Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Курдюмов, А. П. Хромов, О базисах Рисса из собственных функций интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2012, том 76, выпуск 6, 107–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7797>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 15:27:43

УДК 517.984

В. П. Курдюмов, А. П. Хромов

**О базисах Рисса из собственных функций
интегральных операторов с ядрами,
разрывными на диагоналях**

Доказана теорема о базисности Рисса в пространстве $L_2[0, 1]$ собственных и присоединенных функций интегрального оператора, ядро которого терпит разрывы на диагоналях $t = x$ и $t = 1 - x$.

Библиография: 21 наименование.

Ключевые слова: базис Рисса, резольвента, характеристическое число, собственная функция, инволюция.

Введение

В настоящей работе рассматривается вопрос о базисах Рисса в $L_2[0, 1]$ из собственных и присоединенных функций (с.п.ф.) интегрального оператора

$$Af = \alpha \int_0^x A_1(x, t)f(t) dt + \int_{1-x}^1 A_2(1-x, t)f(t) dt, \quad x \in [0, 1], \quad (1)$$

где $\alpha^2 \neq 1$; производные ядер $\frac{\partial^{k+l} A_i(x, t)}{\partial x^k \partial t^l}$, $0 \leq k + l \leq 2$ (причем, если $k + l = 2$, то $k = l = 1$), непрерывны для ядра $A_1(x, t)$ при $t \leq x$ и для ядра $A_2(x, t)$ при $t \geq x$; $A_1(x, x - 0) = A_2(x, x + 0) = 1$. Оператор (1) и более общего вида интегральные операторы с ядрами, допускающими разрывы самих ядер или некоторых их производных, впервые рассматривались одним из авторов [1], где была исследована задача точного обращения и указана ее роль для изучения разложений по собственным функциям. В дальнейшем исследованию последней задачи было посвящено много статей (см., например, [2], [3]), при этом речь шла в них, в основном, о теоремах равносходимости разложений по с.п.ф. таких операторов и в тригонометрический ряд Фурье.

Исследования по базисам Рисса занимают важное место в спектральной теории операторов и имеют многочисленные применения. Большой вклад внесен отечественными математиками (см. [4]–[8]). Вопрос о базисах Рисса из с.п.ф. оператора

$$Af = \int_0^{1-x} A(1-x, t)f(t) dt \quad (2)$$

был рассмотрен в [9], где был разработан метод, основанный на представлении резольвент сопутствующих интегро-дифференциальных операторов через специальные интегральные операторы простой структуры, называемые *элементарными*. Оператор (1) существенно более сложный, чем (2), и базисность

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-01-00270) и Программы Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ России” (грант НШ-4395.2010.1).

Рисса его с.п.ф. получается за счет дальнейшего развития метода из статьи [9]. То, что область значений оператора (1) обращается в нуль при $x = 0$, позволяет установить базисность только при одном дополнительном требовании, а именно требовании существования A^{-1} . Оператор (1) содержит инволюцию $\theta(x) = 1 - x$. Отметим, что дифференциальные, функционально-дифференциальные операторы с инволюцией имеют давнюю историю и интенсивно изучаются в настоящее время (см. [10]–[12]).

Отметим также, что задача разложения по собственным функциям интегрального оператора определена нечетко, так как существует много интегральных операторов с одними и теми же собственными функциями. Важно выделить из всего такого класса операторов канонический в некотором смысле вид. Роль канонического оператора в задаче равносходимости, как показано в [13], может выполнять оператор $Af = \int_0^1 A(x, t)f(t) dt$, где ядро $A(x, t)$ или некоторые его производные терпят разрыв на линии $t = x$ и величина скачка равна единице. Такие $A(x, t)$, в частности, содержат все функции Грина дифференциальных и интегро-дифференциальных операторов самого общего вида. Для указанных операторов резольвентным методом успешно были решены многие вопросы сходимости разложений по собственным функциям (см. [14], [15]). При этом возникали новые трудные спектральные задачи для интегро-дифференциальных уравнений с такими краевыми условиями, о которых известны лишь их существование и вид [13]. В [13], [16] с привлечением результатов С. Салаффа и А. М. Минкина по гипотезе Камке исследована одна такая задача применительно к интегральному оператору с симметричным ядром.

Кроме того, отметим, что вопросы сходимости разложений для случая разрывного при $t = x$ ядра изучались еще Г. Д. Биркгофом и Р. Е. Лангером [17] (под влиянием исследований Э. И. Фредгольма и Д. Гильберта).

В заключение заметим, что даже простейший оператор с инволюцией $Af = \int_0^{1-x} f(t) dt$ замечателен тем, что ядро оператора A^2 есть функция Грина оператора: $-y''$, $y(1) = y'(0) = 0$ (см. также [1]). Оператор, рассмотренный в настоящей статье, можно понимать как аналог корня квадратного из оператора с особенностью на линии $t = x$ и важным свойством $(Af)(0) = 0$. Это позволяет изучать его при очень простых условиях, как и в случае симметричного ядра. В резольвентном методе существенно используется оператор Дирака со свойством симметрии, порожденным инволюцией. Как одно из новых приложений оператора Дирака, явилось решение смешанной задачи для простейшего уравнения в частных производных первого порядка с инволюцией [18], тесно связанной со смешанной задачей для волнового уравнения [19].

§ 1. Сведение оператора A к операторам в пространстве вектор-функций

Сведем оператор A к оператору в пространстве вектор-функций размерности 2. Введем следующий оператор:

$$\tilde{A}\tilde{f} = (\tilde{A}\tilde{f})(x) = \tilde{A}\tilde{f}(x) = \int_0^1 \tilde{A}(x, t)\tilde{f}(t) dt, \quad (3)$$

где $\tilde{f}(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$ (здесь T – знак транспонирования),

$$\tilde{A}(x, t) = \begin{pmatrix} \alpha \varepsilon(x, t) A_1(x, t) & \varepsilon(x, t) A_2(1-x, 1-t) \\ \varepsilon(t, x) A_2(x, t) & \alpha \varepsilon(t, x) A_1(1-x, 1-t) \end{pmatrix},$$

$\varepsilon(x, t) \equiv 1$ при $x \geq t$, $\varepsilon(x, t) = 0$ при $x < t$.

