge x \text{ ext } h \wedge R(k, f, g_x^m, a_m \in a) \Rightarrow R(\{p_1(h)\}(k), f, g_x^m, \exists y \psi(a_m, y)) \\ \Rightarrow \{p_1(h)\}(k) = \langle e, h_y \rangle \wedge \exists y ((y \in V) \wedge (y \text{ ext } h_y) \wedge R(e, f, g_{x,y}^{m,s}, \psi(a_m, a_s))).$$

Аналогично,

$$R(k, f_n, g_y^m, n \in a) \Rightarrow \{p(n)\}(k) = \langle e_1, h_y \rangle \wedge \exists y ((y \in V) \wedge R(e_1, f_n, g_y^m, \varphi(n, a_m))).$$

Итак,

$$\langle k, n \rangle \in a \Rightarrow (\exists y \in V)(\exists h) (y \text{ ext } h) \wedge (h = j_2(\{p_2(n)\}(k))) \\ \wedge \forall x \in V, h \{ (x \text{ ext } h) \wedge (\exists k (\langle k, x \rangle \in a)) \\ \Rightarrow (\exists y \in V) \exists h (y \text{ ext } h \wedge h = j_2(\{p_1(h)\}(k))) \}.$$

Тогда существует множество v из универсума фон Неймана, содержащее в точности по одному такому $y \in V$ для любого n такого, что

$$\exists k (\langle k, n \rangle \in a),$$

и для всякого такого $x \in V$, что

$$\exists k (\langle k, x \rangle \in a).$$

Пусть $P_v = \{z \in V \mid (\exists y \in v) (z \sim y)\}$. Полагаем

$$b = \{0\} \times P_v, \quad \text{rng } b = \sup\{\text{rng } y + 1 \mid y \in b\} = \alpha.$$

Имеем $b \text{ ext}_\alpha s$, где s – гёделев номер тождественной функции. Полагаем $\{e(h_a)\}(p) = \langle p_1^2, h \rangle$, где h – функция экстенциональности множества b ,

$$p_1^2 = \langle p_1^1, p_2^1 \rangle, \quad \{p_1^1(h)\}(n) = \langle e_1^1, [\{p_1(h)\}(n)]_2 \rangle, \quad \{p_2^1(h)\}(k) = \langle e_2^1, [\{p_2(h)\}(k)]_2 \rangle, \\ e_1^1 = \langle 0, [\{p_1(h)\}(n)]_1 \rangle, \quad e_2^1 = \langle 0, [\{p_2(h)\}(k)]_1 \rangle.$$

Данное e реализует схему аксиом собирания с данным множеством b .

8. Реализуемость принципа DCS

$$\forall a \exists x [\forall n (\neg n \in a \rightarrow n \in x) \wedge \forall u (\neg u \in a \rightarrow u \in x)].$$

Пусть

$$x = \{ \langle n, u \rangle \mid n \in \omega \wedge \exists k (\langle k, u \rangle \in a) \} \cup \{ \langle s, n \rangle \mid s \in \omega \wedge \exists k (\langle k, n \rangle \in a) \}.$$

Это x экстенционально на уровне ординала $\alpha = \text{rng } a$ с функцией $h(n, \vec{h}) = n$. Укажем реализатор $e(h_a) = \langle p, s \rangle$, где $s = \ulcorner h \urcorner$, а $p = \langle p_1, p_2 \rangle$ и $p_1(h) = p_2(h) = t$, где t – гёделев номер тождественной функции.

9. Реализуемость схемы аксиом трансфинитной индукции

$$\forall x [\forall y (y \in x \rightarrow \varphi(y)) \rightarrow \varphi(x)] \rightarrow \forall x \varphi(x).$$

Пусть p реализует посылку. По теореме о рекурсии найдется функция $J(p, h)$ такая, что

$$J(p, h) \simeq \{\{p\}(h)\}(u),$$

где

$$\{\{u\}(h)\}(s) \simeq J(p, h);$$

$\{u\}(p)$ означает применение функции с гёделевым номером u к числу p . Трансфинитной индукцией по рангу множества докажем, что

$$\forall x \in V, \forall h [x \text{ ext } h \Rightarrow R(J(p, h), f, g_x^n, \varphi(a_n))].$$

Пусть

$$R(p(h), f, g_x^n, \forall y (y \in a_n \rightarrow \varphi(y)) \rightarrow \varphi(a_n)).$$

Тогда

$$[R(u, f, g_x^n, \forall y (y \in a_n \rightarrow \varphi(y))) \Rightarrow R(\{p(h)\}(u), f, g_x^n, \varphi(a_n))].$$

Нужно показать, что $\{\{u\}(h)\}(s) \simeq J(p, h)$ реализует посылку. Если $R(s, f, g_{x,y}^{n,m}, a_m \in a_n)$, то $\langle s, y \rangle \in x$ и $\text{rng } y < \text{rng } x$. Следовательно, имеем

$$R(J(p, h), f, g_x^n, \varphi(a_n))$$

в силу предположения индукции. Теорема 3 доказана.

