Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Стукопин, О представлениях янгиана супералгебры Ли типа $A(m, n)$, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2013, том 77, выпуск 5, 179–202

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7791>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 15:08:20

УДК 512.667.7+512.554.32

В. А. Стукопин

О представлениях янгиана супералгебры Ли типа $A(m, n)$

Описаны конечномерные неприводимые представления янгиана супералгебры Ли типа $A(m, n)$. Сформулирован и доказан критерий конечномерности неприводимого представления.

Библиография: 29 наименований.

Ключевые слова: янгиан супералгебры Ли, неприводимое представление, многочлен Дринфелда, простой модуль.

DOI: 10.4213/im7791

§ 1. Введение

Описание неприводимых представлений янгианов супералгебр Ли является важной задачей для теории точно решаемых моделей статистической механики и квантовой теории поля. С точки зрения теории янгианов конструкция трансфер-матрицы основана на нахождении образа универсальной R -матрицы квантового дубля янгиана при действии тензорного произведения неприводимого представления и тождественного отображения. Вычисление спектра гамильтониана и корреляционных функций также может быть проведено на основе теории представлений янгианов при использовании формулы для универсальной R -матрицы. Поэтому теория представлений янгианов простых и редуктивных алгебр Ли является достаточно развитой, она начала развиваться еще до появления самого термина “янгиан” (см. [1]–[7]). В противоположность этому теория янгианов супералгебр Ли является относительно молодой, первые результаты в ней были получены в начале 1990-х годов. К настоящему времени число приложений теории янгианов супералгебр Ли значительно выросло и, в частности, проявилась связь этой теории с квантовой теорией суперструн, а также с теорией калибровочных полей Янга–Миллса, играющих важнейшую роль в современной фундаментальной физике (см. [8]–[10]).

В настоящей работе исследуются представления янгианов супералгебр Ли типа $A(m, n)$ (см. [11], [12]).

Основным результатом работы является теорема о классификации конечномерных неприводимых представлений янгиана базисной супералгебры Ли типа $A(m, n)$. Классификация неприводимых представлений янгиана полной

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-01-00671-а), Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” в рамках мероприятия 1.2.2 (госконтракт № П1116), а также Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение 14.А18.21.0356 “Теория функциональных пространств, операторов и уравнений в них”).

линейной алгебры $\mathfrak{gl}(m, n)$ получена ранее в работах [13], [14]. Заметим, что, используя результаты работы [15] об изоморфизме двух реализаций янгиана специальной линейной супералгебры Ли, найденных соответственно в работах [16] и [17], можно вывести теорему о классификации неприводимых представлений янгиана супералгебры Ли типа $A(m, n)$ из результатов работ [13], [14]. Тем не менее мы приводим здесь прямое доказательство этого результата. (Впрочем, мы приводим и вывод наших результатов из результатов работ [13], [14].) На взгляд автора, кроме того что это доказательство может представлять интерес, возможные обобщения результатов о классификации неприводимых представлений в случае янгианов других базисных супералгебр Ли, вероятно, более естественно получать, пытаясь обобщить это прямое доказательство. Отметим, что теория представлений супералгебры Ли $\mathfrak{sl}(m+1, n+1)$ отличается от теории представлений простой алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n+1)$ наличием наряду с так называемыми типичными представлениями еще и атипичных представлений. Это находит свое отражение и в теории представлений янгианов супералгебр Ли типа $A(m, n)$.

Заметим, что янгианы, наряду с квантованными универсальными обертывающими алгебрами и квантовыми эллиптическими алгебрами, являются одним из трех наиболее важных примеров квантовых алгебр. Само понятие янгиана было введено В. Г. Дринфельдом для случая простых алгебр Ли в середине 1980-х годов (см. [18], [19]), хотя изоморфные янгиану алгебры использовались при исследовании точно решаемых моделей квантовой теории поля и, ранее, в рамках квантового метода обратной задачи рассеяния (см. [6], [7]). В настоящее время янгианы простых и редуктивных алгебр Ли исследованы достаточно хорошо (см. монографии [3], [20]). Янгианы супералгебр Ли начали изучаться с начала 1990-х годов (см. [16], [17]).

Важным следствием результатов данной работы, а также работ [21], [22] было бы получение описания квантовых R -матриц как образов универсальной R -матрицы под действием тензорных произведений неприводимых представлений (в случае янгианов простых алгебр Ли соответствующие квантовые R -матрицы описаны в [23]). Этому вопросу, а также более детальному описанию неприводимых представлений автор надеется посвятить отдельную статью.

Работа организована следующим образом. В § 2 мы вводим янгиан базисной супералгебры Ли типа $A(m, n)$ и даем его описание в терминах токовой системы образующих и соотношений, следуя работе автора [17]. Отметим, что в работе [17] было неточно выписано последнее определяющее соотношение. Ошибка была выявлена во время переписки автора с Л. Гоу и исправлена в работе [15]. Здесь мы его приводим в правильной редакции (см. ниже соотношение (2.17)). В § 3 мы напомним конструкцию базиса Пуанкаре–Биркгофа–Витта (ПБВ-базиса) (см. [17]) и доказываем теорему Пуанкаре–Биркгофа–Витта (ПБВ-теорему) для янгиана супералгебры Ли типа $A(m, n)$. Заметим, что приведенное доказательство распространяется на случай янгиана произвольной базисной супералгебры Ли. Первоначальное доказательство теоремы Пуанкаре–Биркгофа–Витта для янгиана супералгебры Ли типа $A(m, n)$, анонсированное в [17], опиралось на неправильное соотно-

шение, о котором сказано выше и в котором участвовала нечетная корневая образующая. Следует отметить, что и правильного соотношения оказывается достаточно для проведения доказательства этой теоремы по схеме, использованной в работе [17]. Для полноты картины мы приводим основные этапы первоначального доказательства теоремы Пуанкаре–Биркгофа–Витта для янгиана специальной линейной супералгебры Ли, которое здесь использует правильное определяющее соотношение для нечетных корневых образующих. В § 4 мы для удобства читателя напомним основные определения, относящиеся к представлениям янгианов. Здесь же мы формулируем и доказываем основной результат работы – теорему о классификации конечномерных неприводимых представлений янгиана супералгебры Ли типа $A(m, n)$. В конце § 4 мы приводим вывод нашего результата из результатов Р. Б. Жанга о классификации конечномерных неприводимых представлений янгиана $Y(\mathfrak{gl}(m, n))$ общей линейной супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(m, n)$.

Далее используем следующие стандартные обозначения: $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел; $M_n(K)$ – кольцо $(n \times n)$ -матриц с элементами из кольца K ; $K[u]$ и $K[[u]]$ – кольцо многочленов и формальных степенных рядов соответственно с коэффициентами из кольца K ; $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ – множество неотрицательных целых чисел.

Автор благодарен рецензенту за замечания, способствовавшие улучшению настоящей работы.

§ 2. Определение янгиана супералгебры Ли типа $A(m, n)$

2.1. Сначала напомним определение янгиана $A(m, n)$ (см. [17]). Янгиан, как и другие квантовые алгебры, определяется как результат деформации в классе алгебр Хопфа универсальной обертывающей алгебры, которая в случае янгиана является универсальной обертывающей алгебры Ли полиномиальных токов со значениями в простой алгебре Ли (супералгебре Ли). В работе [17] показано, что такое определение эквивалентно другому определению, использующему так называемую *токовую систему* образующих. Эта система образующих особенно удобна при рассмотрении представлений янгианов, поэтому мы рассмотрим ее в первую очередь.

Супералгеброй Ли $A(m, n)$ называется базисная супералгебра Ли, порожденная образующими $h_i, x_i^\pm, i \in \{1, 2, \dots, m, m+1, \dots, m+n+1\}$. Матрица Картана, задающая систему определяющих соотношений, имеет следующий вид:

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m+n+1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Часто бывает удобно использовать симметрическую матрицу Картана, элементы которой определяются следующими условиями: $a_{ii} = 2, i < m+1$,

$a_{mm} = 0$, $a_{ii} = -2$, $m + 1 < i \leq m + n + 1$, $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = -1$ для $i < m + 1$ и $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = 1$ для $i \geq m + 1$. Все другие матричные элементы равны нулю. Если специально не оговорено противное, ниже мы везде будем использовать симметрическую матрицу Картана.

Система определяющих соотношений имеет следующий вид:

$$[h_i, h_j] = 0, \quad i, j \in I = \{1, 2, \dots, m, m + 1, \dots, m + n + 1\}, \quad (2.1)$$

$$[h_i, x_j^\pm] = \pm a_{ij} x_j^\pm, \quad i, j \in I, \quad (2.2)$$

$$[x_i^+, x_j^-] = \delta_{ij} h_i, \quad i, j \in I, \quad (2.3)$$

$$[x_{m+1}^\pm, x_{m+1}^\pm] = 0, \quad (2.4)$$

$$[x_i^\pm, x_j^\pm] = 0, \quad |i - j| > 1, \quad (2.5)$$

$$[x_i^\pm, [x_i^\pm, x_j^\pm]] = 0, \quad |i - j| = 1, \quad i, j \in I, \quad (2.6)$$

$$[[x_m^\pm, x_{m+1}^\pm], [x_{m+1}^\pm, x_{m+2}^\pm]] = 0. \quad (2.7)$$

Отметим, что образующие $x_{m+1}^\pm$ нечетные, а остальные образующие четные, т. е. $p(x_{m+1}^\pm) = 1$, $p(x_i^\pm) = p(h_j) = 0$, где p – функция четности, $j \in I$, $i \in I \setminus \{m + 1\}$ (см. [11]). Пусть $\mathfrak{g} = A(m, n) = \mathfrak{sl}(m + 1, n + 1)$. Напомним теперь определение янгiana $Y(\mathfrak{g}) = Y(\mathfrak{sl}(m + 1, n + 1))$ (см. [17], где определяющее соотношение исправлено в соответствии с [15]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть $Y(\mathfrak{g})_h$ (см. [17]) – супералгебра (над кольцом формальных степенных рядов $\mathbb{C}[[h]]$), порожденная образующими $h_{i,k}$, $x_{i,k}^\pm$, $i \in I = \{1, 2, \dots, m + n + 1\}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, такими, что $p(x_{m+1,k}^\pm) = 1$, $p(x_{i,k}^\pm) = p(h_{j,k}) = 0$, $i \in I \setminus \{m + 1\}$, $j \in I$, $k \in \mathbb{Z}_+$, которые удовлетворяют следующим определяющим соотношениям (см. соотношения из [17, определение 2], а также соотношения из [15, предложение 9.1]):

$$[h_{i,k}, h_{j,l}] = 0, \quad i, j \in I, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad (2.8)$$

$$[x_{i,k}^+, x_{j,l}^-] = \delta_{ij} h_{i,k+l}, \quad i, j \in I, \quad k, l \in \mathbb{Z}_+, \quad (2.9)$$

$$[h_{i,k+1}, x_{j,l}^\pm] = [h_{i,k}, x_{j,l+1}^\pm] \pm \frac{a_{ij}}{2} h(h_{i,k} x_{j,l}^\pm + x_{j,l}^\pm h_{i,k}), \quad (2.10)$$

