Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Х. Сабитов, Некорректная краевая задача Маркуше-
вича для многосвязной области с круговыми границами,
Изв. РАН. Сер. матем., 2012, том 76, выпуск 6, 153–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7798>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 17:33:32

УДК 517.53

И. Х. Сабитов

Некорректная краевая задача Маркушевича для многосвязной области с круговыми границами

Рассматривается практически неизученная линейная краевая задача сопряжения в многосвязной области из теории функций комплексной переменной, хотя в общем виде данная задача поставлена А. И. Маркушевичем еще в 1946 г. и встречалась в геометрических исследованиях И. Н. Векуа. Задача некорректная, т. е. характер ее разрешимости изменяется при сколь угодно малом изменении ее коэффициента. При некоторых простых условиях дается полное ее решение с установлением необходимых и достаточных признаков ее разрешимости и конструктивным построением ее решений.

Библиография: 6 наименований.

Ключевые слова: голоморфные и мероморфные функции, задача линейной сопряжения, некорректность задачи, индекс, условия разрешимости.

§ 1

Пусть $(n+1)$ -связная область D^+ в расширенной плоскости E комплексной переменной $z = x + iy$ ограничена окружностью $\Gamma_0: |z| = R_0$, и лежащими внутри Γ_0 взаимно внешними окружностями $\Gamma_j: |z - z_j| = R_j$, $1 \leq j \leq n$. Границу области D^+ , проходящую в положительном для D^+ направлении, обозначим Γ ; дополнение области $\bar{D}^+$ до плоскости E обозначим D^- . Область D^- не связна и состоит из кругов $D_j^-: |z - z_j| < R_j$, $1 \leq j \leq n$, и области $D_0^-: |z| > R_0$.

Рассмотрим следующую краевую задачу: найти функции $\varphi^\pm(z)$, голоморфные соответственно в $D^\pm$ и связанные на Γ_0 условием

$$\varphi^+(t) = G(t)\overline{\varphi^-(t)}, \quad t \in \Gamma, \quad (1)$$

где $G(t)$ – некоторая заданная на Γ функция, называемая *коэффициентом* задачи. Данная задача является частным случаем общей задачи

$$\varphi^+(t) = a(t)\varphi^-(t) + b(t)\overline{\varphi^-(t)} + c(t), \quad t \in \Gamma, \quad (2)$$

поставленной А. И. Маркушевичем в [1], где задача (2) изучена для односвязной области при значениях коэффициентов $a = c = 0$, $b = 1$ и доказано, что в случае, когда D^+ – круг или внутренность обобщенной лемнискаты (т. е. кривой, определяемой алгебраическим уравнением некоторого специального вида, обобщающим классическое уравнение лемнискаты Бернулли), решение задачи (1) при $G(t) = 1$ существует и определяется выбором одной произвольной

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-01-90415-УКР_а).

голоморфной функции. При значении коэффициента $a = 0$ в случае общей односвязной области и общих коэффициентах $b(t)$ и $c(t)$ задача (2) (даже в более общей постановке, в виде так называемой краевой задачи со сдвигом) рассмотрена в [2]. О результатах последней работы и их сопоставлении с нашими результатами мы скажем несколько позже. Мы изучаем задачу (1) для указанной выше многосвязной области и сначала даем полное качественное описание картины ее разрешимости вместе с алгоритмом нахождения ее голоморфных решений при условии непрерывности и отличия от нуля коэффициента $G(t)$ в предположении, что граничные значения $\varphi^\pm(t)$ на Γ также непрерывны¹ и отличны от нуля (см. теорему 8 в одном простом частном случае и теорему 11 в общем случае), а затем получаем теорему 10 о структуре решений задачи (1) без предположения условия $\varphi^\pm(t) \neq 0$, но при прежних условиях непрерывности и необращения в нуль коэффициента $G(t)$. Это *исходные* условия для коэффициента задачи. В ходе исследования устанавливаются некоторые дополнительные условия, налагаемые на $G(t)$ и *необходимые*, например, в силу требования регулярности решения на бесконечности (см. формулы (68), (70) и комментарии к ним). Одно из основных дополнительных условий заключается в следующем: коэффициент $G(t)$ на каждой окружности Γ_j является непрерывным предельным значением некоторой функции $G_j^+(z)$, мероморфной в области D^+ , имеющей в этой области конечное число нулей и полюсов² и, вообще говоря, своей для каждого j , $0 \leq j \leq n$; это условие близко к необходимому по структуре задачи (см. § 4 и, в частности, теорему 1). Далее это условие будем называть *условием* G_M . Другие необходимые условия можно найти в теореме 6. Разумеется, в формулировках теорем все необходимые условия и условие G_M будут предполагаться выполненными.

После решения однородной задачи мы сможем получить и некоторую информацию о решениях неоднородной задачи

$$\varphi^+(t) = G(t)\overline{\varphi^-(t)} + g(t), \quad t \in \Gamma. \quad (3)$$

Отметим, что наш интерес к задаче (1) возник в связи с тем, что такие краевые условия встречаются в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей, внутренне склеенных из выпуклых кусков с общими касательными плоскостями на линиях склеивания (такое склеивание можно получить следующим образом: опустим в ограниченный по высоте параболоид вращения с круговым краем сферу достаточно большого радиуса, чтобы она не могла коснуться параболоида в его вершине; тогда часть сферы, обращенная к вершине параболоида и ограниченная линией ее касания с параболоидом, составит вместе с параболоидом внутренне склеенную поверхность с нулевым углом склеивания). Как показано в [3, ч. 2, гл. 5], нахождение непрерывного поля бесконечно малого изгиба такой поверхности приводит к необходимости решить краевую задачу вида (1) для обобщенных аналитических функций³ (в частных случаях задача получается для голоморфных функций).

¹Это значит, что компоненты $\varphi^+(z)$ и $\varphi_j^-(z)$, $0 \leq j \leq n$, решения голоморфны в открытых и непрерывны в замкнутых областях их существования.

²Впрочем, это уже следует из предположения непрерывности предельного перехода к граничным точкам и требований, налагаемых на коэффициент $G(t)$.

³Вообще говоря, в [3] речь идет о случае соприкосновения кусков поверхностей, без уточнения вида соприкосновения; если же предположить, что соприкосновение соответствует внутреннему склеиванию, получится, что в задаче (8.19) из [3] коэффициент β_1 и, соответственно, коэффициент α_1 в задаче (8.22) будут равны нулю, и мы придем к задаче вида (1).

§ 2

Однородная задача (1) исследуется сведением ее к неоднородной задаче “о скачке”

$$\varphi^+(t) = \overline{\varphi^-(t)} + g(t), \quad (4)$$

поэтому часть настоящей работы посвящена изучению задачи (4). Кроме того, отдельно нужно (и просто интересно) рассмотреть задачу (1) в простейшем ее случае

$$\varphi^+(t) = \overline{\varphi^-(t)}, \quad t \in \Gamma, \quad (5)$$

по аналогии с тем, как это было сделано в классических монографиях [4], [5].

§ 3

Уточним теперь постановку задачи. При рассмотрении простейшей задачи (5) искомые функции $\varphi^\pm(z)$ будем предполагать мероморфными соответственно в их требуемых областях существования, а предельные значения $\varphi^\pm(t)$ на Γ понимаются в любом смысле, лишь бы оставалась справедливой теорема о единственности мероморфной функции при известных ее граничных значениях на какой-либо компоненте границы области задания. Чтобы излишне не усложнять изложение в погоне за общностью постановки задачи, во всех задачах, кроме (9), будем предполагать, что рассматриваются непрерывные предельные значения искомых функций. На бесконечности предполагается, что функция $\varphi^-(z)$ или регулярна, или имеет полюс заданного порядка. В основных результатах работы – в теоремах 7–9 – мы будем предполагать, что коэффициент $G(t)$ непрерывен и отличен от нуля, удовлетворяет условию G_M , предельные значения $\varphi^\pm(t)$ на Γ также непрерывны и не обращаются в нуль, а функция $\varphi^-(z)$ регулярна на бесконечности.

В задаче “о скачке” (4) значения $\varphi^\pm(t)$ будем понимать как непрерывные пределы функций $\varphi^\pm(z)$, голоморфных в соответствующих областях $D^\pm$, включая точку $z = \infty$ (это требование можно расширить до предположения о наличии на границах или на бесконечности полюсов данного порядка, но в приложениях, о которых мы говорили выше, для функции $\varphi^-(z)$ всюду необходима ее непрерывность и, в частности, на бесконечности – регулярность).

В классах решений, регулярных на бесконечности, задача (1) инвариантна относительно дробно-линейных преобразований плоскости, оставляющих окружность Γ на месте или изменяющих ее по гомотетии. Дробно-линейным преобразованием мы можем добиться того, чтобы центры окружности Γ_0 и одной из окружностей Γ_j , $j > 0$, совпадали, поэтому можно было бы считать, что точка $z_0 = 0$ является общим центром окружностей Γ_0 и Γ_1 . Однако в классах решений с полюсом в бесконечности такой инвариантности нет, и тогда приходится учитывать расположение точки $z_0 = 0$ относительно окружностей Γ_j , $j > 0$. Такой инвариантности нет и в случае обращения функции $\varphi^-(z)$ в нуль на бесконечности. Поэтому, чтобы не рассматривать все возможные особенности расположения точки $z = z_0 = 0$, будем всегда предполагать, что она находится *внутри* первой окружности Γ_1 .

Наконец, после исследования “хороших” случаев (когда $\varphi^\pm(t) \neq 0$) мы в теореме 10 даем полное описание голоморфных решений задачи (1) в предположении непрерывности и отличия от нуля коэффициента $G(t)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Предложенный метод решения позволяет исследовать задачу (1) в случаях обращения коэффициента $G(t)$ (соответственно, граничных значений $\varphi^\pm(t)$ искомых функций) в нуль либо бесконечность в изолированных точках контура с представлением $G(t)$ (соответственно, $\varphi^\pm(t)$) в окрестности этих точек в виде $G(t) = (t - t_0)^n G_0(t)$, $n \in \mathbb{Z}$, $G_0(t_0) \neq 0$, $G_0(t) \in \mathbb{C}$ (соответственно, $\varphi^\pm(t) = (t - t_0)^n \Phi_0^\pm(t)$, $n \in \mathbb{Z}$), но мы не будем рассматривать здесь эти обобщения.

§ 4

Здесь мы формулируем результаты работы. Ограничения функции $\varphi^-(z)$ на область $D_0: |z| > R_0$, и на области $D_j: |z - z_j| < R_j$, $1 \leq j \leq n$, будем обозначать соответственно $\varphi_j^-(z)$, $0 \leq j \leq n$. Решения задач (1)–(3) считаем состоящими из компонент $\varphi^+(z), \varphi_0^-(z), \dots, \varphi_n^-(z)$, имеющих на соответствующих окружностях непрерывные предельные значения. Всегда будем предполагать, что на каждой окружности Γ_j , $0 \leq j \leq n$, для коэффициента $G(t)$ в задаче (1) в общем случае выполнено условие G_M , т.е. он является непрерывным предельным значением некоторой, своей для каждой окружности, мероморфной функции в D^+ . Введем следующие определения: в кольце, содержащем некоторую окружность C и имеющем концентрические с C граничные окружности, область между C и меньшей граничной окружностью будем называть *внутренней частью* или *внутренним полукольцом* кольца, а область между C и большей граничной окружностью назовем *внешней частью* или *внешним полукольцом* кольца. С использованием этих терминов мы можем показать, что условие G_M близко к необходимому, потому что верна следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть во внутренней и внешней частях кругового кольца D вокруг некоторой окружности C заданы две мероморфные или голоморфные функции $f^+(z)$ и $f^-(z)$ соответственно, для которых всюду на C существуют непрерывные предельные значения $f^\pm(t)$, $t \in C$, удовлетворяющие на C равенству

$$f^+(t) = G(t) \overline{f^-(t)}$$

с некоторым заданным на C непрерывным коэффициентом $G(t) \neq 0$. Тогда $G(t)$ почти всюду является угловым предельным значением на C некоторых мероморфных функций, заданных во внутреннем и внешнем полукольцах кольца D .

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть мероморфные или голоморфные функции $f^\pm(z)$ являются решением задачи (1) в некоторой области вида $\Omega \cup K$, где $\Omega \cap K = \emptyset$ и K – внешность или внутренность круга, и окружность $C = \partial K$ является компонентой границы или полной границей области Ω . Далее, пусть коэффициент $G(t)$, $t \in C$, является непрерывным предельным значением на C мероморфной функции, определенной в некотором расположенном в Ω круговом полукольце вокруг C . Тогда эта мероморфная функция определена во всей области Ω .

Относительно разрешимости задач (1)–(5) в односвязной области имеют место следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 2. В односвязном случае задача (5) в классе голоморфных (мероморфных) функций имеет решения, одна из компонент которых является произвольно выбираемой голоморфной (мероморфной) функцией⁴, однородная задача (1) в классе мероморфных (голоморфных) функций имеет решения, одна из компонент которых является произвольно выбираемой мероморфной (голоморфной) функцией, являющейся решением задачи (5), а неоднородная задача (4) в любом из классов функций – голоморфных или мероморфных – или неразрешима, или в случае разрешимости имеет ровно одно либо бесконечно много решений, зависящих от бесконечного числа параметров.

Переходим к рассмотрению случая многосвязных областей.

ТЕОРЕМА 3. В случае неодносвязной области D^+ каждая компонента решения задачи (5) в классе мероморфных функций продолжима на всю плоскость E как мероморфная функция с конечным числом полюсов, т. е. как рациональная функция, и решение существует с произвольно выбранной одной из компонент решения в виде рациональной функции.

Заметим, что в теореме 3 мы не налагаем на граничное поведение искомых мероморфных функций никаких априорных условий, кроме требования единственности их восстановления по их граничным значениям.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть в неодносвязном случае задача (1) имеет некоторое мероморфное или голоморфное решение с компонентами $\Phi^+(z)$, $\Phi_j^-(z)$, $0 \leq j \leq n$, и непрерывными и не обращающимися в нуль на границе предельными значениями. Тогда любое другое ее решение имеет компоненты вида

$$\varphi^+(z) = f^+(z)\Phi^+(z), \quad \varphi_j^-(z) = f_j^+(z)\Phi_j^+(z), \quad 0 \leq j \leq n, \quad (6)$$

где $f^+(z)$, $f_j^+(z)$, $0 \leq j \leq n$, – некоторые рациональные функции, являющиеся мероморфным решением задачи (5). В случае голоморфных решений полюсы этих рациональных функций в соответствующих областях D^+ и D_j^- должны “гаситься” нулями функций $\Phi^+(z)$ и $\Phi_j^-(z)$, $0 \leq j \leq n$.