ТЕОРЕМА 1. Если $y = Af$, то $\tilde{y} = \tilde{A}\tilde{f}$, где $\tilde{f}(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, $f_1(x) = f(x)$, $f_2(x) = f(1-x)$, $\tilde{y}(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$, $y_1(x) = y(x)$, $y_2(x) = y(1-x)$. Обратно, если $\tilde{y} = \tilde{A}\tilde{f}$ и $f_1(x) = f_2(1-x)$, то $y_1(x) = y_2(1-x)$ и $y_1 = Af_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y = Af$. Тогда

$$\begin{aligned} y(x) &= \alpha \int_0^x A_1(x, t) f(t) dt + \int_{1-x}^1 A_2(1-x, t) f(t) dt \\ &= \alpha \int_0^x A_1(x, t) f(t) dt + \int_0^x A_2(1-x, 1-t) f(1-t) dt, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} y(1-x) &= \alpha \int_0^{1-x} A_1(1-x, t) f(t) dt + \int_x^1 A_2(x, t) f(t) dt \\ &= \alpha \int_x^1 A_1(1-x, 1-t) f(1-t) dt + \int_x^1 A_2(x, t) f(t) dt. \end{aligned} \quad (5)$$

Из (4), (5) следует (3). Обратное утверждение очевидно.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Представление, подобное (3), не единственно. Представление из теоремы 1 важно тем, что теперь $\tilde{A}(x, t)$ терпит разрыв лишь на линии $t = x$.

Построим теперь обратный оператор $\tilde{A}^{-1}$. Продифференцируем $\tilde{y}(x) = \tilde{A}\tilde{f}(x)$ по x :

$$\tilde{y}'(x) = \int_0^1 \tilde{A}_x(x, t) \tilde{f}(t) dt + B\tilde{f}(x),$$

где $B = \tilde{A}(x, x-0) - \tilde{A}(x, x+0) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$. Отсюда имеем

$$B^{-1}\tilde{y}'(x) = \tilde{f}(x) + \tilde{A}_1\tilde{f}, \quad (6)$$

где $\tilde{A}_1\tilde{f} = \int_0^1 B^{-1}\tilde{A}_x(x, t)\tilde{f}(t) dt$. Представим оператор $\tilde{A}_1$ в пространстве $L_2^2[0, 1]$ в виде $\tilde{A}_1 = W + V$, $\|W\| < 1$, где V – конечномерный оператор:

$$V\tilde{f} = \sum_{k=1}^m (\tilde{f}, \psi_k) \varphi_k(x);$$

здесь $\{\psi_k\}_{k=1}^m$, $\{\varphi_k\}_{k=1}^m$ – линейно независимые системы в пространстве вектор-функций размерности 2, состоящие из достаточно гладких функций,

$$(\tilde{f}, \psi_k) = \sum_{j=1}^2 \int_0^1 f_j(t) \psi_k^j(t) dt,$$

$\psi_k^j(t)$ – компоненты $\psi_k(t)$. Из (6) получаем

$$(E + W)^{-1}B^{-1}\tilde{y}'(x) = \tilde{f}(x) + (E + W)^{-1}V\tilde{f}(x), \quad (7)$$

где E – единичный оператор (считаем, что $V\tilde{f}(x) = (V\tilde{f})(x)$).

ЛЕММА 1. *Оператор $\tilde{A}^{-1}$ существует тогда и только тогда, когда $\text{rang } M = m$, где*

$$M = \left(\begin{array}{c} E + (\tilde{\varphi}, \psi)^T \\ \int_0^1 \tilde{A}(0, t)\tilde{\varphi}^T(t) dt \end{array} \right).$$

Здесь E – единичная $(m \times m)$ -матрица, $(\tilde{\varphi}, \psi) = (\tilde{\varphi}_j, \psi_k)_{j,k=1}^m$, $\tilde{\varphi}_j = (E + W)^{-1}\varphi_j$, $\tilde{\varphi}^T = (\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_m)$, $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Повторим рассуждения из [3, лемма 14], только вместо формулы (55) из [3] используем формулу (7).

ТЕОРЕМА 2. *Пусть оператор $\tilde{A}^{-1}$ существует. Тогда*

$$\tilde{A}^{-1}\tilde{y}(x) = B^{-1}\tilde{y}'(x) + a_1(x)\tilde{y}(0) + a_2(x)\tilde{y}(1) + a_3(x)\tilde{y}(x) + \int_0^1 a(x, t)\tilde{y}(t) dt, \quad (8)$$

$$\widetilde{M}_0\tilde{y}(0) + \widetilde{M}_1\tilde{y}(1) = 0, \quad (9)$$

где $a_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, $a'_3(x)$ – непрерывные матрицы-функции; каждая компонента матрицы $a(x, t)$ имеет такой же характер гладкости, как и компоненты $\tilde{A}_x(x, t)$, с той лишь разницей, что теперь по t каждая из них лишь непрерывна; $\widetilde{M}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\widetilde{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для определенности считаем, что минор Δ матрицы M из леммы 1, образованный из первых m строк матрицы M , отличен от нуля. Из (7) имеем

$$\begin{aligned} ((E + W)^{-1}B^{-1}\tilde{y}', \psi_j) &= (\tilde{f}, \psi_j) + ((E + W)^{-1}V\tilde{f}, \psi_j) \\ &= (\tilde{f}, \psi_j) + \left((E + W)^{-1} \sum_{k=1}^m (\tilde{f}, \psi_k) \varphi_k, \psi_j \right) \\ &= (\tilde{f}, \psi_j) + \sum_{k=1}^m (\tilde{f}, \psi_k) (\tilde{\varphi}_k, \psi_j), \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (10)$$

Определитель системы (10) есть Δ . Найдём явно $(\tilde{f}, \psi_k)$ из (10) и подставим в соотношение (7):

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= (E + W)^{-1}B^{-1}\tilde{y}'(x) - \sum_{k=1}^m (\tilde{f}, \psi_k) \tilde{\varphi}_k(x) \\ &= (E + W)^{-1}B^{-1}\tilde{y}'(x) - \frac{1}{\Delta} \sum_{j,k=1}^m ((E + W)^{-1}B^{-1}\tilde{y}', \psi_j) \Delta_{jk} \tilde{\varphi}_k(x), \end{aligned} \quad (11)$$

где Δ_{jk} – алгебраические дополнения элементов определителя Δ .

Представим оператор $(E + W)^{-1}$ в виде

$$(E + W)^{-1} = E + W_1. \quad (12)$$

Поскольку справедливы соотношения

$$w_1(x, t) = -w(x, t) - \int_0^1 w(x, \tau) w_1(\tau, t) d\tau = -w(x, t) - \int_0^1 w_1(x, \tau) w(\tau, t) d\tau,$$

то $w_1(x, t)$ обладает теми же дифференциальными свойствами, что и $\tilde{A}(x, t)$; здесь $w(x, t)$, $w_1(x, t)$ – ядра операторов W и W_1 . Теперь из (11), (12) получается (8). Далее, $\tilde{y}(x)$ удовлетворяет условию $\tilde{y}(0) = \int_0^1 \tilde{A}(0, t) \tilde{A}^{-1} \tilde{y}(t) dt$, которое эквивалентно (9), в чем убеждаемся так же, как и в [20], [21].