$$i, j \in I, \quad k, l \in \mathbb{Z}_+, \quad i \neq m \quad \text{или} \quad j \neq m,$$

$$[h_{m+1,k+1}, x_{m+1,l}^\pm] = 0, \quad (2.11)$$

$$[h_{i,0}, x_{j,l}^\pm] = \pm a_{ij} x_{j,l}^\pm, \quad i, j \in I, \quad l \in \mathbb{Z}_+, \quad (2.12)$$

$$[x_{i,k+1}^\pm, x_{j,l}^\pm] = [x_{i,k}^\pm, x_{j,l+1}^\pm] \pm \frac{a_{ij}}{2} h(x_{i,k}^\pm x_{j,l}^\pm + x_{j,l}^\pm x_{i,k}^\pm), \quad (2.13)$$

$$i, j \in I, \quad k, l \in \mathbb{Z}_+, \quad i \neq m \quad \text{или} \quad j \neq m,$$

$$[x_{m+1,k+1}^\pm, x_{m+1,l}^\pm] = 0, \quad (2.14)$$

$$[x_{i,k_1}^\pm, [x_{i,k_2}^\pm, x_{j,k_3}^\pm]] + [x_{i,k_2}^\pm, [x_{i,k_1}^\pm, x_{j,k_3}^\pm]] = 0, \quad (2.15)$$

$$|i - j| = 1, \quad i, j \in I, \quad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}_+,$$

$$[x_{i,k}^\pm, x_{j,l}^\pm] = 0, \quad |i - j| > 1, \quad (2.16)$$

$$[[x_{m,r}^\pm, x_{m+1,0}^\pm], [x_{m+1,0}^\pm, x_{m+2,s}^\pm]] = 0. \quad (2.17)$$

2.2. Опишем теперь структуру косупералгебры. Отметим, что $Y(\mathfrak{g})_{\hbar}$ является супералгеброй Хопфа, в которой закон коумножения задается следующими формулами:

$$\begin{aligned}\Delta(x) &= x \otimes 1 + 1 \otimes x, \\ \Delta(x_{i,1}^+) &= x_{i,1}^+ \otimes 1 + 1 \otimes x_{i,1}^+ + \hbar \left(h_{i,0} \otimes x_{i,0}^+ - \sum_{\gamma \in \Delta_+} x_{\gamma}^- \otimes [x_{\alpha_i}^+, x_{\gamma}^+] \right), \\ \Delta(x_{i,1}^-) &= x_{i,1}^- \otimes 1 + 1 \otimes x_{i,1}^- + \hbar \left(x_{i,0}^- \otimes h_{i,0} - \sum_{\gamma \in \Delta_+} [x_{\alpha_i}^-, x_{\gamma}^-] \otimes x_{\gamma}^+ \right), \\ \Delta(h_{i,1}) &= h_{i,1} \otimes 1 + 1 \otimes h_{i,1} + \hbar \left(h_{i,0} \otimes h_{i,0} - \sum_{\gamma \in \Delta_+} (\alpha_i, \gamma) x_{\gamma}^- \otimes x_{\gamma}^+ \right),\end{aligned}$$

где через Δ_+ обозначено множество положительных корней супералгебры Ли типа $A(m, n)$, а для $\gamma = \alpha_1 + \dots + \alpha_k \in \Delta_+$ через $x_{\gamma}^{\pm} = [\dots [x_{\alpha_1}^{\pm}, x_{\alpha_2}^{\pm}], x_{\alpha_3}^{\pm}] \dots x_{\alpha_k}^{\pm}]$ обозначен соответствующий корневой вектор, α_i – простой корень, а $x_{\alpha_i}^{\pm} = x_i^{\pm}$ для $i = 1, \dots, k$.

Легко проверить, что при различных $\hbar$, не равных нулю, супералгебры Хопфа $Y(\mathfrak{g})_{\hbar}$ изоморфны.

Янгианом $Y(\mathfrak{g})$ будем называть супералгебру Хопфа $Y(\mathfrak{g})_1$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Введем следующие производящие функции образующих янгиана:

$$h_i(u) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} h_{i,k} u^{-k-1} = \sum_{k=-1}^{\infty} h_{i,k} u^{-k-1}, \quad i = 1, 2, \quad (2.18)$$

$$x_i^{\pm} = \sum_{k=0}^{\infty} x_{i,k}^{\pm} u^{-k-1}, \quad i = 1, 2. \quad (2.19)$$

Легко проверить, что соотношение (2.10) эквивалентно следующему соотношению для производящих функций:

$$[h_i(u), x_j^{\pm}(t)] = \mp \frac{a_{ij}}{2} \frac{(h_i(u)(x_j^{\pm}(t) - x_j^{\pm}(u)) + (x_j^{\pm}(t) - x_j^{\pm}(u))h_i(u))}{u - t}. \quad (2.20)$$

§ 3. Корневые образующие. Теорема Пуанкаре–Биркгофа–Витта

3.1. В этом пункте мы сформулируем теорему Пуанкаре–Биркгофа–Витта (ПБВ-теорему) для янгиана супералгебры Ли. Этот результат – квантовый аналог соответствующей теоремы для универсальных обертывающих алгебр (см. [3], [24]). В обоих случаях конструируется некий бесконечный линейный базис (т.е. базис в векторном пространстве). Отметим, что ПБВ-теорема для янгианов была доказана в работе [25]. В работе [17] было анонсировано доказательство ПБВ-теоремы для янгиана супералгебры Ли типа $A(m, n)$. Доказательство в [17] проводилось по схеме, предложенной в работе [25], но наличие нечетных корневых образующих и соотношений, в которых они присутствовали, требовало преодоления дополнительных трудностей, например при определении линейного порядка. Важную роль при этом играло соотношение (2.17),

которое в [17] было, как отмечено выше, приведено в неверной редакции. Тем не менее и исправленное соотношение позволяет завершить доказательство ПБВ-теоремы по схеме, использованной в работе [17]. Собственно, приводимое ниже доказательство и призвано объяснить этот факт. Отметим, что доказательство ПБВ-теоремы для янгиана полной (и специальной) линейной супералгебры Ли, определенного в рамках подхода Решетихина–Тахтаджяна–Фаддеева, приведено также в [15], где исправлены неточности доказательства ПБВ-теоремы для полной линейной супералгебры Ли, допущенные в работе [14], в которой это доказательство было впервые проведено в таком случае.

Пусть далее $\mathfrak{g} = A(m, n)$. Будем называть *степенью образующих* $a_{i,k} \in \{x_{i,k}^+, x_{i,k}^-, h_{i,k}\}$ их второй индекс. *Степенью монома* от образующих будем называть сумму степеней сомножителей. *Степенью многочлена* от образующих будем называть максимальную из степеней мономов, входящих в этот полином. *Степенью тензорного произведения* мономов будем называть сумму степеней тензорных сомножителей. *Степенью тензорного полинома* будем, как и выше, называть максимальную из степеней мономов, входящих в этот полином. Обозначим пространство элементов $Y(\mathfrak{g})$ степени не выше k через $Y_k = Y_k(\mathfrak{g})$. Получаем на $Y(\mathfrak{g})$ фильтрацию

$$Y_0 \subset Y_1 \subset Y_2 \subset \cdots \subset Y_n \subset \cdots.$$

Отметим, что по модулю членов меньшей степени (т. е. по модулю $Y(\mathfrak{g})_{k+l-1}$) коммутационные соотношения в $Y(\mathfrak{g})$ имеют вид

$$[h_{\alpha, \bar{k}}, x_{\beta, \bar{l}}] = (\alpha, \beta) x_{\beta, \bar{k}+\bar{l}}, \quad [h_{\alpha, \bar{k}}, h_{\beta, \bar{l}}] = 0, \quad (3.1)$$

$$[x_{\alpha, \bar{k}}, x_{\beta, \bar{l}}] = \begin{cases} 0, & \alpha + \beta \notin \Delta \cup \{0\}, \\ h_{\alpha, \bar{k}+\bar{l}}, & \beta = -\alpha, \\ N(\alpha, \beta) x_{\alpha+\beta, \bar{k}+\bar{l}}, & \alpha + \beta \in \Delta, \end{cases} \quad (3.2)$$

где $N(\alpha, \beta)$ определяется из следующего соотношения в $U(\mathfrak{g})$:

$$[x_\alpha, x_\beta] = N(\alpha, \beta) x_{\alpha+\beta}, \quad \alpha + \beta \in \Delta.$$

Сконструируем корневые векторы для $Y(\mathfrak{g})$. Пусть α_{m+1} – нечетный корень и Δ_+ – множество положительных корней супералгебры Ли $A(m, n)$. Определим на Δ_+ так называемый выпуклый порядок по индукции. Сначала зафиксируем упорядочение на множестве простых корней, соответствующее их нумерации:

$$\alpha_1 \prec \alpha_2 \prec \cdots \prec \alpha_{m+n+1}.$$

Если $\alpha, \beta \in \Delta_+$, $\alpha \prec \beta$, и определена их сумма $\alpha + \beta$, то будем считать, что $\alpha \prec \alpha + \beta \prec \beta$. Зафиксируем монотонное отображение α , сохраняющее порядок, $\alpha: [1, 2, \dots, N] \rightarrow \Delta_+$, $\alpha(k) \prec \alpha(n)$, если $k < n$. (Отметим, что $N = \frac{1}{2}(m + n + 1)(m + n + 2)$.) Пусть $\overline{(i, k)} = (i_1, k_1, i_2, k_2, \dots, i_{m+n+1}, k_{m+n+1})$ – вектор,

$$|\overline{(i, m)}| = \sum_{j=1}^{m+n+1} (i_j + m_j)$$

– сумма компонент этого вектора. Пусть Y_- – ассоциативная подалгебра янгиана $Y(A(m, n))$, порожденная образующими $\{x_{i,k}^- = x_{\alpha(i),k}^- \mid 1 \leq i \leq N, k \in \mathbb{Z}_+\}$. Опишем упорядоченный базис в янгиане $Y(\mathfrak{g})$ как в векторном пространстве, т. е. базис Пуанкаре–Биркгофа–Витта (ПБВ-базис).

Пусть $\bar{k} = (k_1, \dots, k_r)$, $k_i \geq 0$, – вектор, $k = |\bar{k}| = \sum_{i=1}^r k_i$. Пусть также

$$x(\bar{k}, \bar{w}; \bar{s}, \bar{p}; \bar{r}, \bar{t}) = (x_{\alpha(1),k_1}^+)^{w_1} \cdots (x_{\alpha(N),k_N}^+)^{w_N} \\ \times (h_{1,s_1})^{p_1} \cdots (h_{m+n+1,s_{m+n+1}})^{p_{m+n+1}} (x_{\alpha(1),r_1}^-)^{t_1} \cdots (x_{\alpha(N),r_N}^-)^{t_N}.$$

На множестве $\{x(\bar{k}, \bar{w}; \bar{s}, \bar{p}; \bar{r}, \bar{t})\}$ векторов определим лексикографический порядок.