ТЕОРЕМА 4. В неодносвязном случае разрешимость задачи (5) в классе голоморфных функций следующая:

(а) при условии $\varphi^-(\infty) = c$ задача (5) имеет единственное решение $\varphi^+(z) = \bar{c}$, $\varphi^-(z) = c$;

(б) при условии $\varphi^-(z) \sim cz^k$, $z \rightarrow \infty$ ($c \neq 0$ и $k \geq 1$ целое), задача (5) неразрешима, если область D^+ имеет связность $n+1 \geq 3$; в случае двусвязной области D^+ задача также неразрешима, если $z_0 = 0 \in \bar{D}^+$; если же $z_0 = 0 \in D^-$, то задача (5) имеет $(2k)$ -параметрическое семейство решений.

Разрешимость задачи (4) в классе голоморфных функций определяется следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 5. Для разрешимости задачи (4) в классе голоморфных в $D^\pm$ функций $\varphi^\pm(z)$ с непрерывными граничными значениями необходимо и достаточно выполнение двух условий:

1) каждая функция $g_j(t) \equiv g(t)$, $t \in \Gamma_j$, $0 \leq j \leq n$, непрерывна на Γ_j и является предельным значением на Γ_j некоторой голоморфной в D^+ функции $g_j^+(z)$, непрерывной в $\bar{D}^+$;

⁴Более точно это означает, что одну из компонент решения можно выбрать произвольно в соответствующем классе функций.

2) для любых i, j , $0 \leq i \neq j \leq n$, разность $g_i^+(z) - g_j^+(z)$ продолжима как голоморфная функция в область $\Omega_{ij} = E \setminus (\overline{D_i^-} \cup \overline{D_j^-})$, включая точку $z = \infty$ (если эта точка содержится в Ω_{ij}), и при этом решение задачи единственно с точностью до выбора значения $\varphi_0^-(\infty)$.

Заметим, что в случае двусвязной области задача (4) разрешима уже при выполнении только условия 1) теоремы 5, так как тогда условие 2) выполняется автоматически.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Число возможных решений задачи (4) в классе мероморфных функций с фиксированным порядком полюса на бесконечности определяется применением теоремы 4.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Данное ниже доказательство теоремы 5 будет конструктивным, т. е. доказательство существования решения будет дано путем построения этого решения.

Формулировку основного результата о решении задачи (1) мы разобьем на три части (см. теоремы 6–8 и 11).

ТЕОРЕМА 6. Для разрешимости задачи (1) с непрерывным коэффициентом $G(t) \neq 0$ в классе голоморфных в $D^\pm$ и непрерывных в $\overline{D}^\pm$ функций $\varphi^\pm(z)$, $\varphi^\pm(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$, необходимо, чтобы:

1) каждая функция $G_j(t) \equiv G(t)$, $t \in \Gamma_j$, $0 \leq j \leq n$, была предельным значением на Γ_j некоторой мероморфной в D^+ функции $G_j^+(z)$ с конечным числом нулей и полюсов в D^+ , не обращающейся в нуль на Γ и имеющей не более чем конечное число полюсов на $\Gamma \setminus \Gamma_j$;

2) для любых $0 \leq i, j \leq n$ отношение $G_j^+(z)/G_i^+(z)$ было продолжимо в область $D_{ij} = E \setminus (\overline{D_i^-} \cup \overline{D_j^-})$ как некоторая мероморфная функция $G_{ij}(z)$, имеющая конечное число нулей и полюсов, включая границу ∂D_{ij} .

Сформулированные в теореме 6 необходимые условия не являются достаточными для существования решения. Более того, в случае областей связности 3 и выше будут даны еще несколько необходимых условий разрешимости задачи. Кроме того, формулировка части основного результата, относящейся к достаточным условиям существования или несуществования решения задачи (1), требует введения ряда новых терминов и числовых характеристик функций $G_j^+(z)$, причем и сами условия, и доказательства их достаточности существенно различны для случаев областей связности 2 и выше.

Пусть в некоторой области D задана мероморфная функция $f(z)$ с конечным числом нулей и полюсов. Тогда $f(z)$ представима в виде

$$f(z) = \hat{f}(z) \frac{n_f(z)}{p_f(z)},$$

где $n_f(z)$ и $p_f(z)$ – минимальные носители нулей и полюсов функции $f(z)$ с учетом их кратностей (иными словами, $n_f(z)/p_f(z)$ является отношением минимальных многочленов, имеющих корни в нулях и полюсах функции $f(z)$). Голоморфную и не обращающуюся в нуль в области D функцию $\hat{f}(z)$ будем называть *ядром* функции $f(z)$.

Пусть в многосвязной⁵ области выполнены необходимые условия из теоремы 6 с дополнительным условием отсутствия у функции $G_j^+(z)$ полюсов на граничных окружностях⁶, и пусть функции $G_j^+(z)$ определены, как в теореме 6. Обозначим через N_j и P_j число нулей и полюсов (с учетом их кратности) в D^+ функций $G_j^+(z)$, $0 \leq j \leq n$; через N обозначаем общее число нулей в D^+ всех функций $G_j^+(z)$, $0 \leq j \leq n$, причем общий нуль нескольких функций, если он существует, считается не по суммарной, а по максимальной встречающейся кратности.

Пусть целое число m определено равенством

$$m = \text{Ind}_\Gamma G - \sum_{j=0}^n N_j + \sum_{j=0}^n P_j + nN. \quad (7)$$

Введенных характеристик достаточно для формулировки теоремы о разрешимости задачи (1) в случае двусвязной области, когда $n = 1$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть область D^+ двусвязна. Тогда в классе голоморфных функций задача (1):

- 1) при $m < 0$ не имеет решений;
- 2) при $m = 0$ имеет единственное решение (с точностью до умножения на действительную постоянную);
- 3) при $m > 0$ имеет $(2m)$ -параметрическое семейство решений.

Отметим, что параметры считаются вещественнозначными величинами, но зависимость от них сложная, не такая, как в обычной теории линейных краевых задач. Описание этой зависимости будет дано в ходе доказательства теоремы 7.

Далее, пусть $\hat{G}_j^+(z)$ – ядро мероморфной функции $G_j^+(z)$. В силу выполнения условий теоремы 6 функция $\tilde{G}_{ij}(z) = \hat{G}_j^+(z)/\hat{G}_i^+(z)$ продолжима в область $E \setminus (\bar{D}_i^- \cup \bar{D}_j^-)$. Обозначим через s_l общее число нулей в D_l^- , $1 \leq l \leq n$, всех функций $\tilde{G}_{0j}(z)$, $1 \leq j \neq l$, причем общий нуль нескольких функций, если он существует, также считается по максимальной кратности.

Положим, далее, что τ_0 – общее число отличных от ∞ нулей всех функций $\tilde{G}_{1j}$, $2 \leq j \leq n$, в D_0 , причем нули считаются по тем же правилам, что и выше. Наконец, пусть r_j – порядок на бесконечности функции $\tilde{G}_{1j}(z)$; положим $r = \max_{j \geq 2} (P_j - N_j + N_1 - P_1 + r_j)$. Точная формулировка основной теоремы (см. теорему 11) приведена в конце работы, так как она требует введения еще нескольких довольно сложно описываемых параметров, поэтому мы ограничимся здесь формулировкой не очень точного⁷, но более короткого ее варианта, дающего, тем не менее, некоторое довольно близкое к истинному представление об основном результате.

ТЕОРЕМА 8. Пусть коэффициент $G(t)$ задачи (1) удовлетворяет приведенным в теореме 6 необходимым условиям (с дополнительным предположением,

⁵В случае односвязной области необходимое условие 1) теоремы 6 является и достаточным для существования бесконечного множества решений, одна из компонент которых является произвольно выбираемой голоморфной в D^+ функцией.

⁶Это условие добавлено лишь для упрощения определения вводимых ниже целочисленных инвариантов.

⁷Имеется в виду, что эта форма теоремы верна при некоторых дополнительных условиях, которые здесь мы не уточняем.

что функции $G_j^+(z)$ не имеют полюсов на Γ) ее разрешимости в классе голоморфных функций при $\varphi^\pm(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$, и пусть целые числа $N_0 \geq 0$, $P_0 \geq 0$, $s_l \geq 0$, $1 \leq l \leq n$, $\tau_0 \geq 0$ и r определены, как и выше. Напомним, что точка $z_0 = 0$ считается принадлежащей D_1 . Введем число

$$\kappa = \text{Ind}_{\Gamma_0} \frac{G_1(t)}{G_0(t)} - N - P_0 + N_0 - \tau_0 - \sum_{l=1}^n s_l - k_0,$$

где $k_0 \geq 0$ – порядок нуля функции $\varphi_0^-(z)$ на бесконечности⁸.

Тогда задача (1):

- 1) при $\kappa < (|r| + r)/2$ неразрешима;
- 2) при $\kappa = (|r| + r)/2$ имеет единственное решение;
- 3) при $\kappa > (|r| + r)/2$ имеет $(2q)$ -параметрическое семейство решений, где $2q = 2\kappa - |r| - r$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Предположение $z_0 = 0 \in D_1^-$ в теореме 8 введено лишь для некоторого облегчения изложения доказательства, оно не влияет на общность рассмотрения, так как выше было отмечено, что задача (1) в классе голоморфных в D^- и регулярных на бесконечности функций $\varphi^-(z)$ инвариантна относительно дробно-линейных отображений плоскости, переводящих окружность Γ_0 на себя. Поэтому в случае $z_0 = 0 \notin D_1^-$ мы можем применить дробно-линейное отображение круга $|z| < R_0$ на себя и добиться того, чтобы в измененной области центр окружности Γ_0 находился внутри новой окружности Γ_1 (или даже совпадал с ее центром). Однако это верно только в случае, когда решение на бесконечности регулярно и не обращается в нуль, а в общем случае мы можем сказать лишь то, что метод исследования не зависит от места нахождения точки $z_0 = 0$ по отношению к окружностям Γ_j .

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Если предполагать, что компонента $\varphi_0^-(z)$ решения задачи (1) имеет на бесконечности полюс данного порядка $m \leq 1$, задача теряет инвариантность относительно дробно-линейных отображений плоскости и условия $z_0 = 0 \in D_1^-$ или $z_0 \notin D_1^-$ могут давать разные картины разрешимости, аналогично теореме 4 в случае (b). Поиском точной картины разрешимости в этом случае мы заниматься не будем.

Для неоднородной задачи (3) мы можем сформулировать лишь следующее легко доказываемое утверждение.

ТЕОРЕМА 9. Неоднородная задача (3) или не имеет ни одного решения, или имеет ровно одно решение, или имеет бесчисленное множество решений, для которых разность любых двух решений является решением соответствующей однородной задачи.

Рассмотренный класс решений задачи (1) не позволяет утверждать, что совокупность всех ее решений составляет линейное пространство, так как сумма двух решений может иметь нули на границе. Однако если отбросить условие $\varphi^\pm(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$, то станет очевидно, что множество голоморфных решений задачи (с одним и тем же предположением о природе предельных значений) является линейным пространством над полем вещественных чисел. Это наблюдение мы сформулируем в виде следующей теоремы.

⁸Мы покажем, что порядок решения на бесконечности на самом деле определяется коэффициентами задачи, в этом и состоит одна из неожиданностей задачи.

ТЕОРЕМА 10. Если задача (1) разрешима в классе голоморфных функций $\varphi^\pm(z)$, имеющих угловые предельные значения $\varphi^\pm(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$, в каком-нибудь одном и том же смысле (т. е., например, все компоненты решения $\varphi^\pm(z)$ имеют угловые предельные значения или все они непрерывны в замкнутой области), то совокупность всех таких голоморфных решений является линейным пространством над полем вещественных чисел с представлением общего решения в виде (6), в котором в качестве решения $\Phi^\pm(z)$ можно взять любое решение из теоремы 8 в случае его существования.

§ 5

В настоящем параграфе мы приведем различные комментарии по поводу сформулированных выше теорем.

1. При выполнении условий теоремы 8 нахождение решения задачи (1) проводится по некоторому алгоритму и решение можно выписать в явном виде через некоторые выражения, определяемые по коэффициенту $G(t)$. В частности, если коэффициенты $G(t)$ и $g(t)$ на каждой из окружностей Γ_j , $0 \leq j \leq n$, являются рациональными функциями точки $t \in \Gamma_j$, то все вычисления проводятся только с использованием рациональных функций; более того, все вычисления могут быть проведены конечным числом элементарных операций, если в предполагаемых представлениях коэффициентов $G(t)$ и $g(t)$ через мероморфные функции известны нули и полюсы этих функций (в конечном числе).

2. Как мы увидим из доказательства теоремы 8, число $\varkappa$ будет иметь представление вида (см. далее (74))

$$\varkappa = p + k_1 + k'_{10} + \sum_{l=1}^n k'_{0l},$$

где $p \geq 0$, $k_1 \geq 0$, $k'_{0l} \geq 0$, $k'_{10} \geq 0$ – целые числа, выбираемые произвольно с сохранением этого равенства, причем выбирать данные числа мы можем так, чтобы соответствующее решение $\{\varphi^+(z), \varphi^-(z)\}$ имело определенные свойства, связанные с количеством и распределением его нулей в $D^\pm$.

3. Из теоремы 6 видно, что задача (1) не является корректной (т. е. при сколь угодно малых изменениях коэффициента $G(t)$ необходимые условия 1), 2) теоремы могут оказаться невыполненными). Для некорректных задач теории функций в случае односвязной области в работе [2] подмечена общая закономерность: такая задача или вовсе не имеет решения, или имеет одно решение, или решения зависят от бесконечного числа параметров. Однако из теоремы 8 усматриваем, что многосвязность области “ослабляет” эффект некорректности задачи и ее разрешимость приобретает более регулярный характер: число ее решений определяется значениями целочисленной характеристики $\varkappa$ коэффициента $G(t)$ (некоторого аналога индекса), и ситуация становится похожей на разрешимость системы линейных уравнений, т. е. или решения нет, или есть одно решение, или решений конечно-параметрическое множество.

4. Как мы увидим далее, основу применяемого метода составляет возможность решения задачи (5) для круга при произвольных известных функциях $\varphi^+(z)$ или $\varphi^-(z)$. Поэтому если области D_j ограничены линиями, для которых имеет место произвольный выбор компонент в решениях (как, например,

для кривых, рассмотренных А. И. Маркушевичем в работе [1]), то можно ожидать, что для таких областей $D^\pm$ результаты работы останутся справедливыми по крайней мере в качественном смысле.