§ 5. О соотношении разных форм тезисов Чёрча и принципов униформизации

Приведем в заключение сводку результатов для бестиповой двусортной теории множеств и укажем, где они опубликованы. Заметим, что все принципы содержат параметры любого сорта. В пунктах, где доказываемость выводимости, слева стоит более слабая теория, чем в пунктах, где выводимость опровергается. Расширение всех результатов о невыводимости до теории с принципом DCS модели, используемой при этом, не меняет; пп. 5) и 6) приводятся для полноты изложения.

- 1) ZFIC2 + M + DCS + CT $\not\models$ U – теорема 3.
- 2) ZFIC2 + M + DCS + U! $\not\models$ U – следствия 1, 4 (см. также замечания в конце работы [2]).
- 3) ZFIC2 + M + DCS + CT! + U $\not\models$ CT (см. [9, теорема 1, с. 1073] или [10, теорема 3.4]).
- 4) ZFIR2 + CT! $\vdash$ U! (см. [6, с. 49, теорема 2.1 и замечание к ней]).
- 5) ZFIR2 + U $\vdash$ U! – простой вывод в логике предикатов.
- 6) ZFIR2 + CT $\vdash$ CT! (как в п. 5)).
- 7) ZFIC2 + M + DCS + U $\not\models$ CT! (см. [11, основная теорема на с. 51 и предпоследний абзац на с. 52] или [10, теорема 2.3]).
- 8) ZFIC2 + M + DCS + U $\not\models$ CT – из пп. 7) и 6).

ПРОБЛЕМА 11. В теории ZFIC2 без аксиомы объемности с добавленными принципами M, DCS, CT принцип U! не выводится.

Список литературы

1. А. Г. Драгалін, *Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств*, Наука, М., 1979; англ. пер.: A. G. Dragalin, *Mathematical intuitionism. Introduction to proof theory*, Transl. Math. Monogr., **67**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.
2. В. Х. Хаханиян, “Невыводимость принципа униформизации из тезиса Черча в интуиционистской теории множеств”, *Матем. заметки*, **43**:5 (1988), 685–691; англ. пер.: V. Kh. Khakhanyan, “Nondeducibility of the uniformization principles from Church’s thesis in intuitionistic set theory”, *Math. Notes*, **43**:5 (1988), 394–398.
3. A. S. Troelstra, “Notes on intuitionistic second order arithmetic”, *Cambridge Summer School in Mathematical Logic* (Cambridge, 1971), Lecture Notes in Math., **337**, Springer-Verlag, Berlin, 1973, 171–205.
4. В. Х. Хаханиян, “Теория множеств и тезис Чёрча”, *Исследования по неклассическим логикам и формальным системам*, Наука, М., 1983, 198–208.
5. В. Х. Хаханиян, “Непротиворечивость интуиционистской теории множеств с принципами Чёрча и униформизации”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1980, № 5, 3–7.
6. Г. Ф. Шварц, “Некоторые применения метода рекурсивной реализуемости к интуиционистской теории типов”, *Вопросы кибернетики. Неклассические логики и их применение*, Научный совет по комплексной проблеме “кибернетика”, М., 1982, 37–54.
7. В. Х. Хаханиян, “Независимость сильного принципа униформизации от тезиса Чёрча в полной теории множеств”, *Научные математические чтения памяти М. Я. Суслина*, Тез. докладов (Саратов, 1989), СГПИ, Саратов, 1989, 91.
8. С. К. Клини, *Введение в метаматематику*, ИЛ, М., 1957; пер. с англ.: S. C. Kleene, *Introduction to metamathematics*, North-Holland, Amsterdam, 1952.
9. В. Х. Хаханиян, “Сравнительная сила вариантов тезиса Чёрча на уровне теории множеств”, *Докл. АН СССР*, **252**:5 (1980), 1070–1074; англ. пер.: V. Kh. Khakhanyan, “The comparative strength of variants of Church’s thesis at the level of set theory”, *Soviet Math. Dokl.*, **21**:3 (1980), 894–898.
10. V. N. Nahanyan, “The consistency of some intuitionistic and constructive principles with a set theory”, *Studia Logica*, **40**:3 (1981), 237–248.
11. В. Х. Хаханиян, “Непротиворечивость интуиционистской теории множеств с формальным математическим анализом”, *Докл. АН СССР*, **253**:1 (1980), 48–52; англ. пер.: V. Kh. Khakhanyan, “The consistency of intuitionistic set theory with formal mathematical analysis”, *Soviet Math. Dokl.*, **22** (1980), 46–50.

В. Х. ХАХАНИЯН

(V. Kh. Khakhanyan)

Московский государственный университет
путей сообщения (МИИТ)

E-mail: valkhakhanian@gmail.com

Поступило в редакцию

21.03.2011

29.06.2012