Пусть $\alpha = \alpha_s + \alpha_{s+1} + \cdots + \alpha_t$; $\alpha, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_t \in \Delta_+$, где $\alpha_s, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_t$ – простые корни, $s < t$ и $l = t - s + 1$. Пусть $x_{s,k_1}^\pm, \dots, x_{t,k_l}^\pm \in Y(G)$, $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_l$. Определим корневые векторы формулами

$$x_{\pm\alpha,k} = [x_{s,k_1}^\pm, [x_{s+1,k_2}^\pm, [\dots, x_{t,k_l}^\pm] \dots]].$$

Нетрудно проверить, что если $(k'_1, \dots, k'_l)$ – другое разложение числа k , то

$$x_{\pm\alpha,k} = [x_{m,k'_1}^\pm, [x_{m+1,k'_2}^\pm, [\dots, x_{t,k'_l}^\pm] \dots]].$$

Отметим, что по модулю членов меньшей степени (по модулю $Y(\mathfrak{g})_{k-1}$) коммутационные соотношения в $\bigoplus_{k=1}^\infty Y(\mathfrak{g})_k / Y(\mathfrak{g})_{k-1} \oplus Y(\mathfrak{g})_0$ аналогичны коммутационным соотношениям универсальной обертывающей алгебры Ли токов $U(\mathfrak{g}[t])$, т. е. имеют следующий вид:

$$[h_{i,k}, x_{j,l}^\pm] = \pm(\alpha_i, \alpha_j) x_{j,k+l}^\pm, \\ [x_{i,k}^+, x_{j,l}^-] = \delta_{ij} h_{i,k+l}, \quad [h_{i,k}, h_{j,l}] = 0, \quad [x_{i,l}^\pm, [x_{i,r}^\pm, x_{j,s}^\pm]] = 0, \\ [[x_{m,r}^\pm, x_{m+1,0}^\pm], [x_{m+1,0}^\pm, x_{m+2,s}^\pm]] = 0.$$

Заметим, что именно этих соотношений оказывается достаточно для определения линейного порядка на элементах базиса в алгебре полиномиальных токов $\mathfrak{g}[t] = A(m, n)[t]$, когда в соотношениях участвуют нечетные корневые образующие. Последнее проверяется прямыми вычислениями.

Для каждого числа k зафиксируем вектор $(k_1, \dots, k_l)$, $k = k_1 + \cdots + k_l$, определяющий разбиение этого числа.

Выше мы ввели линейный порядок на множестве корней Δ и индуцированный этим порядком порядок на корневых векторах. Обозначим через Ω множество упорядоченных мономов от x_α, h_i , $\alpha \in \Delta$, $i \in I$. Мы используем обозначение $x_\alpha = x_\alpha^+$, $x_{-\alpha} = x_\alpha^-$, $\alpha \in \Delta_+$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Множество упорядоченных мономов $(\Omega, <)$ образует базис Пуанкаре–Биркгофа–Витта в янгиане $Y(\mathfrak{g})$.*

3.2. Докажем в этом пункте ПБВ-теорему для янгиана супералгебры Ли $A(m, n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Докажем сначала полноту $(\Omega, \prec)$. Опустив детали, приведем схему доказательства. Для монома M из $(\Omega, \prec)$ определим его длину $l(M)$ как число множителей – образующих, входящих в M . При переупорядочивании сомножителей в силу (3.1), (3.2) мы будем получать дополнительные слагаемые либо меньшей степени, либо той же степени и меньшей длины. Используя индукцию, получаем, что $Y(\mathfrak{g})$ совпадает с линейной оболочкой $(\Omega, \prec)$. Отметим, что здесь существенным образом используется соотношение (2.17) при переупорядочивании мономов, содержащих нечетные корневые образующие.

Докажем теперь линейную независимость мономов из $(\Omega, \prec)$. Это доказательство основано на существовании представления ρ янгиана $Y(\mathfrak{g})$, которое обладает тем свойством, что $\rho(x_{i,0}^+)$, $\rho(x_{i,0}^-)$, $\rho(h_{i,0})$ линейно независимы. Легко строится исходя из вида соотношений (2.8)–(2.17) представление ρ , обладающее тем свойством, что $\rho|_{U(\mathfrak{g})}$ – фундаментальное представление. Более того, можно показать, что существует гомоморфизм $\varphi: U(\mathfrak{g}) \rightarrow Y(\mathfrak{g})$, обладающий тем свойством, что $\varphi|_{U(\mathfrak{g})}$ – тождественное отображение. Если ρ_0 – представление $U(\mathfrak{g})$, обладающее тем свойством, что $\rho(x_{i,0}^+)$, $\rho(x_{i,0}^-)$, $\rho(h_{i,0})$ линейно независимы, то этим же свойством будет обладать и представление $\rho = \rho_0 \circ \varphi$ янгиана $Y(\mathfrak{g})$.

Предположим, что мономы из $(\Omega, \prec)$ не являются линейно независимыми. Тогда найдутся такие числа $c_1, \dots, c_s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и мономы $M_1, \dots, M_s \in (\Omega, \prec)$, что

$$\sum_{1 \leq j \leq s} c_j M_j = 0. \quad (3.3)$$

Покажем, что это предположение приводит к противоречию. При дальнейшем изложении нам потребуются автоморфизмы τ_α , $\alpha \in \mathbb{C}$ (см. [3], [4]). На образующих они определяются формулами

$$\tau_\alpha(h_{i,k}) = \sum_{0 \leq r \leq k} C_k^r a^{k-r} h_{i,r}, \quad \tau_\alpha(x_{i,k}^\pm) = \sum_{0 \leq r \leq k} C_k^r a^{k-r} x_{i,r}^\pm.$$

Нетрудно показать, что τ_α корректно определены. Пусть $\rho_0 = \rho \circ \varphi: Y(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{End } V$ – такое представление $Y(\mathfrak{g})$, что $\rho_0(x_{\alpha,0}^+)$, $\rho_0(x_{\alpha,0}^-)$, $\rho_0(h_{i,0})$ линейно независимы. Пусть L – максимальная из длин мономов $M_1, \dots, M_s$. Рассматривая тензорную степень представления ρ_0 , мы можем сконструировать представление $\rho: Y(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{End } V$ такое, что все мономы от $\rho(x_{\alpha,0}^\pm)$, $\rho(h_{i,0})$ при $l(M) \leq L$ линейно независимы. Определим представление $\tilde{\rho}: Y(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{End } \tilde{V} := \text{End } V \otimes \mathbb{C}[a]$ формулой

$$\tilde{\rho}(x)(a) = (\rho \circ \tau_\alpha)(x), \quad x \in Y(\mathfrak{g}).$$

Применяя $\tilde{\rho}$ к обеим частям (3.3) и выбирая в (3.3) члены старшей степени, соответствующей a , видим, что (3.3) должно иметь место для некоторых одночленов такой же степени $d = d(M_j)$. Если

$$M_j = \prod_{\alpha \in \Delta_+} M_{j,\alpha}^+ \prod_{r=1}^n M_{j,r}^0 \prod_{\alpha \in \Delta_+} M_{j,\alpha}^-,$$

где

$$M_{j,\alpha}^{\pm} = \prod_{k \in \mathbb{Z}_+} (x_{\alpha,k}^{\pm})^{m^{\pm}(\alpha,k,j)}, \quad M_{j,r}^0 = \prod_{k \in \mathbb{Z}_+} h_{r,k}^{m^0(r,k,j)}$$

с конечным множеством ненулевых показателей. Легко проверить, что множества

$$m^{\pm}(\alpha, j) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} m^{\pm}(\alpha, k, j), \quad m^0(r, j) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} m^0(r, k, j)$$

не зависят от j . Поэтому можно считать, что множества $I_j^{\pm} = \{i \mid m^{\pm}(i, j) > 0\}$, $I_j^0 = \{i \mid m^0(i, j) > 0\}$ не зависят от j . Обозначим их через $I^{\pm}$, I^0 соответственно. Пусть $p = \text{card } I^+ + \text{card } I^- + \text{card } I^0$. Используя индукцию по p , покажем, что это предположение приводит к противоречию. Пусть $p = 1$. Тогда либо $M_j = M_{j,i}^0$, $M_j = M_{j,i}^+$, либо $M_j = M_{j,i}^-$. Пусть $M_j = \prod_{k \in \mathbb{Z}_+} h_{r,k}^{m^0(r,k,j)}$, обозначим через $d = d(M_j) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} m^0(r, k, j)k$ степень M_j и обозначим через $m = m^0(r, j)$ сумму степеней $\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} m^0(r, k, j)$, которая не зависит от j . Рассмотрим действие $Y(\mathfrak{g})$ на $(V \otimes C[a_1]) \otimes \dots \otimes (V \otimes C[a_m])$. Используя определение коумножения автоморфизмов τ_{α} и выбирая члены старшей степени, получаем

$$\sum_{1 \leq j \leq s} c_j \prod_{k \in \mathbb{Z}_+} (ha_1^k \otimes 1^{\otimes(m-1)} + 1 \otimes ha_2^k \otimes 1^{\otimes(m-2)} + \dots + 1^{\otimes(m-1)} \otimes ha_m^k)^{m_{kj}} = 0,$$

где $h = \rho(h_{r0})$, $m_{k,j} = m^0(r, k, j)$. Переставляя круглые скобки, соберем члены в форме $f(a_1, \dots, a_m)h^{\otimes m}$, где f – моном от $a_1, \dots, a_m$. Из этих членов выберем члены с наибольшей степенью по переменной a_1 ; из отобранных членов выберем члены с наибольшей степенью по переменной a_2 и т. д. В конце концов получим член, в котором степени $\{m(r, k, j) \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$, $1 \leq j \leq s$, взаимно различны. Следовательно, равенство (3.3), с которого мы начали рассуждения, не может иметь места.

Предположим теперь, что линейная независимость доказана для всех мономов при $p \leq l$, где $l \geq 1$, и имеет место равенство (3.3) при $c_j \neq 0$ и $p(M_j) = l+1$. Применяя Δ к (3.3), переставим круглые скобки и выберем члены старшей степени. После чего, предполагая, что нашлось такое i , что $M_{j,i}^+ = I$ (другие случаи рассматриваются аналогично), мы выберем все члены в форме

$$\sum_{1 \leq j \leq s} c_j M_{j,i}^+ \otimes \prod_{\substack{r \neq i \\ 1 \leq r \leq N}} M_{j,r}^+ \prod_{1 \leq q \leq N} M_{q,r}^0 \prod_{1 \leq r \leq N} M_{j,r}^-.$$

Обозначая правые тензорные сомножители через $N_{j,i}$, получим

$$\sum_{1 \leq j \leq s} c_j M_{j,i}^+ \otimes N_{j,i} = 0. \quad (3.4)$$

Поскольку $M_1, \dots, M_s$ взаимно различны, то таковы либо $M_{1,i}^+, \dots, M_{s,i}^+$, либо $N_{1,i}, \dots, N_{s,i}$. Однако $p(M_{1,i}^+) = \dots = p(M_{s,i}^+) = 1 \leq p$ и $p(N_{1,i}) = \dots = p(N_{s,i}) = p$, следовательно, согласно индукционному предположению из (3.4) следует, что $c_1 = \dots = c_s = 0$. Теорема доказана.