§ 6

Здесь мы напомним об одном способе построения аналитических функций вне (внутри) круга по известной аналитической функции внутри (вне) круга (см. [4]). Пусть K^+ (K^-) – внутренность (внешность) окружности $|z - a| = R$. Рассмотрим отображение

$$\pi^+ : z \rightarrow \pi^+(z) = \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a, \quad z \in K^+, \quad \pi^+(z) \in K^-. \quad (8)$$

Это отображение гомеоморфно переводит K^+ в K^- . Обратное отображение $\pi^- = (\pi^+)^{-1}$ имеет вид

$$\pi^- : z \rightarrow \pi^-(z) = \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a, \quad z \in K^-, \quad \pi^-(z) \in K^+,$$

и оно переводит K^- в K^+ . Если $f^\pm(z)$ – произвольная голоморфная (мероморфная) функция в области $K^\pm$, то применением отображения $\pi^\pm$ мы можем построить по $f^\pm$ голоморфную (мероморфную) в $K^\mp$ функцию

$$F^\mp(z) = \overline{f^\pm(\pi^\mp(z))}, \quad z \in K^\mp. \quad (9)$$

Далее правую часть (9) мы будем часто обозначать через $\bar{f}^\pm(\pi^\mp(z))$.

Простой проверкой можно показать, что на граничной окружности $|t - a| = R$ имеет место

$$F^\mp(t) = \overline{f^\pm(t)}, \quad |t - a| = R. \quad (10)$$

В дальнейшем мы будем часто использовать отображения $\pi^\pm$ и, чтобы не уточнять каждый раз, откуда и куда они действуют, будем использовать выражение "отображение типа π ". Этот способ построения новой аналитической функции вне или внутри круга по принятой в [4] терминологии называется *распространением* функции, в отличие от термина "продолжение" с другим содержанием.

§ 7

Теперь мы можем приступить к доказательствам теорем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Распространим функцию $f^-(z)$ из внешнего полукольца во внутреннее отображением типа π и обозначим полученную функцию через $F^+(z)$. На окружности C имеем равенство

$$f^+(t) = G(t)F^+(t), \quad (11)$$

а во внутреннем полукольце тождество

$$f^+(z) \equiv \frac{f^+(z)}{F^+(z)} F^+(z). \quad (12)$$

Обозначим мероморфную функцию $f^+(z)/F^+(z)$ через $Q^+(z)$. Поскольку для функции $F^+(z) \not\equiv 0$ всюду существуют угловые граничные значения, множество в C , на котором ее предел при $z \rightarrow t$ может быть равен нулю, имеет меру нуль. Следовательно, в дополнении к этому множеству существует $\lim_{z \rightarrow t} Q^+(z) \stackrel{\text{def}}{=} Q_0(t)$. Тогда, вычитая (12) из (11), в пределе получаем $0 = (G(t) - Q_0(t))F^+(t)$, значит, на множестве полной меры имеем

$$G(t) = \lim_{z \rightarrow t} Q^+(z),$$

где $Q^+(z) = f^+(z)/F^+(z)$ – мероморфная функция, что и утверждалось.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Пусть функция $f^-(z)$ определена в K . Распространив ее на дополнение K до полной плоскости отображением π , в частности и на Ω , можем написать для Ω тождество

$$f^+(z) = \frac{f^+(z)}{\bar{f}^-(\pi(z))} \bar{f}^-(\pi(z)), \quad z \in \Omega. \quad (13)$$

По условию коэффициент $G(t)$ является пределом на C некоторой мероморфной функции $Q^+(z)$, заданной в полукольце вокруг C . Точно такими же рассуждениями, как и в доказательстве теоремы 1, с использованием тождества (13) мы можем показать, что $G(t)$ почти всюду на C является пределом мероморфной функции $f^+(z)/\bar{f}^-(\pi(z))$, следовательно, $Q^+(z)$ должна быть продолжима на всю область Ω и совпадать в этой области с $f^+(z)/\bar{f}^-(\pi(z))$.

§ 8

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $\{\varphi^+(z), \varphi^-(z)\}$ – решение задачи (5) в классе мероморфных функций. Распространим функцию $\varphi^-(z)$, $z \in D_0$, по формуле (9) внутрь круга K^+ : $|z| < R_0$. Получим функцию $\Phi^+(z) = \overline{\varphi^-(R_0^2/\bar{z})}$, $z \in K^+$. Поскольку $\varphi^+(t) = \overline{\varphi^-(t)} = \Phi^+(t)$, $|t| = R_0$, имеем $\varphi^+(z) = \Phi^+(z)$, $|z| < R_0$. Следовательно, одну из мероморфных функций $\varphi^\pm(z)$ можем считать произвольной, и она однозначно определяет решение задачи (5). В частности, решение задачи голоморфно в том и только в том случае, когда голоморфна одна из ее компонент.

Рассмотрим задачу (1). В силу следствия 1 для существования ее решения необходимо, чтобы коэффициент $G(t)$ был пределом некоторой функции $Q^+(z)$, заданной и мероморфной в D^+ . Тогда функции $\varphi^+(z) = 1$, $\varphi_0^-(z) = (\overline{Q^+(R_0^2/\bar{z})})^{-1}$ будут решением задачи (1). Умножив эти функции соответственно на $\bar{h}^-(R_0^2/\bar{z})$, $z \in D^+$, и $h^-(z)$, $z \in D_0^-$, где $h^-(z)$ – произвольная мероморфная или голоморфная функция в D_0^- , дающая в паре с $\bar{h}^-(R_0^2/\bar{z})$ решение задачи (5), можем получить и другие решения задачи (1) в классе мероморфных или голоморфных функций. Легко показать и обратное: любое новое решение $\{\varphi^+(z), \varphi^-(z)\}$ задачи (1) получается из решения $\{1, \varphi_0^-(z)\}$ умножением на соответствующие компоненты некоторого решения задачи (5). Действительно, рассмотрим пару $\{\varphi^+(z), \Phi^-(z)\}$, где $\Phi^-(z) = \overline{Q^+(R_0^2/\bar{z})}\varphi^-(z)$. Она удовлетворяет задаче (5): $\varphi^+(t) = \Phi^-(t)$, и рассматриваемое решение $\{\varphi^+(z), \varphi^-(z)\}$ задачи (1) получается из ее решения $\{1, \varphi_0^-(z)\}$ в виде $\{1 \cdot \varphi^+(z), \varphi_0^-(z) \cdot \Phi^-(z)\}$.

Рассмотрим теперь задачу (4). Пусть $\varphi^-(z)$, $z \in D_0^-$, – также соответствующая компонента ее решения $\{\varphi^+(z), \varphi^-(z)\}$. Распространим $\varphi^-(z)$ по формуле (9) внутрь круга K^+ : $|z| < R_0$, и получим функцию $\Phi^+(z) = \overline{\varphi^-(R_0^2/\bar{z})}$,

где $z \in K^+$. Поскольку $\overline{\varphi^-(t)} = \Phi^+(t)$, $|t| = R_0$, имеем $g(t) = \varphi^+(z) - \Phi^+(z)$, $|z| < R_0$. Следовательно, для разрешимости задачи (4) в классе голоморфных (мероморфных) функций необходимо, чтобы функция $g(t)$ была предельным значением на окружности Γ_0 некоторой голоморфной (мероморфной) внутри круга K^+ функции. Так как такая функция, обозначим ее $g^+(z)$, однозначно определяется своими граничными значениями⁹, решение задачи (4) имеет вид $\varphi^+(z) = \overline{\varphi^-(R_0^2/\bar{z})} + g^+(z)$ с произвольной мероморфной (или голоморфной) функцией $\varphi^-(z)$, $z \in D_0$.

Наконец, для неоднородной задачи (3) можно сказать, что она:

1) не имеет решения (например, если ищется голоморфное и регулярное на бесконечности решение, то задача $\varphi^+(t) = \overline{\varphi^-(t)} + \bar{t}$, $|t| = 1$, заведомо не имеет решения);

2) имеет одно решение (например, задача $\varphi^+(t) = G(t)\overline{\varphi^-(t)} + g(t)$, где коэффициент $G(t)$ не является пределом никакой мероморфной функции и $g(t) = (t - tG(t))$, имеет для области D^+ : $|z| < 1$, единственное решение $\varphi^+(z) = z$, $\varphi^-(z) = 1/z$);

3) если имеет более одного решения, то она имеет бесконечно много решений, зависящих от бесконечного числа параметров, так как при существовании уже двух решений их разность должна быть решением задачи (1) с соответствующими условиями для коэффициента $G(t)$ и соответствующими свойствами решений.

В работе [2] решение неоднородной задачи в односвязной области (и даже в более общем случае, когда рассматривается задача со сдвигом) сведено к решению некоторого интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода с приведением необходимого и достаточного условия его разрешимости и алгоритма его решения. Наше исследование лишь подтверждает установленную в [2] качественную картину разрешимости неоднородной задачи.

§ 9

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть K^+ (K^-) – внутренность (внешность) окружности $|z - a| = R$. Рассмотрим введенные в § 6 взаимно обратные отображения

$$\pi^\pm: K^\pm \rightarrow K^\mp, \quad \pi^\pm(z) = \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a, \quad z \in K^\pm, \quad \pi^\pm(z) \in K^\mp. \quad (14)$$

В применении к нашей задаче мы будем рассматривать отображения $\pi_0^-: D_0^- \rightarrow D_0^+ = E \setminus \overline{D_0^-}$ (при этом считаем $R = R_0$, $a = 0$) и $\pi_j^+: D_j^- \rightarrow D_j^+ = E \setminus \overline{D_j^-}$, $1 \leq j \leq n$ (при этом считаем $R = R_j$, $a = z_j$), так что $K_0^- = D_0^- = \{|z| > R_0\}$, $K_j^+ = D_j^- = \{|z - z_j| < R_j\}$, $1 \leq j \leq n$. Эти отображения позволяют по аналогии с формулой (9) распространить мероморфные функции в областях $D_j^\pm$ на мероморфные функции в областях $D_j^\mp$.

⁹Для голоморфной функции эта функция выписывается явно интегралом Коши, а в случае мероморфных функций, хотя для них и известна теорема единственности при очень широких условиях для их граничных значений (см. [6, с. 319]), построение самой функции по ее граничным значениям, если полюсы заранее не известны, представляется довольно сложной задачей, тем более, когда речь идет о восстановлении мероморфной функции в многосвязной области по ее значениям на одной из компонент границы.

Пусть $\{\varphi^+(z), \varphi^-(z)\}$ – решение задачи (5) в классе мероморфных функций. Распространим функцию $\varphi_0^-(z)$ по аналогии с (9) внутрь круга $K_0^+ : |z| < R_0$. Получим

$$\varphi_0^+(z) = \overline{\varphi_0^-(\pi_0^+(z))}, \quad |z| < R_0, \quad \pi_0^+(z) = \frac{R_0^2}{\bar{z}} \in D_0^-. \quad (15)$$

Поскольку на Γ_0

$$\varphi_0^+(t) = \overline{\varphi_0^-(t)} = \varphi^+(t), \quad t \in \Gamma_0,$$

то $\varphi^+(z)$ можно продолжить из D^+ на весь круг $|z| < R_0$ функцией с обозначением $\varphi_0^+(z)$, поэтому таким образом продолженная функция $\varphi^+(z)$ мероморфна в круге $|z| < R_0$, включая точки всех окружностей Γ_j , $1 \leq j \leq n$.

Распространим также согласно (9) одну из функций $\varphi_j^-(z)$ из D_j^- в $E \setminus \bar{D}_j^-$. Получим функцию

$$\varphi_j^+(z) = \overline{\varphi_j^-(\pi_j^-(z))}, \quad |z - z_j| > R_j, \quad \pi_j^-(z) \in D_j^-.$$

Поскольку на Γ_j

$$\varphi_j^+(t) = \overline{\varphi_j^-(t)} = \varphi^+(t), \quad t \in \Gamma_j,$$

то $\varphi^+(z)$ продолжается мероморфной функцией с обозначением $\varphi_j^+(z)$ на всю область $E \setminus \bar{D}_j^-$, включая и точки окружности Γ_0 .

Итак, $\varphi^+(z)$ мероморфна на всей плоскости E , включая точку $z = \infty$, причем она может иметь в E только конечное число полюсов в силу невозможности существования точек сгущения полюсов. Тогда $\varphi^+(z)$ представляется как рациональная функция, поэтому каждая функция $\varphi_j^-(z)$, которая строится по $\varphi^+(z)$ согласно (9), также является рациональной функцией (в частности, рациональной является и исходная свободно выбираемая функция $\varphi_0^-(z)$). Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. Пусть задача (1) имеет голоморфные решения $\{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$ и $\{\varphi^+(z), \varphi^-(z)\}$. Тогда отношения соответствующих компонент будут решением в классе мероморфных функций задачи (5), а по теореме 3 это решение состоит из функций, мероморфных на всей плоскости, что и доказывает утверждение.

§ 10

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. (а) Из рассуждений, использованных в доказательстве теоремы 3, вытекает, что $\varphi_j^+(z)$ совпадает с $\varphi^+(z)$ в D^+ и при любом $j \geq 1$ имеет в $E \setminus \bar{D}_j^-$ столько же полюсов, сколько и $\varphi_j^-(z)$ в D_j^- . Поскольку функция φ_j^- по условию голоморфна в D_j^- , она не имеет в D_j^- ни одного полюса. Кроме того, функция $\varphi_0^+(z) = \overline{\varphi_0^-(\pi_0^+(z))}$ не имеет ни одного полюса внутри круга $|z| < R_0$ и также совпадает с $\varphi^+(z)$ в D^+ . Следовательно, продолжение функции $\varphi^+(z)$ на всю плоскость не имеет ни одного полюса, и поэтому $\varphi^+(z) = c_0 \equiv \text{const}$, а $\varphi^-(z) = \bar{c}_0 = \varphi_0^-(\infty)$.

(б) Пусть теперь точка $z = \infty$ – полюс функции $\varphi_0^-(z)$ порядка $k \geq 1$, т. е. $\varphi_0^-(z) \sim cz^k$, $c \neq 0$, $z \rightarrow \infty$. Из (15) видно, что тогда точка $z_0 = 0$ также будет полюсом того же порядка для определенной в круге $|z| < R_0$ функции $\varphi_0^+(z)$. В области D^+ функция $\varphi_0^+(z)$ совпадает с $\varphi^+(z)$. Если область D^+

более чем двусвязна, найдется окружность Γ_j , $j \geq 1$, не содержащая внутри себя точку $z_0 = 0$. Тогда распространение функции $\varphi_j^-(z)$ из круга D_j^- на его внешность совпадет в пределах круга $|z| < R_0$ с функцией $\varphi_0^+(z)$, следовательно, в прообразе точки $z_0 = 0$ внутри D_j^- функция $\varphi_j^-(z)$ должна иметь полюс, что невозможно в силу предположения ее голоморфности.