§ 2. Исследование интегро-дифференциального оператора (8), (9)

Рассмотрим краевую задачу

$$B^{-1} \tilde{y}'(x) + a_1(x) \tilde{y}(0) + a_2(x) \tilde{y}(1) + a_3(x) \tilde{y}(x) + \int_0^1 a(x, t) \tilde{y}(t) dt - \lambda \tilde{y}(x) = \tilde{f}(x), \quad (13)$$

$$\widetilde{M}_0 \tilde{y}(0) + \widetilde{M}_1 \tilde{y}(1) = 0, \quad (14)$$

где $a_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, $a(x, t)$ – те же, что и в теореме 2, и $\tilde{f}(x) = (f(x), f(1-x))^T$. Выполним в задаче (13), (14) замену $\tilde{y}(x) = \Gamma y(x)$, где $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{\alpha^2-1}-\alpha & \sqrt{\alpha^2-1}+\alpha \end{pmatrix}$. Тогда получим

$$y'(x) + P_1(x)y(0) + P_2(x)y(1) + P_3(x)y(x) + Ny(x) - \lambda Dy(x) = m(x), \quad (15)$$

$$M_0 y(0) + M_1 y(1) = 0, \quad (16)$$

где $P_i(x) = D\Gamma^{-1}a_i(x)\Gamma$, $i = 1, 2, 3$, $Ny(x) = \int_0^1 N(x, t)y(t) dt$, $N(x, t) = D\Gamma^{-1}a(x, t)\Gamma$, $m(x) = D\Gamma^{-1}\tilde{f}(x)$, $M_0 = \widetilde{M}_0\Gamma$, $M_1 = \widetilde{M}_1\Gamma$, $D = \Gamma^{-1}B\Gamma = \text{diag}(\omega, -\omega)$, $\omega = \sqrt{\alpha^2-1}$.

Присутствие ненулевой матрицы $P_3(x)$ в (15) является серьезным препятствием в исследовании асимптотического поведения краевой задачи (15), (16). Поэтому проведем преобразование, заменяющее $P_3(x)$ на матрицу с элементами $O(\lambda^{-1})$. Положим $H_0(x) = \text{diag}(h_1(x), h_2(x))$, где $h_i(x) = \exp\{-\int_0^x p_{ii}(t) dt\}$, $p_{ii}(x)$ – диагональные элементы матрицы $P_3(x)$. Поскольку элементы матрицы $T(x) = H_1(x)D - DH_1(x)$ не зависят от элементов главной диагонали произвольной матрицы $H_1(x)$, а диагональные элементы матриц $T(x)$ и $H'_0(x) + P_3(x)H_0(x)$ равны нулю, то уравнение

$$H'_0(x) + P_3(x)H_0(x) + T(x) = 0,$$

как легко видеть, имеет единственное решение $H_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & r_2(x) \\ r_1(x) & 0 \end{pmatrix}$.

Так же, как и в [3, лемма 16], получаем следующую лемму.

ЛЕММА 2. Замена $y(x) = H(x, \lambda)v(x)$, где $H(x, \lambda) = H_0(x) + \frac{1}{\lambda}H_1(x)$, приводит систему (15), (16) к виду

$$v'(x) + P_1(x, \lambda)v(0) + P_2(x, \lambda)v(1) + P_3(x, \lambda)v(x) + \int_0^1 N_\lambda(x, t)v(t) dt - \lambda Dv(x) = m(x, \lambda), \quad (17)$$

$$U(v) = M_{0\lambda}v(0) + M_{1\lambda}v(1) = 0, \quad (18)$$

где $P_1(x, \lambda) = H^{-1}(x, \lambda)P_1(x)H(0, \lambda)$, $P_2(x, \lambda) = H^{-1}(x, \lambda)P_2(x)H(1, \lambda)$, $P_3(x, \lambda) = \lambda^{-1}H^{-1}(x, \lambda)[H'_1(x) + P_3(x)H_1(x)]$, $N_\lambda(x, t) = H^{-1}(x, \lambda)N(x, t)H(t, \lambda)$, $M_{0\lambda} = M_0H(0, \lambda)$, $M_{1\lambda} = M_1H(1, \lambda)$, $m(x, \lambda) = H^{-1}(x, \lambda)m(x)$.

Рассмотрим простейший случай системы (17), (18), а именно

$$w'(x) - \lambda Dw(x) = m(x), \quad (19)$$

$$U(w) = 0. \quad (20)$$

Здесь $m(x)$ – произвольная вектор-функция с компонентами из $L_2[0, 1]$. Обозначим через S_1 (S_2) полуплоскость в комплексной области, определяемую неравенством $\operatorname{Re} \lambda\omega \leq 0$ ($\operatorname{Re} \lambda\omega \geq 0$). Для определенности будем рассматривать полуплоскость S_1 .

Обозначим

$$g_1(x, t, \lambda) = \varepsilon(x, t)e^{\lambda\omega(x-t)}, \quad g_2(x, t, \lambda) = -\varepsilon(t, x)e^{-\lambda\omega(x-t)}, \\ g(x, t, \lambda) = \operatorname{diag}(g_1(x, t, \lambda), g_2(x, t, \lambda)).$$

Так же, как и в [3, лемма 1], получаем следующую лемму.

ЛЕММА 3. Для решения $w(x) = w(x, \lambda)$ системы (19), (20) имеет место формула

$$w(x, \lambda) = g_\lambda m(x) - V(x, \lambda)\Delta^{-1}(\lambda)\Phi(m, \lambda),$$

где $g_\lambda m(x) = \int_0^1 g(x, t, \lambda)m(t) dt$, $V(x, \lambda) = \operatorname{diag}(e^{\lambda\omega x}, e^{\lambda\omega(1-x)})$, кроме того, $\Delta(\lambda) = U(V(x, \lambda))$, $\Phi(m, \lambda) = \int_0^1 U_x(g(x, t, \lambda))m(t) dt$ (здесь U_x означает, что U применяется к $g(x, t, \lambda)$ по переменной x) и λ таково, что $\det \Delta(\lambda) \neq 0$.

ЛЕММА 4. Имеет место асимптотическая формула

$$\det \Delta(\lambda) = [\theta_0] + [\theta_1]e^{2\lambda\omega},$$

где $\theta_0 = (\omega + \alpha)h_2(1)$, $\theta_1 = (\omega - \alpha)h_1(1)$, $[a] = a + O(\frac{1}{\lambda})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы очевидно.

Из леммы 4 следует, что $\theta_0\theta_1 \neq 0$. Обозначим через $S_{1,\delta}$ область, полученную из S_1 удалением всех точек

$$\frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{2} \ln \left(-\frac{\theta_0}{\theta_1} \right) + k\pi i \right), \quad k = 0, \pm 1, \dots,$$

являющихся нулями функции $\theta_0 + \theta_1 e^{2\lambda\omega}$, вместе с окрестностями, ограниченными окружностями Γ_k одного и того же достаточно малого радиуса δ . Из

леммы 4 следует, что в области $S_{1,\delta}$ при достаточно больших $|\lambda|$ справедлива оценка

$$|\det \Delta(\lambda)| \geq C > 0, \quad (21)$$

где C не зависит от λ (в дальнейшем через C обозначаем, возможно, разные константы).