§ 4. Представления янгиана супералгебры Ли типа $A(m, n)$

4.1. Напомним основные определения из теории представлений янгианов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Пусть V – модуль над янгианом $Y(\mathfrak{g})$ супералгебры Ли $\mathfrak{g} = A(m, n)$, $\bar{d} = \{d_{i,r} \mid i \in I, r \in \mathbb{Z}_+\}$ – набор комплексных чисел. Будем обозначать через $V_{\bar{d}}$ и называть *весовым подпространством модуля V* подпространство

$$V_{\bar{d}} = \{v \in V : h_{i,r}v = d_{i,r}v\}. \quad (4.1)$$

При этом $\bar{d} = \{d_{i,r}\}$ мы будем называть *весом янгианного модуля*.

Мы хотим описать структуру конечномерных модулей над янгианом $Y(\mathfrak{g})$, а также сформулировать необходимые и достаточные условия того, что неприводимый модуль является конечномерным.

Будем называть вектор $v \in V$ *примитивным*, если $v \in V_{\bar{d}}$ и $x_{i,r}^{\pm}v = 0$ для всех $i \in I, r \in \mathbb{Z}_+$. Будем также называть модуль V *модулем со старшим весом*, если он порождается примитивным вектором, т. е. $V = Y(A(m, n))v$ для некоторого примитивного вектора $v \in V_{\bar{d}}$.

Покажем сначала, что каждое конечномерное представление янгиана супералгебры Ли типа $Y(\mathfrak{g})$ обладает старшим вектором.

Отметим, что каждый модуль со старшим весом может быть построен как фактор *модуля Верма*. Модуль Верма $M(\bar{d})$ может быть сконструирован обычным образом как фактормодуль янгиана $Y(\mathfrak{g})$ по идеалу, порожденному векторами $x_{i,r}^+$ и векторами $h_{i,k} - d_{i,k}$. Роль старшего вектора играет единица янгиана. Ввиду вложения $U(\mathfrak{g}) \subset Y(\mathfrak{g})$ каждый $Y(\mathfrak{g})$ -модуль можно рассматривать как $U(\mathfrak{g})$ -модуль. Рассмотрим вес $\sum_i \lambda_i h_{i,0}$, где λ_i – фундаментальные веса супералгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда весовое подпространство янгианного модуля Верма с таким весом одномерно. Отсюда вытекает, что модуль Верма имеет единственный неприводимый фактормодуль, обозначаемый $V(\bar{d}) = M(\bar{d})/N(\bar{d})$, где $N(\bar{d})$ – максимальный подмодуль модуля $M(\bar{d})$. Пусть $\pi: M(\bar{d}) \rightarrow V(\bar{d})$ – каноническая проекция.

Мы будем использовать фильтрацию (см. § 3) на янгиане супералгебры Ли $Y(\mathfrak{g})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Каждое конечномерное неприводимое представление V янгиана $Y(\mathfrak{g})$ (неприводимый $Y(\mathfrak{g})$ -модуль) содержит единственный (с точностью до скалярного множителя) старший вектор v .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на следующей лемме. Пусть $V_0 = \{v \in V \mid x_{i,k}^+v = 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+\}$.

ЛЕММА 4.1. *Имеют место следующие утверждения:*

- 1) $h_{i,k}V_0 \subset V_0$;
- 2) $V_0 \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $v \in V_0$. Тогда

$$x_{i,k}^+h_{j,l}v = h_{j,l}x_{i,k}^+v + [h_{i,l+1}, x_{i,k-1}^+]v + \frac{1}{2}(h_{i,k}x_{i,l}^+ + x_{i,l}^+h_{i,k})v.$$

Переставляя образующие $x_{i,s}^+$ и $h_{j,r}$ при помощи коммутационных соотношений (определяющих соотношений янгиана), получим, что $x_{i,k}^+ h_{j,l} v = 0$. Другими словами, $h_{j,l} v \in V_0$ для $v \in V_0$, т. е. $h_{j,l} V_0 \subset V_0$.

2) Пусть $v' \in V_0$. Действуем на вектор v' элементами ПБВ-базиса. Рассмотрим сначала случай $m = n = 1$, т. е. случай $Y(\mathfrak{sl}(1,1))$, а потом общий случай. В случае $Y(\mathfrak{sl}(1,1))$ обязательно найдется такое m , что $(x_0^+)^m v' \neq 0$, $(x_0^+)^{m+1} v' = 0$. Пусть $v_2 = (x_0^+)^m v'$. Действуем элементами ПБВ-базиса в соответствии с выбранным порядком на этом базисе. Ясно, что найдется такое r , что $v_r = (x_r^+)^{p_r} \cdots (x_0^+)^{p_0} v \neq 0$, но $x_t^+ v_r = 0$ для любого $t \in \mathbb{Z}_+$. Очевидно, что $v_r \in V_0$. Поэтому $V_0 \neq \{0\}$.

Рассмотрим теперь общий случай $Y(A(m,n))$ и линейный порядок на векторах ПБВ-базиса, лежащих в Y_+ . Обозначим векторы этого базиса через $\{x^+(j)\}_{j=0}^\infty$, причем $x^+(j) \prec x^+(l)$ при $j < l$. Найдется такое натуральное число $m \in \mathbb{Z}_+$, что $x^+(m)v' \neq 0$, но $x^+(m+1)v' = 0$ для $v' \in V_0$.

ЛЕММА 4.2. *Представление V_0 одномерно, т. е. любые два вектора из V_0 пропорциональны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v', v'' \in V_0$, $v' \neq v''$. Тогда, действуя на каждый из этих векторов янгианом $Y(A(m,n))$, получаем два подмодуля $Y(A(m,n))v'$ и $Y(A(m,n))v''$ модуля V . Последнее противоречит неприводимости модуля V в случае, когда векторы v', v'' непропорциональны. Лемма доказана.

Легко видеть, что предложение 4.1 вытекает из лемм 4.1, 4.2.

Введем теперь класс модулей со старшим весом – аналоги модулей Верма. Пусть $V_0 = Cv_+^\Lambda$ – одномерное векторное пространство, Y_0^+ – подсупералгебра янгиана $Y(A(m,n))$, порожденная образующими $x_{i,k}^+$, $i \in \{1, 2, \dots, m+n+1\}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $Y_0^0 = \langle h_{i,k} \mid i \in I, k \in \mathbb{Z}_+ \rangle$ – линейная оболочка образующих $\{h_{i,k} \mid i \in I, k \in \mathbb{Z}_+\}$; $Y^+ = Y_0^+ \cdot Y_0^0$. Пусть также $h_{i,k} v_+^\Lambda = d_{i,k} v_+^\Lambda$, $Y_0^+ v_+^\Lambda = 0$. (Наряду с обозначением $\bar{d}$ мы будем также использовать обозначение $\Lambda = \bar{d}$, чтобы отметить аналогию со старшими весами модулей супералгебр Ли, кроме того, будем использовать для старшего вектора обозначение $v_+ = v_+^\Lambda$.) Тогда V_0 превращается в одномерный $Y(A(m,n))$ -модуль. Определим свободный модуль M_Λ со старшим весом Λ формулой

$$M_\Lambda = Y(\mathfrak{g}) \otimes_{Y^+} v_+^\Lambda. \quad (4.2)$$

Очевидно, что как векторное пространство модуль M_Λ изоморфен $Y_0^- \otimes v_+^\Lambda$: $M_\Lambda \cong Y_0^- \otimes v_+^\Lambda$. Будем для краткости записывать $x_{i,k}^- v_+^\Lambda$ вместо $x_{i,k}^- \otimes v_+^\Lambda$. Ясно, что модуль M_Λ бесконечномерен. Используя стандартные рассуждения, покажем, что модуль M_Λ содержит максимальный подмодуль N_Λ . Тогда $V_\Lambda = M_\Lambda / N_\Lambda$ – неприводимый модуль со старшим весом Λ . Используя стандартные методы теории представлений, покажем, что любые два модуля с одинаковым старшим весом изоморфны (ср., например, с [24]). Имен-но, пусть $V_1(\Lambda), V_2(\Lambda)$ – два неприводимых модуля с одинаковым старшим весом $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=0}^\infty$, а u_+^Λ, w_+^Λ – их старшие векторы соответственно. Пусть

$W = V_1(\Lambda) \oplus V_2(\Lambda)$, $v_+^\Lambda = (u_+^\Lambda, w_+^\Lambda)$ – старший вектор некоторого подмодуля $V(\Lambda)$ со старшим весом Λ , порожденного в W вектором v_+^Λ под действием $Y(A(m, n))$. Определим проекции $P_i: V(\Lambda) \rightarrow V_i(\Lambda)$, $i = 1, 2$: $P_1(v_1, v_2) = (v_1, 0)$, $P_2(v_1, v_2) = (0, v_2)$, $v_i \in V_i(\Lambda)$. Легко проверить, что P_i – гомоморфизмы модулей и, кроме того, $P_1(v_+^\Lambda) = u_+^\Lambda$, $P_2(v_+^\Lambda) = w_+^\Lambda$. Из неприводимости модулей $V_i(\Lambda)$ вытекает, что $\text{Im } P_i = V_i(\Lambda)$. Заметим также, что $\text{Ker } P_1$ – подмодуль $V_2(\Lambda)$, а $\text{Ker } P_2$ – подмодуль $V_1(\Lambda)$. Поэтому $\text{Ker } P_1 = \{0\}$, $\text{Ker } P_2 = \{0\}$ (либо $\text{Ker } P_1 = V_2(\Lambda)$, $\text{Ker } P_2 = V_1(\Lambda)$). Последнее невозможно, поскольку $(0, w_+^\Lambda), (u_+^\Lambda, 0) \notin W$. Таким образом, P_i , $i = 1, 2$, – изоморфизмы модулей. Следовательно, $V(\Lambda) \cong V_1(\Lambda) \cong V_2(\Lambda)$.

Итак, нами доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.1. *Для любого старшего веса $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=0}^\infty$ существует единственный неприводимый $Y(\mathfrak{g})$ -модуль $V(\Lambda)$ со старшим весом Λ .*

4.2. Зададим на модуле $M(\bar{d})$ следующие две фильтрации. Поскольку модуль $M(\bar{d})$ как векторное пространство естественно изоморфен $Y(\mathfrak{g})_-$, зададим сначала эти фильтрации на $Y(\mathfrak{g})_-$, а потом, используя этот естественный изоморфизм, перенесем их на $M(\bar{d})$. Данные фильтрации определяются заданием степеней, являющихся сужением степеней d_1, d_2 соответственно. Пусть $(Y(\mathfrak{g})_-)_k$ (соответственно, $(Y(\mathfrak{g})_-)^k$) – линейная оболочка мономов степени не выше k . Степень монома будем считать равной сумме степеней образующих, произведением которых он является. Степень образующей в первом случае положим равной значению ее второго индекса, а во втором случае положим равной на единицу больше значения ее второго индекса. Пусть $Y(\mathfrak{g})_k = \{x \in Y(\mathfrak{g}) : d_1(x) \leq k\}$, а $Y(\mathfrak{g})^k = \{x \in Y(\mathfrak{g}) : d_2(x) \leq k\}$. Рассмотрим сужения этих фильтраций на $Y(\mathfrak{g})_-$. Таким образом, получаем две фильтрации на $(Y(\mathfrak{g})_-)^k$:

$$C \subset (Y(\mathfrak{g})_-)_0 \subset (Y(\mathfrak{g})_-)_1 \subset \cdots \subset (Y(\mathfrak{g})_-)_k \subset \cdots, \quad (4.3)$$

$$\{0\} \subset C \subset (Y(\mathfrak{g})_-)^0 \subset (Y(\mathfrak{g})_-)^1 \subset \cdots \subset (Y(\mathfrak{g})_-)^k \subset \cdots. \quad (4.4)$$

Пусть $M(\bar{d})_k = (Y(\mathfrak{g})_-)_k v^{\bar{d}}$ (соответственно, $M(\bar{d})^k = (Y(\mathfrak{g})_-)^k v^{\bar{d}}$). Поскольку неприводимый модуль $V(\bar{d})$ является фактормодулем модуля Верма $M(\bar{d})_k$, фильтрации (4.3), (4.4) задают фильтрации и на неприводимом модуле $V(\bar{d})$. Отметим, что эти фильтрации различны по своим свойствам. Фильтрующее пространство первой фильтрации с индексом k содержит все фильтрующие пространства второй фильтрации с индексами по меньшей мере до порядка $k+1$ включительно.