Если область D^+ двусвязна и $z_0 = 0 \in \overline{D}^+$, то $\varphi^+(z)$ имеет полюс в $z_0 \in \overline{D}^+$, что невозможно. Пусть z_0 принадлежит области $D_1^- : |z - z_1| < R_1$. Голоморфная в D_1^- функция $\varphi_1^-(z)$ распространяется во внешность круга D_1^- голоморфной функцией, совпадающей с $\varphi^+(z)$ в D^+ . Следовательно, аналитическое продолжение функции $\varphi^+(z)$ на всю плоскость имеет только один полюс в точке $z_0 = 0$ порядка k , и оно должно быть рациональной функцией вида

$$\varphi^+(z) = \sum_{m=0}^k \frac{a_m}{z^m}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_0^-(z) &= \sum_{m=0}^k \frac{\bar{a}_m}{R_0^{2m}} z^m, & \bar{a}_k &= cR_0^{2k}, \quad |z| > R_0, \\ \varphi_1^-(z) &= \sum_{m=0}^k \frac{\bar{a}_m (z - z_1)^m}{(R_1^2 + \bar{z}_1(z - z_1))^m}, & |z - z_1| &< R_1. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. В случае $z_0 \in \Gamma_1$ отсутствие решения задачи (5) фактически было следствием предположения ограниченности искомой функции $\varphi^+(z)$ в $D^+(z)$ или функции $\varphi_1^-(z)$ в D_1^- . Если предполагать наличие у этих функций полюсов на их общей границе Γ_1 , то картина разрешимости в случае двусвязной области соответственно изменится.

§ 11

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Необходимость. Пусть задача (4) решена. Распространим функции $\varphi_j^-(z)$ из D_j^- в $E \setminus D_j^-$ формулой вида (9); получим голоморфные в $E \setminus D_j^-$ функции $\varphi_j^+(z)$, для которых

$$\varphi^+(t) = \varphi_j^+(t) + g_j(t), \quad t \in \Gamma_j; \quad g_j(t) \equiv g(t), \quad t \in \Gamma_j.$$

Следовательно, $g_j(t)$ является предельным значением на Γ_j голоморфной в D^+ функции $\varphi^+(z) - \varphi_j^+(z)$. Положим

$$g_j^+(z) = \varphi^+(z) - \varphi_j^+(z), \quad z \in D^+.$$

Голоморфная функция $\varphi_j^+(z)$, $0 \leq j \leq n$, определена в $E \setminus D_j^-$. Тогда очевидно, что функция

$$g_j^+(z) - g_i^+(z) = \varphi_i^+(z) - \varphi_j^+(z)$$

при любых $0 \leq i, j \leq n$ определена по аналитическому продолжению в $E \setminus (\overline{D_i^-} \cap \overline{D_j^-})$; в частности, на бесконечности ее значение равно $\varphi_i^-(z_i) - \varphi_j^-(z_j)$.

Достаточность. Пусть $g_j(t) = g(t)$, $t \in \Gamma_j$, является предельным значением на Γ_j некоторой голоморфной в D^+ функции $g_j^+(z)$, $0 \leq j \leq n$. Решение задачи (4) равносильно решению задачи

$$\psi^+(t) = \overline{\varphi^-(t)} + \tilde{g}(t), \quad t \in \Gamma, \quad (16)$$

где

$$\psi^+(z) = \varphi^+(z) - g_0^+(z), \quad z \in D^+; \quad \tilde{g}(t) = g(t) - g_0^+(t), \quad t \in \Gamma.$$

Функция $\tilde{g}_j(t) = \tilde{g}(t)$, $t \in \Gamma_j$, является предельным значением на Γ_j голоморфной в D^+ функции $g_j^+(z) - g_0^+(z)$; обозначим ее через $\tilde{g}_j^+(z)$. Возьмем произвольно одну из функций $\tilde{g}_j^+(z)$, $1 \leq j \leq n$; пусть $f_j^+(z)$ — основная¹⁰ правильная часть ряда Лорана функции $\tilde{g}_j^+(z)$ в кольцевой полукрестности окружности Γ_0 . Утверждается, что:

1) все функции $\tilde{g}_i^+(z)$, $i \neq j$, $1 \leq i \leq n$, имеют около Γ_0 одинаковые основные правильные части ряда Лорана $f_j^+(z)$;

2) функция $\psi^+(z) = f_j^+(z) + \bar{c}$ определяет решение задачи (16) со значением $c = \varphi^-(\infty)$.

Действительно, по условию голоморфная функция $\tilde{g}_j^+(z) - \tilde{g}_i^+(z) = g_j^+(z) - g_i^+(z)$ определена в $E \setminus (D_j^- \cap D_i^-)$, $1 \leq i, j \leq n$, включая точку $z = \infty$. Следовательно, в окрестности Γ_0 правильная часть ряда Лорана разности $\tilde{g}_j^+(z) - \tilde{g}_i^+(z)$ сходится на всей плоскости. Однако на бесконечности эта разность ограничена, поэтому правильная часть ее ряда Лорана сходится к постоянной, т. е. основные правильные части функций $\tilde{g}_j^+(z)$ и $\tilde{g}_i^+(z)$ взаимно уничтожаются¹¹.

Построим теперь решение задачи (4). Правильные части рядов Лорана функций $\tilde{g}_j^+(z)$ сходятся в круге K^+ : $|z| < R_0$, и они имеют общую основную правильную часть $f_j^+(z)$. Положим $\psi^+(z) = f_j^+(z) + \bar{c}$, $z \in K^+$. Найдем в D_0^- : $|z| > R_0$, функцию $\varphi_0^-(z)$ по граничному условию

$$\varphi_0^-(t) = \overline{\psi^+(t)}, \quad t \in \Gamma_0.$$

Значит, $\varphi_0^-(z)$ может быть определена по $\psi^+(z)$ согласно формуле вида (9). Поскольку $f_j^+(0) = 0$, при предположении $\varphi_0^-(\infty) = 0$ мы должны выбрать $c = 0$, а в общем случае выбираем $c = \varphi_0^-(\infty)$. Покажем, как можно найти остальные компоненты решения $\varphi_j^-(z)$, $z \in D_j^-$, $1 \leq j \leq n$.

Заметим, что голоморфная функция $h_j^+(z) = \psi^+(z) - \tilde{g}_j^+(z)$, $j \geq 1$, определена во всем круге K^+ , кроме, возможно, круга D_j^- . Действительно, $\psi^+(z)$ определена в K^+ , а функция $\tilde{g}_j^+(z) = g_j^+(z) - g_0^+(z)$ по условию теоремы определена в $E \setminus (\overline{D_0^-} \cup \overline{D_j^-}) = K^+ \setminus \overline{D_j^-}$. Далее, у функции $h_j^+(z)$ по определению $\psi^+(z)$ в разложении Лорана в окрестности окружности Γ_0 основная правильная часть ряда Лорана равна нулю, поэтому в ее кольцевой полукрестности имеем

$$h_j^+(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m^{(j)}}{z^m}.$$

¹⁰Имеется в виду совокупность слагаемых в правильной части ряда Лорана, начинающихся не с нулевой, а с первой степени разложения.

¹¹Это рассуждение верно только для областей связности 3 и выше, а для двусвязных областей функция $\tilde{g}_j^+(z)$ всего одна и правильная часть ее ряда Лорана имеет радиус сходимости не меньше R_0 , именно эту функцию мы будем использовать далее в случае двусвязной области.

Функция $h_j^+(z)/(z - z_j)^{k+1}$, $k \geq 1$, голоморфна в $K^+ \setminus \overline{D_j^-}$. Значит,

$$\oint_{\varepsilon\Gamma_j} \frac{h_j^+(z)}{(z - z_j)^{k+1}} dz = \oint_{\varepsilon\Gamma_0} \frac{h_j^+(z)}{(z - z_j)^{k+1}} dz = \sum_{m=0}^{\infty} \oint_{\varepsilon\Gamma_0} \frac{c_m^{(j)}}{z^m(z - z_j)^{k+1}} dz = 0$$

(здесь $\varepsilon\Gamma_j: |z - z_j| = R_j + \varepsilon$, $\varepsilon\Gamma_0: |z| = R_0 - \varepsilon$, с достаточно малым $\varepsilon > 0$; обход всех окружностей проводится против часовой стрелки). Следовательно, основная правильная часть ряда Лорана функции $h_j^+(z)$ около окружности Γ_j равна нулю, т. е. функция $h_j^+(z) = \psi^+(z) - \tilde{g}_j^+(z)$ определена всюду на плоскости вне круга D_j^- . Поэтому мы можем определить $\varphi_j^-(z)$ следующим образом:

$$\varphi_j^-(z) = \overline{h_j^+(\pi_j^+(z))}, \quad |z - z_j| < R_j,$$

и для данных $\varphi_j^-(z)$ получаем выполнение граничного условия (4):

$$\varphi^+(t) = \psi^+(t) + g_0^+(t) = h_j^+(t) + \tilde{g}_j^+(t) + g_0(t) = \overline{\varphi_j^-(t)} + g(t), \quad t \in \Gamma_j.$$

В силу теоремы 3 в решении можно произвольно выбирать только значение $\varphi_0^-(\infty)$, так как разность двух решений должна удовлетворять однородной задаче (5), имеющей решение только в виде постоянной функции. Теорема доказана.

Завершим этот параграф примерами применения теоремы 5.

1. Пусть в случае двусвязной области рассматривается задача

$$\varphi^+(t) = \overline{\varphi_0^-(t)} + \frac{a_0}{t} + b_0 t, \quad t \in \Gamma_0, \quad \varphi_0^-(\infty) = c, \quad (17)$$

$$\varphi^+(t) = \overline{\varphi_1^-(t)} + \frac{a_1}{t} + b_1 t, \quad t \in \Gamma_1. \quad (18)$$

Имеем

$$g_0^+(z) = \frac{a_0}{z} + b_0 z, \quad z \in D^+; \quad g_1^+(z) = \frac{a_1}{z} + b_1 z, \quad z \in D^+.$$

Если точка $z_0 = 0$ принадлежит $\overline{D}^+$, то при $a_0 \neq 0$ или $a_1 \neq 0$ задача не имеет решения, так как тогда по крайней мере одна из функций $g_0^+(z)$ или $g_1^+(z)$ не является голоморфной в D^+ или непрерывной в $\overline{D}^+$. Если $a_0 = a_1 = 0$, то $\tilde{g}_1^+(z) = g_1^+(z) - g_0^+(z) = (b_1 - b_0)z = f_1(z)$ и согласно указанному в доказательстве теоремы 4 способу решения получим, что решением задачи (17), (18) будут функции $\varphi^+(z) = b_1 z + \bar{c}$, $z \in D^+$; $\varphi_0^-(z) = c + (\bar{b}_1 - \bar{b}_0)R_0^2/z$, $|z| > R_0$; $\varphi_1^-(z) = c$, $|z - z_1| < R_1 < R_0$.

Пусть теперь $z_0 = 0 \in D_1^-$. Тогда обе функции $g_0^+(z)$ и $g_1^+(z)$ голоморфны в D^+ , основная правильная часть ряда Лорана их разности $(a_1 - a_0)/z + (b_1 - b_0)z$ имеет вид $(b_1 - b_0)z = f_1(z)$, поэтому решение задачи существует при любых a_0 и a_1 и оно состоит из функций

$$\varphi^+(z) = \bar{c} + b_1 z + \frac{a_0}{z}, \quad z \in D^+; \quad \varphi_0^-(z) = c + \frac{(\bar{b}_1 - \bar{b}_0)R_0^2}{z}, \quad |z| > R_0;$$

$$\varphi_1^-(z) = c + \frac{(\bar{a}_0 - \bar{a}_1)(z - z_1)}{R_1^2 + (z - z_1)\bar{z}_1}, \quad |z - z_1| < R_1 < R_0, \quad |z_1| < R_1.$$

2. Пусть область D^+ трехсвязная, так что к условиям (17), (18) добавлено еще одно условие

$$\varphi^+(t) = \overline{\varphi_2^-(t)} + \frac{a_2}{t} + b_2 t, \quad t \in \Gamma_2.$$

Предположим для краткости рассмотрения, что $z_0 = 0 \in D_1^-$. Тогда все три функции $g_0^+(z)$, $g_1^+(z)$ и $g_2^+(z) = a_2/z + b_2 z$ голоморфны в D^+ . Разность

$$g_1^+(z) - g_2^+(z) = \frac{a_1 - a_2}{z} + (b_1 - b_2)z$$

голоморфна в $E \setminus (\overline{D_1^-} \cup \overline{D_2^-})$ только при $b_2 - b_1 = 0$, поэтому при $b_1 \neq b_2$ задача не имеет решения, а при $b_1 = b_2$ функции

$$g_1^+(z) - g_0^+(z) = \frac{a_1 - a_0}{z} + (b_1 - b_0)z, \quad g_2^+(z) - g_0^+(z) = \frac{a_2 - a_0}{z} + (b_2 - b_0)z$$

имеют одинаковые основные правильные части ряда Лорана (как и утверждается в доказательстве теоремы 5): $f_1^+(z) = f_2^+(z) = (b_1 - b_0)z$, и, соответственно, решение задачи имеет компоненту $\varphi^+(z) = \bar{c} + b_1 z + a_0/z$, $z \in D^+$, а тогда остальные компоненты легко вычисляются аналогично.

