Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Дымов, Диссипативные эффекты в одной линейной лагранжевой системе с бесконечным числом степеней свободы, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2012, том 76, выпуск 6, 45–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7796>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 09:16:23

УДК 517.937+517.938

А. В. Дымов

Диссипативные эффекты в одной линейной лагранжевой системе с бесконечным числом степеней свободы

Рассматривается задача потенциального взаимодействия конечномерной и бесконечномерной линейных лагранжевых систем (системы линейных осцилляторов и термостата). Изучается финальная динамика системы. При выполнении естественных предположений она оказывается очень простой и описывается в явном виде, так как несмотря на сохранение энергии и лагранжеву природу системы термостат обеспечивает некоторое эффективное трение. Применяются методы статьи [1], в которой исследована финальная динамика конечномерной подсистемы в случае, когда она имеет одну степень свободы и обладает линейным или, при некоторых дополнительных предположениях, полиномиальным потенциалом. Рассмотрен случай, когда конечномерная подсистема обладает произвольным числом степеней свободы и линейным потенциалом. Исследуется финальная динамика как системы осцилляторов, так и термостата. Все необходимые утверждения из [1] приведены с доказательствами, адаптированными для рассматриваемого случая.

Библиография: 12 наименований.

Ключевые слова: лагранжевы системы, гамильтоновы системы, системы с бесконечным числом степеней свободы, финальная динамика.

§ 1. Введение

Задача взаимодействия конечномерной и бесконечномерной гамильтоновых систем всегда привлекала внимание физиков и специалистов по динамике. В отличие от конечномерной динамики, несмотря на сохранение энергии в таких системах обычно появляется некоторое эффективное трение. А именно, часть энергии становится “ненаблюдаемой” за счет того, что ее поглощает бесконечномерная система.

Задачи такого типа сложны, поэтому обычно приходится считать, что бесконечномерная система линейна. Она может моделироваться как термостат [2], как струна (или, в более общем случае, как система Клейна–Гордона) [3]–[6] либо как электромагнитное поле (уравнения Максвелла) [7]. Мы, как и в [1], [2], представляем ее как континуум независимых осцилляторов и называем *термостатом*¹. Конечномерную систему мы также предполагаем линейной, но имеющей произвольную размерность.

¹Такая терминология может показаться физически не совсем оправданной, но нам хотелось бы ее использовать, так как она порождает интуицию.

В данном тексте предполагается, что полная энергия системы конечна. Метод, разработанный в [1] и применяемый нами, основан на том наблюдении, что конечномерная система должна осциллировать так, чтобы в термостате не возникало резонансов (их возникновение противоречит конечности энергии). Это условие влечет некоторое ограничение, налагаемое на спектр Фурье конечномерной компоненты решения. Согласно этому удастся установить, что при времени, стремящемся как к $+\infty$, так и к $-\infty$, движение конечномерной подсистемы становится квазипериодическим, точнее, стремится к конечной линейной комбинации гармонических колебаний. При этом количество частот в данном квазипериодическом движении не превышает числа степеней свободы конечномерной подсистемы. Часть энергии “растворяется” в термостате, т.е. концентрируется в компоненте движения бесконечномерной подсистемы, слабо стремящейся к нулю. Финальная динамика термостата весьма схожа: его движение слабо стремится к квазипериодическому режиму с теми же собственными частотами.

Теперь перейдем к технической части изложения. Рассмотрим лагранжеву систему

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial x} = 0, \quad \mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(x, \dot{x}), \quad x \in \mathbb{R}^n; \quad (1.1)$$

здесь $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, где через T обозначено транспонирование, и лагранжиан $\mathcal{L}_0$ равен разности между кинетической и потенциальной энергиями:

$$\mathcal{L}_0(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle - \frac{1}{2} \langle Bx, x \rangle. \quad (1.2)$$

Матрица B размера $n \times n$ предполагается симметричной и положительно определенной.

Под скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ подразумевается стандартное евклидово скалярное произведение. В частности, $\langle Bx, x \rangle = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j$, где b_{ij} – элементы матрицы B .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Задача с лагранжианом более общего вида

$$\mathcal{L}_0(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \langle A\dot{x}, \dot{x} \rangle - \frac{1}{2} \langle Bx, x \rangle,$$

где A – положительно определенная симметричная матрица, очевидным образом сводится к рассматриваемой задаче с помощью замены переменных.

Рассмотрим другую систему, которую мы будем называть *термостатом*. Это бесконечномерная линейная лагранжева система с лагранжианом

$$\mathcal{L}_T(\xi, \dot{\xi}) = \int \frac{\rho(\nu)}{2} (\dot{\xi}^2(\nu, t) - \nu^2 \xi^2(\nu, t)) d\nu \quad (1.3)$$

(для краткости вместо $\int_{-\infty}^{+\infty}$ будем записывать $\int$). Здесь $\xi(\nu, t)$ и $\rho(\nu)$ – действительные функции. Такую систему можно трактовать как бесконечный набор независимых гармонических осцилляторов, параметризованных собственной частотой ν . Физический смысл $\rho(\nu)$ – плотность массы² осцилляторов

²Заметим, что масса термостата может быть как конечна, так и бесконечна.

с частотой ν . Уравнение движения изолированного термостата имеет следующий вид:

$$\rho(\nu)(\ddot{\xi}(\nu, t) + \nu^2 \xi(\nu, t)) = 0.$$

Теперь рассмотрим взаимодействие двух описанных выше систем со следующим потенциалом:

$$V_{\text{int}} = - \sum_{l=1}^n x_l \int \kappa_l(\nu) \xi \, d\nu = - \left\langle x, \int \kappa(\nu) \xi \, d\nu \right\rangle,$$

$x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $\kappa(\nu) = (\kappa_1(\nu), \dots, \kappa_n(\nu))^T$, $\int \kappa \xi \, d\nu = (\int \kappa_1 \xi \, d\nu, \dots, \int \kappa_n \xi \, d\nu)^T$. Такая система имеет лагранжиан $\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_T - V_{\text{int}}$, и ее уравнения движения имеют вид

$$\ddot{x} + Bx = \int \kappa \xi \, d\nu, \quad (1.4)$$

$$\rho(\ddot{\xi} + \nu^2 \xi) = \langle x, \kappa \rangle. \quad (1.5)$$

Заданы следующие начальные условия:

$$x|_{t=0} = x_0, \quad \xi|_{t=0} = \xi_0(\nu), \quad \dot{x}|_{t=0} = \dot{x}_0, \quad \dot{\xi}|_{t=0} = \dot{\xi}_0(\nu). \quad (1.6)$$

Полная энергия системы имеет вид

$$E(x, \xi, \dot{x}, \dot{\xi}) = \frac{1}{2} \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle + \frac{1}{2} \int \rho \dot{\xi}^2 \, d\nu + \frac{1}{2} \langle Bx, x \rangle + \frac{1}{2} \int \rho \nu^2 \xi^2 \, d\nu + V_{\text{int}}. \quad (1.7)$$

Колебания системы стремятся к квазипериодическому режиму при времени, стремящемся к $\pm\infty$, за счет того, что термостат создает эффективное трение. Функция $\xi(\nu, t)$ осциллирует по переменной ν все быстрее и быстрее (см. (7.3)), вследствие чего некоторая ее компонента слабо стремится к нулю, забирая заметную часть энергии, которая “растворяется” в термостате. Данное явление напоминает превращение энергии в тепло. При этом в преобразовании Фурье функции ξ по переменной ν эти осцилляции порождают волны, уходящие на бесконечность. Такой механизм поглощения энергии термостатом, фурье-дуальный к первому, можно интерпретировать как излучение.

Данный текст организован следующим образом. В § 2 формулируются предположения Н1–Н6, налагаемые на функции ξ_0 , $\dot{\xi}_0$, ρ , κ_l . Одна часть предположений отвечает за регулярность этих функций, другая – за положительную определенность и конечность энергии E , которая необходима нам для доказательства теоремы 2.1 существования решения системы (1.4)–(1.6) при всех $t \in \mathbb{R}$.

Предположение Н6 несколько отличается от предположений Н1–Н5. В нем налагается ограничение на вид взаимодействия между термостатом и конечномерной системой. А именно, $\kappa_i / \sqrt{\rho}|_{(-\nu_0, \nu_0)} = 0$ при каждом $1 \leq i \leq n$ для некоторого $\nu_0 \geq 0$. При $\nu_0 > 0$ это значит, что осцилляторы термостата, колеблющиеся на частотах $\nu \in (-\nu_0, \nu_0)$, никак не влияют на динамику конечномерной системы (так как правая часть уравнения (1.5), деленного на $\sqrt{\rho}$, в точках из этого интервала обращается в нуль). На промежутке $\sigma = \mathbb{R} \setminus (-\nu_0, \nu_0)$

предполагается выполнение некоторых условий невырожденности: ситуация, при которой все функции $\kappa_i/\sqrt{\rho}$ одновременно обращаются в нуль на некотором промежутке, кроме зафиксированного нами интервала $(-\nu_0, \nu_0)$, является нетипичной. При $\nu_0 = 0$ такой интервал отсутствует. Соответственно, условия невырожденности должны быть выполнены на промежутке $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Следуя [1], мы рассматриваем пространство $\mathcal{C}_b$ ограниченных равномерно непрерывных комплексных функций на прямой и его преобразование Фурье $\hat{\mathcal{C}}_b = \mathcal{F}(\mathcal{C}_b)$, состоящее из обобщенных функций. Подпространство $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_b$ состоит из функций, стремящихся к нулю при аргументе, в свою очередь, стремящемся к $\pm\infty$. Для каждой функции $\hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{C}}_b$ мы определяем сингулярный носитель $\text{sing supp}(\hat{\varphi})$ следующим образом: мы говорим, что $\lambda \in \text{sing supp}(\hat{\varphi})$, если для любой достаточно малой окрестности точки λ существует регулярная (например, гладкая) функция $\hat{h}$ с носителем в этой окрестности такая, что обратное преобразование Фурье $\mathcal{F}^{-1}$ функции $\hat{h}\hat{\varphi}$ не лежит в $\mathcal{C}_0$.

Также в § 2 формулируется теорема 2.2. Она носит технический характер, но очень важна для исследования финальной динамики системы. Ее первая часть говорит о регулярности функций $\hat{x}_i(\nu) = \mathcal{F}(x_i)(\nu)$, $x_i = x_i(t)$, на промежутке $\nu \in \sigma = \mathbb{R} \setminus (-\nu_0, \nu_0)$. Это означает, что $\text{sing supp}(\hat{x}_i) \subset (-\nu_0, \nu_0)$. Таким образом, функция $\hat{x}_i$ может иметь сингулярность только на тех частотах, где термостат не влияет на конечномерную подсистему. Вторая часть теоремы 2.2 предоставляет связь между сингулярной частью $\hat{x}_i$ и $\int \kappa_i \xi d\nu$, где последний интеграл взят из (1.4).

В § 3 дано начало доказательства теоремы 2.1 (п. 3.1), но, главным образом, проведено исследование финальной динамики конечномерной системы (п. 3.2). Доказывается теорема 3.1, утверждающая, что в случае $\nu_0 = 0$ при $t \rightarrow \pm\infty$ колебания конечномерной системы затухают, а в случае $\nu_0 > 0$ — стремятся к линейной комбинации из гармонических колебаний с частотами $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, лежащими на интервале $(-\nu_0, \nu_0)$, $k \leq n$, или затухают, если $k = 0$.

В § 4 для удобства изложения вынесены доказательства некоторых промежуточных утверждений, используемых в § 3.

В п. 5.1 показано, что хорошо известное уравнение Клейна–Гордона порождает термостат, т.е. оно эквивалентно системе с лагранжианом (1.3). С помощью этого наблюдения строится естественный пример системы (1.4), (1.5). В п. 5.2 разбирается пример линейной системы более общего вида, чем рассмотренная выше. Показывается, что при помощи замены переменных она сводится к рассмотренной системе.

В § 6 заканчивается доказательство теоремы 2.1. В § 7 дается доказательство теоремы 2.2. В начале п. 7.2 доказывается, что L_2 -норма функции $\langle \hat{a}, \hat{x}^t \rangle$ равномерно ограничена (следствие 7.2), где $\hat{a}_i = \frac{\kappa_i}{\sqrt{\rho}}$, $\hat{x}_i^t$ — преобразование Фурье функции $x_i(\tau)\chi_{(0,t)}$, $\tau \in \mathbb{R}$, а $\chi_{(0,t)}$ — индикатор интервала $(0, t)$. Это является ключевым моментом в доказательстве утверждения 1) теоремы 2.2 (п. 7.2). Утверждение 2) теоремы 2.2 доказывается в п. 7.1.

В § 8 исследуется финальная динамика термостата. Доказывается теорема 8.1, утверждающая, что движение термостата слабо стремится к такому же предельному режиму, как и конечномерная подсистема. А именно, показывается, что для любой наблюдаемой $\hat{\varphi}(\nu)$ из некоторого класса интеграл $\int \hat{\varphi} \xi d\nu$

при $t \rightarrow \pm\infty$ стремится к линейной комбинации из гармонических колебаний с теми же частотами, что и конечномерная подсистема.

В § 9 дается самодостаточная теория используемых нами пространств $\mathcal{C}_b, \mathcal{C}_0$ и других, а также их преобразований Фурье. С несколько другой точки зрения она изложена в статье [8].

Выражаю огромную благодарность моему научному руководителю Д. В. Трещеву за постановку данной задачи, а также всестороннюю помощь в ее решении. Кроме того, благодарю А. А. Шкаликова за большое внимание к работе, конструктивную критику и ценные советы.

§ 2. Технические теоремы

2.1. Предположения Н1–Н4 и теорема существования. Сначала сформулируем следующие предположения.

Н1. Функции ρ, κ_l измеримы, функция ρ неотрицательна и $\text{supp } \kappa_l \subset \text{supp } \rho$ при всех $l = 1, \dots, n$.

Далее мы доопределим функции $\kappa_l/\sqrt{\rho}$ на $\mathbb{R} \setminus \text{supp } \rho$ нулем.

Н2. Интегралы $\int \frac{\kappa_l^2}{\rho\nu^2} d\nu$ конечны при всех $l = 1, \dots, n$.

Пусть $K = (k_{lm}) = (\int \frac{\kappa_l \kappa_m}{\rho\nu^2} d\nu)$ – матрица размера $n \times n$.

Н3. Матрица $B - K$ положительно определена.

В частности, отсюда следует неотрицательность энергии (1.7):

$$E = \frac{1}{2} \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle + \frac{1}{2} \int \rho \dot{\xi}^2 d\nu + \frac{1}{2} \langle (B - K)x, x \rangle + \frac{1}{2} \int \rho\nu^2 \left(\xi - \left\langle \frac{\kappa}{\rho\nu^2}, x \right\rangle \right)^2 d\nu \geq 0. \quad (2.1)$$

Н4. Интеграл $\int \rho(\xi_0^2 + \nu^2 \xi_0^2) d\nu$ конечен.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Из равенства (1.7) и предположений Н2, Н4 следует оценка $E(x_0, \xi_0, \dot{x}_0, \dot{\xi}_0) < \infty$. Действительно, с помощью (1.7) несложно убедиться в том, что $\int \kappa_l \xi_0 d\nu < \infty$ при всех $l = 1, \dots, n$. Это следует из неравенства Коши–Буняковского $(\int \kappa_l \xi_0 d\nu)^2 \leq k_{ll} \int \rho\nu^2 \xi_0^2 d\nu$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть предположения Н1–Н4 выполнены. Тогда существует единственное решение $x(t), \xi(\nu, t)$ уравнений (1.4)–(1.6). Оно определено при всех $t \in \mathbb{R}$ и имеет конечную и постоянную энергию $E = \text{const} < \infty$. Кроме того, решение обладает следующими свойствами:

- 1) функции $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ ограничены и равномерно непрерывны;
- 2) функция $\mathcal{E}(t) = \int \rho(\nu)(\nu^2 \xi^2(\nu, t) + \dot{\xi}^2(\nu, t)) d\nu$ ограничена.

Начало доказательства теоремы 2.1 приведено в п. 3.1, а свойства 1) и 2) доказаны в § 6.

2.2. Пространства и обозначения. Пусть $\mathcal{C}_b$ – пространство равномерно непрерывных ограниченных функций $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Аргументом функций из $\mathcal{C}_b$ обычно будет время t . Это банахово пространство с нормой $\|\varphi\|_\infty = \sup |\varphi|$ в L_∞ . Пусть $\mathcal{M}$ – пространство плотностей конечных комплексных счетно-аддитивных мер Радона на $\mathbb{R}$. Пространство $\mathcal{M} \subset \mathcal{C}_b^*$ содержит обобщенные функции такие, что $\mu(\tau)d\tau$ – конечная комплексная счетно-аддитивная мера Радона для любой $\mu \in \mathcal{M}$. Пространство $\mathcal{M}$ является банаховым с нормой

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}} = \sup_{\|\varphi\|_\infty=1} \mu(\varphi), \quad \mu(\varphi) = \int \varphi(\tau)\mu(\tau) d\tau, \quad \varphi \in \mathcal{C}_b, \quad \mu \in \mathcal{M},$$

и, очевидно, содержит $L_1 = L_1(\mathbb{R})$.

Обозначим через $\mathcal{F}$ преобразование Фурье

$$\mathcal{F}(\psi) = \hat{\psi}(\lambda) = \int e^{-i\lambda\tau} \psi(\tau) d\tau, \quad \mathcal{F}^{-1}(\hat{\psi}) = \psi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i\lambda\tau} \hat{\psi}(\lambda) d\lambda.$$

Напомним формулу преобразования Фурье от произведения:

$$2\pi\mathcal{F}(\varphi\psi) = \mathcal{F}\varphi * \mathcal{F}\psi, \quad \mathcal{F}^{-1}(\hat{\varphi}\hat{\psi}) = \mathcal{F}^{-1}\hat{\varphi} * \mathcal{F}^{-1}\hat{\psi},$$

где $*$, как обычно, обозначает свертку.

Далее мы будем обозначать функции (или обобщенные функции), зависящие от времени, через $h, \varphi, \psi, \dots$, а их преобразование Фурье – через $\hat{h}, \hat{\varphi}, \hat{\psi}, \dots$. Аналогичным образом, крышка над обозначением функционального пространства означает его преобразование Фурье.