Из леммы 3 и оценки (21) получаем следующее утверждение о структуре решения краевой задачи (19), (20).

ТЕОРЕМА 3. *Если $\lambda \in S_{1,\delta}$ и $|\lambda|$ достаточно велико, то существует единственное решение $\omega(x, \lambda) = R_{1\lambda}m$ краевой задачи (19), (20), для компонент которого имеют место представления*

$$\begin{aligned} (R_{1\lambda}m)_1 &= \int_0^x e^{\lambda\omega(x-t)} m_1(t) dt + \Phi_1(m, \lambda)\sigma(x, \lambda), \\ (R_{1\lambda}m)_2 &= - \int_x^1 e^{-\lambda\omega(x-t)} m_2(t) dt + \Phi_2(m, \lambda)\sigma(x, \lambda), \end{aligned}$$

где $\Phi_j(m, \lambda)$ – линейные комбинации с ограниченными по λ коэффициентами интегралов $\int_0^1 \sigma(t, \lambda) m_j(t) dt$ (здесь под $\sigma(t, \lambda)$ понимается любая из функций $e^{\lambda\omega t}$, $e^{\lambda\omega(1-t)}$) и $m_j(t)$, $j = 1, 2$, – компоненты вектора $m(t)$.

Перейдем теперь к изучению краевой задачи (17), (18). Обозначим через $q(x)$ любой из векторов

$$H_0^{-1}(x)m(x), \quad -H_0^{-1}(x)H_1(x)H_0^{-1}(x)m(x).$$

Через $P(x)$ обозначим любую из матриц

$$\begin{aligned} H_2(x) &= H_0^{-1}(x)(H_1'(x) + P_3(x)H_1(x)), \quad H_0^{-1}(x)P_i(x)H_{0i}, \\ H_0^{-1}(x)P_i(x)H_{1i} - H_0^{-1}(x)H_1(x)H_0^{-1}(x)P_i(x)H_{0i}, \quad i &= 1, 2, \\ H_{01} &= H_0(0), \quad H_{11} = H_1(0), \quad H_{02} = H_0(1), \quad H_{12} = H_1(1). \end{aligned}$$

Далее, через M_λ обозначим любой из операторов

$$N_1 L_\lambda, \quad H_2(x) L_\lambda R_{1\lambda}, \quad N_2 L_\lambda R_{1\lambda},$$

где $N_1 = H_0^{-1}(x)N H_0(x)$, $N_2 = H_0^{-1}(x)(N H_1(x) - H_1(x)H_0^{-1}(x)N H_0(x))$, $L_\lambda = (E + R_{1\lambda}P_3(x, \lambda) + R_{1\lambda}N_\lambda)^{-1}$, N_λ – интегральный оператор с ядром $N_\lambda(x, t)$.

Наконец, через $b_1(\lambda)$ обозначим любой из векторов (не зависящих от x)

$$\alpha(\lambda)R_{1\lambda}q(x)\big|_{x=x_0}, \quad \alpha(\lambda)R_{1\lambda}M_\lambda R_{1\lambda}q(x)\big|_{x=x_0},$$

и пусть $b_2(\lambda) = \alpha(\lambda)R_{1\lambda}M_\lambda q(x)\big|_{x=x_0}$, где $\alpha(\lambda)$ – некоторые квадратные матрицы с ограниченными по λ коэффициентами из некоторого конечного набора таких матриц, $Q(\lambda)$ – вектор с компонентами, допускающими оценку $O(\frac{1}{\lambda^2}\|f\|)$, и x_0 – любое из чисел 0, 1.

ТЕОРЕМА 4. Если λ – то же, что и в теореме 3, то существует единственное решение $v(x, \lambda)$ задачи (17), (18), которое представимо в виде линейной комбинации с постоянными коэффициентами следующих векторов:

$$\begin{aligned} R_{1\lambda}q(x), \quad \frac{1}{\lambda}R_{1\lambda}q(x), \quad \frac{1}{\lambda}R_{1\lambda}M_{\lambda}q(x), \quad R_{1\lambda}M_{\lambda}R_{1\lambda}q(x), \quad \frac{1}{\lambda}R_{1\lambda}M_{\lambda}R_{1\lambda}q(x); \\ R_{1\lambda}P(x)b_1(\lambda), \quad \frac{1}{\lambda}R_{1\lambda}P(x)b_1(\lambda), \quad R_{1\lambda}M_{\lambda}R_{1\lambda}P(x)b_1(\lambda), \\ \frac{1}{\lambda}R_{1\lambda}M_{\lambda}R_{1\lambda}P(x)b_1(\lambda), \quad \frac{1}{\lambda}R_{1\lambda}M_{\lambda}P(x)b_1(\lambda); \\ \frac{1}{\lambda}R_{1\lambda}P(x)b_2(\lambda), \quad \frac{1}{\lambda}R_{1\lambda}M_{\lambda}R_{1\lambda}P(x)b_2(\lambda); \quad Q(\lambda). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так же, как и в [3, с. 138, 139], используя существование оператора L_{λ} , находим

$$v(x, \lambda) = -L_{\lambda}R_{1\lambda}P_1(x, \lambda)v(0, \lambda) - L_{\lambda}R_{1\lambda}P_2(x, \lambda)v(1, \lambda) + L_{\lambda}R_{1\lambda}m(x, \lambda), \quad (22)$$

где

$$v(0, \lambda) = \alpha_1(\lambda)L_{\lambda}R_{1\lambda}m(x, \lambda)|_{x=0} + \alpha_2(\lambda)L_{\lambda}R_{1\lambda}m(x, \lambda)|_{x=1}, \quad (23)$$

$$v(1, \lambda) = \beta_1(\lambda)L_{\lambda}R_{1\lambda}m(x, \lambda)|_{x=0} + \beta_2(\lambda)L_{\lambda}R_{1\lambda}m(x, \lambda)|_{x=1}, \quad (24)$$

$\alpha_i(\lambda), \beta_i(\lambda)$ – квадратные матрицы с ограниченными по λ коэффициентами. Из определения L_{λ} следует, что $L_{\lambda}R_{1\lambda} = R_{1\lambda} - R_{1\lambda}P_3(x, \lambda)L_{\lambda}R_{1\lambda} - R_{1\lambda}N_{\lambda}L_{\lambda}R_{1\lambda}$, а поскольку справедливы представления

$$P_3(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda}H_2(x) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad N_{\lambda} = N_1 + \frac{1}{\lambda}N_2 + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),$$

то, используя обозначение для M_{λ} , получим, что $L_{\lambda}R_{1\lambda}$ представим в виде линейной комбинации с постоянными коэффициентами операторов

$$R_{1\lambda}, \quad \frac{1}{\lambda}R_{1\lambda}M_{\lambda}, \quad R_{1\lambda}M_{\lambda}R_{1\lambda}, \quad O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad (25)$$