§ 12

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Пусть задача (1) решена. Распространяя функции $\varphi_j^-(z)$, $z \in D_j^-$, по формуле (9) в области $E \setminus \overline{D_j^-}$ соответственно функциями $\varphi_j^+(z)$, получим, что $G_j(t) \equiv G(t)$, $t \in \Gamma_j$, является предельным значением на Γ_j мероморфной функции

$$G_j^+(z) = \frac{\varphi_j^+(z)}{\varphi_j^+(z)}, \quad 0 \leq j \leq n, \quad z \in D^+,$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_j^+(z) &= \overline{\varphi_j^-(\pi_j^-(z))}, & |z - z_j| > R_j, \quad 1 \leq j \leq n, \\ \varphi_0^+(z) &= \overline{\varphi_0^-(\pi_0^+(z))}, & |z| < R_0. \end{aligned}$$

Следовательно, для каждого j выполняется равенство

$$\varphi^+(z) = G_j^+(z)\varphi_j^+(z), \quad z \in D^+, \quad (19)$$

и так как $\varphi_j^+(z)$, $0 \leq j \leq n$, не имеет в своей области существования $E \setminus D_j^-$ полюсов, то в силу условия $\varphi^+(t) \neq 0$ на Γ функция G_j^+ не может иметь нуль ни на одной окружности Γ_i , $0 \leq i \leq n$. На окружности Γ_j имеем $\varphi_j^+(t) = \overline{\varphi_j^-(t)} \neq 0$, $\varphi^+(t) = G_j^+(t)\varphi_j^+(t) \neq 0$, поэтому на ней функция $G_j^+(z)$ не имеет полюсов, но может быть, что на какой-то окружности Γ_i , $i \neq j$, функция $\varphi_j^+(z)$ в конечном числе точек обращается в нуль, и тогда в этих точках $G_j^+(z)$ должна иметь полюс соответствующего порядка, чтобы было выполнено $\varphi^+(t) \neq 0$ всюду на Γ . Значит, каждая функция $[G_j^+(z)]^{-1}$ necessarily является на Γ непрерывной функцией, может быть, имеющей нули целого порядка в конечном числе точек на множестве $\Gamma \setminus \Gamma_j$. Обратно, если определяемая по данному коэффициенту

$G_j(t) = G(t)$, $t \in \Gamma_j$, мероморфная функция $G_j^+(z)$ имеет полюс на какой-либо окружности Γ_i , $i \neq j$, то в точке из D_j^- , соответствующей этому полюсу по отображению $(\pi_j^+)^{-1}$, функция $\varphi_j^-(z)$ необходимо обращается в нуль того же порядка, каков был порядок полюса.

В силу (19) имеем

$$\frac{\varphi_j^+(z)}{\varphi_i^+(z)} = \frac{G_i^+(z)}{G_j^+(z)}, \quad z \in D^+.$$

Функции $\varphi_i^+(z)$ и $\varphi_j^+(z)$ определены и голоморфны соответственно в областях $E \setminus \overline{D}_i^-$ и $E \setminus \overline{D}_j^-$ с конечным числом возможных нулей, следовательно, отношение $G_i^+(z)/G_j^+(z)$ продолжается как мероморфная функция на область $E \setminus (\overline{D}_i^- \cup \overline{D}_j^-)$. Данную мероморфную функцию можем считать известной, поскольку ее составляющие $G_i^+(z)$ и $G_j^+(z)$ известны в D^+ по их предельным значениям на Γ_i и Γ_j . Существенно то, что она имеет конечное число нулей и полюсов, это следует из соответствующих свойств функций $\varphi_j^+(z)$ и $\varphi_i^+(z)$. Далее эту функцию будем обозначать через $G_{ij}(z)$ (в случае связности 3 и выше она определена в области, большей, чем область D^+ , поэтому мы не записываем в ее обозначении верхний индекс $+$).

Итак, установлено, что для разрешимости задачи (1) необходимо, чтобы каждая функция $G_j(t) \equiv G(t)$, $t \in \Gamma_j$, $0 \leq j \leq n$, была предельным значением на Γ_j некоторой мероморфной в D^+ функции $G_j^+(z)$ с возможным существованием для нее на $\Gamma \setminus \Gamma_j$ конечного числа полюсов и чтобы отношения $G_i^+(z)/G_j^+(z)$ были продолжимы как мероморфные функции в области $E \setminus (\overline{D}_i^- \cup \overline{D}_j^-)$, причем в силу сформулированных в §1 условий функции $G_j^+(z)$ и $G_{ij}(z)$ могут иметь в своей области определения лишь конечное число нулей и полюсов (включая границу). Теорема доказана.

§ 13

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8. Перед формулировкой данной теоремы мы предположили, что рассматриваемый случай, когда функции $G_j^+(z)$ не имеют полюсов на $\Gamma \setminus \Gamma_j$, $0 \leq j \leq n$; не имеют они полюсов и на Γ_j по условию. Следовательно, далее все рассматриваемые мероморфные функции $G_j^+(z)$ не имеют на всей границе ни нулей, ни полюсов. Отметим также, что никакие функции $\varphi_j^\pm$ не имеют нулей, лежащих на окружностях, в противном случае на них были бы нули функции $\varphi^+(z)$, что исключено по условию. Дальнейшие рассуждения разобьем на несколько пунктов.

1. Пусть необходимые условия теоремы с только что упомянутым уточнением выполнены, и пусть центр окружности Γ_0 – точка $z_0 = 0 \in D^-$ – принадлежит, скажем, D_1^- . Установим формулу, связывающую возможное число и положение нулей функций $\varphi^\pm(z)$ с различными характеристиками функций $G_j^+(z)$ и $G_{ij}^+(z)$. Сначала заметим, что функции $\varphi_j^-(z)$ в D_j^- могут иметь нули разной природы. Во-первых, они могут иметь нули в точках, которые при отображении вида π_j переходят в точки, принадлежащие области D^+ ; если эти точки не являются полюсами мероморфных в D^+ функций $G_j^+(z)$, то они соответствуют нулям функции $\varphi^+(z)$, а если попадают в полюс функции $G_j^+(z)$, то в этой

точке нуля функции $\varphi^+(z)$ может и не быть (полюса также не может быть, так как функция $\varphi^+(z)$ является голоморфной). Во-вторых, могут существовать более интересные нули, образы которых при отображении π_j не принадлежат области D^+ , а принадлежат разным областям D_l^- , $l \neq j$; в частности, $\varphi_j^-(z)$ могут иметь нули в центрах окружностей Γ_j (тогда эти центры отображаются в точку $\infty \in D_0^-$) или в точках, которые отображаются в точку $z_0 = 0 \in D_1^-$. В силу изложенного в начале параграфа образы всех этих нулевых точек будут внутренними точками указанных областей. Назовем эти точки “чужими”. Обозначим их число в каждой области D_j^- соответственно через $q_j \geq 0$; это число далее будет играть существенную роль в решении задачи (1).

Из (19) видно, что в нулях каждой из функций $G_j^+(z)$ функция $\varphi^+(z)$ также должна иметь нуль, причем не меньшей кратности. Воспользуемся этим свойством для получения задачи, в которой искомая функция не должна иметь нулей в D^+ . Пусть

$$G_j^+(z) = \widehat{G}_j^+(z) \frac{n_{G_j}(z)}{p_{G_j}(z)}, \quad z \in D^+, \quad 0 \leq j \leq n, \quad (20)$$

где n_{G_j} и p_{G_j} – многочлены со старшим коэффициентом 1, имеющие корни только в нулях и, соответственно, в полюсах функции $G_j^+(z)$ в D^+ (с соответствием их кратности), так что функция $\widehat{G}_j^+(z)$ не имеет в $\overline{D}^+$ ни нулей, ни полюсов¹². Число нулей функции $G_j^+(z)$ в D^+ обозначим через N_j , а число полюсов – через P_j . Чтобы не усложнять записи добавлением индексов, учитывающих кратность корней, мы будем записывать соответствующие многочлены просто в виде произведения скобок вида $(z - a)$, считая, что каждая скобка повторена столько раз, какова кратность корня $z = a$.

Далее, пусть N – общее число нулей всех функций $G_j^+(z)$ в $\overline{D}^+$, причем кратность нуля в точках, являющихся общими нулями нескольких функций $G_j^+(z)$, считаются не по суммарной, а по максимальной встречающейся кратности (таким образом, $N \leq \sum_{j=0}^n N_j$, где равенство выполняется только в случае отсутствия общих нулей у всех пар $G_i^+(z)$ и $G_j^+(z)$, $i \neq j$). Введем функции (многочлены)

$$n_G(z) = \prod_{j=0}^n{}' n_{G_j}(z),$$

где $\prod'$ означает, что произведение берется в соответствии с объясненным при определении числа N правилом.

Положим

$$\psi^+(z) = \frac{\varphi^+(z)}{\widehat{G}_0^+(z) n_G(z)}, \quad z \in D^+. \quad (21)$$

Из формулы (19) следует, что голоморфная функция $\varphi^+(z)$ обращается в нуль во всех точках, где обращается в нуль хотя бы одна функция $G_j^+(z)$, $0 \leq j \leq n$, причем с не меньшей кратностью, поэтому она имеет вид $\varphi^+(z) = n_G(z) \Phi^+(z)$. Значит, введенная функция $\psi^+(z)$ регулярна в D^+ и удовлетворяет граничному

¹²По сделанному в самом начале доказательства предположению все возможные полюсы функций $G_j^+(z)$ в $\overline{D}^+$ расположены на самом деле в D^+ , а их нули расположены в D^+ по доказанному выше.

условию

$$\psi^+(t) = \frac{G(t)}{\widehat{G}_0^+(t)n_G(t)} \overline{\varphi^-(t)} \neq 0, \quad t \in \Gamma. \quad (22)$$

По формуле (19) и граничному условию (22) заключаем, что функцию $\psi^+(z)$ в D^+ можно выразить по-разному, в зависимости от выбора граничной кривой:

$$\psi^+(z) = \frac{G_j^+(z)}{\widehat{G}_0^+(z)n_G(z)} \varphi_j^+(z), \quad z \in D^+, \quad 0 \leq j \leq n, \quad (23)$$

откуда видно, что согласно голоморфности функции $\psi^+(z)$ каждая функция $\varphi_j^+(z)$ должна иметь в полюсах коэффициента $G_j^+(z)/n_G(z)$ в D^+ нули не меньшей кратности. Такие же нули будет иметь и функция $\varphi_j^-(z)$ в D_j^- в полученных отображением $\pi_j^-(z)$ точках¹³. Поэтому функции

$$\begin{aligned} \psi_j^-(z) &= \varphi_j^-(z) \frac{\bar{n}_{G_j}(\pi_j^+(z))}{\bar{n}_G(\pi_j^+(z))\bar{p}_{G_j}(\pi_j^+(z))} \\ &= \frac{\varphi_j^-(z)(z - z_j)^{m_j}}{\prod_{i=1}^{m_j} [R_j^2 + (\bar{z}_j - \bar{\zeta}_i^{(j)})(z - z_j)]}, \quad z \in D_j^-, \end{aligned} \quad (24)$$

регулярны в D_j^- , $0 \leq j \leq n$ (при $j = 0$ имеем $z_0 = 0$ и вместо $\pi_j^+(z)$ должно быть $\pi_0^-(z)$, как отображение из внешности окружности Γ_0 в ее внутренность). Здесь $\zeta_i^{(j)}$ – полюсы, а $m_j \geq 0$ – число полюсов в D^+ функции $G_j^+(z)/n_G(z)$, следовательно, $m_j = N - N_j + P_j$. (Функция $\psi_j^-(z)$ не является распространением в D_j^- функции $\psi^+(z)$, так как последняя определена только в D^+ , а не во всей области $E \setminus D_j^-$. Вместе с тем напомним, что функции n_G , n_{G_j} и p_{G_j} являются многочленами, и поэтому они определены на всей плоскости.)

Рассмотрим отдельно функцию $\psi_0^-(z)$. Имеем

$$\psi_0^-(z) = \frac{\varphi_0^-(z)z^{m_0}}{\prod_{i=1}^{m_0} (R_0^2 - z\bar{\zeta}_i^{(0)})}, \quad \zeta_i^{(0)} \in D^+, \quad z \in D_0^-. \quad (25)$$

По предположению точка $z_0 = 0$ не расположена в $\bar{D}^+$ (следовательно, все значения $\bar{\zeta}_i^{(0)}$ не равны нулю), значит, поведение правой части равенства в формуле (25) на бесконечности качественно аналогично поведению φ_0^- (т. е. функции $\varphi_0^-(z)$ и $\psi_0^-(z)$ стремятся одновременно или к нулю, или к отличной от нуля постоянной). Кроме того, на окружности Γ_0 согласно формуле (22) имеем

$$\psi^+(t) = \frac{n_{G_0}}{n_G p_{G_0}} \overline{\varphi_0^-(t)},$$

т. е. на Γ_0 выполнено краевое условие

$$\psi^+(t) = \overline{\psi_0^-(t)},$$

следовательно, $\psi^+(z)$ определена во всем круге как функция $\overline{\psi_0^-(R_0^2/\bar{z})}$, $z \in K^+$. Далее, на окружностях Γ_j , $1 \leq j \leq n$, согласно формулам (22) и (24) имеем

$$\psi^+(t) = \frac{G_j(t)}{\widehat{G}_0^+(t)n_G(t)} \varphi_j^+(t) = \tilde{G}_j(t) \overline{\psi^-(t)},$$

¹³Отметим, что если a – нуль функции $\varphi_j^+(z)$ с условием $|a - z_j| > R_j$, то нулем функции $\varphi_j^-(z)$ будет точка $b = z_j + R_j^2/(\bar{a} - \bar{z}_j) \in D_j^-$.

где

$$\tilde{G}_j(t) = \frac{\hat{G}_j^+(t)}{\hat{G}_0^+(t)}, \quad t \in \Gamma_j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

В итоге получаем, что функция $\psi^+(z)$ и функция $\psi^-(z)$, состоящая из компонент $\psi_0^-, \psi_1^-, \dots, \psi_n^-$, удовлетворяют граничному условию вида

$$\psi^+(t) = \tilde{G}(t) \overline{\psi^-(t)}, \quad (26)$$

где

$$\tilde{G}(t) = \begin{cases} \tilde{G}_0(t) = 1, & t \in \Gamma_0, \\ \tilde{G}_j(t) = \frac{\hat{G}_j^+(t)}{\hat{G}_0^+(t)}, & t \in \Gamma_j, \quad 1 \leq j \leq n, \end{cases} \quad (27)$$

поэтому соответствующие функции $\tilde{G}_j^+(z) = \hat{G}_j^+(z)/\hat{G}_0^+(z)$, $0 \leq j \leq n$, голоморфны и не имеют нулей в $\bar{D}^+$, причем $\tilde{G}_0^+(z) \equiv 1$.

Итак, при условиях, наложенных на коэффициент $G(t)$ и граничное поведение искомых функций, любое голоморфное решение однородной задачи (1) необходимо порождает некоторое голоморфное решение задачи (26) с коэффициентом (27) и таким же качественным поведением решения на бесконечности, как и для $\varphi_0^-(z)$.