Пусть $\mathcal{C}_0^+$ – подпространство в $\mathcal{C}_b$, состоящее из функций, стремящихся к нулю при времени, стремящемся к $+\infty$, и $\mathcal{C}_0^- \subset \mathcal{C}_b$ – подпространство, состоящее из функций, стремящихся к нулю при времени, стремящемся к $-\infty$. Также будем рассматривать соответствующие пространства обобщенных функций $\hat{\mathcal{C}}_b = \mathcal{F}(\mathcal{C}_b)$ и $\hat{\mathcal{C}}_0^\pm = \mathcal{F}(\mathcal{C}_0^\pm)$. Положим $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0^+ \cap \mathcal{C}_0^-$ и $\hat{\mathcal{C}}_0 = \mathcal{F}(\mathcal{C}_0)$.

Определим пространство $\widehat{\mathcal{M}} = \mathcal{F}(\mathcal{M})$. Нетрудно показать, что $\widehat{\mathcal{M}} \subset \mathcal{C}_b$ (см. [9]). Кроме того, $L_1 \subset \mathcal{M}$, и по теореме Римана–Лебега $\mathcal{F}(L_1) \subset \mathcal{C}_0$.

Далее для удобства записи будем использовать следующие обозначения: $\mathcal{C}_b^n$ – пространство, состоящее из элементов вида $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$, где $\varphi_l \in \mathcal{C}_b$ при всех $l = 1, \dots, n$, и аналогично определяются пространства $\mathcal{C}_0^n$, $\mathcal{C}_0^{n\pm}$, $\mathcal{M}^n$. Их преобразования Фурье $\hat{\mathcal{C}}_0^n$, $\hat{\mathcal{C}}_0^{n\pm}$, $\widehat{\mathcal{M}}^n$ определяются покомпонентно. Будем также использовать обозначения такого типа: $\hat{\mu}\hat{x} = (\hat{\mu}\hat{x}_1, \dots, \hat{\mu}\hat{x}_n)^T$ для $\hat{\mu} \in \widehat{\mathcal{M}}$ и $\hat{x} \in \hat{\mathcal{C}}_b^n$.

Обозначим³

$$\begin{aligned} \hat{a}_l(\nu) &= \frac{\kappa_l(\nu)}{\sqrt{\rho(\nu)}}, & \hat{w}_{lm}(\nu) &= \frac{2\pi\hat{a}_l(\nu)\hat{a}_m(\nu)}{i\nu}, \\ w_{\diamond lm}^\pm(\tau) &= \begin{cases} \frac{\pm(w_{lm}(\tau) - w_{lm}(-\tau))}{2}, & \text{если } \pm\tau > 0, \\ 0, & \text{если } \pm\tau < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2)$$

³Из условия Н5, приведенного ниже, следует, что функции $\hat{a}_l$, $\hat{w}_{lm}$ непрерывны.

где $w_{lm} = \mathcal{F}^{-1}(\hat{w}_{lm})$. Стандартным вычислением можно показать, что (см. п. 7.1 далее)

$$\hat{w}_{\diamond lm}^{\pm}(\nu) = \pm \frac{1}{4}(\hat{w}_{lm}(\nu) - \hat{w}_{lm}(-\nu)) + \frac{1}{2\pi i} \text{v.p.} \int \frac{\lambda \hat{w}_{lm}(\lambda) d\lambda}{\nu^2 - \lambda^2}. \quad (2.3)$$

Кроме того, будут приняты следующие обозначения: $\hat{w}_l = (\hat{w}_{1l}, \dots, \hat{w}_{nl})^T$, аналогично определяются w_l , $\hat{w}_{\diamond l}^{\pm}$, $w_{\diamond l}^{\pm}$, $\hat{a}$.

Также будут использоваться матрица $\widehat{W} = (\hat{w}_{lm})$ и матрица $\widehat{W}_{\diamond}^{\star} = (\hat{w}_{\diamond lm}^{\star})$, где $\star \in \{+, -\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Из условия Н2 следует, что $\frac{\hat{a}_l}{\nu} \in L_2(\mathbb{R})$ для $l = 1, \dots, n$.

2.3. Предположения Н5, Н6. Сформулируем здесь остальные предположения.

Н5. Функции $\hat{a}_l$ и $\hat{w}_{lm}$ принадлежат $\widehat{\mathcal{M}}$.

Пусть $\widehat{V}^{\star}(\nu)$ – семейство симметричных матриц размера $n \times n$,

$$\widehat{V}^{\star}(\nu) = B - \nu^2 I - \widehat{W}_{\diamond}^{\star}(\nu), \quad (2.4)$$

где I – единичная матрица, $\star \in \{+, -\}$.

Н6. Для каждого $\star \in \{+, -\}$ выполнены следующие условия:

- 1) на интервале⁴ $(-\nu_0, \nu_0)$ выполнено $\hat{a}_l|_{(-\nu_0, \nu_0)} = \hat{w}_{lm}|_{(-\nu_0, \nu_0)} = 0$, $1 \leq l, m \leq n$;
- 2) на множестве $\sigma = \mathbb{R} \setminus (-\nu_0, \nu_0)$ уравнение $\det \widehat{V}^{\star}(\nu) = 0$ имеет только изолированные нули первого порядка;
- 3) на множестве σ для каждого решения ν уравнения $\det \widehat{V}^{\star}(\nu) = 0$ выполнено $\hat{a}(\nu) \notin \text{Im } \widehat{V}^{\star}(\nu)$;
- 4) $\det \widehat{V}^{\star}(\pm \nu_0) \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Невыполнение предположения Н6, 3) означает, что одновременно $\det \widehat{V}^{\star}(\nu) = 0$ и вектор $\hat{a}(\nu)$ принадлежит $(n - 1)$ -мерному подпространству $\text{Im } \widehat{V}^{\star}(\nu)$. Это легко разрушить малой деформацией системы.

Интервал $(-\nu_0, \nu_0)$ характерен тем, что на нем конечномерная подсистема не влияет на динамику термостата, так как правая часть уравнения (1.5), деленного на $\sqrt{\rho}$, обращается в нуль. И наоборот, множество $\sigma = \mathbb{R} \setminus (-\nu_0, \nu_0)$ параметризует осцилляторы, лежащие в термостате, оказывающие существенное влияние на динамику конечномерной подсистемы и системы в целом. Поэтому множество σ естественно назвать *спектром термостата*.

Отметим, что при изучении финальной динамики системы окажется, что если $\nu_0 \neq 0$, то движение конечномерной подсистемы стремится к линейной комбинации гармонических колебаний с частотами $\lambda_l \in (-\nu_0, \nu_0)$. Если $\nu_0 = 0$, то ее колебания затухают. Динамика термостата окажется такой же, но в слабом смысле.

⁴Случай пустого интервала $\nu_0 = 0$ не исключается.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть выполнены предположения [Н2](#) и [Н5](#). Тогда:

- 1) $w_{\diamond lm}^{\pm} \in \mathcal{M}$;
- 2) $\widehat{W}_{\diamond}^{\pm}(0) = K$, где K – матрица, определенная в [Н3](#).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [Н5](#) имеем $w_{lm} \in \mathcal{M}$. Поэтому $w_{\diamond lm}^{\pm}$ также лежат в $\mathcal{M}$. Из замечания [2.2](#) следует, что $\widehat{w}_{lm}(0) = 0$. Далее, утверждение 2) следует из [\(2.3\)](#).

2.4. Сингулярный носитель и теорема 2.2. Пусть $\widehat{\varphi} \in \widehat{\mathcal{C}}_b$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Будем говорить, что $\lambda \notin \text{sing supp}^+(\widehat{\varphi})$, если существует интервал $I \ni \lambda$ такой, что для любой $\widehat{\mu} \in \widehat{\mathcal{M}}$, $\text{supp } \widehat{\mu} \subset I$, имеем $\widehat{\mu}\widehat{\varphi} \in \widehat{\mathcal{C}}_0^+$. Аналогично определим $\text{sing supp}^-(\widehat{\varphi})$ и $\text{sing supp}(\widehat{\varphi}) = \text{sing supp}^+(\widehat{\varphi}) \cup \text{sing supp}^-(\widehat{\varphi})$.

Ясно, что $\text{sing supp}^{\pm}(\widehat{\varphi})$ и $\text{sing supp}(\widehat{\varphi})$ – замкнутые множества в $\mathbb{R}$.

Для $\widehat{\varphi} \in \widehat{\mathcal{C}}_b^n$ определим $\text{sing supp}(\widehat{\varphi}) = \bigcup_{j=1}^n \text{sing supp}(\widehat{\varphi}_j)$. Аналогично определяются $\text{sing supp}^{\pm}(\widehat{\varphi})$.

ПРИМЕР 2.1. Покажем, что $\text{sing supp } \delta(\lambda - \lambda_0) = \lambda_0$. Действительно, для любой функции $\widehat{\mu} \in \widehat{\mathcal{M}}$ выполнено $\widehat{\mu}\delta(\lambda - \lambda_0) = \widehat{\mu}(\lambda_0)\delta(\lambda - \lambda_0)$. Пусть $\widehat{\mu}(\lambda_0) \neq 0$. С учетом того, что $\mathcal{F}^{-1}(\widehat{\mu}(\lambda_0)\delta(\lambda - \lambda_0)) = \frac{\widehat{\mu}(\lambda_0)}{2\pi}e^{-i\lambda_0 t} \notin \mathcal{C}_0$, получаем $\text{sing supp } \delta(\lambda - \lambda_0) = \lambda_0$.

Обозначим $\varphi(t) = \int \kappa(\nu)\xi(\nu, t) d\nu$.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть выполнены предположения [Н1–Н6](#). Тогда преобразования Фурье вектор-функций $\widehat{x} = \mathcal{F}(x)$, $\widehat{\varphi} = \mathcal{F}(\varphi)$ таковы, что:

- 1) $\text{sing supp}(\widehat{x}) \subset (-\nu_0, \nu_0)$;
- 2) $\widehat{\varphi} = \widehat{W}_{\diamond}^+ \widehat{x} + \widehat{\vartheta}^+ = \widehat{W}_{\diamond}^- \widehat{x} + \widehat{\vartheta}^-$ для некоторых $\widehat{\vartheta}^{\pm} \in \widehat{\mathcal{C}}_0^{\pm}$.

Мы докажем теорему [2.2](#) в § 7.

Физический смысл утверждения 1) теоремы [2.2](#) – регулярность $\widehat{x}$ вне интервала $(-\nu_0, \nu_0)$. Как уже упоминалось, этот интервал характерен тем, что на нем $\widehat{a}_l|_{(-\nu_0, \nu_0)} = 0$ при всех $l = 1, \dots, n$ и правая часть уравнения [\(1.5\)](#), деленного на $\sqrt{\rho}$:

$$\sqrt{\rho}(\ddot{\xi} + \nu^2 \xi) = \langle x, \widehat{a} \rangle, \quad (2.5)$$

равна нулю.

Если в правой части уравнения [\(2.5\)](#) есть сингулярность (формально говоря, существует $\lambda \in \text{sing supp}(\langle \widehat{x}, \widehat{a} \rangle)$), то при $\nu = \lambda$, $\rho(\lambda) \neq 0$ возникнет резонанс, а это противоречит конечности энергии.

Условие регулярности $\langle \widehat{x}, \widehat{a} \rangle$ влечет одно из двух следствий: или $\widehat{x}$ регулярен, или некоторые компоненты $\widehat{x}$ имеют сингулярность, а в сумме $\langle \widehat{x}, \widehat{a} \rangle$ она сокращается. Такое сокращение – очень редкое событие. На множестве σ мы его исключаем с помощью предположения [Н6, 2\)–4\)](#).

Интервал $(-\nu_0, \nu_0)$ носит выделенный характер, $\widehat{a}_l|_{(-\nu_0, \nu_0)} = 0$ при всех $l = 1, \dots, n$. Поэтому $\widehat{x}$ на нем может иметь сингулярность.

Утверждение 2) теоремы [2.2](#) дает возможность выписать уравнение движения конечномерной подсистемы с точностью до $\mathcal{C}_0^{\pm}$: уравнение [\(1.4\)](#) принимает вид

$$\ddot{x} + Bx = W_{\diamond}^{\pm} * x + \vartheta^{\pm}, \quad \vartheta^{\pm} \in \mathcal{C}_0^{\pm},$$

где $W_{\diamond}^{\pm} * x$ – свертка матрицы с вектором, производящаяся по обычному правилу умножения матрицы на вектор. Это уравнение дает необходимое условие существования сингулярности в точке λ (см. п. 7.2, ч. 3 доказательства утверждения 1) теоремы 2.2).

§ 3. Финальная динамика системы

В настоящем параграфе мы докажем утверждение 1) теоремы 2.1. Однако главной задачей данного параграфа является исследование финальной динамики x -компоненты системы (1.4)–(1.6).

3.1. Начало доказательства теоремы 2.1. Положим $\eta = \sqrt{\rho}\xi$, $\hat{a} = \kappa/\sqrt{\rho}$. Систему (1.4)–(1.6) можно записать в виде

$$\dot{x} = y, \quad \dot{\eta} = \zeta, \quad \dot{y} = -Bx + \int \hat{a}\eta \, d\nu, \quad \dot{\zeta} = -\nu^2\eta + \langle \hat{a}, x \rangle, \quad (3.1)$$

$$x|_{t=0} = x_0, \quad \eta|_{t=0} = \eta_0(\nu), \quad y|_{t=0} = y_0, \quad \zeta|_{t=0} = \zeta_0(\nu). \quad (3.2)$$

Рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{H}$ с элементами $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \, \eta(\nu) \\ y \, \zeta(\nu) \end{pmatrix}$, $\eta(\nu), \zeta(\nu): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, и скалярным произведением, заданным формой энергии (1.7),

$$\begin{aligned} (\psi, \varphi)_{\mathcal{H}} = & \left(\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}} = \langle y^{\psi}, \bar{y}^{\varphi} \rangle + \int \zeta^{\psi} \bar{\zeta}^{\varphi} \, d\nu + \langle Bx^{\psi}, \bar{x}^{\varphi} \rangle \\ & + \int \nu^2 \eta^{\psi} \bar{\eta}^{\varphi} \, d\nu - \left\langle x^{\psi}, \int \hat{a} \bar{\eta}^{\varphi} \, d\nu \right\rangle - \left\langle \int \hat{a} \eta^{\psi} \, d\nu, \bar{x}^{\varphi} \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Скалярное произведение (3.3) положительно определено, так как его можно переписать в виде

$$\begin{aligned} (\psi, \varphi)_{\mathcal{H}} = & \langle y^{\psi}, \bar{y}^{\varphi} \rangle + \int \zeta^{\psi} \bar{\zeta}^{\varphi} \, d\nu + \langle (B - K)x^{\psi}, \bar{x}^{\varphi} \rangle \\ & + \int \left(\nu \eta^{\psi} - \left\langle \frac{\hat{a}}{\nu}, x^{\psi} \right\rangle \right) \left(\nu \bar{\eta}^{\varphi} - \left\langle \frac{\hat{a}}{\nu}, \bar{x}^{\varphi} \right\rangle \right) d\nu, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где матрица K определена в предположении Н3, а матрица $B - K$ положительна согласно Н3.

Энергия системы записывается в виде

$$E(\psi) = \frac{1}{2}(\psi, \psi)_{\mathcal{H}}, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \, \eta \\ y \, \zeta \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Таким образом, пространство $\mathcal{H}$ состоит из всех векторов ψ , на которых энергия $E(\psi)$ конечна.

Система (3.1), (3.2) может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= i\Omega\psi, \quad \psi|_{t=0} = \psi_0, \quad \Omega\psi = \Omega \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\psi_2 \\ i\Lambda\psi_1 \end{pmatrix}, \\ \Lambda\psi_1 &= \Lambda(x, \eta) = \left(Bx - \int \hat{a}\eta \, d\nu, \nu^2\eta - \langle \hat{a}, x \rangle \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Оператор Ω является неограниченным самосопряженным оператором на $\mathcal{H}$.*

Доказательство предложения 3.1 приведено в § 4.

Решение системы (3.6) имеет вид

$$\psi(t) = e^{i\Omega t} \psi_0, \quad \psi_0 \in \mathcal{H}, \quad (3.7)$$

где оператор $e^{i\Omega t}$ ограничен, поскольку спектр Ω вещественный.

Включение $\psi_0 \in \mathcal{H}$ обосновывается в следующем предложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *На решении (3.7) энергия конечна и сохраняется.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что энергия конечна. Согласно (3.5) пространство $\mathcal{H}$ состоит из всех векторов ψ , на которых энергия конечна. Оператор $e^{i\Omega t}$ ограничен. Согласно замечанию 2.1 имеем $\psi_0 \in \mathcal{H}$. Поэтому $\psi(t) \in \mathcal{H}$.

Покажем, что энергия сохраняется. Согласно (3.5) получаем

$$2E(\psi) = (\psi, \psi)_{\mathcal{H}} = (e^{i\Omega t} \psi_0, e^{i\Omega t} \psi_0)_{\mathcal{H}} = (e^{-i\Omega t} e^{i\Omega t} \psi_0, \psi_0)_{\mathcal{H}} = (\psi_0, \psi_0)_{\mathcal{H}},$$

так как оператор $e^{-i\Omega t}$ сопряжен к оператору $e^{i\Omega t}$. Предложение доказано.

Таким образом, мы доказали первую часть теоремы 2.1, доказательство второй части (свойства 1) и 2)) дано в § 6.