Опишем теперь условия конечномерности неприводимого модуля со старшим весом.

Обозначим через $\bar{B}_{m+1,t}$, $\bar{B}_{i,k}$, $i \in I \setminus \{m+1\}$, линейные оболочки следующих векторов:

$$\begin{aligned} \bar{B}_{m+1,s} &:= \langle x_{m+1,k_1}^- \cdots x_{m+1,k_r}^- v_+ \mid (k_1+1) + \cdots + (k_r+1) \leq s \rangle, \\ \bar{B}_{i,s} &:= \langle (x_{i,k_1}^-)^{t_1} \cdots (x_{i,k_r}^-)^{t_r} v_+ \mid t_1(k_1+1) + \cdots + t_r(k_r+1) \leq s \rangle, \\ &i \in I \setminus \{m+1\}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 4.3. Если $\overline{B}_{m+1,p} = \overline{B}_{m+1,p+1}$, то $\overline{B}_{m+1,p} = \overline{B}_{m+1,p+k}$ для произвольного $k \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \in \overline{B}_{m+1,p}$. Покажем сначала, что любой вектор из $\overline{B}_{m+1,p+k}$ можно представить как образ $\overline{B}_{m+1,p}$ при действии картановской подалгебры $\mathfrak{h} = \langle h_{m+1,k}, h_{m+2,k} \mid k \in \mathbb{Z}_+ \rangle$, именно $\overline{B}_{m+1,p+k} \subset \mathfrak{h}\overline{B}_{m+1,p}$. При $k = 1$ этот факт вытекает из условия леммы. Пусть теперь $k = 2$. Нам потребуется следующее соотношение:

$$\begin{aligned} h_{i,1}x_{j,n}^-v_+ &= x_{j,n}^-h_{i,1}v_+ + [h_{i,1}, x_{j,n}^-]v_+ = x_{j,n}^-h_{i,1}v_+ + [h_{i,0}, x_{j,n+1}^-]v_+ \\ &+ \frac{a_{ij}}{2}(h_{i,0}x_{j,n}^- + x_{j,n}^-h_{i,0})v_+ = d_{i,1}x_{j,n}^-v_+ + a_{ij}x_{j,n+1}^-v_+ \\ &+ \frac{a_{ij}}{2}(h_{i,0}x_{j,n}^- + x_{j,n}^-h_{i,0})v_+ \\ &= a_{ij}x_{j,n+1}^-v_+ + \left(d_{i,1} + \frac{a_{ij}}{2}(a_{ij} + 2d_{i,0})\right)x_{j,n}^-v_+. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Используя соотношение (4.5), докажем лемму. Пусть $a \in \overline{B}_{m+1,p+2}$; тогда $a = \sum_{s=1}^r x_{i_s, k_s}^- b_s v_+$. Представим элемент a в виде

$$a = \sum_{s=1}^r a_{i_s-1, i_s}^{-1} [h_{i_s-1, 1}, x_{i_s, k_s-1}^-] b_s v_+. \quad (4.6)$$

Используя несколько раз соотношение (4.5), можно представить элемент a в виде суммы элементов из $\overline{B}_{m+1,p+1}$ и произведения $x_{m+1,1}^-$ и элемента из $\overline{B}_{m+1,p+1}$. Поскольку каждый элемент из $\overline{B}_{m+1,p+1}$ содержится в $\overline{B}_{m+1,p}$, получаем, что $a \in \overline{B}_{m+1,p+1}$, и, следовательно, в силу условия леммы $a \in \overline{B}_{m+1,p}$. Лемма доказана.

Пусть теперь $x^-(s) = x_{1,k_1}^- \cdots x_{1,k_r}^-$, $k_1 + \cdots + k_r = s$, $k_r < \cdots < k_1$. Следующая лемма по существу эквивалентна лемме 4.3, но мы докажем ее независимо.

ЛЕММА 4.4. Если $x^-(p+1)v_+ \in \overline{B}_{m+1,p}$, то $x^-(p+k+1)v_+ \in \overline{B}_{m+1,p}$ для произвольного $k \in \mathbb{Z}_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проведем по индукции, используя картановские образующие $h_{i,1}$, $h_{i,2}$, $i \in I$. Индукцию проведем по k . При $k = 1$ утверждение является следствием условия леммы. Предположим, что утверждение справедливо при $k = m$; докажем его справедливость при $k = r + 1$. Идея доказательства основана на том, что мы покажем:

1) картановские образующие переводят векторное пространство $\overline{B}_{1,p+r}$ в себя;

2) каждый моном ПВБ-базиса указанного в формулировке вида, лежащий в $\overline{B}_{m+1,p+r+1}$, может быть получен как линейная комбинация образов мономов ПВБ-базиса указанного в формулировке теоремы 3.1 вида при действии картановских образующих $h_{i,1}$, $h_{i,2}$, $i \in I$, а также элементов ПВБ-базиса, уже лежащих в $\overline{B}_{m+1,p+r}$.

Отметим, что из 1), 2) легко вытекает доказываемое утверждение. Действительно, каждый моном из $\overline{B}_{m+1,p+r+1}$ указанного в теореме 3.1 вида может быть получен действием картановских образующих $h_{i,1}$, $h_{i,2}$ на мономы

ПБВ-базиса из $\overline{B}_{m+1,p+r}$ и комбинацией мономов из $\overline{B}_{m+1,p+r}$, и, следовательно, лежит в $\overline{B}_{m+1,p+r}$. Однако по индукционному предположению мономы из $\overline{B}_{m+1,p+r}$ могут быть представлены в виде линейных комбинаций мономов из $\overline{B}_{m+1,p}$. Поэтому достаточно доказать пп. 1), 2), которые проверяются по индукции с использованием коммутационных соотношений в янгиане.

Пусть сначала $p = 1$. Тогда получаем, что $x^-(1) \in B_{m+1,1}$. Следовательно, $x^-(1) = \sum_{k=0}^m \alpha_{0,k} x_0^-(\bar{k})$. Найдем коммутатор левой и правой частей с элементом $h_{m+2,1}$. При этом степени мономов увеличатся на 1, число этих мономов также, вообще говоря, увеличится. Сумма этих мономов является линейной комбинацией мономов меньших степеней (степени $p + k$), каждый из которых по индукционному предположению также является линейной комбинацией мономов степени p . Лемма доказана.

ЛЕММА 4.5. 1) *Имеют место строгие вложения $B_{i,k} \subset B_{i,k+1}$ для любого $k < n_i, k \geq 0, i \in I$.*

2) *Имеем $B_{i,n_i} = B_{i,n_i+1} = \dots$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $i \in I \setminus \{m+1\}$ вытекает из результатов, относящихся к представлениям янгиана $Y(\mathfrak{sl}(2))$ (см. [19], [6]). Утверждение 1) следует по существу из определений. Утверждение 2) вытекает из леммы 4.4 в случае $i = m+1$.

4.3. Сформулируем и докажем основной результат настоящей работы.

ТЕОРЕМА 4.2. 1) *Каждый неприводимый конечномерный $Y(A(m, n))$ -модуль V является модулем со старшим весом d , т.е. $V = V(d)$.*

2) *Модуль $V(d)$ конечномерен тогда и только тогда, когда существуют многочлены $P_i^d, i \in \{1, 2, \dots, m, m+2, \dots, m+n+1\} = I \setminus \{m+1\}$, а также многочлены P_{m+1}^d, Q_{m+1}^d , удовлетворяющие следующим условиям:*

- а) *все эти многочлены имеют старшие коэффициенты, равные 1;*
- б) *выполнены соотношения*

$$\frac{P_i^d(u + a_{ii}/2)}{P_i^d(u)} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} d_{i,k} u^{-k-1}, \quad i \in I \setminus \{m+1\}, \quad (4.7)$$

$$\frac{P_{m+1}^d(u)}{Q_{m+1}^d(u)} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} d_{m+1,k} u^{-k-1}, \quad (4.8)$$

где a_{ii} – матричный элемент симметрической матрицы Картана супералгебры Ли $A(m-1, n-1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) уже доказано. Выведем утверждение 2) из доказанных выше лемм. Покажем сначала необходимость, т.е., предполагая, что модуль $V(d)$ конечномерен, покажем, что существуют упомянутые в условии теоремы многочлены, удовлетворяющие условиям а), б).

По существу, мы рассмотрим сначала частный случай, когда супералгебра $\mathfrak{g} = A(m, n)$ совпадает с $A(0, 1)$. Точнее, рассмотрим вложение $A(0, 1) \rightarrow$

$A(m, n)$, индуцированное вложением корней $\alpha_1 \rightarrow \alpha_{m+1}$, $\alpha_2 \rightarrow \alpha_{m+2}$. Это вложение индуцирует вложение супералгебр Хопфа $Y(A(0, 1)) \rightarrow Y(A(m, n))$, задаваемое вложением корневых образующих, которое, в свою очередь, определяется вложением корней. Первая часть доказательства, на самом деле, будет относиться к частному случаю неприводимого представления янгиана $Y(A(0, 1))$ с весом $\bar{d}(u) = (d_{m+1}(u), d_{m+2}(u))$. Далее мы сведем общий случай к рассмотренному частному случаю.

Пусть, как и выше, $x_i^-(u) = \sum_{k=0}^{\infty} x_{i,k}^- u^{-k-1}$, $i \in I$. Из лемм 4.4, 4.5 вытекает, что $x_i^-(u)v_+ = \sum_{s=0}^N \beta_s^i(u)v_{i,s}$, где $\{v_{i,s}\}$ образуют базис в $\bar{B}_{i,N}$, $i \in I$. Далее мы получим явный вид для $\beta_s^i(u)$. Для краткости будем записывать $\beta_s(u)$ вместо $\beta_s^{m+2}(u)$. Отметим, что все результаты, относящиеся к четным корневым образующим, можно получить, рассматривая вложения $\mathfrak{sl}(2)$ -троек. Эти результаты хорошо известны, поскольку могут быть сведены к результатам, относящимся к описанию неприводимых представлений янгиана алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$ и полученным впервые в [6] (см. также [4], [7], [19], [27]). Поэтому мы остановимся на доказательстве соотношения (4.8), относящегося к нечетной части янгиана $Y(A(m, n))$.