Теперь исследуем, как исходя из решений задачи (26), (27) получить решения задачи (1). Для этого, прежде всего, должны быть выполнены *необходимые* условия: как видно из (24), каждая компонента решения – функция $\psi_j^-(z)$, $1 \leq j \leq n$, – должна иметь в точке $z = z_j \in D_j^-$ нуль порядка не меньше m_j , а поведение компоненты ψ_0^- на бесконечности должно быть качественно таким же, каким предположено поведение компоненты $\varphi_0^-(z)$ решения задачи (1). Если эти необходимые условия выполнены, то функции $\varphi_j^-(z)$, $z \in D_j^-$, $0 \leq j \leq n$, определяемые из (24) по формулам (как всегда, при $j = 0$ считаем $z_0 = 0$)

$$\varphi_j^-(z) = (z - z_j)^{-m_j} \psi_j^-(z) \prod_{i=1}^{m_j} [R_j^2 + (\bar{z}_j - \bar{z}_i^{(j)})(z - z_j)], \quad (28)$$

составят голоморфную в D^- функцию $\varphi^-(z)$. Теперь по компоненте $\psi^+(z)$, $z \in D^+$, решения задачи (26) построим в D^+ функцию $\varphi^+(z) = \psi^+(z) \hat{G}_0^+(z) n_G(z)$. Тогда для этих функций на граничных окружностях с учетом формул (24), (27) и (28) имеем соотношения

$$\begin{aligned} \varphi^+(t) &= \psi^+(t) \hat{G}_0^+(t) n_G(t) = \overline{\psi_0^-(t) \hat{G}_0^+(t) n_G(t)} \\ &= \overline{\varphi_0^-(t) \hat{G}_0^+(t)} \frac{n_{G_0}(t)}{p_{G_0}} = G(t) \overline{\varphi^-(t)}, \quad t \in \Gamma_0, \\ \varphi^+(t) &= \varphi_j^+(t) = \psi^+(t) \hat{G}_0^+(t) n_G(t) = \tilde{G}_j(t) \overline{\psi_j^-(t) \hat{G}_0^+(t) n_G(t)} \\ &= \overline{\varphi_j^-(t) \hat{G}_j^+(t)} \frac{n_{G_j}(t)}{p_{G_j}(t)} = G(t) \overline{\varphi^-(t)}, \quad t \in \Gamma_j, \quad j > 1, \end{aligned} \quad (29)$$

т. е. построенные по голоморфному решению задачи (26) голоморфные функции $\varphi^+(z)$ и $\varphi^-(z)$ удовлетворяют граничному условию (1) (конечно, при выполнении необходимого условия).

2. По функциям $\psi_j^-(z)$, $z \in D_j^-$, обычным образом строим функции¹⁴ $\psi_j^+(z) = \overline{\psi_j^-(\pi_j^-(z))}$, $z \in E \setminus D_j^-$. Тогда из краевого условия (26) на каждой окружности Γ_j имеем $n + 1$ представлений для $\psi^+(z)$:

$$\psi^+(z) = \tilde{G}_j^+(z)\psi_j^+(z), \quad 0 \leq j \leq n, \quad z \in D^+. \quad (30)$$

В частности, так как $\tilde{G}_0^+(z) = 1$ и функция $\psi_0^+(z) = \overline{\psi_0^-(R_0^2/\bar{z})}$ определена во всем круге K^+ : $|z| < R_0$, то и функция $\psi^+(z)$ определена и голоморфна в этом же круге¹⁵. Поэтому функции $\tilde{G}_j^+(z)$, $1 \leq j \leq n$, определены и мероморфны в $K^+ \setminus D_j^-$, а отношения

$$\tilde{G}_{ij}(z) = \frac{\tilde{G}_i^+(z)}{\tilde{G}_j^+(z)} = \frac{\psi_j^+(z)}{\psi_i^+(z)} = \frac{\hat{G}_i^+(z)}{\hat{G}_j^+(z)} \quad (31)$$

определены и мероморфны в $E \setminus (D_i^- \cup D_j^-)$.

Что можно сказать о нулях функций $\psi_j^-(z)$ в D_j^- ? Поскольку $\tilde{G}_j^+(z) \neq 0$ в D^+ , согласно (30) каждому нулю функции $\psi^+(z)$ в D^+ соответствует нуль той же кратности функции $\psi_j^-(z)$ в D_j^- , $0 \leq j \leq n$. Однако ситуация с теми нулями функций $\psi_j^-(z)$ в D_j^- , которые при отображении $\pi_j^+(z)$ попадают не в D^+ , а в область $D^- \setminus \bar{D}_j^-$, является более сложной. Рассмотрим это подробно.

Пусть $p \geq 0$ – число нулей функции $\psi^+(z)$ в D^+ . Тогда функция $\varphi_j^-(z)$, $j \geq 0$, согласно (23) должна иметь в D_j^- также p нулей, соответствующих p нулям функции $\varphi_j^+(z)$ в D^+ , кроме того, $m_j = N - N_j + P_j$ нулей, соответствующих полюсам функции $G_j^+(z)/n_G(z)$ в D^+ , и еще $q_j \geq 0$ нулей, образы которых при отображении вида π попадают в $\bar{D}^- \setminus \bar{D}_j^-$, как это было разъяснено в начале п. 1. Тогда из формулы (24) получаем, что число нулей функции $\psi_j^-(z)$ в D_j^- равно $p + q_j + m_j$ при $j \geq 1$ и $p + q_0$ при $j = 0$. Таким образом, переход от функций $\varphi_j^-(z)$ к функциям $\psi_j^-(z)$ не изменил для областей D_j^- , $j \geq 1$, общее число нулей, равное $p + m_j + q_j$, а только перераспределил их расположение, оставив $q_j + m_j$ нулей в точках, соответствующих нулям функции $\psi_j^+(z)$, принадлежащим областям $D^- \setminus D_j^-$ (в частности, нуль порядка m_j в точке $z = z_j$ появляется от нуля функции $\psi_j^+(z)$ на бесконечности в области D_0^-), в то время как для области D_0^- общее число нулей изменилось: для функции $\varphi_0^-(z)$ было $p + m_0 + q_0$ нулей, а для $\psi_0^-(z)$ будет только $p + q_0$ нулей.

Вычисляя индекс от обеих частей равенства (26), получаем (необходимо помнить, что по дополнительному условию, приведенному перед формулировкой и в начале доказательства теоремы 8, никакие участвующие в рассмотрении функции не имеют нулей и полюсов на граничных окружностях)

$$p = \text{Ind}_\Gamma \tilde{G} + (n + 1)p + \sum_{j=1}^n m_j + \sum_{j=0}^n q_j, \quad (32)$$

причем при вычислении индекса обход каждой окружности проводится в положительном для области D^+ направлении. При получении равенства (32) учтено, что $\text{Ind}_{\Gamma_j} \psi_j^-(t) = \text{Ind}_{(\partial D_j^-)^+} \psi_j^-(t)$, где $(\partial D_j^-)^+$ – окружность Γ_j , обходимая

¹⁴Которые согласно (23) будут голоморфными в $E \setminus D_j^-$ функциями $\frac{n_{G_j}}{n_{GP_{G_j}}} \varphi_j^+(z)$.

¹⁵По первоначальной формуле (21) она была определена только в D^+ .

в положительном для области D_j^- направлении, а тогда последний индекс равен числу нулей функции $\psi_j^-(z)$ в D_j^- . Это число равно $p + m_j + q_j$ для $j \geq 1$ и $p + q_0$ для $j = 0$, откуда имеем равенство (32).

Далее, в силу (27) и (20) имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Ind}_{\Gamma} \tilde{G} &= \sum_{j=0}^n \operatorname{Ind}_{\Gamma_j} \frac{G_j^+(t) p_{G_j} n_{G_0}}{G_0^+(t) n_{G_j} p_{G_0}} = \operatorname{Ind}_{\Gamma} G(t) \\ &\quad - \operatorname{Ind}_{\Gamma} G_0^+(t) + \sum_{j=1}^n \operatorname{Ind}_{\Gamma_j} \frac{p_{G_j} n_{G_0}}{n_{G_j} p_{G_0}} = \operatorname{Ind}_{\Gamma} G(t) - N_0 + P_0, \end{aligned}$$

так как индексы, участвующие в последней сумме, все равны нулю ввиду того, что все нули и полюсы находятся вне каждого круга D_j^- .

Теперь из (32) с учетом значений m_j имеем

$$\operatorname{Ind}_{\Gamma} G - \sum_{j=0}^n N_j + \sum_{j=0}^n P_j + nN = -np - \sum_{j=0}^n q_j. \quad (33)$$

Учитывая, что правая часть формулы (33) не может быть положительной величиной, мы можем получить ряд полезных следствий, которые сформулируем в виде следующих утверждений.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если

$$\operatorname{Ind}_{\Gamma} G > \sum_{j=0}^n N_j - nN - \sum_{j=0}^n P_j,$$

то задача (26), а вместе с ней и задача (1) не имеют решения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Для числа p возможных нулей функции $\psi^+(z)$ в D^+ и числа q_j нулей функции φ_j^- в D_j^- , $0 \leq j \leq n$, соответствующих нулям функции $\varphi_j^+(z)$ в области $D^- \setminus D_j^-$, существуют оценки сверху

$$\begin{aligned} np &\leq \sum_{j=0}^n N_j - \operatorname{Ind}_{\Gamma} G - \sum_{j=0}^n P_j - nN, \\ \sum_{j=0}^n q_j &\leq \sum_{j=0}^n N_j - \operatorname{Ind}_{\Gamma} G - \sum_{j=0}^n P_j - nN, \\ np + \sum_{j=0}^n q_j &\leq \sum_{j=0}^n N_j - \operatorname{Ind}_{\Gamma} G - \sum_{j=0}^n P_j - nN. \end{aligned}$$

Отметим, что в этих оценках используется только информация, связанная с коэффициентом $G(t)$ задачи (1) и порядком связности области D^+ . Напомним, что здесь N_j и P_j — числа нулей и полюсов в D^+ функций $G_j^+(z)$, а $N \leq \sum_{j=0}^n N_j$ — число нулей всех функций $G_j^+(z)$, причем общий нуль нескольких функций $G_j^+(z)$, если он существует, подсчитывается по его максимальной кратности.

3. Формула (32) налагает определенные ограничения на число возможных нулей решения задачи (26), которые входят в эту формулу через неизвестные

пока значения p и q_j ; в частности, если решение существует, то его компонента $\varphi^+(z)$ не может иметь слишком много нулей в D^+ , а компонента $\varphi_0^-(z)$ не может иметь на бесконечности нуль слишком большого порядка. Покажем, как при выполнении (33) задачу (26) можно свести к задаче для не обращающихся в нуль функций.

Пусть $\zeta_1, \dots, \zeta_p$ – нули функции $\psi^+(z)$ в D^+ ; они же будут определять нули в соответствующих точках $\tilde{\zeta}_i = z_j + R_j^2/(\bar{\zeta}_i - \bar{z}_j) \in D_j^-$, $1 \leq i \leq p$, и той же кратности¹⁶ для каждой функции $\psi_j^-(z)$ в D_j^- , $0 \leq j \leq n$ (при $j = 0$ считаем $z_j = 0$). Разделив (26) на произведение $(t - \zeta_1) \cdots (t - \zeta_p)$ и введя функции

$$\begin{aligned} h^+(z) &= \frac{\psi^+(z)}{(z - \zeta_1) \cdots (z - \zeta_p)}, \quad z \in D^+, \\ h_j^-(z) &= \frac{\psi_j^-(z)(z - z_j)^p}{\prod_{i=1}^p [R_j^2 + (\bar{z}_j - \bar{\zeta}_i)(z - z_j)]}, \quad z \in D_j^-, \quad 1 \leq j \leq n, \\ h_0^-(z) &= \frac{\psi_0^-(z)z^p}{\prod_{i=1}^p (R_0^2 - \bar{\zeta}_i z)}, \quad z \in D_0^-, \end{aligned}$$

получим задачу

$$h^+(t) = \tilde{G}(t) \overline{h^-(t)}, \quad (34)$$

где голоморфная в D^+ функция $h^+(z)$ не имеет нулей, а каждая функция $h_j^-(z)$, голоморфная соответственно в области D_j^- , может иметь нули только в таких точках, которые при отображении $\pi_j^+ : D_j^- \rightarrow E \setminus D_j^-$ переходят в точки области $D^- \setminus \overline{D_j^-}$; в частности, в точке $z = z_j$ для значений $j \neq 0$ функция $h_j^-(z)$ имеет нуль порядка не ниже p . Обратно, если задача (34) имеет голоморфное решение, не равное нулю на Γ , и его компонента $h^+(z)$ не имеет нулей в D^+ , а каждая компонента $h_j^-(z)$, $1 \leq j \leq n$, имеет соответственно в $z = z_j$ нуль порядка не ниже p , то исходя из этого решения можно построить решение задачи (26), обращающееся в нуль в точках $z = \zeta_i \in D^+$, $1 \leq i \leq p$, и только в них.

Действительно, рассмотрим функцию $\psi^+(z) = h^+(z)(z - \zeta_1) \cdots (z - \zeta_p)$, где $z \in D^+$, и функции

$$\psi_j^-(z) = \frac{h_j^-(z) \prod_{i=1}^p [R_j^2 + (\bar{z}_j - \bar{\zeta}_i)(z - z_j)]}{(z - z_j)^p}.$$

Непосредственно проверяется, что эти функции на каждой окружности Γ_j удовлетворяют граничному условию (26). Следовательно, связь между решениями задач (26) и (34) не зависит от выбора точек $\zeta_1, \dots, \zeta_p$, в которых должны быть нули функции $\psi^+(z)$, а значение p числа этих нулевых точек (конечно, при удовлетворении, вместе с q_j , равенству (33)), как мы увидим дальше, качественно не влияет на метод решения и окончательный ответ о числе решений задачи¹⁷.

¹⁶Чтобы не усложнять обозначений, мы не будем каким-либо образом указывать возможные кратности корней, а будем считать, что каждый корень выписан в последовательности $\zeta_1, \dots, \zeta_p$ столько раз, какова его кратность.

¹⁷В этом рассуждении мы не учитываем требование обращения $\psi_j^-(z)$, $j \geq 1$, в нуль в точке $z = z_j$ с кратностью не меньше m_j ; это требование необходимо не для эквивалентности задач (26) и (34), а для эквивалентности задач (1) и (26). Значит, для возможности дальнейшего перехода от задачи (26) к задаче (1) надо будет предполагать, что $h_j^-(z)$ имеет в $z = z_j$ нуль порядка не меньше, чем $p + m_j$, и тогда окажется, что числа p , m_j и $p_j \geq 0$ являются числами “чужих” нулей функций $h_j^-(z)$ в D_j^- и вместе удовлетворяют уравнению (33) при $q_j = p_j$.