3.2. Исследование финальной динамики системы. При доказательстве следующей теоремы 3.1 мы будем находиться в рамках условия Н6, 1), согласно которому все функции $\hat{a}_l|_{(-\nu_0, \nu_0)}$ равны нулю. Поэтому поведение термостата на интервале $(-\nu_0, \nu_0)$ никак не влияет на динамику конечномерной подсистемы (которую мы и собираемся изучать). В связи с этим мы будем рассматривать сужение пространства $\mathcal{H}$: по сравнению со старым определением мы полагаем, что для $\psi \in \mathcal{H}$ выполняется равенство

$$\psi = \begin{pmatrix} x & \eta \\ y & \zeta \end{pmatrix}, \quad \eta|_{(-\nu_0, \nu_0)} = \zeta|_{(-\nu_0, \nu_0)} = 0. \quad (3.8)$$

Изменим соответствующим образом начальные условия в (3.2). Тогда согласно Н6, 1) оператор Ω и система (3.6) корректно определены на таком пространстве. Все утверждения из п. 3.1 останутся в силе и для такого определения $\mathcal{H}$. Это изменение необходимо нам для доказательства предложения 4.5.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть условия Н1–Н6 выполнены. Тогда для некоторых $\alpha_l^+ = \overline{\alpha_l^-} \in \mathbb{C}^n$, $l = 1, \dots, k$, и $k \leq n$ имеем⁵*

$$x(t) = \sum_{l=1}^k (\alpha_l^+ e^{i\lambda_l t} + \alpha_l^- e^{-i\lambda_l t}) + \vartheta(t), \quad \vartheta \in \mathcal{C}_0^n, \quad 0 < \lambda_l < \nu_0. \quad (3.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала сформулируем следующую лемму, доказательство которой содержится в § 4.

⁵Если $k = 0$, то считаем, что коэффициенты α_l и сумма в формуле (3.9) отсутствуют.

ЛЕММА 3.1. *Спектр оператора Ω на интервале $(-\nu_0, \nu_0)$ состоит только из изолированных собственных значений в количестве, не большем $2n$:*

$$\text{spec}(\Omega)|_{(-\nu_0, \nu_0)} = \{\pm\lambda_1, \pm\lambda_2, \dots, \pm\lambda_k\}, \quad \lambda_j > 0, \quad j = 1, \dots, k, \quad 0 \leq k \leq n. \quad (3.10)$$

Согласно спектральной теореме [10] оператор Ω принимает вид $\Omega = \int \lambda dE_\lambda$, где $\{E_\lambda\}$ – соответствующее спектральное семейство. Так как $e^{i\Omega t} = \int e^{i\lambda t} dE_\lambda$, решение (3.7) представляется в виде

$$\psi(t) = \int e^{i\lambda t} dE_\lambda \psi_0. \quad (3.11)$$

Пусть e_l – l -й базисный вектор в $\mathbb{C}^n$. Положим $\mathbf{1}_l = \begin{pmatrix} B^{-1}e_l & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$. Тогда x -компонента решения (3.11) представляется в виде

$$x(t) = \int e^{i\lambda t} \widehat{\omega}(\lambda) d\lambda, \quad (3.12)$$

где компоненты обобщенной вектор-функции $\widehat{\omega}$ удовлетворяют соотношению

$$\widehat{\omega}_l(\lambda) d\lambda = d(E_\lambda \psi_0, \mathbf{1}_l)_{\mathcal{H}}. \quad (3.13)$$

Из (3.12) видно, что

$$\widehat{\omega} = \frac{\widehat{x}}{2\pi}, \quad \widehat{x} = \mathcal{F}(x). \quad (3.14)$$

Согласно утверждению 1) теоремы 2.2 имеем $\text{sing supp}(\widehat{x}) \subset (-\nu_0, \nu_0)$. Согласно определению сингулярного носителя $\text{sing supp}(\widehat{x})$ – замкнутое множество. Выберем $\widehat{\mu} \in \widehat{\mathcal{M}}$ такое, что:

- 1) $\text{supp } \widehat{\mu} \in (-\nu_0, \nu_0)$;
- 2) $\widehat{\mu}$ равна 1 в некоторой окрестности точек $\{\pm\lambda_l\}$ – собственных значений из леммы 3.1 – для всех $1 \leq l \leq n$;

3) $\widehat{\mu}|_{\text{sing supp}(\widehat{x})} = 1$.

Представим (3.12) в виде

$$x(t) = \int e^{i\lambda t} \widehat{\mu} \widehat{\omega} d\lambda + \int e^{i\lambda t} (1 - \widehat{\mu}) \widehat{\omega} d\lambda. \quad (3.15)$$

Согласно лемме 3.1 выражение $dE_\lambda \psi_0$ при $\lambda \in (-\nu_0, \nu_0)$ отлично от нуля только в точках $\pm\lambda_l$. Поскольку $\pm\lambda_l$ – собственные значения, то согласно соотношению (3.13) и пп. 1), 2) в определении $\widehat{\mu}$ первый интеграл из (3.15) имеет вид

$$\int e^{i\lambda t} \widehat{\mu} \widehat{\omega} d\lambda = \sum_{l=1}^k (\alpha_l^+ e^{i\lambda_l t} + \alpha_l^- e^{-i\lambda_l t}), \quad (3.16)$$

где $\alpha_l^\pm \in \mathbb{C}^n$.

Рассмотрим второй интеграл в (3.15). Согласно п. 3) в определении $\widehat{\mu}$ имеем $\text{sing supp}(\widehat{x}) \cap \text{supp}(1 - \widehat{\mu}) = \emptyset$. Получаем $\text{sing supp}(\widehat{\omega}) \cap \text{supp}(1 - \widehat{\mu}) = \emptyset$ согласно (3.14). Применяя следствие 9.3 к каждой компоненте $\widehat{\omega}(1 - \widehat{\mu})$, получаем,

что $\widehat{\omega}(1 - \widehat{\mu}) \in \widehat{\mathcal{C}}_0^n$. Следовательно,

$$\int e^{i\lambda t} (1 - \widehat{\mu}) \widehat{\omega} d\lambda = 2\pi \mathcal{F}^{-1}((1 - \widehat{\mu}) \widehat{\omega}) \in \mathcal{C}_0^n. \quad (3.17)$$

Остается отметить, что $\alpha^+ = \bar{\alpha}^-$, так как x действителен.

Заметим, что, когда $\nu_0 = 0$, надо положить $\widehat{\mu} = 0$. В формуле (3.15) первый интеграл исчезает, и колебания конечномерной подсистемы затухают.

§ 4. Несколько доказательств

В настоящем параграфе мы доказываем предложения и леммы, использованные в предыдущем параграфе. Для этого нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Энергию (1.7) можно представить в виде

$$E(\psi) = \frac{1}{2}(\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_1) + \frac{1}{2}(\psi_1, \Lambda \psi_1), \quad (\psi_1, \psi'_1) = \langle x, \bar{x}' \rangle + \int_{\mathbb{R}} \eta \bar{\eta}' d\nu,$$

$$\psi_1 = (x, \eta(\nu)), \quad \eta = \sqrt{\rho} \xi, \quad \Lambda(\psi_1) = \Lambda(x, \eta) = \left(Bx - \int \widehat{a} \eta d\nu, \nu^2 \eta - \langle \widehat{a}, x \rangle \right).$$

Скалярное произведение (3.3) задано формой энергии, поэтому нетрудно убедиться в том, что его можно записать в виде

$$(\psi, \varphi)_{\mathcal{H}} = (\psi_2, \varphi_2) + (\psi_1, \Lambda \varphi_1). \quad (4.1)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Для любых $\zeta = (x, \eta(\nu))$, $\zeta' = (x', \eta'(\nu))$ таких, что $\nu\eta, \nu\eta' \in L_2$, выполнено $(\zeta, \Lambda\zeta') = (\Lambda\zeta, \zeta')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно замечанию 2.2 имеем $\widehat{a}_l/\nu \in L_2$ при всех $1 \leq l \leq n$. Поскольку $\nu\eta \in L_2$, то

$$\int \widehat{a}_l \eta d\nu = \int \frac{\widehat{a}_l}{\nu} \nu\eta d\nu < \infty.$$

Также имеем $\int \widehat{a}_l \eta' d\nu < \infty$. Поэтому оба выражения $(\zeta, \Lambda\zeta')$ и $(\Lambda\zeta, \zeta')$ определены корректно:

$$\begin{aligned} (\zeta, \Lambda\zeta') &= \left\langle x, B\bar{x}' - \int \widehat{a} \bar{\eta}' d\nu \right\rangle + \int \eta (\nu^2 \bar{\eta}' - \langle \widehat{a}, \bar{x}' \rangle) d\nu \\ &= \left\langle Bx - \int \widehat{a} \eta d\nu, \bar{x}' \right\rangle + \int (\nu^2 \eta - \langle \widehat{a}, x \rangle) \bar{\eta}' d\nu = (\Lambda\zeta, \zeta'). \end{aligned} \quad (4.2)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть $\psi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{matrix} \eta(\nu) \\ \zeta(\nu) \end{matrix}$. Тогда $\psi \in \mathcal{H}$, если и только если

$$\int (|\zeta|^2 + \nu^2 |\eta|^2) d\nu < \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация $\Rightarrow$ верна в силу очевидного следствия (3.3).
Импликация $\Leftarrow$ верна в силу соотношения

$$(\psi, \psi)_{\mathcal{H}} \leq \langle y, \bar{y} \rangle + c_1 \langle x, \bar{x} \rangle + c_2 \int (|\zeta|^2 + \nu^2 |\eta|^2) d\nu,$$

где $c_1, c_2 > 0$ – постоянные. Обоснуем это соотношение.

Согласно (3.3) достаточно заметить, что выполняются следующие неравенства (в них использовано замечание 2.2 ($\hat{a}_l/\nu \in L_2$) и неравенство Коши–Буняковского):

$$\begin{aligned} \langle x, B\bar{x} \rangle &\leq c_3 \langle x, \bar{x} \rangle, \\ \left| \left\langle x, \int \hat{a} \bar{\eta} d\nu \right\rangle \right| &\leq \langle x, \bar{x} \rangle^{1/2} \left\langle \int \hat{a} \eta d\nu, \int \hat{a} \bar{\eta} d\nu \right\rangle^{1/2} \\ &\leq c_4 \langle x, \bar{x} \rangle^{1/2} \left(\int \nu^2 |\eta|^2 d\nu \right)^{1/2} \leq \frac{c_4}{2} \left(\langle x, \bar{x} \rangle + \int \nu^2 |\eta|^2 d\nu \right), \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $c_3 = \|B\|$, $c_4 = (\sum_{l=1}^n \int \frac{\hat{a}_l^2}{\nu^2} d\nu)^{1/2}$. Положим $c_1 = c_3 + c_4$, $c_2 = 1 + c_4$.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Вектор $\psi \in \mathcal{H}$ лежит в $D(\Omega)$ – области определения оператора Ω тогда и только тогда, когда

$$\nu^2 \eta - \langle \hat{a}, x \rangle, \quad \nu \zeta \in L_2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (3.6) оператор Ω действует следующим образом:

$$\Omega\psi = i \begin{pmatrix} -y & -\zeta \\ Bx - \int \hat{a} \eta d\nu & \nu^2 \eta - \langle \hat{a}, x \rangle \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

По определению имеем $\psi \in D(\Omega) \Leftrightarrow \Omega\psi \in \mathcal{H}$. Для завершения доказательства остается применить предложение 4.2 к формуле (4.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.1. Неограниченность вытекает из следствия 4.1.

Самосопряженность. Согласно [10] сопряженный оператор Ω^* к неограниченному оператору Ω со всюду плотной областью определения задается следующим образом⁶:

$$\varphi \in D(\Omega^*) \Leftrightarrow (\Omega\psi, \varphi)_{\mathcal{H}} = (\psi, \varphi^*)$$

для любого $\psi \in D(\Omega)$ и некоторого $\varphi^* \in \mathcal{H}$. При этом оператор Ω^* определяется равенством $\Omega^* \varphi = \varphi^*$.

Оператор Ω называется *самосопряженным*, когда $\Omega^* = \Omega$ (кроме того, должны совпадать их области определения). Поэтому для доказательства предложения достаточно проверить три условия:

- (i) область определения $D(\Omega)$ плотна в $\mathcal{H}$;
- (ii) для любых $\psi, \varphi \in D(\Omega)$ выполнено $(\Omega\psi, \varphi)_{\mathcal{H}} = (\psi, \Omega\varphi)_{\mathcal{H}}$;

⁶Плотность области определения Ω мы покажем чуть ниже.

(iii) если для любого $\psi \in D(\Omega)$ и некоторых $\varphi, \varphi^* \in \mathcal{H}$ выполнено

$$(\Omega\psi, \varphi)_{\mathcal{H}} = (\psi, \varphi^*)_{\mathcal{H}}, \quad (4.5)$$

то $\varphi \in D(\Omega)$.

Условие (ii) обеспечивает вложение $D(\Omega) \subset D(\Omega^*)$ и равенство $\Omega = \Omega^*$ на $D(\Omega)$, а условие (iii) – обратное вложение $D(\Omega^*) \subset D(\Omega)$.

(i) Укажем семейство векторов $\psi = \begin{pmatrix} x & \eta(\nu) \\ y & \zeta(\nu) \end{pmatrix}$, $\psi \in D(\Omega)$, всюду плотное в $\mathcal{H}$. Построим его следующим образом.

Будем говорить, что $\psi \in \Psi_N$, $N \in \mathbb{N}$, если компоненты ψ удовлетворяют:

$$1) \zeta \in L_2; \quad 2) \zeta|_{|\nu|>N} = 0; \quad 3) \nu\eta \in L_2(-N, N); \quad 4) \eta|_{|\nu|>N} = \langle \hat{a}\nu^{-2}, x \rangle|_{|\nu|>N}.$$

Покажем, что $\Psi_N \subset \mathcal{H}$. Действительно, согласно замечанию 2.2 имеем $\hat{a}_l/\nu \in L_2$, поэтому из 3), 4) следует $\nu\eta \in L_2$. С учетом 1) из предложения 4.2 следует, что $\Psi_N \subset \mathcal{H}$.

Искомое семейство получим как $\Psi = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \Psi_N \subset \mathcal{H}$.

Покажем, что $\Psi \subset D(\Omega)$. Для этого достаточно проверить условия следствия 4.1. Для выбранного семейства они выполнены, так как из условий 1), 2) следует $\nu\zeta \in L_2$; из условия 4) следует $\nu^2\eta|_{|\nu|>N} = \langle \hat{a}, x \rangle|_{|\nu|>N}$. Поэтому из 3), 4) и $\hat{a}_l/\nu \in L_2$ следует $(\nu^2\eta - \langle \hat{a}, x \rangle) \in L_2$.

Условия 1)–4) налагают ограничения только на “хвосты функций”. Согласно определению скалярного произведения (3.3) их норма мала. Поэтому, очевидно, Ψ всюду плотно в $\mathcal{H}$.

(ii) Пусть $\psi = \begin{pmatrix} x^\psi & \eta^\psi \\ y^\psi & \zeta^\psi \end{pmatrix}$, $\varphi = \begin{pmatrix} x^\varphi & \eta^\varphi \\ y^\varphi & \zeta^\varphi \end{pmatrix}$, $\psi, \varphi \in D(\Omega)$. Согласно предложению 4.2 из $\psi \in \mathcal{H}$ следует $\nu\eta^\psi \in L_2$. Согласно следствию 4.1 из $\varphi \in D(\Omega)$ вытекает $\nu\zeta^\varphi \in L_2$. Поэтому из предложения 4.1 следует, что $(\Lambda\psi_1, \varphi_2) = (\psi_1, \Lambda\varphi_2)$. Согласно (4.1) и определению оператора Ω , (3.6), имеем

$$(\Omega\psi, \varphi)_{\mathcal{H}} = (i\Lambda\psi_1, \varphi_2) + (-i\psi_2, \Lambda\varphi_1) = (\psi_2, i\Lambda\varphi_1) + (\psi_1, -i\Lambda\varphi_2) = (\psi, \Omega\varphi)_{\mathcal{H}}.$$

(iii) Пусть для некоторых $\varphi, \varphi^* \in \mathcal{H}$ выполнено (4.5). Используя (3.6) и (4.1), перепишем (4.5) следующим образом:

$$(i\Lambda\psi_1, \varphi_2) + (-i\psi_2, \Lambda\varphi_1) = (\psi_2, \varphi_2^*) + (\psi_1, \Lambda\varphi_1^*). \quad (4.6)$$

Поскольку $\psi \in D(\Omega)$ произвольно, из (4.6) следует, что:

$$a) (i\Lambda\psi_1, \varphi_2) = (\psi_1, \Lambda\varphi_1^*); \quad b) (-i\psi_2, \Lambda\varphi_1) = (\psi_2, \varphi_2^*).$$

Так как $\psi, \varphi^* \in \mathcal{H}$, то согласно предложению 4.2 выполнены условия предложения 4.1: $\nu\eta^\psi, \nu\eta^{\varphi^*} \in L_2$. Поэтому, применяя предложение 4.1 к правой части равенства а), его можно переписать в виде

$$a') (i\Lambda\psi_1, \varphi_2) = (\Lambda\psi_1, \varphi_1^*).$$

Поскольку $D(\Omega)$ всюду плотно, из а'), б) следуют равенства:

$$c) -i\varphi_2 = \varphi_1^*; \quad d) i\Lambda\varphi_1 = \varphi_2^*.$$

Используя определение Λ , (3.6), запишем в с) и d) равенство бесконечномерных компонент:

$$c') - i\zeta^\varphi = \eta^\varphi^*; \quad d') i(\nu^2 \eta^\varphi - \langle \hat{a}, x^\varphi \rangle) = \zeta^\varphi^*.$$

Так как $\varphi^* \in \mathcal{H}$, согласно предложению 4.2 имеем

$$c') \Rightarrow \nu \zeta^\varphi \in L_2, \quad d') \Rightarrow \nu^2 \eta^\varphi - \langle \hat{a}, x^\varphi \rangle \in L_2.$$

Поэтому согласно следствию 4.1 выполнено $\varphi \in D(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.1 основано на следующих утверждениях.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Число $\lambda \in (-\nu_0, \nu_0)$ является собственным значением оператора Ω тогда и только тогда, когда

$$\det(B - \lambda^2 I - Q(\lambda^2)) = 0, \quad (4.7)$$

где I – единичная матрица размера $n \times n$, а $Q(\lambda^2)$ – матрица, состоящая из элементов $q_{ij} = \int \frac{\hat{a}_i(\nu)\hat{a}_j(\nu)}{\nu^2 - \lambda^2} d\nu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что интегралы $\int \frac{\hat{a}_i \hat{a}_j}{\nu^2 - \lambda^2} d\nu$, фигурирующие в определении семейства матриц $Q(\lambda^2)$, сходятся. Действительно, $\lambda \in (-\nu_0, \nu_0)$, и согласно Н6, 1) имеем $\hat{a}_l|_{(-\nu_0, \nu_0)} = 0$. Остается заметить, что согласно замечанию 2.2 выполнено $\hat{a}_l/\nu \in L_2$.