где $O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$ – оператор с компонентами, имеющими указанную выше оценку. Далее, так как

$$m(x, \lambda) = q_1(x) + \frac{1}{\lambda}q_2(x) + O\left(\frac{\|f\|}{\lambda^2}\right),$$

где $q_1(x) = H_0^{-1}(x)m(x)$, $q_2(x) = -H_0^{-1}(x)H_1(x)H_0^{-1}(x)m(x)$, то $L_{\lambda}R_{1\lambda}m(x, \lambda)$ представим в виде линейной комбинации с постоянными коэффициентами векторов

$$\frac{1}{\lambda^j}R_{1\lambda}q(x), \quad \frac{1}{\lambda^j}R_{1\lambda}M_{\lambda}R_{1\lambda}q(x), \quad j = 0, 1, \quad \frac{1}{\lambda}R_{1\lambda}M_{\lambda}q(x), \quad O\left(\frac{\|f\|}{\lambda^2}\right). \quad (26)$$

Тогда векторы $\alpha(\lambda)L_{\lambda}R_{1\lambda}m(x, \lambda)|_{x=x_0}$ представимы в виде линейной комбинации векторов

$$b_1(\lambda), \quad \frac{1}{\lambda}b_1(\lambda), \quad \frac{1}{\lambda}b_2(\lambda), \quad O\left(\frac{\|f\|}{\lambda^2}\right). \quad (27)$$

Наконец, используя формулы

$$P_i(x, \lambda) = P_{i1}(x) + \frac{1}{\lambda} P_{i2}(x) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad i = 1, 2,$$

где

$$\begin{aligned} P_{i1}(x) &= H_0^{-1}(x) P_i(x) H_{0i}, \\ P_{i2}(x) &= H_0^{-1}(x) P_i(x) H_{1i} - H_0^{-1}(x) H_1(x) H_0^{-1}(x) P_i(x) H_{0i}, \quad i = 1, 2, \\ H_{01} &= H_0(0), \quad H_{11} = H_1(0), \quad H_{02} = H_0(1), \quad H_{12} = H_1(1), \end{aligned}$$

найдем, что операторы $L_\lambda R_{1\lambda} P_i(x, \lambda)$, $i = 1, 2$, представимы в виде линейной комбинации с постоянными коэффициентами операторов

$$\frac{1}{\lambda^i} R_{1\lambda} P(x), \quad \frac{1}{\lambda^i} R_{1\lambda} M_\lambda R_{1\lambda} P(x), \quad i = 0, 1, \quad \frac{1}{\lambda} R_{1\lambda} M_\lambda P(x), \quad O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \quad (28)$$

Теперь из (22) и (25)–(28) следует утверждение теоремы.

В заключение отметим следующий факт.

ЛЕММА 5. *Каждая компонента вектор-функции $R_{1\lambda} q(x)$ представима в виде линейной комбинации с постоянными коэффициентами операторов*

$$\int_0^x e^{\lambda\omega(x-t)} T f(t) dt, \quad \int_x^1 e^{-\lambda\omega(x-t)} T f(t) dt$$

и ограниченными по λ коэффициентами операторов $\sigma(x, \lambda) \int_0^1 \sigma(t, \lambda) T f(t) dt$, где $\sigma(x, \lambda)$ имеет тот же смысл, что и в теореме 3, $T f(x)$ – один из операторов $\theta(x) f(x)$ или $\theta(x) f(1-x)$, где $\theta(x)$ – любая функция из некоторого конечного набора непрерывных функций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для компонент $q_1(x)$ и $q_2(x)$ векторов $q(x)$ справедливы представления

$$q_j(x) = \alpha_j(x) f(x) + \beta_j(x) f(1-x),$$

где $\alpha_j(x)$, $\beta_j(x)$ – непрерывные функции. Взяв $m(x) = q(x)$ в теореме 3 и обозначив через $\theta(x)$ любую из функций $\alpha_j(x)$, $\beta_j(x)$, получим утверждение леммы.

§ 3. Резольвента оператора A

ТЕОРЕМА 5. *Если оператор $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1} A$ существует, то*

$$R_\lambda f = y_1(x), \quad (29)$$

где $y_1(x)$ – первая компонента решения системы

$$\tilde{A}^{-1} \tilde{y}(x) - \lambda \tilde{y}(x) = \tilde{f}(x), \quad (30)$$

$$\widetilde{M}_0 \tilde{y}(0) + \widetilde{M}_1 \tilde{y}(1) = 0. \quad (31)$$

Обратно, если λ таково, что однородная краевая задача для системы (30), (31) имеет только нулевое решение, то R_λ существует и определяется по формуле (29).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть оператор R_λ существует и $y(x) = R_\lambda f(x)$. Тогда $y(x) - \lambda A y(x) = A f(x)$. Отсюда по теореме 1 имеем $\tilde{y}(x) - \lambda \tilde{A} \tilde{y}(x) = \tilde{A} \tilde{f}(x)$. Используя теперь теорему 2, получаем (30), (31). Обратное утверждение получается так же, как и в [2, лемма 1].

ЛЕММА 6. Если $v(x, \lambda) = (v_1(x, \lambda), v_2(x, \lambda))^T$ – решение системы (17), (18), то имеем

$$R_\lambda f(x) = \sum_{j=1}^2 \gamma_{1j} h_j(x) v_j(x, \lambda) + \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^2 r_j(x) v_j(x, \lambda),$$

где γ_{ij} – элементы матрицы Γ , $r_1(x) = \gamma_{12} r_{21}(x)$, $r_2(x) = \gamma_{11} r_{12}(x)$, $r_{ij}(x)$ – элементы матрицы $H_1(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теоремы 5 на основании теоремы 2 и леммы 2.

Обозначим $\sigma(x, \lambda_1, k) = \sigma(x, \lambda)|_{\lambda = \lambda_1 + k\pi i}$; и пусть $\omega(x, t, \lambda_1, k)$ – любая из функций $\varepsilon(x, t)e^{\lambda\omega(x-t)}$ или $\varepsilon(t, x)e^{-\lambda\omega(x-t)}$ при $\lambda = \lambda_1 + k\pi i$. Введем операторы A_k следующим образом:

$$A_k g = \int_0^1 A(x, t, \lambda_1, k) g(t) dt,$$

где $A(x, t, \lambda_1, k) = \psi(x)\sigma(x, \lambda_1, k)\sigma(t, \lambda_1, k)$ или $A(x, t, \lambda_1, k) = \psi(x)\omega(x, t, \lambda_1, k)$, $\psi(x)$ совпадает либо с 1, либо с одной из функций $h_j(x)$, $r_j(x)$ из леммы 6, а также операторы M_k :

$$M_k g = \int_0^1 M(x, t, \lambda_1, k) g(t) dt,$$

где $M(x, t, \lambda_1, k) = M(x, t, \lambda)|_{\lambda = \lambda_1 + k\pi i}$, $M(x, t, \lambda)$ – одна из $M_{kj}(x, t, \lambda)$, $k, j = 1, 2$, при этом $M_{kj}(x, t, \lambda)$ являются компонентами ядра интегрального оператора M_λ .