Нам потребуются соотношения (2.20) в следующем частном случае:

$$[h_{m+1}(u), x_{m+2}^-(t)] = \frac{1}{2(u-t)} (h_{m+1}(u)(x_{m+2}^-(t) - x_{m+2}^-(u)) + (x_{m+2}^-(t) - x_{m+2}^-(u))h_{m+1}(u)), \quad (4.9)$$

$$[h_{m+1}(u), x_{m+1}^-(t)] = 0. \quad (4.10)$$

Пусть $v_{i,k} = x_{i,k}^- v_+$. Тогда в силу леммы 4.4 имеет место следующее представление:

$$x_k^-(u)v_+ = \sum_{i=0}^N \beta_i^k(u)v_{k,i}. \quad (4.11)$$

Для краткости будем использовать обозначение

$$\beta_i(u) = \beta_i^{m+2}(u). \quad (4.12)$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} x_{m+2,k}^- u^{-k-1} v_+ &= \sum_{k=0}^N x_{m+2,k}^- u^{-k-1} v_+ + \sum_{k=N+1}^{\infty} x_{m+2,k}^- u^{-k-1} v_+ \\ &= \sum_{k=0}^N x_{m+2,k}^- u^{-k-1} v_+ + \sum_{k=0}^N u^{-N-1} \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_k^i u^{-i-1} v_{m+2,k}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\varphi_k(u) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_k^i u^{-i-1}, \quad (4.13)$$

$$\tilde{\varphi}_k(u) = u^{-k-1} + \varphi_k(u). \quad (4.14)$$

Перепишем соотношение (4.11) в следующей форме:

$$x_{m+2}^-(u)v_+ = \sum_{i=0}^N \beta_i(u)v_{m+2,i} = \sum_{i=0}^N (u^{-i-1} + u^{-N-1}\varphi_i(u)v_{m+2,i}). \quad (4.15)$$

Тогда из равенства (4.15) следует, что

$$x_{m+2,N+k+1}^- v_+ = \sum_{i=0}^k \varphi_i^k x_{m+2,i}^- v_+. \quad (4.16)$$

Поддействуем на левую и правую части равенства (4.16) элементом $h_{m+1,1}$. Приравнявая коэффициенты при одинаковых линейно независимых векторах, получаем соотношения

$$\varphi_k^{i+1} = \varphi_{k-1}^i + \varphi_N^i \varphi_k^0, \quad (4.17)$$

$$\varphi_0^{k+1} = 0. \quad (4.18)$$

Введем следующие обозначения. Пусть

$$\delta_i(u) = 1 + u^{i-N}\varphi_i(u), \quad (4.19)$$

$$\bar{d}_i(u) = \sum_{k=0}^{\infty} d_{i,k} u^{-k-1}, \quad i \in \{1, \dots, n+m+1\}. \quad (4.20)$$

Отметим, что соотношения (4.17), (4.18) можно легко переписать, используя производящие функции, однако эта явная формула нам здесь не потребуется.

Легко видеть, что из соотношений (4.17), (4.18), учитывая (4.19), получим равенство

$$\delta_i(u) = \delta_N(u) \left(1 - \sum_{j=i}^N \varphi_j^0 u^{j-N-1} \right). \quad (4.21)$$

Пусть

$$\beta_i(u) = u^{-i-1} \delta_i(u), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.22)$$

Тогда нетрудно показать, что для некоторых матриц $A^k(u) = (A_{ij}^k)_{i,j=0}^N(u) \in M_{N+1}(\mathbb{C}[[u^{-1}]])$, $k, r = m+1, m+2$, имеет место равенство

$$h_r(u)x_k^-(t)v_+ = \sum_{0 \leq i, j \leq N} A_{ij}^r(u)\beta_j^r(t)v_{k,i}. \quad (4.23)$$

Рассматривая совместно соотношения (4.23) и (4.9), (4.10), получаем соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq i, j \leq N} A_{ij}^{m+1}(u)\beta_j(t)v_{m+2,i} &= x_{m+2}^-(t)\bar{d}_{m+1}(u)v_+ \\ &+ \frac{1}{2(u-t)}(h_{m+1}(u)(x_{m+2}^-(t) - x_{m+2}^-(u)) + (x_{m+2}^-(t) - x_{m+2}^-(u))h_{m+1}(u))v_+, \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\sum_{0 \leq i, j \leq N} A_{ij}^{m+1}(u)\beta_j(t)v_{m+1,i} = x_{m+1}^-(t)\bar{d}_{m+1}(u)v_+, \quad (4.25)$$

которые в силу (4.11) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq i, j \leq N} A_{ij}^{m+1}(u) \beta_j(t) v_{m+2,i} &= \bar{d}_{m+1}(u) \left(\sum_{i=0}^N \beta_i(u) v_{m+2,i} \right) \\ &+ \frac{1}{2(u-t)} \left(\bar{d}_{m+1}(u) \left(\sum_{i=0}^N (\beta_i(t) - \beta_i(u)) v_{m+2,i} \right) \right. \\ &\left. + \sum_{0 \leq i, j \leq N} A_{ij}^{m+1}(u) (\beta_j(t) - \beta_j(u)) v_{m+2,i} \right), \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\sum_{0 \leq i, j \leq N} A_{ij}^{m+1}(u) \beta_j(t) v_{m+1,i} = \bar{d}_{m+1}(u) \left(\sum_{i=0}^N \beta_i(t) v_{m+1,i} \right). \quad (4.27)$$

Отметим, что соотношения (4.26), (4.27) можно переписать как линейные рекуррентные соотношения. Приравнявая коэффициенты при линейно независимых векторах $v_{m+2,i}$, получаем, что из соотношений (4.27) вытекает следующее равенство:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^N A_{ij}^{m+1}(u) \left(\beta_j(t) - \frac{1}{2(u-t)} (\beta_j(t) - \beta_j(u)) \right) v_{m+2,i} \\ = \bar{d}_{m+1}(u) \left(\beta_i(u) v_{m+2,i} + \frac{1}{2(u-t)} (\beta_i(t) - \beta_i(u)) \right) v_{m+2,i}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Отметим следующий легко проверяемый факт. Можно подобрать множество констант $u_0, \mu_0, \dots, \mu_N$ таких, что сумма $\sum_{i=0}^N \mu_i \beta_i(u_0)$ отлична от нуля. Положим $u = u_0$ в равенстве (4.28) и умножим это равенство на μ_i . Складывая полученные равенства (для $0 \leq i \leq N$), мы приходим к равенству, из которого можно явно выразить $\bar{d}_{m+1}(u)$. Именно, мы получаем, что выполняется равенство

$$\bar{d}_{m+1}(u) = \frac{\sum_{i=0}^N (a_i u + b_i) \beta_i(u)}{\sum_{j=0}^N (c_j u + d_j) \beta_j(u)} \quad (4.29)$$

для некоторых постоянных $a_i, b_i, c_i, d_i, i = 0, \dots, N$.

Из соотношения (4.29) в силу равенств (4.21), (4.22) вытекает доказываемое равенство (4.8).

Аналогично проведенным выше рассуждениям можно доказать, что и соотношение (4.7) выводится из соотношений вида (4.24) для других значений индекса k , соответствующих другим простым (четным) корням супералгебры Ли $A(m, n)$. Однако, как отмечено выше, соотношение (4.7) следует по существу из результатов работ [6], [27].

Теперь утверждение теоремы получается при использовании стандартных рассуждений в силу того факта, что вложения супералгебр $\mathfrak{sl}(1, 2)$ и $\mathfrak{sl}(2)$ являются морфизмами супералгебр Хопфа. Таким образом, необходимость доказана.

Достаточность также легко выводится из полученных формул фактически обращением проведенных рассуждений. Действительно, пусть $\bar{d}_{m+1}(u)$ удовлетворяет соотношениям (4.7), (4.8). Покажем, что простой модуль $V(d)$ конечномерен. Используя теорему 3.1, получим оценку размерности этого модуля. Будем действовать на старший вектор v_+ мономами вида $x^-(n) = x_{1,k_1}^- \cdots x_{1,k_r}^-$, $k_1 + \cdots + k_r = n$, $k_r < \cdots < k_1$. Пусть в силу (4.8) формальный ряд $\bar{d}_{m+1}(u)$ является отношением двух многочленов. Покажем, что в силу коммутационных соотношений лишь конечное число векторов вида $x^-(n)v_+$ будут линейно независимы. Мы получим несколько больше, а именно покажем, что размерность модуля $V(\bar{d})$ ограничена сверху числом 2^N , $N = n_1 + \cdots + n_k$, а $n_i = \deg(P_i(u))$ – степени многочленов, задающих старший вес. Пусть

$$\bar{d}_{m+1}(u) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} d_{m+1,k} u^{-k-1},$$

причем $\bar{d}_{m+1}(u) = \frac{P_{m+1}^d(u)}{Q_{m+1}^d(u)}$, а многочлены, стоящие в числителе и знаменателе, не имеют общих множителей. Построим неприводимый $Y(\mathfrak{sl}(1, 1))$ -модуль $V(\bar{d})$ со старшим весом $\bar{d}(u)$. Покажем, что его размерность ограничена сверху числом 2^N , где $N = n_{d+1} = \deg(P_{m+1}(u)) = \deg(Q_{m+1}(u))$. Рассмотрим линейную оболочку

$$M_1 = \langle \{v_+; x^-(r_1) \cdots x^-(r_s)v_+ \mid 1 \leq r_s \leq \cdots \leq r_1 \leq N\} \rangle. \quad (4.30)$$

Покажем, что

$$V(\bar{d}) \subseteq M_1. \quad (4.31)$$

Достаточно показать, что

$$x_k^+(u)x^-(n) = 0 \quad \forall n > N. \quad (4.32)$$

Заметим, что (4.32) вытекает из следующего коммутационного соотношения в янгиане, являющегося следствием соотношений (2.9), (4.8):

$$\begin{aligned} [x_k^+(u), x_{m+1}^-(v)]v_+ &= \delta_{k,m+1} \frac{h_{m+1}(u) - h_{m+1}(v)}{u - v} v_+ \\ &= \delta_{k,m+1} \frac{P_{m+1}(u)Q_{m+1}(v) - P_{m+1}(v)Q_{m+1}(u)}{Q_{m+1}(u)Q_{m+1}(v)(u - v)} v_+. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Аналогично показывается, что размерности соответствующих $Y(\mathfrak{sl}(2))$ -модулей $V(d_k)$ со старшим весом $d_k(u)$ ограничены числами 2^{n_k} , где $n_k = \deg(P_k(u))$ – степень многочлена $P_k(u)$. Поскольку вложения янгианов $Y(\mathfrak{sl}(2))$, $Y(\mathfrak{sl}(1, 1))$ в янгиан $Y(A(m, n))$ являются морфизмами супералгебр Хопфа, они индуцируют структуру $Y(A(m, n))$ -модуля на каждом из модулей $V(d_k)$, а также на их тензорном произведении $V(d_1) \otimes \cdots \otimes V(d_{m+n})$. Несложно проверяется, что $V(\bar{d}) \subseteq V(d_1) \otimes \cdots \otimes V(d_{m+n})$ является подмодулем тензорного произведения модулей. Отсюда следуют конечномерность модуля $V(\bar{d})$ и оценка его размерности. Достаточность доказана, и теорема доказана.