Пусть λ – собственное значение оператора Ω . Тогда существует $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \eta \\ y \\ \zeta \end{pmatrix} \neq 0$ такое, что $(\Omega - \lambda \mathbb{I})\psi = 0$, где $\mathbb{I}$ – единичный оператор на $\mathcal{H}$. Согласно определению оператора (3.6) имеем

$$\begin{cases} -\lambda\psi_1 - i\psi_2 = 0 \\ i\Lambda\psi_1 - \lambda\psi_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi_2 = i\lambda\psi_1 \\ (\Lambda - \lambda^2)\psi_1 = 0. \end{cases}$$

Перепишем соотношение $(\Lambda - \lambda^2)\psi_1 = 0$ более детально:

$$(B - \lambda^2 E)x - \int \hat{a}(\nu)\eta(\nu) d\nu = 0, \quad -\langle \hat{a}(\nu), x \rangle + (\nu^2 - \lambda^2)\eta(\nu) = 0. \quad (4.8)$$

Выразим η из последнего уравнения:

$$\eta(\nu) = \frac{\langle \hat{a}(\nu), x \rangle}{\nu^2 - \lambda^2}. \quad (4.9)$$

Подставляя (4.9) в (4.8), получим

$$(B - \lambda^2 E - Q(\lambda^2))x = 0.$$

Поскольку $\psi \neq 0$, то $x \neq 0$. Поэтому $\det(B - \lambda^2 E - Q(\lambda^2)) = 0$.

Остается показать, что полученный собственный вектор ψ принадлежит $\mathcal{H}$. Для этого покажем, что выполнены условия предложения 4.2. Согласно Н6, 1) имеем $\hat{a}_l|_{(-\nu_0, \nu_0)} = 0$. Вне этого интервала знаменатель в (4.9) не обращается в нуль. Остальное нетрудно получить, используя замечание 2.2, согласно которому $\hat{a}_l/\nu \in L_2$. Предложение доказано.

Обозначим

$$V(\lambda) = B - \lambda I - Q(\lambda). \quad (4.10)$$

Таким образом, согласно предложению 4.3 на промежутке $(-\nu_0, \nu_0)$ дискретный спектр оператора Ω состоит из корней уравнения $\det V(\lambda^2) = 0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. Число корней уравнения $\det V(\lambda) = 0$, лежащих на промежутке $[0, \nu_0^2)$, совпадает с пределом $\lim_{\nu \nearrow \nu_0} \lambda_{V(\nu^2)}^-$, где $\lambda_{V(\nu^2)}^-$ – число отрицательных собственных значений матрицы $V(\nu^2)$. Нуль не является корнем данного уравнения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Матрицы семейства $V(\lambda)$ симметричны, поэтому каждая из них имеет ровно n действительных собственных значений μ_k . Функции $\mu_k(\lambda)$ непрерывны для каждого $k = 1, \dots, n$. Доказательство утверждения основано на свойстве монотонности функций $\mu_k(\lambda)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Функции $\mu_k(\lambda)$ монотонно убывают на промежутке $[0, \nu_0^2)$ для каждого $k = 1, \dots, n$.

Доказательство предложения 4.4 дается после окончания доказательства леммы.

Далее, $\det V(\lambda) = 0$ тогда и только тогда, когда какое-либо из собственных значений $\mu_k(\lambda)$ матрицы $V(\lambda)$ обратилось в нуль.

Нетрудно убедиться в том, что $V(0) = B - K$, где матрица K определена в НЗ. Согласно НЗ матрица $B - K$ положительно определена, поэтому $\mu_k(0) > 0$ для каждого $k = 1, \dots, n$. Согласно предложению 4.4 функции $\mu_k(\lambda)$ монотонно убывают по λ . Поэтому суммарное число корней уравнений $\mu_k(\lambda) = 0$, $k = 1, \dots, n$, на промежутке $[0, \nu_0^2)$ равно количеству $\mu_k(\lambda)$, ставших отрицательными к моменту $\lambda = \nu_0^2$, что и завершает доказательство утверждения ⁷.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. На промежутке $[0, \nu_0^2)$ уравнение $\det V(\lambda) = 0$ имеет не больше n корней.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. На промежутке $(-\nu_0, \nu_0)$ оператор Ω имеет только дискретный спектр.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 4.3 из равенства $\det V(\lambda^2) = 0$, $\lambda \in (-\nu_0, \nu_0)$, следует, что λ – собственное значение оператора Ω . Покажем, что для любого $\lambda \in (-\nu_0, \nu_0)$, $\det V(\lambda^2) \neq 0$, оператор $\Omega - \lambda \mathbb{I}$ обратим.

Действительно, рассмотрим уравнение

$$(\Omega - \lambda \mathbb{I})\psi = \varphi, \quad \text{где} \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^\psi & \eta^\psi \\ y^\psi & \zeta^\psi \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^\varphi & \eta^\varphi \\ y^\varphi & \zeta^\varphi \end{pmatrix}.$$

Согласно определению оператора (3.6) имеем

$$\begin{cases} -\lambda\psi_1 - i\psi_2 = \varphi_1 \\ i\lambda\psi_1 - \lambda\psi_2 = \varphi_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi_2 = i\lambda\psi_1 + i\varphi_1 \\ (\lambda - \lambda^2)\psi_1 = \lambda\varphi_1 - i\varphi_2. \end{cases}$$

⁷Предел нужен, так как интегралы в определении матрицы $Q(\lambda)$, вообще говоря, могут расходиться в точке $\lambda = \nu_0^2$.

Перепишем соотношение $(\Lambda - \lambda^2)\psi_1 = \lambda\varphi_1 - i\varphi_2$ более подробно:

$$\begin{aligned} (B - \lambda^2 E)x^\psi - \int \widehat{a}(\nu)\eta^\psi(\nu) d\nu &= \lambda x^\varphi - i y^\varphi, \\ -\langle \widehat{a}(\nu), x^\psi \rangle + (\nu^2 - \lambda^2)\eta^\psi(\nu) &= \lambda\eta^\varphi - i\zeta^\varphi. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Выразим η^ψ из последнего уравнения в (4.11):

$$\eta^\psi(\nu) = \frac{\lambda\eta^\varphi - i\zeta^\varphi + \langle \widehat{a}(\nu), x^\psi \rangle}{\nu^2 - \lambda^2}. \quad (4.12)$$

Подставим (4.12) в первое уравнение из (4.11). Получим уравнение $V(\lambda^2)x = z$, где $z \in \mathbb{C}^n$. Поскольку $\det V(\lambda^2) \neq 0$, уравнение имеет решение.

Остается показать, что полученное решение ψ принадлежит $\mathcal{H}$. Для этого нужно проверить выполнение условий предложения 4.2. Согласно Н6, 1) имеем $\widehat{a}|_{(-\nu_0, \nu_0)} = 0$. Поэтому согласно (3.8) на интервале $(-\nu_0, \nu_0)$, т.е. там, где знаменатель в (4.12) может обращаться в нуль, числитель тождественно равен нулю. Остальное легко получить, используя замечание 2.2, согласно которому $\widehat{a}_l/\nu \in L_2$. Предложение доказано.

Таким образом, мы показали, что оператор Ω на промежутке $(-\nu_0, \nu_0)$ имеет только дискретный спектр, состоящий из корней уравнения $\det V(\lambda^2) = 0$, причем корней не более n и нуль не является корнем. Доказательство леммы закончено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4.4. Сначала покажем, что семейство $V(\lambda)$ монотонно убывает, т.е. квадратичные формы $V(\lambda_1) - V(\lambda_2)$ положительно определены для любых $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \nu_0^2$. Действительно,

$$V(\lambda_1) - V(\lambda_2) = (\lambda_2 - \lambda_1)I + Q(\lambda_2) - Q(\lambda_1).$$

Матрица $(\lambda_2 - \lambda_1)I$ определена положительно. Элементы матрицы $Q(\lambda_2) - Q(\lambda_1)$ имеют вид

$$q_{ij}(\lambda_2) - q_{ij}(\lambda_1) = \int \widehat{a}_i \widehat{a}_j \left(\frac{1}{\nu^2 - \lambda_2} - \frac{1}{\nu^2 - \lambda_1} \right) d\nu,$$

причем $\frac{1}{\nu^2 - \lambda_2} - \frac{1}{\nu^2 - \lambda_1} > 0$ при $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \nu_0^2$. Значит, $Q(\lambda_2) - Q(\lambda_1)$ является матрицей Грамма системы векторов $z_i(\nu) = \widehat{a}_i(\nu) \sqrt{\frac{1}{\nu^2 - \lambda_2} - \frac{1}{\nu^2 - \lambda_1}}$, $i = 1, \dots, n$, и определена неотрицательно.

В [11, § 17] доказана следующая формула. Пусть V – произвольная симметричная матрица. Упорядочим ее собственные значения по возрастанию: $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$. Тогда для любого $k = 1, \dots, n$

$$\mu_k = \max_{R_k} \min_{x \in R_k} \frac{\langle Vx, x \rangle}{\langle x, x \rangle}, \quad (4.13)$$

где R_k – всевозможные пространства размерности $n - k + 1$.

Поскольку матрица $V(\lambda_1) - V(\lambda_2)$ положительно определена, имеем

$$\frac{\langle V(\lambda_2)x, x \rangle}{\langle x, x \rangle} < \frac{\langle V(\lambda_1)x, x \rangle}{\langle x, x \rangle}.$$

Согласно (4.13) получаем $\mu_k(\lambda_2) < \mu_k(\lambda_1)$.

§ 5. Примеры

5.1. Термостат Клейна–Гордона. Предположения Н6, 2)–4) являются условиями общего положения, а Н6, 1) может показаться несколько необычным. В этом пункте мы приводим естественный пример системы, для которой выполнено условие Н6, 1).

Рассмотрим уравнения

$$\ddot{y} + By = \int f u dq, \quad (5.1)$$

$$u_{tt} = u_{qq} - \nu_0^2 u + \langle f, y \rangle, \quad (5.2)$$

где $u = u(q, t)$, $f = f(q)$ – действительная вектор-функция, преобразование Фурье $\hat{f}$ которой также действительно, ν_0 – постоянная, $y = y(t) \in \mathbb{R}^n$, точки сверху, как обычно, обозначают дифференцирование по времени. Однородная часть соотношения (5.2) представляет собой хорошо известное уравнение Клейна–Гордона.

Применим к уравнению (5.2) преобразование Фурье $\eta(s, t) = \int e^{-iqs} u(q, t) dq$. Учтем, что $\int f u dq = \frac{1}{2\pi} \int \hat{f} \eta ds$. Обозначим $g = \frac{\hat{f}}{\sqrt{2\pi}}$, $x = \sqrt{2\pi} y$. Получим следующую систему:

$$\ddot{x} + Bx = \int g \eta ds, \quad (5.3)$$

$$\ddot{\eta} + (s^2 + \nu_0^2) \eta = \langle g, x \rangle. \quad (5.4)$$

Соответствующий лагранжиан имеет вид $\mathcal{L} = \mathcal{L}_T + \mathcal{L}_0 - V_{\text{int}}$, где

$$\mathcal{L}_T = \frac{1}{2} \int (\dot{\eta}^2 - (s^2 + \nu_0^2) \eta^2) ds, \quad \mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle - \frac{1}{2} \langle x, Bx \rangle, \quad V_{\text{int}} = - \left\langle x, \int g \eta ds \right\rangle.$$

Положим $\nu^2 = \nu_0^2 + s^2$, $\nu s \geq 0$. Выберем произвольную функцию $\rho(\nu) > 0$. Учитывая соотношение $s ds = \nu d\nu$, получим

$$\mathcal{L}_T = \frac{1}{2} \int \rho(\nu) (\dot{\xi}^2 - \nu^2 \xi^2) d\nu, \quad V_{\text{int}} = - \left\langle x, \int \kappa \xi d\nu \right\rangle,$$

где

$$\begin{aligned} \xi(\nu) &= \sqrt{\frac{\nu}{s(\nu)\rho}} \eta, \quad |\nu| > \nu_0, \quad s(\nu) = \nu \sqrt{1 - \nu_0^2 \nu^{-2}}, \\ \kappa(\nu) &= \begin{cases} 0, & \text{если } |\nu| \leq \nu_0, \\ \sqrt{\frac{\nu\rho}{s(\nu)}} g(s(\nu)), & \text{если } |\nu| > \nu_0. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Заметим, что мы получили систему с лагранжианом, в точности совпадающую с лагранжианом системы (1.4), (1.5).

Имеет место следующее очевидное

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Пусть $g(s)$ – дифференцируемая функция и $g(0) = 0$. Тогда функции $\hat{a}_l$, $\hat{w}_{lm}$, определенные в (2.2), непрерывны и выполнены равенства $\hat{a}_l|_{(-\nu_0, \nu_0)} = \hat{w}_{lm}|_{(-\nu_0, \nu_0)} = 0$.

Заметим, что в этом случае интервал $(-\nu_0, \nu_0)$ удовлетворяет условию Н6, 1).

5.2. Общий случай линейного взаимодействия. Здесь более общая линейная система будет сведена к системе, рассмотренной в § 1.

Введем некоторые обозначения. Зафиксируем $-\infty \leq p < q \leq +\infty$. Для почти всюду положительной функции $\varphi(s): (p, q) \rightarrow \mathbb{R}$ обозначим

$$L_2^\varphi = \left\{ f(s) \mid \int_p^q \varphi f^2 ds < \infty \right\}.$$

Рассмотрим систему, состоящую из конечномерной и бесконечномерной частей, положение которых описывается координатами $u(t) \in \mathbb{R}^n$ и $f(s, t): (p, q) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ соответственно, где $s \in (p, q)$ параметризует бесконечномерную часть. Пусть кинетическая и потенциальная энергии имеют следующий вид:

$$T = \frac{1}{2} \langle \dot{u}, A \dot{u} \rangle - \left\langle \dot{u}, \int_p^q \alpha(s) \dot{f}(s) ds \right\rangle + \frac{1}{2} \int_p^q a(s) \dot{f}^2(s) ds, \quad (5.6)$$

$$V = \frac{1}{2} \langle u, H u \rangle - \left\langle u, \int_p^q \gamma(s) f(s) ds \right\rangle + \frac{1}{2} \int_p^q h(s) f^2(s) ds, \quad (5.7)$$

где $a(s)$ и $h(s)$ – некоторые почти всюду положительные функции, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ такие, что $\frac{\alpha_i}{\sqrt{a}}, \frac{\gamma_i}{\sqrt{h}} \in L_2(p, q)$, A и H – симметрические положительно определенные матрицы размера $n \times n$. Все функции мы считаем действительными.

Нетрудно видеть, что кинетическая и потенциальная энергии корректно определены соответственно на векторах $(\dot{u}, \dot{f})$, (u, f) , $\dot{u}, u \in \mathbb{R}^n$, $\dot{f} \in L_2^a$, $f \in L_2^h$.

Кинетическая энергия предполагается положительно определенной, т. е. положительной для любого ненулевого вектора $(\dot{u}, \dot{f})$, $\dot{f} \in L_2^a$.

Уравнения движения системы с лагранжианом $L = T - V$ имеют вид

$$A \ddot{u} - \int_p^q \alpha \dot{f} ds = -H u + \int_p^q \gamma f ds, \quad a \ddot{f} - \langle \dot{u}, \alpha \rangle = -h f + \langle u, \gamma \rangle. \quad (5.8)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.1. Пусть выполнены следующие предположения:

- 1) кинетическая энергия положительно определена;
- 2) $\frac{\alpha_i}{\sqrt{a}}, \frac{\gamma_i}{\sqrt{h}}, \frac{\sqrt{h} \alpha_i}{a} \in L_2(p, q)$;
- 3) функция $\frac{h(s)}{a(s)}$ дифференцируема, $(\frac{h(s)}{a(s)})' > 0$, $\inf \frac{h(s)}{a(s)} = \nu_0^2$ для некоторой постоянной $\nu_0 \geq 0$ и $\frac{h(s)}{a(s)} \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow q$;
- 4) для функции $\rho = \sqrt{\frac{a}{h}} (\frac{h}{a})'$ выполнено $\lim_{s \rightarrow p} \rho < \infty$.

Тогда система (5.8) при помощи замены переменных сводится к системе вида (1.4), (1.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Сначала диагонализуем кинетическую энергию. Для этого перепишем ее в следующем виде:

$$2T = \int_p^q \left(\sqrt{a} \dot{f} - \left\langle \dot{u}, \frac{\alpha}{\sqrt{a}} \right\rangle \right)^2 ds + \langle \dot{u}, \tilde{A} \dot{u} \rangle, \quad (5.9)$$

где $\tilde{A}$ – матрица с элементами $a_{ij} - \int_p^q \frac{\alpha_i \alpha_j}{a} ds$.

Далее нам будет нужно следующее.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. Матрица $\tilde{A}$ положительно определена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В (5.9) выберем произвольно $\dot{u} \neq 0$. Возьмем $\dot{f} = \langle \dot{u}, \frac{\alpha}{a} \rangle$. Согласно условию 2) имеем $\dot{f} \in L_2^a(p, q)$, поэтому кинетическая энергия определена корректно. Поскольку $\dot{u} \neq 0$, согласно условию 1) имеем $T > 0$. В выражении (5.9) первое слагаемое обратится в нуль. Отсюда следует искомое предложение.