Введем, кроме того, следующие функционалы:

$$d_1(f, k) = A_k T f|_{x=x_0}, \quad d_2(f, k) = A_k M_k A_k T f|_{x=x_0}, \quad d_3(f, k) = A_k M_k T f|_{x=x_0}.$$

Здесь в $A_k M_k A_k$ операторы A_k перед M_k и A_k после M_k , вообще говоря, различны.

Пусть $\lambda \in S_{1,\delta}$, $\lambda = \lambda_1 + k\pi i$ и λ_1 принадлежит ограниченной области в комплексной плоскости.

ЛЕММА 7. При больших $|\lambda|$ в $S_{1,\delta}$ имеет место представление

$$R_\lambda f|_{\lambda = \lambda_1 + k\pi i} = \Omega(x, \lambda_1, k; f) + O\left(\frac{\|f\|}{k^2}\right),$$

где $\Omega(x, \lambda_1, k; f)$ – линейная комбинация с ограниченными по λ_1 и k коэффициентами следующих всевозможных операторов:

$$A_k T f, \quad \frac{1}{k} A_k T f, \quad A_k M_k A_k T f, \quad \frac{1}{k} A_k M_k T f, \quad (32)$$

$$d_s(f, k) A_k p(x), \quad d_s(f, k) A_k M_k A_k p(x), \quad \frac{1}{k} d_s(f, k) A_k M_k p(x), \quad s = 1, 2, \quad (33)$$

$$\frac{1}{k} d_3(f, k) A_k p(x), \quad \frac{1}{k} d_3(f, k) A_k M_k A_k p(x), \quad (34)$$

где $p(x)$ – любой элемент матрицы $P(x)$. При этом, если в первом операторе $A_k T f$ ядро A_k совпадает с $\psi(x)\omega(x, t, \lambda_1, k)$, коэффициент при $A_k T f$ не зависит от λ_1 и k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 6 функция $R_\lambda f$ представима в виде линейной комбинации с ограниченными по λ коэффициентами компонент решения задачи (17), (18). По теореме 4 это решение представимо в виде линейной комбинации с постоянными коэффициентами векторов из теоремы 4. Для каждой компоненты вектора $R_{1\lambda} q(x)$ по лемме 5 справедливо представление в виде линейной комбинации с ограниченными по λ_1 и k коэффициентами всевозможных операторов $A_k T f$. Тогда компоненты вектор-функций $R_{1\lambda} M_\lambda R_{1\lambda} q(x)$, $\frac{1}{\lambda} R_{1\lambda} M_\lambda q(x)$ из теоремы 3 представимы такими же линейными комбинациями всевозможных операторов $A_k M_k A_k T f$ и $\frac{1}{k} A_k M_k T f$. Такие же представления получаются для аналогичных векторов из теоремы 4. При этом для оператора $A_k T f$, когда ядро оператора A_k совпадает с функцией $\psi(x)\omega(x, t, \lambda_1, k)$, коэффициент при $A_k T f$ не зависит от λ_1 и k . Лемма доказана.

§ 4. Основная теорема

Переходим к окончательному доказательству основного результата.

ЛЕММА 8. Если в $d_s(f, k)$, $s = 1, 2$, ядра операторов A_k , M_k отличаются лишь параметром k и x_0 – одно и то же для всех k , то справедливы оценки

$$\sum_k |d_s(f, k)|^2 \leq C \|f\|^2, \quad s = 1, 2, \quad (35)$$

где C не зависит от λ_1 из ограниченной области.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $s = 1$. Имеем $d_1(f, k) = A_k T f|_{x=x_0}$. Отсюда следует, что $d_1(f, k)$ совпадает либо с нулем, либо с $\alpha(\lambda_1, k) \int_0^1 \sigma(t, \lambda_1, k) T f(t) dt$, где $\alpha(\lambda_1, k)$ ограничены по λ_1 и k . В последнем случае

$$d_1(f, k) = \alpha(\lambda_1, k) \int_0^1 e^{k\pi i t} g(t, f) dt,$$

где $g(t, f) = e^{\lambda_1 \xi} T f(\xi)$ и ξ есть либо t , либо $1 - t$. Отсюда и из неравенства Бесселя получаем (35) при $s = 1$.

Пусть $s = 2$. Из [3, лемма 19] при $\lambda \in S_{1,\delta}$ вытекает оценка $\|R_{1\lambda} N_\lambda\| = o(1)$. Отсюда и из очевидной оценки $\|R_{1\lambda} P_3(x, \lambda)\| = o(1)$ следует ограниченность при больших $|\lambda|$ нормы оператора L_λ и, следовательно, ограниченность по k норм операторов M_k . Учитывая также ограниченность ядер операторов A_k , получаем согласно [9, лемма 6]

$$\sum_k |d_2(f, k)|^2 = \sum_k |A_k M_k A_k T f|_{x=x_0}|^2 \leq C \sum_k \|A_k T f\|^2 \leq C \|f\|^2.$$

Лемма доказана.

Пусть Γ_k – окружности из определения $S_{1,\delta}$, без ограничения общности будем считать, что Γ_k строго находятся в S_1 . Пусть J – любой конечный набор достаточно больших по модулю целых чисел.

ЛЕММА 9. *Имеет место оценка*

$$\left\| \sum_{k \in J} \int_{\Gamma_k} R_\lambda d\lambda \right\| \leq C,$$

где постоянная C не зависит от J .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\sum_{k \in J} \int_{\Gamma_k} R_\lambda f d\lambda = \frac{1}{\omega} \sum_{k \in J} \int_{\Gamma} R_\lambda f|_{\lambda\omega=\lambda_1+k\pi i} d\lambda_1 = \int_{\Gamma} \Phi(f, \lambda_1) d\lambda_1,$$