Исследуем теперь возможные нули функций $h_j^-(z)$, $z \in D_j$. Пусть q_j – количество “чужих” нулей функции $h_j^-(z)$ в D_j^- , $j \geq 1$, т.е. количество таких точек, образы которых при отображении π_j^+ принадлежат области¹⁸ $\bar{D}^- \setminus \bar{D}_j^-$, но в это число мы не включаем обязательный нуль кратности $p + m_j$ в точке $z = z_j$. Отметим, что этот нуль изначально не входил в число “чужих” нулей функции $\varphi_j^-(z)$, он появился в результате искусственных изменений искомым функций, а остальные нули у $h_j^-(z)$ совпадают с “чужими” нулями соответственно функций $\varphi_j^-(z)$ в D_j^- , если считать функции $h_j^-(z)$ происходящими из $\varphi_j^-(z)$ согласно их генезису. Если рассматривать функции $h_j^-(z)$ первоначально как решения задачи (34) с условием, что они имеют в точках $z = z_j$ нуль порядка не меньше, чем $p + m_j$ при $j \geq 1$ и p при $j = 0$, то значения q_j чисел “чужих” точек функций $h_j^-(z)$ необходимо удовлетворяют соотношению (33), и “чужие” точки функций $h_j^-(z)$ будут “чужими” точками соответствующих функций $\varphi_j^-(z)$, когда мы их построим “обратным” ходом, отправляясь от функций $h_j^-(z)$. В число $q_j \geq 0$ “чужих” точек входит возможный нуль функции $h_j^-(z)$, $j \geq 1$, в центре $z = z_j$ круга D_j^- ; обозначим его кратность $k_j \geq 0$ (напомним, в это число не входит обязательный нуль кратности $p + m_j$ в точке $z = z_j$). Остальные “чужие” нули функции $h_j^-(z)$ разобьем на n групп с обозначением элементов $a_{jlq} \in D_j^-$, где индекс $l \neq j$ означает, что образ b_{jlq} точки a_{jlq} при отображении π_j^+ попадает в область D_l , а индекс q пробегает значения от 1 до числа k_{jl} , равного числу “чужих” точек $a \neq z_j$ в D_j^- , попадающих в область D_l^- при отображении π_j . Для номера $j = 0$ число $k_0 \geq 0$ обозначает кратность нуля функции $\varphi_0^-(z)$ на бесконечности, а точки $a_{0lq} \neq \infty$ и число k_{0l} имеют такой же смысл, как и для номеров $j \neq 0$. Кроме того, в каждой области D_j^- , $j \geq 2$, выделим точку $a_j = (|z_j|^2 - R_j^2)/\bar{z}_j$, которая при отображении $\pi_j^+(z): D_j^- \rightarrow E \setminus D_j^-$ переходит в точку $z_0 = 0 \in D_1^-$, и обозначим через $k'_j \geq 0$ возможный порядок нуля функции $\varphi_j^-(z)$ в этой точке. Таким образом, в итоге будем иметь следующие представления для значений q_j :

$$q_0 = k_0 + \sum_{l \geq 1} k_{0l}, \quad q_1 = k_1 + \sum_{l \neq 1} k_{1l}, \quad q_j = k_j + k'_j + \sum_{l \neq j} k_{jl}, \quad j \geq 2, \quad (35)$$

в которых, напомним, каждое число $k_j \geq 0$ равно превышающей $p + m_j$ кратности нуля функции $\varphi_j^-(z)$ в точке $z = z_j$, число $k'_j \geq 0$, $j \geq 2$, означает кратность нуля той же функции в точке $a_j \in D_j^-$, попадающей при отображении π_j^+ в точку $z_0 = 0 \in D_1^-$, а k_{jl} , $0 \leq l \neq j \leq n$, – число всех других “чужих” точек в D_j^- , попадающих в область D_l^- , $l \neq j$, при отображении π_j^+ .

Теперь $h_j^-(z)$ можно представить в виде

$$h_0^-(z) = \frac{\chi_0^-(z)}{z^{q_0}} \prod_{l=1}^n \prod_{q=1}^{k_{0l}} \left(\frac{z}{a_{0lq}} - 1 \right), \quad z, a_{0lq} \in D_0^-, \quad a_{0lq} \neq \infty,$$

$$h_1^-(z) = (z - z_1)^{p+m_1+k_1} \chi_1^-(z) \prod_{l \neq 1} \prod_{q=1}^{k_{1l}} (z - a_{1lq}), \quad z, a_{1lq} \in D_1^-, \quad a_{1lq} \neq z_1,$$

¹⁸На самом деле, в силу сделанных ранее предположений образы нулей должны лежать во внутренних точках этих областей.

$$h_j^-(z) = (z - z_j)^{p+m_j+k_j} \chi_j^-(z) (z - a_j)^{k'_j} \prod_{l \neq j} \prod_{q=1}^{k_{jl}} (z - a_{jlq}), \quad j \geq 2,$$

$$z, a_{jlq} \in D_j^-, \quad a_{jlq} \neq z_j, \quad a_{jlq} \neq a_j = \frac{|z_j|^2 - R_j^2}{\bar{z}_j},$$

$$\chi_j^-(z) \neq 0, \quad z \in \bar{D}_j^-, \quad 0 \leq j \leq n, \quad \chi_0^-(\infty) \neq 0$$

(если на самом деле некоторые k_{jl} равны нулю, то соответствующие множители заменим единицами).

Относительно функций $h^+(z)$ и $\chi^-(z)$ задача (34) принимает вид

$$h^+(t) = H(t) \overline{\chi^-(t)}, \quad (36)$$

где значения коэффициента $H(t)$ задаются на Γ формулами

$$\begin{aligned} H_0(t) &= R_0^{-2q_0} t^{k_0} \prod_{l=1}^n \prod_{q=1}^{k_{0l}} \left(\frac{R_0^2}{\bar{a}_{0lq}} - t \right), \quad t \in \Gamma_0, \\ H_1(t) &= \frac{\tilde{G}_1(t) R_1^{2(p+m_1+k_1)}}{(t - z_1)^{p+m_1+q_1}} \prod_{l \neq 1} \prod_{q=1}^{k_{1l}} [R_1^2 + (t - z_1)(\bar{z}_1 - \bar{a}_{1lq})], \quad t \in \Gamma_1, \\ H_j(t) &= \frac{\tilde{G}_j(t) R_j^{2(p+m_j+k_j+k'_j)} t^{k'_j}}{z_j^{k'_j} (t - z_j)^{p+m_j+q_j}} \prod_{l \neq j} \prod_{q=1}^{k_{jl}} [R_j^2 + (t - z_j)(\bar{z}_j - \bar{a}_{jlq})], \\ &\quad t \in \Gamma_j, \quad j > 1, \end{aligned} \quad (37)$$

где $a_{1lq} \neq z_1$, $a_{jlq} \neq a_j = (|z_j|^2 - R_j^2)/\bar{z}_j$. Вычислим индексы обеих частей задачи (36). Голomorphicная функция $h^+(z)$ не имеет нулей в D^+ ; голоморфные функции $\chi_j^-(z)$ не имеют нулей в своих областях определения D_j^- , $0 \leq j \leq n$. Поэтому $\text{Ind}_\Gamma h^+(t) = 0$, $\text{Ind}_{\Gamma_j} \chi_j^-(t) = 0$ и

$$\text{Ind}_\Gamma H(t) = 0. \quad (38)$$

Кроме того, из (34) и (37) находим

$$\lambda_0 = \text{Ind}_{\Gamma_0} H_0(t) = q_0, \quad (39)$$

$$\lambda_j = \text{Ind}_{\Gamma_j} H_j(t) = \kappa_j + p + m_j + q_j, \quad \kappa_j = \text{Ind}_{\Gamma_j} \tilde{G}_j(t), \quad j \geq 1 \quad (40)$$

(обход каждого Γ_j идет всюду в направлении, положительном для D^+ ; все сомножители в произведениях имеют нули вне окружности Γ_j , поэтому их вклад в индекс равен нулю). Между прочим, соотношение (38) дает уравнение

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0, \quad (41)$$

которое является равносильным соотношению (33).

Преобразуем задачу (36) в задачу с нулевым индексом коэффициента вдоль каждой окружности Γ_j , $0 \leq j \leq n$. Для этого умножим обе части (36) на $\prod_{i=1}^n (t - z_i)^{\lambda_i}$ и введем функцию

$$\chi^+(z) = h^+(z) \prod_{i=1}^n (z - z_i)^{\lambda_i}.$$

Получим задачу

$$\chi^+(t) = F(t)\overline{\chi^-(t)}, \quad (42)$$

где

$$F_j(t) = H_j(t) \prod_{i=1}^n (t - z_i)^{\lambda_i}, \quad 0 \leq j \leq n. \quad (43)$$

Теперь с учетом (38)–(40) имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Ind}_{\Gamma_j} F_j(t) &= \lambda_j - \lambda_j = 0, \quad 1 \leq j \leq n, \\ \operatorname{Ind}_{\Gamma_0} F_0(t) &= q_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n = \operatorname{Ind}_{\Gamma} H(t) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\operatorname{Ind}_{\Gamma_j} \chi^+(t) = \operatorname{Ind}_{\Gamma_j} F_j(t) - \operatorname{Ind}_{\Gamma_j} \chi_j^-(t) = 0, \quad 1 \leq j \leq n,$$

а так как $\operatorname{Ind}_{\Gamma} \chi^+(t) = \operatorname{Ind}_{\Gamma} h^+(t) + \operatorname{Ind}_{\Gamma} \prod_{i=1}^n (z - z_i)^{\lambda_i} = 0 + 0 = 0$ и $\operatorname{Ind}_{\Gamma} \chi^+(t) = \operatorname{Ind}_{\Gamma_0} \chi^+(t) + \sum \operatorname{Ind}_{\Gamma_j} \chi^+(t)$, то $\operatorname{Ind}_{\Gamma_0} \chi^+(t) = 0 = \operatorname{Ind}_{\Gamma_0} \chi^-(t)$. Значит, функции $\ln \chi^{\pm}$ являются однозначными голоморфными функциями в соответствующих областях $D^{\pm}$, а каждая функция $\ln F_j(t)$ однозначна на Γ_j , $j \geq 0$. Получаем, что краевая задача (42) равносильна неоднородной задаче

$$\gamma^+(t) = \overline{\gamma^-(t)} + f(t), \quad (44)$$

где $\gamma^{\pm}(z) = \ln \chi^{\pm}(z)$ с соответствующими областями существования, а $f(t) = \ln F(t)$.

Применяя к задаче (44) теорему 5, находим необходимые и достаточные условия ее разрешимости:

I) голоморфные функции $\ln F_j^+(z)$, $0 \leq j \leq n$, определены и однозначны в D^+ ;

II) функции $f_{ij} = \ln(F_j^+(z)/F_i^+(z))$ продолжимы как однозначные голоморфные функции соответственно в областях $E \setminus (D_i^- \cup D_j^-)$, $0 \leq i, j \leq n$.

Следовательно, если задача (26) разрешима, то нули функций $\psi^{\pm}(z)$ должны быть в таком числе и таких положениях, чтобы были удовлетворены равенство (32) и условия I), II) разрешимости задачи (44). Далее будем считать, что для рассматриваемых областей связность $n + 1$ не меньше 3, а сейчас рассмотрим случай двусвязных областей.

4. В случае *двусвязных областей* необходимо проверить только условие I), так как выполнение условия II) следует из выполнения условия I).

Итак, в настоящем пункте считаем $n = 1$ и приводим

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7. В двусвязной области D^+ имеем функции

$$F_0^+(z) = (z - z_1)^{\lambda_1} R_0^{-2q_0} z^{k_0} \prod_{q=1}^{k_{01}} \left(\frac{R_0^2}{\bar{a}_{01q}} - z \right), \quad (45)$$

$$F_1^+(z) = (z - z_1)^{\lambda_1} \frac{\tilde{G}_1^+(z) R_1^{2(p+m_1+k_1)}}{(z - z_1)^{p+m_1+q_1}} \prod_{q=1}^{k_{10}} [R_1^2 + (z - z_1)(\bar{z}_1 - \bar{a}_{10q})] \quad (46)$$

(если k_{01} или k_{10} равны нулю, то соответствующее произведение равно 1). Поскольку образы точек $a_{10q} \in D_1^-$ принадлежат области $D_0^- : |z| > R_0$, то обе

функции $F_0^+(z)$ и $F_1^+(z)$ голоморфны в D^+ и не имеют в ней нулей и их индексы по Γ_0 и Γ_1 равны нулю. Значит, функция $f(t) = \ln F(t)$ в граничном условии (44) продолжима в D^+ с обеих граничных окружностей как однозначная голоморфная функция, а тогда по теореме 4 для двусвязной области задача (44) разрешима. Напомним, что решение задачи дается в виде

$$\gamma^+(z) = \ln F_0^+(z) + f^+(z) + \bar{c}, \quad (47)$$

где $f^+(z)$ – основная правильная часть ряда Лорана для $\ln(F_1^+(z)/F_0^+(z)) = \ln(H_1^+(z)/H_0^+(z))$ в принадлежащей D^+ кольцевой полукрестности окружности Γ_0 , а c – постоянная, равная значению $\gamma_0^-(\infty)$.

Теперь совершим обратный путь от решения задачи (44) к решению задачи (1) в двусвязной области. Сначала находим $\chi^+(z) = \exp(\gamma^+(z))$, потом находим $h^+(z) = \chi^+(z)(z - z_1)^{-\lambda_1}$, затем имеем $\psi^+(z) = h^+(z)(z - \zeta_1) \cdots (z - \zeta_p)$ и, наконец, получаем $\varphi^+(z) = \psi^+(z)\hat{G}_0^+(z)n_G(z)$, $z \in D^+$. Однако в этих конструкциях участвуют некоторые не известные нам величины – неотрицательные целые числа $p, k_0, k_1, k_{01}, k_{10}, q_0 = k_0 + k_{01}, q_1 = k_1 + k_{10}$ и точки с обозначениями $\zeta_1, \dots, \zeta_p$ в D^+ , а также a_{01q} и a_{10q} соответственно в D_0^- и D_1^- . Эти величины являются *параметрами* решения. Выясним их роль и выделим случаи, когда решений нет. Из формулы (33) в случае двусвязной области имеем равенство

$$p + q_0 + q_1 = \text{Ind}_{\Gamma_1^-} G_0^+(t) + \text{Ind}_{\Gamma_0} G_1^+(t) - N. \quad (48)$$

Обозначим правую часть в (48) через m . Если $m < 0$, то задача (1) не имеет решения, если $m = 0$, то должно быть $p = 0, q_0 = 0, q_1 = 0, k_0 = k_1 = k_{01} = k_{10} = 0$, и тогда в D^+ выделенных точек $\zeta_1, \dots, \zeta_p$ нет, причем нет и точек a_{01q}, a_{10q} , и в этом случае

$$F_0^+(z) = 1, \quad F_1^+(z) = \frac{\tilde{G}_1^+(z)R_1^{2m_1}}{(z - z_1)^{m_1}}$$

и решение задачи (1) единственно (с точностью до постоянного вещественного множителя), причем $\varphi_0^-(\infty) = c \neq 0$, т.е. ненулевого решения с условием $\varphi_0^-(\infty) = 0$ не существует.