Сделаем замену $(u, f) \mapsto (x, \eta)$, $x = \tilde{A}^{1/2}u$, $\eta = \sqrt{a}f - \langle u, \frac{\alpha}{\sqrt{a}} \rangle$. Заметим, что если $f \in L_2^h$, то $\eta \in L_2^{h/a}$. Тогда кинетическая энергия примет вид

$$2T = \int_p^q \dot{\eta}^2 ds + \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle.$$

Прямым вычислением можно убедиться в том, что потенциальная энергия примет вид

$$2V = \langle x, Bx \rangle - \left\langle x, \int_p^q \kappa \eta ds \right\rangle + \int_p^q \frac{h(s)}{a(s)} \eta^2(s) ds, \quad (5.10)$$

где $B = \tilde{A}^{-1/2} \tilde{H} \tilde{A}^{-1/2}$, $\tilde{H}$ – матрица с элементами

$$h_{ij} + \int_p^q \frac{h \alpha_i \alpha_j}{a^2} ds - \int_p^q \frac{\gamma_i \alpha_j + \gamma_j \alpha_i}{a} ds,$$

$$\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n), \kappa = \tilde{\gamma} \tilde{A}^{-1/2}, \tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_n), \tilde{\gamma}_i = \frac{h \alpha_i}{a \sqrt{a}} - \frac{\gamma_i}{\sqrt{a}}.$$

Из условия 2) следует, что для любого $i = 1, \dots, n$ интегралы $\int_p^q \kappa_i \eta ds$ сходятся при $\eta \in L_2^{h/a}$, а также сходятся все интегралы в определении $\tilde{H}$. Таким образом, система (5.8) принимает вид

$$\ddot{x} + Bx = \int_p^q \kappa \eta ds, \quad \ddot{\eta} + \frac{h}{a} \eta = \langle \kappa, x \rangle. \quad (5.11)$$

2. Согласно условию 3) корректно определена замена параметра: $s \mapsto \nu = \sqrt{\frac{h}{a}}$, где ν определено на промежутке $[\nu_0, \infty)$, $\nu_0 \geq 0$. Тогда $ds = \frac{2d\nu}{\rho}$, где $\rho = \frac{1}{\nu}(\frac{h}{a})'$. Продолжим функции κ_i нулем на промежуток $(0, \nu_0)$, а функцию ρ на этом промежутке выберем произвольной и отличной от нуля. Обозначим $\xi = \frac{\eta}{\rho}$. Система (5.11) примет вид

$$\ddot{x} + Bx = 2 \int_0^\infty \kappa \xi d\nu, \quad \rho(\ddot{\xi} + \nu^2 \xi) = \langle \kappa, x \rangle. \quad (5.12)$$

Продолжим функции κ_i четным образом и рассмотрим систему

$$\ddot{x} + Bx = \int \kappa \xi d\nu, \quad \rho(\ddot{\xi} + \nu^2 \xi) = \langle \kappa, x \rangle. \quad (5.13)$$

Нетрудно видеть, что каждому решению системы (5.12) однозначно соответствует решение системы (5.13) с четными начальными условиями. Это завершает доказательство утверждения.

§ 6. Окончание доказательства теоремы 2.1

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Если энергия E конечна, то функции $x_l(t)$ и $\dot{x}_l(t)$ ограничены для каждого $1 \leq l \leq n$, $|x_l| \leq c_1 = c_1(E)$, $|\dot{x}_l| \leq c_2 = c_2(E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношения (2.1) и условия Н3 следует, что если x_l неограничены, то $\langle (B - K)x, x \rangle$ положительно и неограничено и $E = +\infty$. Если неограничены функции $\dot{x}_l$, то в (2.1) неограничено $\langle \dot{x}, \dot{x} \rangle$. Предложение доказано.

Из ограниченности скоростей следует равномерная непрерывность функций $x_l(t)$, т. е. мы доказали свойство 1) из теоремы 2.1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. Если энергия E конечна, то $|\langle x, \int \kappa \xi d\nu \rangle| \leq c_3 = c_3(E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, согласно неравенству Коши–Буняковского

$$\left(\int \kappa_s \xi d\nu \right)^2 = \left(\int \frac{\kappa_s}{\sqrt{\rho\nu}} \sqrt{\rho\nu} \xi d\nu \right)^2 \leq k_{ss} \int \rho \nu^2 \xi^2 d\nu, \quad k_{ss} = \int \frac{\kappa_s^2}{\rho \nu^2} d\nu,$$

поэтому

$$\left\langle x, \int \kappa \xi d\nu \right\rangle^2 \leq \sum_{l=1}^n x_l^2 \sum_{s=1}^n \left(\int \kappa_s \xi d\nu \right)^2 \leq \langle x, x \rangle \int \rho \nu^2 \xi^2 d\nu \sum_{s=1}^n k_{ss}.$$

Согласно Н2 имеем $k_{ss} < \infty$. Из (2.1) следует, что

$$\int \rho \nu^2 \xi^2 d\nu \leq 2 \left(E + \left\langle x, \int \kappa \xi d\nu \right\rangle \right),$$

поэтому

$$\left\langle x, \int \kappa \xi d\nu \right\rangle^2 \leq 2 \langle x, x \rangle \sum_{s=1}^n k_{ss} \left(E + \left\langle x, \int \kappa \xi d\nu \right\rangle \right),$$

что равносильно

$$\left(\left\langle x, \int \kappa \xi d\nu \right\rangle - \langle x, x \rangle \sum_{s=1}^n k_{ss} \right)^2 \leq \langle x, x \rangle \sum_{s=1}^n k_{ss} \left(2E + \langle x, x \rangle \sum_{s=1}^n k_{ss} \right).$$

С учетом предложения 6.1 получаем искомое утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3. Если энергия E конечна, то

$$\mathcal{E} := \int \rho (\dot{\xi}^2 + \nu^2 \xi^2) d\nu \leq c_4 = c_4(E).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО немедленно следует из (1.7) и предложений 6.1, 6.2.

§ 7. Доказательство теоремы 2.2

Пусть χ_M – характеристическая функция множества $M \subset \mathbb{R}$. Если M – интервал $(b_1, b_2) \subset \mathbb{R}$, то мы будем учитывать его ориентацию:

$$\chi_{(b_1, b_2)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } b_1 < t < b_2, \\ -1, & \text{если } b_2 < t < b_1, \\ 0, & \text{если } (b_1 - t)(t - b_2) \leq 0. \end{cases}$$

Пусть $(x(t), \xi(\nu, t))$ – решение системы (1.4)–(1.6) с энергией

$$E(x(t), \xi(\nu, t)) < \infty.$$

Для любого действительного t положим

$$x_l^t = \chi_{[0, t]} x_l(\tau), \quad \hat{x}_l^t = \mathcal{F}(x_l^t), \quad 1 \leq l \leq n. \quad (7.1)$$

Тогда $\hat{x}_l^t$ – целые аналитические функции. Поскольку x_l^t действительны, имеем

$$\hat{x}_l^t(\lambda) = \overline{\hat{x}_l^t(-\lambda)}. \quad (7.2)$$

Рассмотрим соответствующий вектор $\hat{x}^t(\lambda) \in \hat{\mathcal{C}}_b^n$.

Теперь рассмотрим уравнение (1.5), считая, что $x(t)$ известно. С учетом соотношений (1.6) и (7.1) получим $\xi(\nu, t) = \xi_1(\nu, t) + \xi_2(\nu, t)$, где

$$\xi_2(\nu, t) := \xi_0(\nu) \cos(\nu t) + \frac{1}{\nu} \dot{\xi}_0(\nu) \sin(\nu t) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{i\nu} \xi_{\bullet} e^{i\nu t} \right), \quad \xi_{\bullet} := i\nu \xi_0 + \dot{\xi}_0,$$

$$\begin{aligned} \xi_1(\nu, t) &= \left\langle \frac{\kappa}{\rho\nu}, \int_0^t \sin(\nu(t - \tau)) x(\tau) d\tau \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\kappa}{2i\rho\nu}, \int_0^t (e^{i\nu t - i\nu\tau} - e^{-i\nu t + i\nu\tau}) x(\tau) d\tau \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\kappa}{2i\rho\nu}, (e^{i\nu t} \hat{x}^t(\nu) - e^{-i\nu t} \hat{x}^t(-\nu)) \right\rangle = \operatorname{Re} \left\langle \frac{\kappa}{i\rho\nu}, \hat{x}^t(\nu) e^{i\nu t} \right\rangle. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Обозначим через $\|\cdot\|_{L_2}$ норму в L_2 : $\|g\|_{L_2}^2 = \int |g(\nu)|^2 d\nu$ для любого $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

7.1. Доказательство утверждения 2) теоремы 2.2. Обозначим

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}(\nu) &= 2\pi \frac{\kappa \xi_{\bullet}(\nu)}{\nu}, \\ \mathcal{A}_0^+(t) &= - \int_t^\infty W(\tau) x(t - \tau) d\tau, \quad \mathcal{A}_0^-(t) = \int_{-\infty}^t W(\tau) x(t - \tau) d\tau, \\ \gamma &= (\gamma_1, \dots, \gamma_n), \quad \mathcal{A}_0^* = (\mathcal{A}_{01}^*, \dots, \mathcal{A}_{0n}^*), \quad \star \in \{+, -\}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. Для любого $1 \leq l \leq n$ имеем $\hat{\gamma}_l \in L_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$\sqrt{\rho} \xi_{\bullet}, \quad \frac{\kappa_l}{\sqrt{\rho\nu}} \in L_2. \quad (7.5)$$

Действительно, первое включение следует из определения $\xi_{\bullet} = i\nu \xi_0 + \dot{\xi}_0$ и условия Н4, а второе – из Н2. Поэтому $\frac{\kappa_l \xi_{\bullet}}{\nu} \in L_1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. Для любого $1 \leq l \leq n$ имеем

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_{0l}^+(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathcal{A}_{0l}^-(t) = 0.$$

Доказательство предложения 7.2 приведено в конце параграфа.

ЛЕММА 7.1. Пусть $\gamma = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{\gamma})$. Тогда

$$\int \kappa \xi d\nu = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{W}_{\diamond}^{\pm} \widehat{x}) + \operatorname{Re}(\gamma(t) + \mathcal{A}_0^{\pm}(t)). \quad (7.6)$$

СЛЕДСТВИЕ 7.1. Выполняется утверждение 2) теоремы 2.2:

$$\int \kappa \xi d\nu = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{W}_{\diamond}^{\pm} \widehat{x}) + \vartheta^{\pm}, \quad \vartheta^{\pm} \in \mathcal{C}_0^{\pm n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 7.1. Сначала заметим, что согласно (7.3)

$$\int \kappa \xi_2 d\nu = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int e^{i\lambda t} \widehat{\gamma}(\lambda) d\lambda = \operatorname{Re} \gamma(t).$$

Из (7.3) следует, что

$$\begin{aligned} \int \kappa \xi_1 d\nu &= \operatorname{Re} \mathcal{A}(t), \\ \mathcal{A}(t) &:= \frac{1}{2\pi} \int e^{i\nu t} \widehat{W}(\nu) \widehat{x}^t(\nu) d\nu = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{W} \widehat{x}^t)(t) = (W * x^t)(t), \end{aligned}$$

где $(W * x^t)(t)$ вычисляется по обычному правилу умножения матрицы на вектор, только вместо операции умножения делается свертка.

Согласно Н5 имеем $w_{lm} \in \mathcal{M}$. Поэтому $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_0^{\pm}(t) + \mathcal{A}_1^{\pm}(t)$, где $\mathcal{A}_0^{\pm}$ определяются формулами из (7.4), и

$$\mathcal{A}_1^{\pm}(t) = \int \chi_{[0, \pm\infty)}(\tau) W(\tau) x(t - \tau) d\tau = (\chi_{[0, \pm\infty)} W) * x(t).$$

Функции x_m действительны, а функции $\widehat{w}_{lm}$ чисто мнимые. Поэтому $\overline{W}(\tau) = -W(-\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$. Следовательно,

$$\operatorname{Re} \mathcal{A}_1^{\pm} = \frac{1}{2} (\chi_{[0, \pm\infty)}(\tau) W(\tau) - \chi_{[0, \pm\infty)}(\tau) W(-\tau)) * x = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{W}_{\diamond}^{\pm} \widehat{x}),$$

где $\widehat{W}_{\diamond}^{\pm}$ – матрицы, состоящие из элементов $\widehat{w}_{\diamond lm}^{\pm}$,

$$\widehat{w}_{\diamond lm}^{\pm} = \frac{1}{2} \mathcal{F}(\chi_{[0, \pm\infty)}(w_{lm}(\tau) - w_{lm}(-\tau))) = \frac{1}{4\pi} (\widehat{\chi}_{[0, \pm\infty)} * (\widehat{w}_{lm}(\lambda) - \widehat{w}_{lm}(-\lambda))). \quad (7.7)$$

Используя явную форму обобщенной функции [12]

$$\widehat{\chi}_{[0, \pm\infty)}(\lambda) = \pm \pi \delta(\lambda) + \frac{1}{i} \text{ v.p. } \frac{1}{\lambda},$$

получаем (2.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 7.2. Имеем

$$|\mathcal{A}_{0l}^{\pm}(t)| = \left| \sum_{m=1}^n x_m * (\chi_{[t, \pm\infty)} w_{lm})(t) \right| \leq \sum_{m=1}^n \|\chi_{[t, \pm\infty)} w_{lm}\|_{\mathcal{M}} \|x_m\|_{\infty}.$$

Согласно следствию 9.1 получаем $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|\chi_{[t, \pm\infty)} w_{lm}\|_{\mathcal{M}} = 0$.

7.2. Доказательство утверждения 1) теоремы 2.2. Далее понадобятся следующие утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7.1. Функция $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(\xi(\nu, t), \dot{\xi}(\nu, t))$, определенная в предположении 6.3, имеет вид

$$\mathcal{E}(t) = \|\langle \hat{a}, \hat{x}^t \rangle + \sqrt{\rho} \xi_\bullet\|_{L_2}^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямым вычислением из (7.3) получаем $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{22} + \mathcal{E}_{21} + \mathcal{E}_{11}$, где

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{22}(t) &:= \int \rho(\nu^2 \xi_2^2 + \dot{\xi}_2^2) d\nu = \|\sqrt{\rho} \xi_\bullet\|_{L_2}^2, \\ \mathcal{E}_{21}(t) &:= \int \rho(\nu^2 \xi_2 \xi_1 + \dot{\xi}_2 \dot{\xi}_1) d\nu = \int \langle \hat{a}, \hat{x}^t \rangle \sqrt{\rho} \xi_\bullet d\nu + \int \overline{\langle \hat{a}, \hat{x}^t \rangle} \sqrt{\rho} \xi_\bullet d\nu, \\ \mathcal{E}_{11}(t) &:= \int \rho(\nu^2 \xi_1^2 + \dot{\xi}_1^2) d\nu = \|\langle \hat{a}, \hat{x}^t \rangle\|_{L_2}^2. \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 7.2. Имеем $\|\langle \hat{a}, \hat{x}^t \rangle\|_{L_2}^2 < c_5(E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 6.3 следует, что $\mathcal{E}(t) \leq c_4(E)$. Согласно утверждению 7.1 получаем

$$\mathcal{E}(t) = \int |\sqrt{\rho} \xi_\bullet + \langle \hat{a}, \hat{x}^t \rangle|^2 d\nu < c_4(E).$$

Из Н4 вытекает, что $\sqrt{\rho} \xi_\bullet \in L_2$. Следствие доказано.

В следствии 7.2 заключена основная идея доказательства: если $\langle \hat{a}, \hat{x}^t \rangle \in L_2$ при всех t , то $\hat{x}$ не может содержать сингулярностей на частотах $\nu \notin (-\nu_0, \nu_0)$ (см. предположение Н6, 1)). Далее мы это показываем строго.

1. Семейство обобщенных функций $\hat{a}_l \hat{x}_l^t \in \hat{\mathcal{C}}_b$, рассматриваемых как функционалы на $\hat{\mathcal{M}}$, при $t \rightarrow +\infty$ стремится к

$$\hat{a}_l \hat{x}_l^+ := \hat{a}_l \mathcal{F}(\chi_{[0, +\infty]} x_l) \in \hat{\mathcal{C}}_b.$$

Действительно, из Н5 следует, что $a_l = \mathcal{F}^{-1}(\hat{a}_l) \in \mathcal{M}$. Поэтому для любой функции $\hat{\varphi} = \mathcal{F}(\varphi) \in \hat{\mathcal{M}}$ выполнено $a_l * \hat{\varphi} \in \mathcal{M}$. Следовательно,

$$(\hat{a}_l \hat{x}_l^t, \hat{\varphi}) = 2\pi(\mathcal{F}^{-1}(\hat{a}_l \hat{x}_l^t), \varphi) = 2\pi \int (a_l * x_l^t) \bar{\varphi} d\tau = 2\pi \int x_l^t (a_l * \bar{\varphi}) d\tau.$$

Из следствия 9.1 получаем, что при $t \rightarrow +\infty$ это выражение стремится к

$$2\pi \int x_l^+ (a_l * \bar{\varphi}) d\tau = (\hat{a}_l \hat{x}_l^+, \hat{\varphi}).$$

Отсюда следует, что $\langle \hat{a}, \hat{x}^t \rangle$ стремится к $\langle \hat{a}, \hat{x}^+ \rangle$, где $\hat{x}^t = (\hat{x}_1^t, \dots, \hat{x}_n^t)$, а $\hat{x}^+ = (\hat{x}_1^+, \dots, \hat{x}_n^+)$.

2. Следствие 7.2 показывает, что L_2 -норма выражения $\langle \hat{a}, \hat{x}^+ \rangle$, рассматриваемого как функционал на $\hat{\mathcal{M}} \cap L_2 \subset L_2$, не превосходит $\sqrt{2c_3(E)}$. Поскольку

$\widehat{\mathcal{M}} \cap L_2$ плотно в L_2 , по теореме Хана–Банаха $\langle \widehat{a}, \widehat{x}^+ \rangle$ может быть продолжено до функционала на L_2 с той же нормой. Этот функционал мы будем обозначать так же: $\langle \widehat{a}, \widehat{x}^+ \rangle$. По теореме Рисса функционал $\langle \widehat{a}, \widehat{x}^+ \rangle$ может быть отождествлен с некоторым элементом из L_2 .

Аналогично получаем, что $\langle \widehat{a}, \widehat{x}^- \rangle \in L_2$, где $\widehat{x}_l^- = \mathcal{F}(\chi_{(-\infty, 0]} x_l)$. Поскольку $\widehat{x}_l = \widehat{x}_l^+ + \widehat{x}_l^-$, получаем $\langle \widehat{a}, \widehat{x} \rangle \in L_2$.

3. Рассмотрим уравнение (1.4):

$$\ddot{x} = -Bx + \int \kappa(\nu) \xi(\nu) d\nu.$$

Сделаем его преобразование Фурье и используем уже доказанное утверждение 2) теоремы 2.2. Получим

$$(B - \lambda^2 E - \widehat{W}_\diamond^*(\lambda)) \widehat{x}(\lambda) = \widehat{\vartheta}^*(\lambda) \quad \text{или} \quad \widehat{V}^*(\lambda) \widehat{x} = \widehat{\vartheta}^*, \quad (7.8)$$

где $\widehat{V}^*(\lambda)$ определено в (2.4), $\widehat{\vartheta}^* \in \mathcal{C}_0^{n*}$, $\star \in \{+, -\}$.