где $\Phi(f, \lambda_1) = \frac{1}{\omega} \sum_{k \in J} R_\lambda f|_{\lambda\omega=\lambda_1+k\pi i}$. Здесь Γ – фиксированная окружность из Γ_k , причем без ограничения общности считаем, что Γ – одна и та же для всех наборов J . Пусть $P_k f$ – один из операторов леммы 7. Тогда по этой лемме $\Phi(f, \lambda_1)$ представима в виде конечной суммы (число слагаемых этой суммы не зависит от J) операторов

$$\Sigma = \sum_{k \in J} \alpha(\lambda_1, k) P_k f, \quad (36)$$

где $\alpha(\lambda_1, k)$ ограничены по λ_1 и k , а операторы $P_k f$ имеют один и тот же вид из операторов (32)–(34) леммы 7, т. е. отличаются лишь параметром k . Рассмотрим сначала случай, когда $P_k f$ – любой из операторов группы (32). Пусть $P_k f = A_k T f$ и ядро оператора A_k есть $\psi(x)\omega(x, t, \lambda_1, k)$. Тогда $\alpha(\lambda_1, k)$ в (36) не зависит от λ_1 и k , следовательно, в этом случае $\int_{\Gamma} \sum d\lambda_1 = 0$. Если $P_k f = A_k T f$ и ядро оператора A_k есть $\psi(x)\sigma(x, \lambda_1, k)\sigma(t, \lambda_1, k)$, то $P_k f = \psi(x)\sigma(x, \lambda_1, k)b_k(Tf, \lambda_1)$, где $b_k(Tf, \lambda_1) = \int_0^1 \sigma(t, \lambda_1, k)Tf(t) dt$. В этом случае

$$\Sigma = \sum_{k \in J} \alpha(\lambda_1, k) \psi(x) \sigma(x, \lambda_1, k) b_k(Tf, \lambda_1).$$

Покажем, что

$$\|\Sigma\| \leq C \|f\|, \quad (37)$$

где константа C не зависит от J и λ_1 .

Пусть $u(x) \in L_2[0, 1]$. Тогда

$$(\Sigma, u) = \sum_{k \in J} \alpha(\lambda_1, k) b_k(u\psi, \lambda_1) b_k(Tf, \lambda_1),$$

где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $L_2[0, 1]$. Поэтому

$$|(\Sigma, u)| \leq C \left(\sum_k |b_k(u\psi, \lambda_1)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_k |b_k(Tf, \lambda_1)|^2 \right)^{1/2} < \infty$$

(см. доказательство леммы 8). Значит, по теореме Банаха–Штейнгауза функционалы (Σ, u) имеют нормы, ограниченные константой, не зависящей от J и λ_1 . Теперь, применяя опять теорему Банаха–Штейнгауза к операторам Σ

по f , получаем оценку (37). Рассмотрим случай, когда $P_k f = \frac{1}{k} A_k T f$. Используя [9, лемма 6], получим

$$\|\Sigma\| \leq C \sum_k \frac{1}{k} \|A_k T f\| \leq C \left(\sum_k \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_k \|A_k T f\|^2 \right)^{1/2} \leq C \|f\|.$$

Пусть $P_k f = A_k M_k A_k T f$ и $u(x) \in L_2[0, 1]$. Тогда

$$(\Sigma, u) = \sum_{k \in J} \alpha(\lambda_1, k) (M_k A_k T f, A_k^* u).$$

Поскольку нормы операторов M_k ограничены по k и λ_1 , получаем оценку

$$|(\Sigma, u)| \leq C \sum_{k \in J} \|A_k T f\| \|A_k^* u\|.$$

Аналогично [9, лемма 6] можно показать, что

$$\sum_{k \in J} \|A_k^* u\|^2 \leq C \|u\|^2.$$

Поэтому $|(\Sigma, u)| \leq C \|f\| \|u\|$ и, значит, оценка (37) справедлива. Аналогично получается эта оценка, если $P_k f = \frac{1}{k} A_k M_k T f$. Рассмотрим операторы группы (33). Если $P_k f = d_s(f, k) A_k p(x)$, $s = 1, 2$, то

$$\|\Sigma\| \leq C \sum_{k \in J} \|A_k p(x)\| |d_s(f, k)| \leq C \left(\sum_k \|A_k p(x)\|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_k |d_s(f, k)|^2 \right)^{1/2}$$

и оценка (37) следует из [9, лемма 6] и леммы 8. Оценку (37) аналогично получаем и в случае, когда $P_k f = d_s(f, k) A_k M_k A_k p(x)$. Если $P_k f = \frac{1}{k} d_s(f, k) A_k M_k p(x)$, то (37) следует из ограниченности по k норм $\|A_k M_k p(x)\|$ и леммы 8. Пусть $P_k f$ – любой оператор из группы (34). Тогда из ограниченности по k функционалов $d_3(f, k)$ имеем

$$\|P_k f\| \leq C(f) \frac{1}{k} \|A_k p(x)\|.$$

Отсюда имеем $\|\Sigma\| \leq C(f)$, значит, по теореме Банаха–Штейнгауза получаем (37) и в этом случае. Лемма доказана.

Положим

$$E(\lambda_k) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} R_\lambda d\lambda,$$

где теперь $\{\lambda_k\}$ – все характеристические значения и Γ_k – замкнутый контур в λ -плоскости, содержащий внутри себя лишь одно λ_k .

ЛЕММА 10. Если $f(x) \in L_2[0, 1]$ и $E(\lambda_k)f = 0$ для всех k , то $f(x) = 0$ почти всюду.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $E(\lambda_k)f = 0$ для всех k , то $R_\lambda f$ – целая функция по λ . Из леммы 6 и теорем 4, 3 следует оценка $R_\lambda f = O(1)$ по λ . Значит, по теореме Лиувилля $R_\lambda f$ – постоянная и $R_\lambda f|_{\lambda=0} = Af = R_\lambda f = (E - \lambda A)^{-1}Af$. Отсюда имеем $(E - \lambda A)Af = Af$, т. е. $A^2f = 0$. Из существования A^{-1} следует $f(x) = 0$ почти всюду.

Из леммы 4 следует, что достаточно большие $|\lambda_k|$ простые, тогда, используя леммы 9, 10 так же, как и в [9, теорема 5], получаем основной результат.

ТЕОРЕМА 6. Система собственных и присоединенных функций оператора A образует базис Рисса в $L_2[0, 1]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Рассмотренный нами случай – это случай операторов с разрывами ядер на линиях $t = x$ и $t = 1 - x$, эти операторы удовлетворяют краевому условию

$$y(0) = (Af)(0) = 0. \quad (38)$$

Проведем анализ таких операторов. Пусть A_0 – следующий оператор:

$$A_0 f = \alpha \int_0^1 A_1(x, t)f(t) dt + \int_0^1 A_2(1 - x, t)f(t) dt, \quad (39)$$

где ядра $A_1(x, t)$ и $A_2(x, t)$ имеют единичные скачки на линии $t = x$. Тогда область значений оператора A_0 удовлетворяет краевому условию (38) тогда и только тогда, когда

$$\alpha A_1(0, t) + A_2(1, t) = 0. \quad (40)$$

Если область значений оператора (39) не удовлетворяет (38), то его всегда можно подправить одномерным оператором таким образом, что (40) будет теперь выполняться. В самом деле, образуем оператор

$$Af = A_0 f + \varphi(x) \int_0^1 f(t)\psi(t) dt, \quad (41)$$

и если $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ взять такими, что

$$\alpha A_1(0, t) + A_2(1, t) + \varphi(0)\psi(t) = 0,$$

то область значений оператора (41) удовлетворяет (38). Таким образом, мы легко можем описать классы операторов с условием (38). Рассмотренный нами случай замечателен тем, что мы не прибегаем к одномерному возмущению и в то же время условие (38) сохраняется. Тем самым мы изучили простейший интересный представитель интегральных операторов с ядром, разрывным на линиях $t = x$ и $t = 1 - x$ и удовлетворяющим условию (38).