4.4. В этом пункте мы выведем теорему 4.3 о классификации неприводимых конечномерных представлений янгиана $Y(A(m, n))$ из результатов работы [14], используя результаты работы [15]. Кратко опишем схему доказательства. Для удобства читателя приведем необходимые результаты из работ [13]–[15].

Напомним (см. [14]), что представление $V(\mu)$ янгиана $Y(\mathfrak{gl}(m, n))$ называется представлением со старшим весом $\mu(x) = (\mu_1(x), \dots, \mu_{m+n}(x))$, $\mu_i(x) = (-1)^{|i|} + \sum_{k>0} \mu_{i,k} x^{-k}$, если найдется такой вектор v_+ (называемый *старшим вектором*), что

$$t_{ij}^{(k)} v_+ = 0, \quad 1 \leq j < i \leq m+n, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (4.34)$$

$$t_{ii}^{(k)} v_+ = \mu_{i,k} v_+, \quad 1 \leq i \leq m+n, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (4.35)$$

Отметим, что условия (4.34), (4.35) иногда удобно переписать как условие для действия производящих функций образующих $t_{ij}(x) = \delta_{ij} + \sum_{k>0} t_{ij}^{(k)} u^{-k-1}$ в следующей форме:

$$\begin{aligned} t_{ij}(x) v_+ &= 0, & 1 \leq j < i \leq m+n, \\ t_{ii}(x) v_+ &= \mu_i(x) v_+, & 1 \leq i \leq m+n. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Здесь $\{t_{ij}^{(k)} : 1 \leq i, j \leq m+n, k \in \mathbb{N}\}$ – система образующих янгиана $Y(\mathfrak{gl}(m, n))$ полной линейной супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(m, n)$ (см. [14], [15]), удовлетворяющих следующей системе определяющих соотношений:

$$[t_{ij}^{(r)}, t_{kl}^{(s)}] = (-1)^{\bar{i}\bar{j} + \bar{i}\bar{k} + \bar{j}\bar{k}} \sum_{p=0}^{\min(r,s)-1} (t_{kj}^{(p)} t_{il}^{(r+s-1-p)} - t_{kj}^{(r+s-1-p)} t_{il}^{(p)}), \quad (4.37)$$

где $\bar{i}$ – четность индекса i , т. е. $\bar{i} = 0$ для $1 \leq i \leq m$ и $\bar{i} = 1$ для $m+1 \leq i \leq m+n$, а квадратные скобки обозначают суперкоммутатор.

Определим матрицу, матричные элементы которой – порождающие функции образующих:

$$T(u) = \sum_{i,j=1}^{m+n} t_{ij}(u) \otimes E_{ij}(-1)^{\bar{j}(\bar{i}+1)},$$

где E_{ij} – стандартная элементарная матрица (матричная единица).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2 [14]. Пусть L – представление янгиана $Y(\mathfrak{gl}(m, n))$ со старшим весом $\mu(u) = (\mu_1(u), \dots, \mu_{m+n+1}(u))$. Тогда каждый коэффициент квантового определителя $q \det(T(u))$ действует на L как умножение на скаляр, определенный формулой

$$q \det(T(u))|_L = \mu_1(u) \cdots \mu_{m+n+1}(u - m - n).$$

Следующий результат доказан В. О. Тарасовым.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3 (см. [6], [7], [20]). Неприводимое представление $L(\mu) = L(\mu_1(u), \mu_2(u))$ старшего веса μ янгиана $Y(\mathfrak{gl}(2))$ конечномерно тогда и только тогда, когда существует такой полином $P(u)$ от u со старшим коэффициентом 1, что

$$\frac{\mu_1(u)}{\mu_2(u)} = \frac{P(u+1)}{P(u)}. \quad (4.38)$$

Приведем также результат Жанга, описывающий неприводимые конечномерные представления янгиана $Y(\mathfrak{gl}(1, 1))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4 [13]. *Неприводимое представление $L(\mu) = L(\mu_1(u), \mu_2(u))$ старшего веса μ янгиана $Y(\mathfrak{gl}(1, 1))$ конечномерно тогда и только тогда, когда существуют взаимно простые многочлены от u^{-1} такие, что*

$$\frac{\mu_1(u)}{\mu_2(u)} = \frac{P_1(u)}{P_2(u)}, \quad (4.39)$$

где $P_i(u) = (-1)^{i+1} + o(u^{-1})$, $\mu_i(u) = (-1)^{\bar{i}} + \sum_{k>0} \mu_{i,k} u^{-k-1}$ – компоненты старшего веса представления $L(\mu_1(u), \mu_2(u))$, а $\bar{1} = 0$, $\bar{2} = 1$.

Соотношение (4.38) объясняет следующее обозначение, широко используемое в настоящее время (см. [20]). Для двух формальных рядов $\lambda(u)$, $\mu(u)$ по u^{-1} записывают

$$\lambda(u) \rightarrow \mu(u), \quad (4.40)$$

если существует такой полином $P(u)$ от u со старшим коэффициентом 1, что выполняется соотношение (4.38) для $\mu_1(u) = \lambda(u)$, $\mu_2(u) = \mu(u)$.

Справедлив следующий результат Р. Б. Жанга.

ТЕОРЕМА 4.3 [14]. *Неприводимый $Y(\mathfrak{gl}(m, n))$ -модуль $V(\mu)$ со старшим весом μ конечномерен, если и только если его старший вес μ удовлетворяет следующим условиям:*

$$\frac{\mu_a(x)}{\mu_{a+1}(x)} = \frac{P_a(x + (-1)^{|a|})}{P_a(x)}, \quad \frac{\mu_m(x)}{\mu_{m+1}(x)} = \frac{\tilde{Q}_m(x)}{Q_m(x)}, \quad (4.41)$$

где $1 \leq a < n + m$, $a \neq m$, $\tilde{Q}_m(x) = \prod_{i=1}^{K_m} (1 + \frac{r_1^{(i)}}{x})$, $Q_m(x) = -\prod_{i=1}^{K_m} (1 + \frac{r_2^{(i)}}{x})$ – взаимно простые многочлены, $P_a(x) = \prod_{i=1}^{K_m} (x + p_a^{(i)})$, $1 \leq a < N + M$, $a \neq M$. Здесь $|a| = 0$ для $1 \leq a \leq m$ и $|a| = 1$ для $m < a < m + n$.

Другими словами, из теоремы 4.3 следует, что $\mu_i(u) \rightarrow \mu_{i+1}(u)$ для $1 \leq i < m$ и $\mu_i \circ s(u) \rightarrow \mu_{i+1} \circ s(u)$ для $m < i \leq m + n - 1$, где $s(u) = -u$ и $f \circ g$ обозначает композицию функций f и g .

Напомним также результат из [15] об изоморфизме между двумя реализациями янгиана супералгебры $A(m, n)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5 [15, предложение 9.1]. *Пусть $Z_{m|n}$ – центр янгиана $Y(\mathfrak{gl}(m, n))$. Тогда для $m \neq n$ имеет место изоморфизм*

$$Y(\mathfrak{gl}(m, n)) \cong Z_{m|n} \otimes Y(\mathfrak{sl}(m, n)). \quad (4.42)$$

Докажем теперь основной результат настоящего параграфа.

ТЕОРЕМА 4.4. *Неприводимое представление $L(\Lambda_1(u), \dots, \Lambda_{m+n-1}(u))$ янгиана $Y(\mathfrak{sl}(m, n)) = Y(A(m-1, n-1))$ конечномерно тогда и только тогда, когда существуют такие многочлены $P_1(u), \dots, P_{m-1}(u)$, $P_{m+1}(u), \dots, P_{m+n-1}(u)$, $P_m(u)$, $Q_m(u)$ от u со старшим коэффициентом 1, что*

$$\Lambda_i(u) = \frac{P_i(u + a_{ii}/2)}{P_i(u)}, \quad i \neq m, \quad \Lambda_m(u) = \frac{P_m(u)}{Q_m(u)}. \quad (4.43)$$

Здесь, как и выше, a_{ii} – матричный элемент симметрической матрицы Картана супералгебры Ли $A(m-1, n-1)$ (см. п. 2.1 и [12]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть представление $L(\Lambda_1(u), \dots, \Lambda_{m+n-1}(u))$ янгиана $Y(A(m-1, n-1))$ неприводимо и конечномерно. Оно в силу предложения 4.5 может быть продолжено до некоторого неприводимого конечномерного представления $L(\mu_1(u), \dots, \mu_{m+n}(u))$ янгиана $Y(\mathfrak{gl}(m, n))$. Обратно, пусть представление $L(\mu_1(u), \dots, \mu_{m+n}(u))$ янгиана $Y(\mathfrak{gl}(m, n))$ неприводимо и конечномерно. Заметим, что для $i \in \{1, \dots, m+n-1\} \setminus \{m\}$ существуют такие формальные ряды $f_1(u), \dots, f_{m-1}(u), f_{m+1}(u), \dots, f_{m+n-1}(u)$, что

$$f_i(u)\mu_i(u) = (1 + \alpha_{i,1}u^{-1}) \cdots (1 + \alpha_{i,k}u^{-1}), \quad i \neq m, \quad i \neq m+1,$$

где $\alpha_{i,j}$ – некоторые комплексные числа. Этот факт хорошо известен для янгиана $Y(\mathfrak{gl}(2))$ (см. предложение 4.3), а также для янгиана $Y(\mathfrak{gl}(1, 1))$ (см. предложение 4.4).