4. Сначала покажем, что $\text{sing supp}(\widehat{x}) \subset [-\nu_0, \nu_0]$. Предположим противное, т.е. существует $\lambda_0 \in \text{sing supp}(\widehat{x})$, $\lambda_0 \notin [-\nu_0, \nu_0]$. Для определенности будем считать, что $\lambda_0 \in \text{sing supp}^+(\widehat{x})$.

В этом случае согласно (7.8) имеем $\widehat{V}^+(\lambda) \widehat{x} = \widehat{\vartheta}^+$, где $\widehat{\vartheta}^+ \in \widehat{\mathcal{C}}_0^{n+}$. Домножим последнее соотношение на произвольную $\widehat{\mu}_1 \in \widehat{\mathcal{M}}$, $\widehat{\mu}_1(\lambda_0) \neq 0$, $\text{supp}(\widehat{\mu}_1)$ – компакт. Получим следующую систему:

$$\langle \widehat{a}, \widehat{x} \rangle \in L_2, \quad (\widehat{\mu}_1 \widehat{V}^+)(\lambda) \widehat{x} = 0 \pmod{\widehat{\mathcal{C}}_0^{n+}}, \quad (7.9)$$

где равенство по $\text{mod } \widehat{\mathcal{C}}_0^{n+}$ означает равенство с точностью до элемента из $\widehat{\mathcal{C}}_0^{n+}$. Преобразуем эту систему к более удобному виду.

а) Согласно (2.4) и предложению 2.1 элементы матрицы $(\widehat{\mu}_1 \widehat{V}^+)$ лежат в $\widehat{\mathcal{M}}$. Поэтому мы можем применить лемму 9.7: так как $\lambda_0 \in \text{sing supp}^+(\widehat{x})$, то $\det(\widehat{\mu}_1 \widehat{V}^+)(\lambda_0) = 0$, что равносильно $\det \widehat{V}^+(\lambda_0) = 0$.

Согласно Н6, 3) существует индекс l такой, что $\widehat{a}_l(\lambda_0) \neq 0$. Из замечания 2.2 следует, что $\frac{\widehat{a}_l}{\nu} \in L_2$. Домножим первое соотношение (7.9) на $\frac{2\pi \widehat{a}_l}{i\nu} \in L_2$; в результате получим $\frac{2\pi \widehat{a}_l}{i\nu} \langle \widehat{a}, \widehat{x} \rangle = \langle \widehat{w}_l, \widehat{x} \rangle \in L_1 \subset \widehat{\mathcal{C}}_0$.

б) Выберем достаточно малый интервал I . Поскольку

$$\lambda_0 \in \text{sing supp}^+(\widehat{x}), \quad \text{то} \quad \exists \widehat{\mu} \in \widehat{\mathcal{M}}, \quad \text{supp } \widehat{\mu} \subset I: \widehat{\mu} \widehat{x} \notin \widehat{\mathcal{C}}_0^{n+}. \quad (7.10)$$

Домножим оба соотношения (7.9) на $\widehat{\mu}$. Получим следующую систему:

$$\langle \widehat{w}_l, \widehat{\mu} \widehat{x} \rangle = 0 \pmod{\widehat{\mathcal{C}}_0^+}, \quad (\widehat{\mu}_1 \widehat{V}^+)(\lambda) (\widehat{\mu} \widehat{x}) = 0 \pmod{\widehat{\mathcal{C}}_0^{n+}}, \quad \det \widehat{V}^+(\lambda_0) = 0. \quad (7.11)$$

5. Теперь получим противоречие с условием Н6, 3). Из Н6, 2) следует, что λ_0 – изолированный нуль первого порядка уравнения $\det \widehat{V}^+(\lambda_0) = 0$. Поэтому из леммы 9.8 следует, что

$$\widehat{\mu} \widehat{x} = \widehat{\sigma} \widehat{y} \pmod{\widehat{\mathcal{C}}_0^{n+}}, \quad (7.12)$$

где $\widehat{\sigma} \in \widehat{\mathcal{M}}^n$, $\widehat{y} \in \widehat{\mathcal{C}}_b$, причем $\widehat{\sigma}(\lambda_0) \in \text{Ker } \widehat{V}^+(\lambda_0)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.3. Если $\lambda_0 \in \text{sing supp}^+(\hat{x})$, то $\lambda_0 \in \text{sing supp}^+(\hat{y})$.

Доказательство предложения 7.3 приведено после окончания доказательства теоремы.

Подставляя (7.12) в первое уравнение (7.11), получим

$$\langle \hat{w}_l, \hat{\sigma} \rangle \hat{y} = 0 \pmod{\hat{\mathcal{C}}_0^+}. \quad (7.13)$$

Применяя лемму 9.7 к одномерной матрице $\langle \hat{w}_l, \hat{\sigma} \rangle$, из (7.13) получаем, что

$$\langle \hat{w}_l(\lambda_0), \hat{\sigma}(\lambda_0) \rangle = 0 \quad \text{или} \quad \hat{w}_l(\lambda_0) \perp \hat{\sigma}(\lambda_0).$$

Поскольку $\hat{\sigma}(\lambda_0) \in \text{Ker } \hat{V}^+(\lambda_0)$ и ядро матрицы $\hat{V}^+(\lambda_0)$ одномерно, то

$$\begin{aligned} \hat{w}_l(\lambda_0) \notin \text{Ker } \hat{V}^+(\lambda_0) &\Rightarrow \hat{w}_l(\lambda_0) \in \text{Im } \hat{V}^+(\lambda_0) \\ &\Rightarrow \hat{a}(\lambda_0) = \frac{i\lambda_0}{2\pi\hat{a}_l(\lambda_0)} \hat{w}_l(\lambda_0) \in \text{Im } \hat{V}^+(\lambda_0), \end{aligned}$$

так как мы выбрали $\hat{a}_l(\lambda_0) \neq 0$. Это противоречит условию Н6, 3).

6. Осталось показать, что $\text{sing supp}(\hat{x}) \cap \{\pm\nu_0\} = \emptyset$. Согласно (7.8) и лемме 9.7 для того, чтобы $\{\pm\nu_0\} \in \text{sing supp}(\hat{x})$, необходимо $\det \hat{V}^*(\pm\nu_0) = 0$ для какой-нибудь $\star$ из $\{+, -\}$. Однако согласно Н6, 4) это невозможно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 7.3. Рассмотрим произвольный интервал $J \supset \lambda_0$ и произвольный элемент $\hat{\mu}_2 \in \hat{\mathcal{M}}$, $\text{supp } \hat{\mu}_2 \subset J$, $\hat{\mu}_2(\lambda_0) \neq 0$. Покажем, что $\hat{\mu}_2 \hat{y} \notin \hat{\mathcal{C}}_0^+$.

Выберем $\hat{\mu}_3 \in \hat{\mathcal{M}}$, $\hat{\mu}_3|_{\text{supp } \hat{\mu}} = 1$, $\text{supp } \hat{\mu}_3$ достаточно мал. Домножим обе части (7.12) на $\hat{\mu}_3$. Получим $\hat{\mu} \hat{x} = \hat{\mu}_3 \hat{\sigma} \hat{y} \notin \mathcal{C}_0^{n+}$. Это значит, что $\hat{\sigma}$ имеет компоненту j такую, что $\hat{\mu}_3 \hat{\sigma}_j \hat{y} \notin \mathcal{C}_0^+$. Согласно лемме 9.4 имеем $\hat{\mu}_3 \hat{\sigma}_j = \hat{\mu}_4 \hat{\mu}_2$ для некоторой $\hat{\mu}_4 \in \hat{\mathcal{M}}$. Поэтому $\hat{\mu}_4 \hat{\mu}_2 \hat{y} \notin \mathcal{C}_0^+$, а значит, $\hat{\mu}_2 \hat{y} \notin \mathcal{C}_0^+$.

§ 8. Динамика термостата

В настоящем параграфе мы исследуем финальную динамику термостата. Мы показываем, что термостат слабо выходит на такой же предельный режим, как и конечномерная подсистема.

ТЕОРЕМА 8.1. Пусть выполнены предположения Н1–Н6 и α_l , λ_l и k такие же, как в теореме 3.1. Тогда для любой действительной функции $\hat{\varphi}(\nu)$ такой, что $\frac{\hat{\varphi}}{\sqrt{\rho\nu}} \in L_2 \cap \hat{\mathcal{M}}$, существуют постоянные $\beta_1, \dots, \beta_k$, при которых выполнено

$$\int \xi \hat{\varphi} d\nu = \sum_{l=1}^k (\beta_l e^{i\lambda_l t} + \bar{\beta}_l e^{-i\lambda_l t}) + \vartheta(t), \quad (8.1)$$

где $\vartheta \in \mathcal{C}_0$. Коэффициенты β_l вычисляются по формуле

$$\beta_l = \int \frac{\hat{\varphi} \langle \alpha_l, \hat{a} \rangle}{\sqrt{\rho}(\lambda^2 - \lambda_l^2)} d\lambda. \quad (8.2)$$

Таким образом, при $t \rightarrow \pm\infty$ динамика термостата слабо стремится к конечной линейной комбинации гармонических колебаний с частотами λ_l .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8.1. Обозначим $\widehat{\mu} = \frac{2\pi\widehat{\varphi}\widehat{a}}{i\sqrt{\rho\nu}} \in \widehat{\mathcal{M}}^n$, так как согласно Н5 имеем $\widehat{a} \in \widehat{\mathcal{M}}^n$.

В п. 7.1 была выведена формула из утверждения 2) теоремы 2.2:

$$\int \kappa \xi d\nu = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{W}_{\diamond}^{\pm} \widehat{x}) + \vartheta^{\pm}, \quad \vartheta^{\pm} \in \mathcal{C}_0^{n\pm}. \quad (8.3)$$

Заменив κ на $\widehat{\varphi}$, аналогично можно получить формулу⁸

$$\int \widehat{\varphi} \xi d\nu = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{\mu}_{\diamond}^{\pm}, \widehat{x}) + \vartheta_1^{\pm}, \quad \vartheta_1^{\pm} \in \mathcal{C}_0^{\pm}, \quad \widehat{\mu}_{\diamond}^{\pm} = \mathcal{F}(\mu_{\diamond}^{\pm}), \quad (8.4)$$

причем компоненты вектора $\mu_{\diamond}^{\pm}$ вычисляются следующим образом:

$$\mu_{\diamond l}^{\pm}(\tau) = \begin{cases} \frac{\pm(\mu_l(\tau) - \mu_l(-\tau))}{2}, & \text{если } \pm\tau > 0, \\ 0, & \text{если } \pm\tau < 0. \end{cases} \quad (8.5)$$

Поэтому (аналогично п. 7.1)

$$\widehat{\mu}_{\diamond l}^{\pm}(\nu) = \pm \frac{1}{4}(\widehat{\mu}_l(\nu) - \widehat{\mu}_l(-\nu)) + \frac{1}{2\pi i} \text{v.p.} \int \frac{\lambda \widehat{\mu}_l(\lambda)}{\nu^2 - \lambda^2} d\lambda. \quad (8.6)$$

Из (8.5) вытекает, что $\mu_{\diamond}^{\pm} \in \mathcal{M}^n$, следовательно, $\widehat{\mu}_{\diamond}^{\pm} \in \widehat{\mathcal{M}}^n$.

Из теоремы 3.1 следует, что

$$\widehat{x} = 2\pi \sum_{l=1}^k (\alpha_l \delta(\lambda - \lambda_l) + \bar{\alpha}_l \delta(\lambda + \lambda_l)) + \widehat{\vartheta}_2, \quad \widehat{\vartheta}_2 \in \widehat{\mathcal{C}}_0^n.$$

Подставляя это выражение в (8.4), получаем

$$\begin{aligned} \int \widehat{\varphi} \xi d\nu &= 2\pi \sum_{l=1}^k \mathcal{F}^{-1}(\langle \widehat{\mu}_{\diamond}^{\pm}, \alpha_l \rangle \delta(\lambda - \lambda_l) + \langle \widehat{\mu}_{\diamond}^{\pm}, \bar{\alpha}_l \rangle \delta(\lambda + \lambda_l) + \langle \widehat{\mu}_{\diamond}^{\pm}, \widehat{\vartheta}_2 \rangle) + \vartheta_1^{\pm} \\ &= \sum_{l=1}^k (\langle \widehat{\mu}_{\diamond}^{\pm}(\lambda_l), \alpha_l \rangle e^{i\lambda_l t} + \langle \widehat{\mu}_{\diamond}^{\pm}(-\lambda_l), \bar{\alpha}_l \rangle e^{-i\lambda_l t}) + \vartheta^{\pm}, \end{aligned} \quad (8.7)$$

где $\vartheta^{\pm} = \sum_{l=1}^k \mathcal{F}^{-1}(\langle \widehat{\mu}_{\diamond}^{\pm}, \widehat{\vartheta}_2 \rangle) + \vartheta_1^{\pm} \in \mathcal{C}_0^{\pm}$ согласно 2, (d) из п. 9.1.

Далее, из формулы (8.6) следует, что $\widehat{\mu}_{\diamond}^{+}(\lambda_l) = \widehat{\mu}_{\diamond}^{+}(-\lambda_l) = \widehat{\mu}_{\diamond}^{-}(\lambda_l) = \widehat{\mu}_{\diamond}^{-}(-\lambda_l)$ для всех $1 \leq l \leq k$, так как согласно Н6, 1) имеем $\widehat{\mu} = \frac{2\pi\widehat{\varphi}\widehat{a}}{i\sqrt{\rho\nu}}|_{(-\nu_0, \nu_0)} = 0$, $\pm\lambda_l \in (-\nu_0, \nu_0)$. Поэтому финальная динамика системы на $+\infty$ и $-\infty$ одинакова.

С учетом последнего мы получаем формулу (8.2) прямой подстановкой соотношения (8.6) в (8.7).

⁸То обстоятельство, что в формуле (8.4) стоит скалярное произведение, а в формуле (8.3) – умножение на матрицу, объясняется тем, что κ – векторнозначная функция, а $\widehat{\varphi}$ – скалярнозначная.

§ 9. Пространства $\mathcal{C}_b$, $\mathcal{C}_0^\pm$, $\mathcal{M}$ и их преобразования Фурье

9.1. Определения. Здесь мы рассматриваем пространства $\mathcal{C}_b$, $\mathcal{C}_0^\pm$, $\mathcal{M}$ и их преобразования Фурье и обсуждаем их основные свойства.

1. (а) Пусть $\mathcal{C}_b$ – пространство равномерно непрерывных ограниченных функций $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Это банахово пространство с нормой из L_∞ :

$$\|\varphi\|_\infty = \sup |\varphi|, \quad \varphi \in \mathcal{C}_b.$$

Кроме того, $\mathcal{C}_b$ – ассоциативная коммутативная банахова алгебра: для любых $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_b$ выполнено $\varphi\psi \in \mathcal{C}_b$ и $\|\varphi\psi\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty \|\psi\|_\infty$.

(б) Пусть $\mathcal{C}_0^+ \subset \mathcal{C}_b$ – пространство функций, стремящихся к нулю на $+\infty$, и $\mathcal{C}_0^- \subset \mathcal{C}_b$ – пространство функций, стремящихся к нулю на $-\infty$. Тогда $\mathcal{C}_0^\pm$ – замкнутые подпространства и, кроме того, идеалы в $(\mathcal{C}_b, \cdot)$, т. е. $\mathcal{C}_0^\pm \cdot \mathcal{C}_b \subset \mathcal{C}_0^\pm$.

Пусть $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0^+ \cap \mathcal{C}_0^-$. Это также замкнутый идеал в $\mathcal{C}_b$.

(с) Пусть $\mathcal{M}$ – пространство плотностей конечных счетно-аддитивных радоновых $\mathbb{C}$ -мер на $\mathbb{R}$. Эти плотности являются обобщенными функциями на $\mathbb{R}$. Для любого элемента $\mu \in \mathcal{M}$ соответствующая мера есть $\mu(\tau) d\tau$. Пространство $\mathcal{M} \subset \mathcal{C}_b^*$ является банаховым пространством с нормой

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}} = \sup_{\|\varphi\|_\infty=1} \mu(\varphi), \quad \mu(\varphi) = \int \varphi \mu d\tau, \quad \varphi \in \mathcal{C}_b, \quad \mu \in \mathcal{M}.$$

Ясно, что $L_1 \subset \mathcal{M}$.

Напомним, что $\mathcal{M}$ – сверточная банахова алгебра:

$$\|\mu_1 * \mu_2\|_{\mathcal{M}} \leq \|\mu_1\|_{\mathcal{M}} \|\mu_2\|_{\mathcal{M}}.$$

Для любой $\mu \in \mathcal{M}$ существует разложение

$$\mu = \mu_1 - \mu_2 + i\mu_3 - i\mu_4, \quad (9.1)$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \in \mathcal{M}$ неотрицательны (см., например, [9]).

(д) Определена свертка элементов $\mu \in \mathcal{M}$ и $\varphi \in \mathcal{C}_b$. Рассмотрим линейный изометрический оператор

$$s_t: \mathcal{C}_b \rightarrow \mathcal{C}_b, \quad (s_t\varphi)(\tau) = \varphi(t - \tau).$$

Тогда $(\mu * \varphi)(t) = \mu(s_t\varphi)$. Согласно лемме 9.2 получим $\mathcal{M} * \mathcal{C}_b \subset \mathcal{C}_b$, $\mathcal{M} * \mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_0$ и

$$\|\mu * \varphi\|_\infty \leq \|\mu\|_{\mathcal{M}} \|\varphi\|_\infty.$$

2. (а) Положим $\widehat{\mathcal{C}}_b = \mathcal{F}(\mathcal{C}_b)$. Элементы пространства $\widehat{\mathcal{C}}_b$ являются обобщенными функциями. В частности, $\widehat{\mathcal{C}}_b$ содержит δ -функцию. Соотношение $\mathcal{F}^{-1}(\widehat{\varphi} * \widehat{\psi}) = 2\pi\varphi\psi$ показывает, что $(\widehat{\mathcal{C}}_b, *)$ – ассоциативная коммутативная алгебра: $\widehat{\varphi} * \widehat{\psi} \in \widehat{\mathcal{C}}_b$ для любых $\widehat{\varphi}, \widehat{\psi} \in \widehat{\mathcal{C}}_b$.