Авторы выражают благодарность рецензенту за ценные замечания.

Список литературы

1. А. П. Хромов, “Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях”, *Матем. заметки*, **64:6** (1998), 932–942; англ. пер.: А. Р. Khromov, “Inversion of integral operators with kernels discontinuous on the diagonal”, *Math. Notes*, **64:6** (1998), 804–813.

2. В. В. Корнев, А. П. Хромов, “О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях”, *Матем. сб.*, **192**:10 (2001), 33–50; англ. пер.: V. V. Kornev, A. P. Khromov, “Equiconvergence of expansions in eigenfunctions of integral operators with kernels that can have discontinuities on the diagonals”, *Sb. Math.*, **192**:10 (2001), 1451–1469.
3. А. П. Хромов, “Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях”, *Матем. сб.*, **197**:11 (2006), 115–142; англ. пер.: A. P. Khromov, “Integral operators with kernels that are discontinuous on broken lines”, *Sb. Math.*, **197**:11 (2006), 1669–1696.
4. Г. М. Кесельман, “О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов”, *Изв. вузов. Матем.*, 1964, № 2, 82–93.
5. В. П. Михайлов, “О базисах Рисса в $L_2[0, 1]$ ”, *Докл. АН СССР*, **144**:5 (1962), 981–984; англ. пер.: V. P. Mikhajlov, “Riesz bases in $L_2[0, 1]$ ”, *Soviet Math. Dokl.*, **3** (1962), 851–855.
6. В. А. Ильин, “Необходимые и достаточные условия базисности в L_p и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений и разложений по системам экспонент”, *Докл. АН СССР*, **273**:4 (1983), 789–793; англ. пер.: V. A. Il'in, “Necessary and sufficient conditions for the basis property in L_p , and equiconvergence with a trigonometric series, of spectral decompositions and expansions in systems of exponential functions”, *Soviet Math. Dokl.*, **28**:3 (1983), 701–705.
7. В. А. Ильин, “Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений. I”, *Дифференц. уравнения*, **16**:5 (1980), 771–794; “II”, **16**:6 (1980), 980–1009; англ. пер.: V. A. Il'in, “Necessary and sufficient conditions for the basis property in L_p , and equiconvergence with a trigonometric series, of spectral decompositions and expansions in systems of exponential functions. I”, *Differential Equations*, **16**:5 (1980), 479–496; “II”, **16**:6 (1980), 613–633.
8. А. А. Шкаликов, “Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях”, Тр. сем. им. И. Г. Петровского, **9**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1983, 190–229.
9. В. П. Курдюмов, А. П. Хромов, “О базисах Рисса из собственных функций интегрального оператора с переменным пределом интегрирования”, *Матем. заметки*, **76**:1 (2004), 97–110; англ. пер.: V. P. Kurdyumov, A. P. Khromov, “Riesz bases of eigenfunctions of an integral operator with a variable limit of integration”, *Math. Notes*, **76**:1–2 (2004), 90–102.
10. А. А. Андреев, “Об аналогах классических краевых задач для одного дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом”, *Дифференц. уравнения*, **40**:8 (2004), 1126–1128; англ. пер.: A. A. Andreev, “Analogues of classical boundary value problems for a second-order differential equation with deviating argument”, *Differ. Equ.*, **40**:8 (2004), 1192–1194.
11. Ch. G. Dankl, “Differential-difference operators associated to reflection groups”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **311**:1 (1989), 167–183.
12. С. С. Платонов, “Разложение по собственным функциям для некоторых функционально-дифференциальных операторов”, *Тр. Петрозаводского гос. ун-та. Сер. матем.*, **11** (2004), 14–33.
13. А. П. Хромов, “Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов”, *Матем. сб.*, **114**(156):3 (1981), 378–405; англ. пер.: A. P. Hromov, “Equiconvergence theorems for integrodifferential and integral operators”, *Math. USSR-Sb.*, **42**:3 (1982), 331–355.

14. В. В. Корнев, А. П. Хромов, “Об абсолютной сходимости разложений по собственным функциям дифференциальных операторов”, *Интегральные преобразования и специальные функции. Информац. бюллетень*, **5**:1 (2005), 13–23.
15. В. В. Корнев, А. П. Хромов, “Абсолютная сходимость разложений по собственным и присоединенным функциям интегрального оператора с переменным пределом интегрирования”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:4 (2005), 59–74; англ. пер.: V. V. Kornev, A. P. Khromov, “Absolute convergence of expansions in eigen- and adjoint functions of an integral operator with a variable limit of integration”, *Izv. Math.*, **69**:4 (2005), 703–717.
16. В. В. Корнев, А. П. Хромов, “О равносходимости спектральных разложений самосопряженных интегральных операторов”, *Современные методы в теории краевых задач: Тр. Воронеж. весенней матем. школы “Понтрягинские чтения XI”*, ч. II, Воронеж. гос. ун-т, Воронеж, 2000, 73–81.
17. R. E. Langer, “On the theory of integral equations with discontinuous kernels”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **28**:4 (1926), 585–639.
18. М. Ш. Бурлуцкая, А. П. Хромов, “Метод Фурье в смешанной задаче для уравнения с частными производными первого порядка с инволюцией”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **51**:12 (2011), 2233–2246; англ. пер.: M. Sh. Burlutskaya, A. P. Khromov, “Fourier method in an initial-boundary value problem for a first-order partial differential equation with involution”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **51**:12 (2011), 2102–2114.
19. А. П. Хромов, “Об одном свойстве смешанной задачи с инволюцией”, *Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: Тр. мат. центра им. Н. И. Лобачевского*, Материалы 10-й междунар. Казан. летней науч. шк.-конф., **43**, Казань, 2011, 364–365.
20. А. П. Хромов, “Теоремы равносходимости для интегрального оператора с переменным пределом интегрирования”, *Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа: сб. статей*, Изд-во АФЦ, М., 1999, 255–266.
21. М. Ш. Бурлуцкая, “Теорема равносходимости для интегрального оператора на простейшем графе с циклом”, *Изв. Саратов. ун-та, сер. Матем. Мех. Инф.*, **8**:4 (2008), 8–13.

В. П. Курдюмов (V. P. KURDYUMOV)
 Саратовский государственный университет
 им. Н. Г. Чернышевского

Поступило в редакцию
 19.05.2011
 15.03.2012

А. П. Хромов (A. P. KHROMOV)
 Саратовский государственный университет
 им. Н. Г. Чернышевского
 E-mail: Khromovap@info.sgu.ru