Выведем теперь теорему из предложений 4.4, 4.5. Действительно, действие элементов центра в неприводимом представлении янгиана сводится к умножению на скаляр. Из предложения 4.4 в силу (4.42) (предложение 4.5) следует, что ограничение каждого представления янгиана $Y(\mathfrak{gl}(m, n))$ на янгиан $Y(\mathfrak{sl}(m, n)) = Y(A(m-1, n-1))$ остается неприводимым. И наоборот, каждое неприводимое представление янгиана $Y(A(m-1, n-1))$ можно получить при помощи такого ограничения. Действительно, поскольку элементы центра действуют как умножения на скаляры, то каждое представление янгиана $Y(A(m-1, n-1))$ можно в силу (4.42) продолжить до представления янгиана $Y(\mathfrak{gl}(m, n))$. Однако это ограничение зависит лишь от отношений $\frac{\mu_i(u)}{\mu_{i+1}(u)}$. Осталось заметить, что в силу [15, лемма 8.2] имеют место равенства

$$h_i(u) = d_i \left(u + \frac{1}{2}(-1)^{\bar{i}}(m-i) \right) d_{i+1} \left(u + \frac{1}{2}(-1)^{\bar{i}}(m-i) \right)^{-1}, \quad (4.44)$$

где

$$d_j(u) = t_{jj}(u) - \sum_{k,l < j} t_{jk}(u)(|T(u)_{\{1,2,\dots,j-1\},\{1,2,\dots,j-1\}}|_{lk})^{-1} t_{lj}(u). \quad (4.45)$$

Здесь, как обычно, $|X|_{ij}$ обозначает квазидетерминант (см. [15]). В силу равенств (4.36) получаем, что если v_+ – старший вектор, то

$$\begin{aligned} h_i(u)v_+ &= \frac{\mu_i(u + \frac{1}{2}(-1)^{\bar{i}}(m-i))}{\mu_{i+1}(u + \frac{1}{2}(-1)^{\bar{i}}(m-i))} v_+ \\ &= \mu_{i+1} \left(u + \frac{1}{2}(-1)^{\bar{i}}(m-i) \right)^{-1} \mu_i \left(u + \frac{1}{2}(-1)^{\bar{i}}(m-i) \right) v_+. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Отметим, что равенство (4.46) доказывается прямой проверкой с использованием соотношений (4.44), (4.45). Действительно, все члены, кроме первого слагаемого, переводят старший вектор в 0: $d_i(u)v_+ = t_{ii}(u)v_+$. С другой стороны, действие производящей функции $h_i(u)$ на старшем векторе v_+ $Y(A(m-1, n-1))$ -модуля $L(\lambda_1(u), \dots, \lambda_{m+n-1}(u))$ определяется формулой

$$h_i(u)v_+ = \Lambda_i(u)v_+.$$

Теперь в силу теоремы 4.3 и формулы (4.46) имеем

$$\begin{aligned}\Lambda_i(u) &= \frac{\mu_i(u + \frac{1}{2}(-1)^{\bar{i}}(m-i))}{\mu_{i+1}(u + \frac{1}{2}(-1)^{\bar{i}}(m-i))} = \frac{P_i((u + \frac{1}{2}(-1)^{\bar{i}}(m-i)) + (-1)^{|i|})}{P_i(u + \frac{1}{2}(-1)^{\bar{i}}(m-i))} \\ &= \frac{\tilde{P}_i(u + a_{ii})}{\tilde{P}_i(u)}, \\ \Lambda_m(u) &= \frac{\mu_m(u + \frac{1}{2}(-1)^{\bar{i}}(m-i))}{\mu_{m+1}(u + \frac{1}{2}(-1)^{\bar{i}}(m-i))} = \frac{P_m(u + \frac{1}{2}(-1)^{\bar{i}}(m-i))}{Q_m(u + \frac{1}{2}(-1)^{\bar{i}}(m-i))} = \frac{\tilde{P}_m(u)}{\tilde{Q}_m(u)}.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Теорема 4.2 является, с некоторыми оговорками, аналогом янгианов для результата В. Г. Каца о классификации неприводимых конечномерных представлений базисных супералгебр Ли (см. [11]). В этом случае степени многочленов, участвующих в формулировке теоремы 4.2, являются аналогами компонент старшего веса представления базисной супералгебры Ли.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Можно, вероятно, несколько усилить результат теоремы 4.1 и доказать, что все неприводимые конечномерные модули янгиана $Y(A(m, n))$ являются неприводимыми подмодулями тензорного произведения простейших фундаментальных модулей (см. [26]). Неприводимость тензорных произведений янгиановых модулей исследовалась в работе [29].

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Интерес представляет обобщение теоремы 4.4 в случае представления янгианов других базисных супералгебр Ли. Как представляется автору, интересно было бы обобщить проведенное выше доказательство в случае классификации неприводимых конечномерных представлений янгианов супералгебр Ли типа $A(n, n)$, $B(m, n)$, $C(n)$, $D(m, n)$. В некоторых случаях это является относительно простой задачей. В этом же ряду стоит задача об описании квантовых R -матриц, тесно связанная с задачами теории представлений янгианов, а также с задачей получения мультипликативных формул для универсальных R -матриц янгиана и его квантового дубля (см. [21], [22], [27]). Интересным вопросом является и прояснение связи между неприводимыми представлениями янгиана супералгебры Ли типа $A(m, n)$ и представлениями вырожденной аффинной алгебры Гекке (или его правильно определенного супераналога), другими словами, получение конструкции аналога функтора Дринфельда (см. [1], [2]). Все эти задачи являются темами отдельных исследований.

Список литературы

1. T. Arakawa, “Drinfeld functor and finite-dimensional representations of Yangian”, *Comm. Math. Phys.*, **205**:1 (1999), 1–18.
2. В. Г. Дринфельд, “Вырожденные аффинные алгебры Гекке и янгианы”, *Функц. анализ и его прил.*, **20**:1 (1986), 69–70; англ. пер.: V. G. Drinfel’d, “Degenerate affine hecke algebras and Yangians”, *Funct. Anal. Appl.*, **20**:1 (1986), 58–60.
3. V. Chari, A. Pressley, *A guide to quantum groups*, Camb. Univ. Press, Cambridge, 1995.

4. V. Chari, A. Pressley, “Yangians and R -matrices”, *Enseign. Math.* (2), **36**:3–4 (1990), 267–302.
5. A. Molev, “Yangians and their applications”, *Handbook of algebra*, v. 3, Elsevier, Amsterdam, 2003, 907–959.
6. В. О. Тарасов, “О строении квантовых L -операторов для R -матрицы XXZ -модели”, *ТМФ*, **61**:2 (1984), 163–173; англ. пер.: V. O. Tarasov, “Structure of quantum L operators for the R matrix of the XXZ model”, *Theoret. and Math. Phys.*, **61**:2 (1984), 1065–1072.
7. В. О. Тарасов, “Неприводимые матрицы монодромии для R -матрицы XXZ -модели и решеточные локальные квантовые гамильтонианы”, *ТМФ*, **63**:2 (1985), 175–196; англ. пер.: V. O. Tarasov, “Irreducible monodromy matrices for the R matrix of the XXZ model and local lattice quantum Hamiltonians”, *Theoret. and Math. Phys.*, **63**:2 (1985), 440–454.
8. G. Arutyunov, S. Frolov, “Foundations of the $\text{Ad } S_5 \times S^5$ superstring: I”, *J. Phys. A*, **42**:5 (2009), ID 254003.
9. L. Dolan, Ch. Nappi, E. Witten, “Yangian symmetry in $D = 4$ superconformal Yang–Mills theory”, *Quantum theory and symmetries*, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2004, 300–315.
10. F. Spill, A. Torrielli, “On Drinfeld’s second realization of the $\text{AdS/CFT } \mathfrak{su}(2|2)$ Yangian”, *J. Geom. Phys.*, **59**:4 (2009), 489–502.
11. В. Кас, “A sketch of Lie superalgebra theory”, *Comm. Math. Phys.*, **53**:1 (1977), 31–64.
12. L. Frappat, A. Sciarrino, P. Sorba, *Dictionary on Lie algebras and superalgebras*, Academic Press, San Diego, CA, 2000.
13. R. B. Zhang, “Representations of super Yangian”, *J. Math. Phys.*, **36**:7 (1995), 3854–3865.
14. R. B. Zhang, “The $\mathfrak{gl}(M|N)$ super Yangian and its finite-dimensional representations”, *Lett. Math. Phys.*, **37**:4 (1996), 419–434.
15. L. Gow, “Gauss Decomposition of the Yangian $Y(\mathfrak{gl}_{(M|N)})$ ”, *Comm. Math. Phys.*, **276**:3 (2007), 799–825.
16. M. L. Nazarov, “Quantum Berezinian and the classical Capelli identity”, *Lett. Math. Phys.*, **21**:2 (1991), 123–131.
17. В. А. Стукопин, “О янгианах супералгебр Ли типа $A(m, n)$ ”, *Функц. анализ и его прил.*, **28**:3 (1994), 85–88; англ. пер.: V. A. Stukopin, “Yangians of Lie superalgebras of type $A(m, n)$ ”, *Funct. Anal. Appl.*, **28**:3 (1994), 217–219.
18. V. G. Drinfel’d, “Quantum groups”, *Proc. Int. Cong. Math.*, v. 1 (Berkeley, CA, 1986), Amer. Math. Soc., Berkeley, 1987, 798–820.
19. В. Г. Дринфельд, “Алгебры Хопфа и квантовое уравнение Янга–Бакстера”, *Докл. АН СССР*, **283**:5 (1985), 1060–1064; англ. пер.: V. G. Drinfel’d, “Hopf algebras and the quantum Yang–Baxter equation”, *Soviet Math. Dokl.*, **32**:1 (1985), 254–258.
20. А. И. Молев, *Янгианы и классические алгебры Ли*, МЦНМО, М., 2009; пер. с англ.: A. I. Molev, *Yangians and classical Lie algebras*, Math. Surveys Monogr., **143**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
21. В. А. Стукопин, “О дубле янгиана супералгебры Ли типа $A(m, n)$ ”, *Функц. анализ и его прил.*, **40**:2 (2006), 86–90; англ. пер.: V. A. Stukopin, “The Yangian double of the Lie superalgebra $A(m, n)$ ”, *Funct. Anal. Appl.*, **40**:2 (2006), 155–158.
22. В. А. Стукопин, “Квантовый дубль янгиана супералгебры Ли типа $A(m, n)$ и вычисление универсальной R -матрицы”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **11**:2 (2005), 185–208; англ. пер.: V. A. Stukopin, “The quantum double of the Yangian of the Lie superalgebra $A(m, n)$ and computation of the universal R -matrix”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **142**:2 (2007), 1989–2006.

23. V. Chari, A. Pressley, “Fundamental representations of Yangians and singularities of R -matrices”, *J. Reine Angew. Math.*, **417** (1991), 87–128.
24. Ж. Диксмье, *Универсальные обертывающие алгебры*, Мир, М., 1978; пер. с фр.: J. Dixmier, *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars, Paris–Brussels–Montreal, 1974.
25. S. Z. Levendorskii, “On PBW bases for Yangians”, *Lett. Math. Phys.*, **27**:1 (1993), 37–42.
26. S. Khoroshkin, M. Nazarov, “Mickelsson algebras and representations of Yangians”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **364**:3 (2012), 1293–1367.
27. В. Г. Дринфельд, “Новая реализация янгианов и квантовых аффинных алгебр”, *Докл. АН СССР*, **269**:1 (1988), 13–17; англ. пер.: V. G. Drinfel’d, “A new realization of Yangians and quantized affine algebras”, *Soviet Math. Dokl.*, **36**:2 (1988), 212–216.
28. V. Stukopin, “Representations theory and doubles of Yangians of classical Lie superalgebras”, *Asymptotic combinatorics with application to mathematical physics* (St. Petersburg, 2001), NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., **77**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002, 255–265.
29. M. Nazarov, V. Tarasov, “On irreducibility of tensor products of Yangian modules”, *Internat. Math. Res. Notices*, 1998, №3, 125–150.

В. А. Стукопин (V. A. Stukopin)

Донской государственный технический университет,

г. Ростов-на-Дону;

Южный математический институт ВНЦ РАН,

г. Владикавказ

E-mail: stukopin@math.rsu.ru

Поступило в редакцию

04.05.2011

30.10.2012