(б) Кроме того, $\widehat{\mathcal{C}}_0^+ = \mathcal{F}(\mathcal{C}_0^+)$, $\widehat{\mathcal{C}}_0^- = \mathcal{F}(\mathcal{C}_0^-)$ и $\widehat{\mathcal{C}}_0 = \mathcal{F}(\mathcal{C}_0)$ являются идеалами в $(\widehat{\mathcal{C}}_b, *)$.

(с) Положим $\widehat{\mathcal{M}} = \mathcal{F}(\mathcal{M})$. Нетрудно показать, что $\widehat{\mathcal{M}} \subset \widehat{\mathcal{C}}_b$, однако $\widehat{\mathcal{M}} \neq \widehat{\mathcal{C}}_b$ (см. [9]). Согласно теореме Римана–Лебега образ $\mathcal{F}(L_1)$ лежит в $\mathcal{C}_0$.

Согласно 1, (с) имеем $\widehat{\mu}_1 \widehat{\mu}_2 \in \widehat{\mathcal{M}}$ для любых $\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2 \in \widehat{\mathcal{M}}$.

(д) Согласно 1, (д) имеем $\widehat{\mathcal{M}} \cdot \widehat{\mathcal{C}}_b \subset \widehat{\mathcal{C}}_b$, $\widehat{\mathcal{M}} \cdot \widehat{\mathcal{C}}_0^+ \subset \widehat{\mathcal{C}}_0^+$, $\widehat{\mathcal{M}} \cdot \widehat{\mathcal{C}}_0^- \subset \widehat{\mathcal{C}}_0^-$ и $\widehat{\mathcal{M}} \cdot \widehat{\mathcal{C}}_0 \subset \widehat{\mathcal{C}}_0$.

3. (а) Пусть $\widehat{\varphi} \in \widehat{\mathcal{C}}_b$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Будем говорить, что $\lambda \notin \text{sing sup}^+(\widehat{\varphi})$ в том и только в том случае, если существует интервал $I \ni \lambda$ такой, что для любого $\widehat{\mu} \in \widehat{\mathcal{M}}$, $\text{supp } \widehat{\mu} \subset I$, имеет место включение $\widehat{\mu}\widehat{\varphi} \in \widehat{\mathcal{C}}_0^+$.

(б) Обратно, для $\widehat{\varphi} \in \widehat{\mathcal{C}}_b$ будем говорить, что $\lambda \in \text{sing sup}^+(\widehat{\varphi})$ в том и только в том случае, если для любого интервала $I \ni \lambda$ существует $\widehat{\mu} \in \widehat{\mathcal{M}}$ такое, что $\text{supp } \widehat{\mu} \subset I$ и $\widehat{\mu}\widehat{\varphi} \in \widehat{\mathcal{C}}_b \setminus \widehat{\mathcal{C}}_0^+$.

Аналогично определим $\text{sing sup}^-(\widehat{\varphi})$. Ясно, что множества $\text{sing sup}^+(\widehat{\varphi})$, $\text{sing sup}^-(\widehat{\varphi})$ и $\text{sing sup}(\widehat{\varphi}) = \text{sing sup}^+(\widehat{\varphi}) \cup \text{sing sup}^-(\widehat{\varphi})$ замкнуты.

4. (а) Будем использовать следующие обозначения: $\mathcal{C}_b^n$ – пространство, состоящее из элементов вида $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$, где $\varphi_l \in \mathcal{C}_b$, а T обозначает транспонирование.

Аналогично определяются пространства $\mathcal{C}_0^n, \mathcal{C}_0^{n\pm}, \mathcal{M}^n$, а также их преобразования Фурье.

(б) Будем использовать следующее: например, для $\widehat{\mu} \in \widehat{\mathcal{M}}$ и $\widehat{x} \in \widehat{\mathcal{C}}_b^n$ запись $\widehat{\mu}\widehat{x}$ означает $(\widehat{\mu}\widehat{x}_1, \dots, \widehat{\mu}\widehat{x}_n)^T$.

9.2. Леммы о $\mathcal{C}_b$, $\mathcal{C}_0^\pm$, $\mathcal{M}$ и их преобразованиях Фурье. Сначала введем некоторые обозначения. Рассмотрим функции

$$h_0(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|, & \text{если } |\tau| \leq 1, \\ 0, & \text{если } |\tau| \geq 1, \end{cases} \quad h_k(\tau) = h_0(k - \tau), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно, $h_k \in \mathcal{C}_0$ и $\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k = 1$.

Для любого $K \in \mathbb{N}$ положим

$$\mathbf{h}_K^< = \sum_{|k| \leq K} h_k, \quad \mathbf{h}_K^> = \sum_{|k| > K} h_k.$$

ЛЕММА 9.1. Пусть $\mu \in \mathcal{M}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $N > 0$ такое, что $|\mu(\varphi)| < \varepsilon \|\varphi\|_\infty$ для любого $\varphi \in \mathcal{C}_b$, удовлетворяющего условию $\text{supp } \varphi \cap [-N, N] = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно представлению (9.1) достаточно рассматривать неотрицательные μ . Тогда

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}} = \mu(1) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu(h_k).$$

Последний ряд сходится. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $K \in \mathbb{N}$ такое, что $\mu(\mathbf{h}_K^>) < \varepsilon$. Для любого $\varphi \in \mathcal{C}_b$ такого, что $\text{supp } \varphi \cap [-K - 2, K + 2] = \emptyset$, получаем

$$|\mu(\varphi)| = |\mu(\mathbf{h}_K^>\varphi)| \leq \|\varphi\|_\infty |\mu(\mathbf{h}_K^>)| < \varepsilon \|\varphi\|_\infty.$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 9.1. Для любого $\mu \in \mathcal{M}$ выполнено

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\chi[t, +\infty)\mu\|_{\mathcal{M}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \|\chi(-\infty, t]\mu\|_{\mathcal{M}} = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку μ можно считать неотрицательным, имеем

$$\|\chi_{[t,+\infty)}\mu\|_{\mathcal{M}} = (\chi_{[t,+\infty)}\mu)(1) \leq \mu(\tilde{h}), \quad \tilde{h} = \sum_{k=[t]-1}^{+\infty} h_k.$$

Остается заметить, что $\text{supp}(\tilde{h}) \cap (-t+2, t-2) = \emptyset$, $\|\tilde{h}\|_{\infty} = 1$. Поэтому согласно лемме 9.1 имеем $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\chi_{[t,+\infty)}\mu\|_{\mathcal{M}} = 0$. Второй предел вычисляется аналогично.

ЛЕММА 9.2. Для любых $\varphi \in \mathcal{C}_b$ и $\mu \in \mathcal{M}$ имеем $\mu * \varphi \in \mathcal{C}_b$ и $\|\mu * \varphi\|_{\infty} \leq \|\mu\|_{\mathcal{M}} \|\varphi\|_{\infty}$. Кроме того, если $\varphi \in \mathcal{C}_0^*$, $\star \in \{+, -\}$, то $\mu * \varphi \in \mathcal{C}_0^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $\mu * \varphi$ ограничена, так как

$$|(\mu * \varphi)(t)| = |\mu(\mathbf{s}_t \varphi)| \leq \|\mu\|_{\mathcal{M}} \|\varphi\|_{\infty}.$$

Поскольку φ равномерно непрерывна, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\alpha > 0$ такое, что $|\mathbf{s}_{t+\alpha} \varphi - \mathbf{s}_t \varphi| < \varepsilon$ для любого t . Тогда

$$|(\mu * \varphi)(t + \alpha) - (\mu * \varphi)(t)| = |\mu(\mathbf{s}_{t+\alpha} \varphi - \mathbf{s}_t \varphi)| \leq \|\mu\|_{\mathcal{M}} \varepsilon.$$

Отсюда следует равномерная непрерывность $\varphi * h$.

Теперь предположим, что $\varphi \in \mathcal{C}_0^+$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно лемме 9.1 существует $N > 1$ такое, что

$$|\mu(\psi)| < \varepsilon \|\psi\|_{\infty} \quad \text{для } \psi \in \mathcal{C}_b: \text{supp } \psi \cap (-N-1, N+1) = \emptyset. \quad (9.2)$$

Если понадобится, мы можем выбрать большее N такое, что

$$|\varphi(\tau)| < \varepsilon \quad \forall \tau > N. \quad (9.3)$$

Получаем $(\mu * \varphi)(t) = \mu(\mathbf{s}_t \varphi) = \mu(\mathbf{h}_N^< \mathbf{s}_t \varphi) + \mu(\mathbf{h}_N^> \mathbf{s}_t \varphi)$. Оценим последние два члена отдельно.

Для $t > 2N$ согласно (9.3) имеем $\|\mathbf{h}_N^< \mathbf{s}_t \varphi\|_{\infty} < \varepsilon$, поэтому

$$|\mu(\mathbf{h}_N^< \mathbf{s}_t \varphi)| < \varepsilon \|\mu\|_{\mathcal{M}}. \quad (9.4)$$

С другой стороны, $\text{supp}(\mathbf{h}_N^> \mathbf{s}_t \varphi) \cap (-N-1, N+1) = \emptyset$. Следовательно,

$$|\mu(\mathbf{h}_N^> \mathbf{s}_t \varphi)| < \varepsilon \|\mathbf{h}_N^> \mathbf{s}_t \varphi\|_{\infty} \leq \varepsilon \|\varphi\|_{\infty}. \quad (9.5)$$

Комбинируя оценки (9.4) и (9.5), получим $|(\mu * \varphi)(t)| \leq \varepsilon (\|\mu\|_{\mathcal{M}} + \|\varphi\|_{\infty})$.

Случай $\varphi \in \mathcal{C}_0^-$ рассматривается аналогично.

СЛЕДСТВИЕ 9.2. Для любых $\widehat{\varphi} \in \widehat{\mathcal{C}}_b$, $\widehat{\varphi}_0 \in \widehat{\mathcal{C}}_0^*$, $\star \in \{+, -\}$, и $\widehat{\mu} \in \widehat{\mathcal{M}}$ выполнено $\widehat{\mu} \widehat{\varphi} \in \widehat{\mathcal{C}}_b$ и $\widehat{\mu} \widehat{\varphi}_0 \in \widehat{\mathcal{C}}_0^*$.

ЛЕММА 9.3. Пусть $\widehat{\beta} \in \widehat{\mathcal{M}}$, $\widehat{\beta}(0) = 1$ и $\widehat{\beta}_r(\lambda) = \widehat{\beta}(r\lambda)$. Тогда для любого $\widehat{\varphi} \in \widehat{\mathcal{C}}_b$ выполнено

$$\lim_{r \rightarrow 0} \|\mathcal{F}^{-1}(\widehat{\beta}_r \widehat{\varphi}) - \varphi\|_{\infty} = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что $\beta_r(\varphi) = \beta(\varphi_r)$ для любой $\varphi \in \mathcal{C}_b$, где $\varphi_r(\tau) = \varphi(r\tau)$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Существует $b > 0$ такое, что

$$|\varphi(t - \tau) - \varphi(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad |\tau| \leq b. \quad (9.6)$$

Согласно лемме 9.1 можно выбрать $r_0 > 0$ такое, что

$$|\beta(\varphi)| < \varepsilon \|\varphi\|_\infty \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_b: \quad \text{supp}(\varphi) \cap \left[2 - \frac{b}{r_0}, -2 + \frac{b}{r_0}\right] = \emptyset. \quad (9.7)$$

Далее мы предполагаем, что $0 < r < r_0$. Выберем целое $K \in [-2 + b/r, -1 + b/r]$. Получим

$$\begin{aligned} (\beta_r * \varphi)(t) &= \beta_r(\mathbf{s}_t \varphi) = \beta(\mathbf{s}_{t/r} \varphi_r) \\ &= \varphi(t) \beta(\mathbf{h}_K^<) + \beta(\mathbf{h}_K^<(\mathbf{s}_{t/r} \varphi_r - \varphi(t))) + \beta(\mathbf{h}_K^>\mathbf{s}_{t/r} \varphi_r). \end{aligned}$$

Имеют место следующие оценки:

1) поскольку $\beta(1) = 1$ и

$$\text{supp}(\mathbf{h}_K^>) \cap \left[-2 - \frac{b}{r}, 2 + \frac{b}{r}\right] = \emptyset, \quad (9.8)$$

неравенство (9.7) влечет

$$|\beta(\mathbf{h}_K^<) - 1| = |\beta(\mathbf{h}_K^>)| \leq \varepsilon \|\mathbf{h}_K^>\|_\infty = \varepsilon; \quad (9.9)$$

2) согласно (9.6) имеем

$$|(\mathbf{s}_{t/r} \varphi_r)(\tau) - \varphi(t)| < \varepsilon \quad \forall |\tau| \leq \frac{b}{r},$$

неравенство $K \leq b/r_0 - 1$ показывает, что $\|\mathbf{h}_K^<(\mathbf{s}_{t/r} \varphi_r - \varphi(t))\|_\infty < \varepsilon$, таким образом, получаем

$$|\beta(\mathbf{h}_K^<(\mathbf{s}_{t/r} \varphi_r - \varphi(t)))| \leq \|\beta\|_{\mathcal{M}} \|\mathbf{h}_K^<(\mathbf{s}_{t/r} \varphi_r - \varphi(t))\|_\infty \leq \varepsilon \|\beta\|_{\mathcal{M}}; \quad (9.10)$$

3) используя (9.8), получаем

$$|\beta(\mathbf{h}_K^>\mathbf{s}_{t/r} \varphi_r)| \leq \varepsilon \|\varphi\|_\infty. \quad (9.11)$$

Из комбинации оценок (9.9)–(9.11) следует

$$|(\beta_r * \varphi)(t) - \varphi(t)| < \varepsilon(2\|\varphi\|_\infty + \|\beta\|_{\mathcal{M}}).$$

ЛЕММА 9.4. Пусть $\hat{\mu} \in \widehat{\mathcal{M}}$, $\hat{\mu}(\lambda) \neq 0$, и I – достаточно малый интервал, содержащий λ . Тогда:

(а) для любого $\hat{\mu}_0 \in \widehat{\mathcal{M}}$, $\text{supp } \hat{\mu}_0 \subset I$, выполнено $\hat{\mu}_0 = \hat{\mu} \hat{\mu}_1$ для некоторого $\hat{\mu}_1 \in \widehat{\mathcal{M}}$;

(б) для любого $\hat{\varphi} \in \widehat{\mathcal{C}}_b$, $\text{supp } \hat{\varphi} \subset I$, выполнено $\hat{\varphi} = \hat{\mu} \hat{\varphi}_1$ для некоторой $\hat{\varphi}_1 \in \widehat{\mathcal{C}}_b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности считаем, что $\lambda = 0$. Предположим, что $\text{supp } \hat{\mu}_0 = [-\alpha, \alpha] \subset I$. Ниже α будет выбрана достаточно малой. Положим $\beta = \chi_{[-1,1]}$ и $\beta_\varepsilon(\tau) = \beta(\varepsilon\tau)$. Как обычно, $\hat{\beta}_\varepsilon = \mathcal{F}(\beta_\varepsilon)$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\mu}_0}{\hat{\mu}} &= \frac{\hat{\mu}_0}{\hat{\beta}_\varepsilon * \hat{\mu} - (\hat{\beta}_\varepsilon * \hat{\mu} - \hat{\mu})} \\ &= \frac{\hat{\mu}_0}{\hat{\beta}_\varepsilon * \hat{\mu}} + \frac{\hat{\mu}_0}{(\hat{\beta}_\varepsilon * \hat{\mu})^2} (\hat{\beta}_\varepsilon * \hat{\mu} - \hat{\mu}) + \frac{\hat{\mu}_0}{(\hat{\beta}_\varepsilon * \hat{\mu})^3} (\hat{\beta}_\varepsilon * \hat{\mu} - \hat{\mu})^2 + \dots \end{aligned}$$

Пусть $\hat{h}$ – гладкая функция такая, что $\hat{h}|_{[-1,1]} = 1$ и $\text{supp}(\hat{h}) \subset [-2, 2]$. Тогда

$$\hat{h}_\alpha(\lambda) = \hat{h}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right), \quad \hat{f}_{\varepsilon,\alpha} = \frac{\hat{h}_\alpha}{\hat{\beta}_\varepsilon * \hat{\mu}}, \quad f_{\varepsilon,\alpha} = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}_{\varepsilon,\alpha}), \quad g_\varepsilon = \mathcal{F}^{-1}(\hat{\mu} - \hat{\beta}_\varepsilon * \hat{\mu}).$$

Пусть $\hat{h}|_{\text{supp}(\hat{\mu}_0)} = 1$. Тогда

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\hat{\mu}_0}{\hat{\mu}}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\hat{\mu}_0(\hat{h}_\alpha)^{k+1}}{(\hat{\beta}_\varepsilon * \hat{\mu})^{k+1}}\right) * \mathcal{F}^{-1}((\hat{\mu} - \hat{\beta}_\varepsilon * \hat{\mu})^k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_0 * f_{\varepsilon,\alpha}^{*k} * g_\varepsilon^{*k}.$$

Если интервал I и $\varepsilon > 0$ достаточно малы, то $(\hat{\beta}_\varepsilon * \hat{\mu})|_I$ близко к $\hat{\mu}(0) \neq 0$. Кроме того, так как функции $\hat{\beta}_\varepsilon$ и $\hat{h}_\alpha$ гладкие, то $\hat{f}_{\varepsilon,\alpha}$ также гладкая и $f_{\varepsilon,\alpha}$ быстро убывает. Поскольку $\text{supp}(\hat{h}_\alpha)$ компактен, функция $f_{\varepsilon,\alpha}$ гладкая. Отсюда вытекают следующие соотношения:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \|g_\varepsilon\|_{\mathcal{M}} = 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow +0} \|f_{\varepsilon,\alpha}\|_{\mathcal{M}} = |b_\varepsilon| \|h\|_{\mathcal{M}} \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (9.12)$$

где $1/b_\varepsilon = (\hat{\beta}_\varepsilon * \hat{\mu})(0)$. Мы докажем это несколькими строками ниже.

Согласно (9.12) можно выбрать $\varepsilon, \alpha > 0$ такие, что $\|f_{\varepsilon,\alpha}\|_{\mathcal{M}} \|g_\varepsilon\|_{\mathcal{M}} \leq 1/2$. Оценка

$$\|\mathcal{F}^{-1}(\hat{\mu}_0/\hat{\mu})\|_{\mathcal{M}} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|\mu_0\|_{\mathcal{M}} \|f_{\varepsilon,\alpha}\|_{\mathcal{M}}^k \|g_\varepsilon\|_{\mathcal{M}}^k < \infty$$

завершает доказательство п. (а).

Доказательство п. (b) аналогично, конечная оценка имеет следующий вид:

$$\|\mathcal{F}^{-1}(\hat{\varphi}/\hat{\mu})\|_{\infty} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|\varphi\|_{\infty} \|f_{\varepsilon,\alpha}\|_{\mathcal{M}}^k \|g_\varepsilon\|_{\mathcal{M}}^k < \infty.$$

Теперь докажем (9.12). Первое соотношение вытекает из следствия 9.1. Докажем второе:

$$\hat{f}_{\varepsilon,\alpha} = b_\varepsilon \hat{h}_\alpha + \hat{J} \hat{h}_\alpha, \quad \hat{J} = \frac{1}{\hat{\beta}_\varepsilon * \hat{\mu}} - b_\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\|f_{\varepsilon,\alpha}\|_{\mathcal{M}} \leq \|b_\varepsilon h_\alpha\|_{\mathcal{M}} + \|\mathcal{F}^{-1}(\hat{J} \hat{h}_\alpha)\|_{\mathcal{M}}. \quad (9.13)$$

Функция $\hat{J}$ имеет компактный носитель и является гладкой в малой окрестности нуля. Поскольку нас интересует поведение $\hat{J}$ только в малой окрестности

нуля, без ограничения общности будем считать, что $\hat{J} = \lambda \hat{J}_1$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$, где $\hat{J}_1$ гладкая и имеет компактный носитель. (Вообще говоря, нам достаточно, чтобы $\|J_1\|_{\mathcal{M}} < \infty$.) Поэтому

$$\|\mathcal{F}^{-1}(\hat{J}\hat{h}_\alpha)\|_{\mathcal{M}} = \|J_1 * \mathcal{F}^{-1}(\lambda\hat{h}_\alpha)\|_{\mathcal{M}} \leq \|J_1\|_{\mathcal{M}} \|\mathcal{F}^{-1}(\lambda\hat{h}_\alpha)\|_{\mathcal{M}}.$$

Остается заметить, что

$$\mathcal{F}^{-1}(\lambda\hat{h}_\alpha)(\tau) = \alpha^2 \mathcal{F}^{-1}(\lambda\hat{h})(\alpha\tau).$$

Следовательно, $\|\mathcal{F}^{-1}(\lambda\hat{h}_\alpha)\|_{\mathcal{M}} = \alpha \|\mathcal{F}^{-1}(\lambda\hat{h})\|_{\mathcal{M}}$. С учетом $\|h_\alpha\|_{\mathcal{M}} = \|h\|_{\mathcal{M}}$ из соотношения (9.13) получаем

$$\|f_{\varepsilon, \alpha}\|_{\mathcal{M}} \leq |b_\varepsilon| \|h\|_{\mathcal{M}} + \alpha \|J_1\|_{\mathcal{M}} \|\mathcal{F}^{-1}(\lambda\hat{h})\|_{\mathcal{M}}.$$

9.3. Леммы о сингулярном носителе. Рассмотрим детальнее свойства элементов из $\hat{\mathcal{C}}_b$ в зависимости от их сингулярного носителя.

ЛЕММА 9.5. Пусть $\hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{C}}_b$, $\star \in \{+, -\}$ и $\text{sing supp}^*(\hat{\varphi}) = \emptyset$. Тогда $\hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{C}}_0^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\hat{\beta} \in \hat{\mathcal{M}}$, $\hat{\beta}(0) = 1$, $\text{supp}(\hat{\beta}) \subset [-1, 1]$, и пусть $\hat{\beta}_r(\lambda) = \hat{\beta}(r\lambda)$. Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда согласно лемме 9.3 для достаточно малого r имеем

$$\|\mathcal{F}^{-1}(\hat{\beta}_r \hat{\mu} \hat{\varphi}) - \mathcal{F}^{-1}(\hat{\mu} \hat{\varphi})\|_{\infty} < \varepsilon.$$

Множество $\text{supp}(\hat{\beta}_r \hat{\varphi}) \subset [-1/r, 1/r]$ компактно. Следовательно, $\hat{\beta}_r \hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{C}}_0^*$. (Действительно, достаточно выбрать конечное покрытие отрезка $[-1/r, 1/r]$ интервалами I из определения 3, (а) в п. 9.1: $[-1/r, 1/r] \subset \bigcup_{j=1}^N I_j$, и воспользоваться равенством $\hat{\beta}_r \hat{\varphi} = \sum_{j=1}^n \hat{\mu}_j \hat{\beta}_r \hat{\varphi}$, где $\text{supp } \hat{\mu}_j \subset I_j$.) Поэтому для достаточно большого $\star\tau > 0$

$$|\mathcal{F}^{-1}(\hat{\mu} \hat{\varphi})(\tau)| \leq \|\mathcal{F}^{-1}(\hat{\beta}_r \hat{\mu} \hat{\varphi}) - \mathcal{F}^{-1}(\hat{\mu} \hat{\varphi})\|_{\infty} + |(\hat{\beta}_r \hat{\mu} \hat{\varphi})(\tau)| \leq \varepsilon.$$

СЛЕДСТВИЕ 9.3. Пусть $\hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{C}}_b$, $\hat{\mu} \in \hat{\mathcal{M}}$ и $\text{sing supp}^*(\hat{\varphi}) \cap \text{supp } \hat{\mu} = \emptyset$, $\star \in \{+, -\}$. Тогда $\hat{\mu} \hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{C}}_0^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольное $\lambda \in \mathbb{R}$.

Пусть $\lambda \notin \text{sing supp}^*(\hat{\varphi})$. Тогда существует интервал I такой, что для любого $\hat{\nu} \in \hat{\mathcal{M}}$ выполнено $\hat{\nu} \hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{C}}_0^*$. Следовательно, $\hat{\nu} \hat{\mu} \hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{C}}_0^*$. Значит, $\lambda \notin \text{sing supp}^*(\hat{\mu} \hat{\varphi})$.

Пусть $\lambda \in \text{sing supp}^*(\hat{\varphi})$. Тогда $\lambda \notin \text{supp } \hat{\mu}$. Значит, существует интервал $I \ni \lambda$ такой, что $I \cap \text{supp } \hat{\mu} = \emptyset$. Выберем произвольное $\hat{\nu} \in \hat{\mathcal{M}}$ такое, что $\text{supp } \hat{\nu} \in I$. Тогда $\hat{\nu} \hat{\mu} = 0$ и $\hat{\nu} \hat{\mu} \hat{\varphi} = 0 \in \hat{\mathcal{C}}_0^*$. Следовательно, $\lambda \notin \text{sing supp}^*(\hat{\mu} \hat{\varphi})$.

Таким образом, $\text{sing supp}^*(\hat{\mu} \hat{\varphi}) = \emptyset$. Для завершения доказательства остается применить лемму 9.5.

9.4. Леммы о системах уравнений. Справедливы следующие утверждения.

ЛЕММА 9.6. Пусть матрица $\widehat{M}$ размера $n \times n$ состоит из элементов $\widehat{\mu}_{ij} \in \widehat{\mathcal{M}}$ и $\det \widehat{M}(\lambda_0) \neq 0$ в некоторой точке λ_0 . Тогда на некотором достаточно малом интервале I , $\lambda_0 \in I$, определена матрица $\widehat{M}^{-1}$ с элементами из $\widehat{\mathcal{M}}$ такая, что $\widehat{M}^{-1}\widehat{M} = E$ в любой точке $\lambda \in I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В некоторой окрестности точки λ_0 имеем $\det \widehat{M} \neq 0$, так как элементы матрицы $\widehat{M}$ лежат в $\widehat{\mathcal{M}}$, а $\widehat{\mathcal{M}} \in \mathcal{C}_b$. Согласно стандартной формуле элементы обратной матрицы $\widehat{\sigma}_{ij}$ имеют вид $\widehat{\sigma}_{ij} = \frac{\widehat{\mu} \widehat{A}_{ij}}{\det \widehat{M}}$, где $\widehat{A}_{ij}$ – дополнительный минор к элементу $\widehat{\mu}_{ji}$ в матрице $\widehat{M}(\lambda)$, а $\widehat{\mu} \in \widehat{\mathcal{M}}$, $\widehat{\mu}|_I = 1$ и $\text{supp}(\widehat{\mu})$ достаточно мал. Из леммы 9.4 следует, что элементы матрицы $\widehat{M}^{-1}(\lambda)$ лежат в $\widehat{\mathcal{M}}$.

ЛЕММА 9.7. Пусть $\widehat{x}$ удовлетворяет системе уравнений⁹

$$\widehat{M}\widehat{x} = 0 \pmod{\widehat{\mathcal{C}}_0^{n*}}, \quad (9.14)$$

где $\widehat{M}$ – $(n \times n)$ -матрица с элементами $\widehat{\mu}_{ij} \in \widehat{\mathcal{M}}$, $\widehat{x} \in \widehat{\mathcal{C}}_b^n$, $\star \in \{+, -\}$. Пусть $\lambda_0 \in \text{sing supp}^*(\widehat{x})$. Тогда $\det \widehat{M}(\lambda_0) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем некоторый элемент $\widehat{\mu} \in \widehat{\mathcal{M}}$ с носителем в достаточно малом интервале I , $\lambda_0 \in I$, $\widehat{\mu}(\lambda_0) \neq 0$. Домножим на него обе части системы (9.14). Получим

$$\widehat{M}(\widehat{\mu}\widehat{x}) = 0 \pmod{\widehat{\mathcal{C}}_0^{n*}}.$$

Предположим, что $\det \widehat{M}(\lambda_0) \neq 0$. Согласно лемме 9.6 для матрицы $\widehat{M}(\lambda)$ на промежутке I определена обратная матрица $\widehat{M}^{-1}(\lambda)$ с элементами из $\widehat{\mathcal{M}}$. Поэтому

$$\widehat{\mu}\widehat{x} = 0 \pmod{\widehat{\mathcal{C}}_0^{n*}},$$

т.е. $\widehat{\mu}\widehat{x} \in \widehat{\mathcal{C}}_0^{n*}$. Теперь возьмем достаточно малый интервал $J \subset I$, $\lambda_0 \in J$, и произвольный элемент $\widehat{\mu}_2 \in \widehat{\mathcal{M}}$, $\text{supp } \widehat{\mu}_2 \subset J$. Согласно лемме 9.4 имеем $\widehat{\mu}_2\widehat{x} = \widehat{\mu}_3\widehat{\mu}\widehat{x}$ для некоторой $\widehat{\mu}_3 \in \widehat{\mathcal{M}}$. Следовательно, $\widehat{\mu}_2\widehat{x} \in \widehat{\mathcal{C}}_0^{n*}$. Это значит, что $\lambda_0 \notin \text{sing supp}^*(\widehat{x})$.

ЛЕММА 9.8. Пусть $\widehat{x}$ удовлетворяет системе (9.14), где $\text{supp}(\widehat{x}_l) \in I$, $1 \leq l \leq n$, I – достаточно малый интервал. Пусть $\lambda_0 \in I$, $\det \widehat{M}(\lambda_0) = 0$, причем λ_0 – нуль порядка k . В остальных точках λ интервала I имеем $\det \widehat{M}(\lambda) \neq 0$. Тогда

$$\widehat{x} = \sum_{i=1}^k \widehat{\sigma}_i \widehat{y}_i \pmod{\widehat{\mathcal{C}}_0^{n*}},$$

где $\widehat{\sigma}_i \in \widehat{\mathcal{M}}^n$, $\widehat{y}_i \in \widehat{\mathcal{C}}_b$, а $\widehat{\sigma}_i(\lambda_0) \in \text{Ker } \widehat{M}(\lambda_0)$.

⁹Здесь и далее равенство по $\text{mod } \widehat{\mathcal{C}}_0^{n*}$ означает равенство с точностью до функции из $\widehat{\mathcal{C}}_0^{n*}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства $\text{Rank } \widehat{M}(\lambda_0) = n - k$ следует, что в матрице $\widehat{M}(\lambda_0)$ существует подматрица размера $(n - k) \times (n - k)$ с определителем, отличным от нуля. Не ограничивая общности, будем считать, что она находится в левом верхнем углу. Обозначим ее $\widehat{M}_1(\lambda)$. При достаточно малом I в остальных точках $\lambda \in I$ ее определитель также отличен от нуля. Согласно лемме 9.6 на интервале I к ней определена обратная матрица $\widehat{M}_1^{-1}$ с элементами из $\widehat{\mathcal{M}}$. Матрицу размера $(n - k) \times k$, стоящую в правом верхнем углу, обозначим $\widehat{M}_2(\lambda)$. Тогда выполняется следующее соотношение:

$$\widehat{M}_1 \widehat{x}^{n-k} = -\widehat{M}_2 \widehat{x}^k \pmod{\widehat{\mathcal{C}}_0^{(n-k)*}}, \quad (9.15)$$

где $\widehat{x}^{n-k} = (\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_{n-k})^T$, $\widehat{x}^k = (\widehat{x}_{n-k+1}, \dots, \widehat{x}_n)^T$.

Перепишем равенство (9.15) в виде

$$\widehat{x}^{n-k} = -\widehat{M}_1^{-1} \widehat{M}_2 \widehat{x}^k \pmod{\widehat{\mathcal{C}}_0^{(n-k)*}} \quad \text{или} \quad \widehat{x} = \sum_{i=1}^k \widehat{\sigma}_i \widehat{x}_{n-k+i} \pmod{\widehat{\mathcal{C}}_0^{n*}},$$

где $\widehat{\sigma}_i = (-\widehat{\psi}_{1i}, \dots, -\widehat{\psi}_{ki}, \mathbf{1}_i)^T$, $\widehat{\psi}_{ij}$ – элементы матрицы $\widehat{M}_1^{-1} \widehat{M}_2$, $\mathbf{1}_i$ – вектор длины k со всеми компонентами, равными нулю, кроме единицы на i -м месте.

Таким образом, остается доказать следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 9.1. *Выполнено $\widehat{\sigma}_i(\lambda_0) \in \text{Ker } \widehat{M}(\lambda_0)$, $1 \leq i \leq n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В этом утверждении все функции подразумеваются взятыми в точке λ_0 . Умножим матрицу $\widehat{M}$ слева на матрицу

$$\begin{pmatrix} \widehat{M}_1^{-1} & 0 \\ 0 & I_k \end{pmatrix}, \quad (9.16)$$

где I_k – единичная матрица размера $k \times k$. Получим матрицу

$$\begin{pmatrix} I_{n-k} & \widehat{M}_1^{-1} \widehat{M}_2 \\ \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (9.17)$$

где многоточием обозначаются строки, линейно зависящие от первых $n - k$ строк. Матрица (9.16) невырождена, поэтому ядро матрицы (9.17) совпадет с ядром матрицы $\widehat{M}$. Прямым вычислением легко убедиться в том, что произведение матрицы (9.17) на вектор $\widehat{\sigma}_i(\lambda_0)$ равно нулю. Таким образом, утверждение и лемма доказаны.

Список литературы

1. D. Treschev, “Oscillator and thermostat”, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **28**:4 (2010), 1693–1712.
2. Н. Н. Боголюбов, “Элементарный пример установления статистического равновесия в системе, связанной с термостатом”, *О некоторых статистических методах в математической физике*, АН УССР, Львов, 1945, 115–137.

3. А. И. Комеч, “О стабилизации взаимодействия струны с нелинейным осциллятором”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1991, №6, 35–41; англ. пер.: A. I. Komech, “On the stabilization of interaction of a string with a nonlinear oscillator”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **46**:6 (1992), 34–39.
4. A. Komech, H. Spohn, M. Kunze, “Long-time asymptotics for a classical particle interacting with a scalar wave field”, *Comm. Partial Differential Equations*, **22**:1–2 (1997), 307–335.
5. Al. Komech, An. Komech, “Global attractor for a nonlinear oscillator coupled to the Klein–Gordon field”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **185**:1 (2007), 105–142.
6. Al. Komech, An. Komech, “On global attraction to solitary waves for the Klein–Gordon field coupled to several nonlinear oscillators”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **93**:1 (2010), 91–111.
7. Al. Komech, H. Spohn, “Long-time asymptotics for the coupled Maxwell–Lorentz equations”, *Comm. Partial Differential Equations*, **25**:3–4 (2000), 559–584.
8. Е. А. Горин, Д. В. Трещёв, “Относительный вариант теоремы Титчмарша о свертке”, *Функц. анализ и его прил.*, **46**:1 (2012), 31–38; англ. пер.: E. A. Gorin, D. V. Treschev, “Relative version of the Titchmarsh convolution theorem”, *Funct. Anal. Appl.*, **46**:1 (2012), 26–32.
9. В. И. Богачёв, *Основы теории меры*, т. 1, РХД, Ижевск, 2006; англ. пер.: V. I. Bogachev, *Measure theory*, v. 1, Springer-Verlag, Berlin, 2007.
10. F. Riesz, B. Sz.-Nagy, *Functional analysis*, Dover Books Adv. Math., Dover Publ., New York, 1990.
11. И. М. Гельфанд, *Лекции по линейной алгебре*, 5-е изд., МЦНМО, М., 1998; англ. пер. 4-го изд.: I. M. Gel’fand, *Lectures on linear algebra*, Dover Publ., New York, 1989.
12. В. С. Владимиров, *Обобщенные функции в математической физике*, Наука, М., 1979; англ. пер.: V. S. Vladimirov, *Generalized functions in mathematical physics*, Mir, Moscow, 1979.

А. В. ДЫМОВ (A. V. Dymov)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова,

механико-математический факультет

E-mail: dendrr@yandex.ru

Поступило в редакцию

18.05.2011

29.12.2011