Рассмотрим теперь случай $m > 0$. Тогда по равенству (48) имеем $(2m)$ -параметрическое семейство решений (считая количество вещественнозначных параметров), но наиболее интересным является описание распределения этих параметров по их геометрическому смыслу в областях D^+ и D^- . Напомним, что все числа $p \geq 0, q_0 \geq 0, q_1 \geq 0$ равны числам точек соответственно в областях D^+, D_0^- и D_1^- с некоторыми специальными свойствами решения задачи в этих точках, а именно p равно числу точек в D^+ , в которых $\psi^+(z)$ обращается в нуль, числа $q_i, 0 \leq i \leq 1$, равны числам точек соответственно в D_i^- , в которых $\varphi_i^-(z)$ обращаются в нуль, причем таких, что их образы при отображении π_i вида (8) не попадают в $\bar{D}^+$. Выбор значения параметра состоит в том, что необходимо произвольным образом выбрать p точек в D^+ и соответствующим образом q_i точек в D_i^- (т.е. выбрать их в области $D_i^- \setminus \pi_i^{-1}(\bar{D}^+)$, где $\pi_1 = \pi_1^+$, а $\pi_0 = \pi_0^-$, причем числа $q_0 = k_0 + k_{01}, q_1 = k_1 + k_{10}$ распределяются произвольным образом между указанными слагаемыми и выбор точек производится в соответствии со смыслом этих слагаемых; см. объяснения при формуле (35)). Этот выбор однозначным образом определит некоторое решение задачи (1). Теорема доказана.

Теперь для определения количества возможных разложений числа $m = p + q_0 + q_1 > 0$ в сумму чисел $p \geq 0, q_0 \geq 0, q_1 \geq 0$ докажем следующее общее

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Количество способов представления натурального числа $m > 0$ в виде суммы k целых неотрицательных чисел равно C_{k+m-1}^{k-1} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО¹⁹. Рассмотрим на числовой оси отрезок от 1 до $k + m - 1$ и расставим в целых его точках m единиц и $k - 1$ нулей. Пусть нули расположились в точках $i_1 < i_2 < \dots < i_{k-1}$, причем $1 \leq i_1$ и $i_{k-1} \leq k + m - 1$. Эти нули разобьют отрезок $[1, k + m - 1]$ на k отрезков $[1, i_1], [i_1, i_2], \dots, [i_{k-1}, k + m - 1]$, а в каждом отрезке между его концами расположится некоторое количество единиц. Если $i_{j+1} = 1 + i_j$, то в этом отрезке число единиц равно нулю, в частности оно равно нулю и в отрезке $[1, i_1]$, если $i_1 = 1$ (аналогично и в отрезке $[i_{k-1}, k + m - 1]$, если $i_{k-1} = k + m - 1$). Суммарное число единиц в каждом из k отрезков и даст одно из требуемых представлений числа m в виде суммы k неотрицательных чисел. Количество способов расстановки $k - 1$ нулей и m единиц в отрезке $[1, k + m - 1]$ равно $(k + m - 1)!$, причем перестановки отдельно внутри нулей и единиц в уже данном их распределении на отрезке не влияют ни на расположение отрезков вида $[i_j, i_{j+1}]$, ни на число единиц внутри этих отрезков. Значит, число способов разбиения m на сумму k неотрицательных чисел равно $\frac{(k+m-1)!}{(k-1)!m!}$, что и требовалось показать.

ПРИМЕР 1. Пусть решается краевая задача (1) с коэффициентом $G(t) = G_0(t) = t^n, t \in \Gamma_0, G(t) = G_1(t) = t^k, t \in \Gamma_1$. В этом случае в области D^+ функция $G_i^+(z)$ не имеет ни нулей, ни полюсов, поэтому $N = 0$ и $p + q_0 + q_1 = -\text{Ind}_{\Gamma_0^+} G_0^+(t) - \text{Ind}_{\Gamma_1^-} G_1^+(t) - N = k - n$. Значит, при $k - n < 0$ решения нет. При $k = n$ есть единственное решение $\varphi_0^-(z) = c, \varphi^+(z) = \bar{c}t^n, \varphi_1^-(z) = c$. При $m = k - n > 0$ уравнение $p + q_0 + q_1 = k - n$ имеет много решений. Пусть для определенности $k - n = 2$. Тогда имеем семейство решений, зависящее от двух комплексных или четырех вещественных параметров – координат точек, в которых происходит обращение в нуль некоторых компонент решения. По утверждению 3 должно быть $C_4^2 = 6$ различных типов решений, в зависимости от выбора расположения точек обращения в нуль компонент решения. Например, пусть $p = 1, q_0 = 1, q_1 = 0$. Значит, функция $\varphi^+(z)$ должна иметь один нуль в D^+ , а $\varphi_0^-(z)$ – один нуль в D_0^- . В свою очередь, этот нуль может быть в бесконечности, тогда $k_0 = 1, k_{01} = 0$, а если нуль должен быть в конечной точке, то $k_0 = 0, k_{01} = 1$ (напомним, что выбор этой точки ограничивается требованием, чтобы ее образ при отображении π_0^- из D_0^- не попал в D^+). Рассмотрим вариант, когда имеем нуль в бесконечности. Тогда с использованием формул (45) и (46) имеем

$$F_0^+(z) = R_0^{-2} z(z - z_1)^{-1}, \quad F_1^+(z) = \frac{R_1^2 z^2}{(z - z_1)^2}.$$

При решении задачи (47) получаем, что основная правильная часть ряда Лорана функции $\ln(F_1^+(z)F_0^+(z)) = \ln \frac{R_1^2 R_0^2 z}{z - z_1}$ равна нулю, поэтому задача (47) имеет решение $\gamma^+(z) = \bar{c} + \ln F_0^+(z)$. Теперь остается повторить описанный после формулы (47) “обратный” путь и получить следующее решение рассматриваемой

¹⁹Пользуясь случаем, благодарю Д. Швецова, который по моей просьбе получил и формулу для числа способов, и ее доказательство. Я привожу здесь его доказательство в более развернутом изложении.

краевой задачи (считая в ней $k = n + 2$):

$$\begin{aligned}\varphi^+(z) &= \bar{c}_0 R_0^{-2} z^{n+1} (z - \zeta), & \varphi_0^-(z) &= c_0 \frac{R_0^2 - \bar{\zeta} z}{z^2}, \\ \varphi_1^-(z) &= c_0 R_0^{-2} \frac{R_1^2 + (\bar{z}_1 - \bar{\zeta})(z - z_1)}{R_1^2 + \bar{z}_1(z - z_1)},\end{aligned}$$

где $c_0 = \exp c \neq 0$, а $\zeta \in D^+$ – выбранная точка нуля функции $\varphi^+(z)$. Видно, что функции $\varphi^+(z)$, $\varphi_0^-(z)$ и $\varphi_1^-(z)$ удовлетворяют выбранным значениям $p = 1$, $q_0 = k_0 = 1$, $q_1 = 0$.

Рассмотрим другой вариант, и пусть $p = 2$, $q_0 = q_1 = 0$. Тогда

$$F_0^+(z) = 1, \quad F_1^+(z) = \frac{R_1^4 z^2}{(z - z_1)^4}$$

и решением задачи с заданным в условии примера коэффициентом будут функции

$$\begin{aligned}\varphi^+(z) &= \bar{c}(z - \zeta_1)(z - \zeta_2)z^n, & \varphi_0^-(z) &= c \frac{(R_0^2 - \bar{\zeta}_1 z)(z - \bar{\zeta}_2)}{z^2}, \\ \varphi_1^-(z) &= c \frac{[R_1^2 + (\bar{z}_1 - \bar{\zeta}_1)(z - z_1)][R_1^2 + (\bar{z}_1 - \bar{\zeta}_2)(z - z_1)]}{[R_1^2 + \bar{z}_1(z - z_1)]^2},\end{aligned}$$

где ζ_1, ζ_2 – две произвольные точки из области D^+ .

Так можно построить решения и с условием $p = 0$. Таким образом, мы видим, что *типов* решений много (в данном случае всего 6), но каждый тип зависит от выбора только двух точек и, главное, между решениями разных типов имеет место линейная зависимость. Например, легко показать, что так можно подобрать линейную комбинацию решений при значениях $p = 1$ и $p = 2$, дающую решение при $p = 0$. Следовательно, мы не можем утверждать, что в данном примере линейное пространство всех решений над полем действительных чисел имеет размерность 6, но можем находить решения с заранее выбранными положениями определенного числа нулей той или иной компоненты решения.

5. Продолжим рассмотрение общего случая $(n + 1)$ -связной области. Выясним, какие ограничения для числа нулей и для их положения налагаются условиями I), II). Начнем с требования $\text{Ind}_{\Gamma_i} F_j(t) = 0$, $0 \leq i, j \leq n$, необходимого и достаточного для выполнения условия I). Положим

$$\varkappa_{ji} = \text{Ind}_{\Gamma_i} \tilde{G}_j^+(t), \quad 0 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq n, \quad \varkappa_{jj} = \varkappa_j$$

(обход в положительном направлении для области D^+). Тогда из (43) с учетом (35) и (37) мы должны иметь

$$\text{Ind}_{\Gamma_1} F_0(t) = -k_0 - k_{01} - \lambda_1 = 0, \quad (49)$$

$$\text{Ind}_{\Gamma_i} F_0(t) = -k_{0i} - \lambda_i = 0, \quad 2 \leq i \leq n, \quad (50)$$

$$\text{Ind}_{\Gamma_i} F_j(t) = \varkappa_{ji} - k_{ji} - \lambda_i = 0, \quad 2 \leq i \neq j \leq n, \quad (51)$$

$$\text{Ind}_{\Gamma_1} F_j(t) = \varkappa_{j1} - k_{j1} - k'_j - \lambda_1, \quad j \geq 1 \quad (52)$$

(условия $\text{Ind}_{\Gamma_j} F_j(t) = 0$, $0 \leq j \leq n$, выполнены по построению функций $F_j^+(z)$, а условие $\text{Ind}_{\Gamma_0} F_j(t) = 0$, $1 \leq j \leq n$, является следствием выполнения соотношения (51), условия $\text{Ind}_{\Gamma_j} F_j(t) = 0$ и равенств $\text{Ind}_{\Gamma} F_j(t) = \text{Ind}_{\Gamma} H_j = 0$, так

как функция $H_j(z)$ в D^+ не имеет ни нулей, ни полюсов). Величины $\varkappa_{ij}$ нам известны, поэтому из (49)–(52) находим

$$k_{j1} = \varkappa_{j1} - k'_j + k_{01} + k_0, \quad j \geq 2, \quad k_{ji} = \varkappa_{ji} + k_{0i}, \quad i \geq 2, \quad i \neq j \geq 1, \quad (53)$$

причем надо помнить, что величины k_0 , k_{01} и k_{0i} пока неизвестны.

Поскольку ни одна из функций $H_j(z)$, $j \geq 0$, не имеет внутри области D^+ ни нулей, ни полюсов, такими же свойствами обладают и функции $F_j^+(z)$, а тогда выполнение равенств (49)–(51) обеспечивает регулярность и однозначность всех функций $f_{ji}(z) = \ln(F_j^+(z)/F_i^+(z))$ в области D^+ . Теперь проверим, при каких условиях для положения нулей участвующих в рассмотрении функций возможна регулярная продолжаемость функций f_{ji} в области $D_{ji} = E \setminus (D_j^- \cup D_i^-)$ как голоморфных функций (однозначность этих функций вдоль каждой окружности Γ_l , $0 \leq l \leq n$, известна).

Рассмотрим сначала функцию $f_{10}(z)$. Из определения $F_1^+(z)$ согласно формуле (43) имеем

$$\begin{aligned} \frac{F_1^+(z)}{F_0^+(z)} &= c_1 z^{-k_0} \tilde{G}_1^+(z) (z - z_1)^{-(p+m_1+q_1)} \prod_{l \neq 1} \prod_{q=1}^{k_{1l}} [R_1^2 + (z - z_1)(\bar{z}_1 - \bar{a}_{1lq})] \\ &\times \prod_{l=1}^n \prod_{q=1}^{k_{0l}} \left(\frac{R_0^2}{\bar{a}_{0lq}} - z \right)^{-1}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad c_1 = \text{const}. \end{aligned} \quad (54)$$

Функция $\tilde{G}_1^+(z) = \hat{G}_1^+(z)/\hat{G}_0^+(z)$ по необходимому условию из теоремы 6 определена и мероморфна в $K \setminus D_1^-$. Функция $F_1^+(z)/F_0^+(z)$ в области D^+ не имеет ни нулей, ни полюсов, а в D_l^- , $l \neq 1$, $l \geq 2$, в ее выражении (54) заведомо существуют k_{1l} претендентов на нули (в первой группе произведений) и k_{0l} претендентов на полюсы (во второй группе произведений). Пусть в D_l^- , $l \geq 2$, функция $\tilde{G}_1^+(z)$ имеет $s_{1l} \geq 0$ нулей в точках $c_{1l}^{(s)}$, $0 \leq s \leq s_{1l}$, и $r_{1l} \geq 0$ полюсов в точках $d_{1l}^{(r)}$, $0 \leq r \leq r_{1l}$. Числа нулей и полюсов связаны соотношением

$$\text{Ind}_{\Gamma_l} \tilde{G}_1^+(t) = \varkappa_{1l} = r_{1l} - s_{1l}, \quad 2 \leq l \leq n. \quad (55)$$

Из формулы (54) видно, что для того, чтобы функция $F_1^+(z)/F_0^+(z)$ не имела в D_l^- , $l \geq 2$, нулей и полюсов, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

а₁) $k_{1l} \geq r_{1l}$, так как r_{1l} полюсов функции $\tilde{G}_1^+(z)$ в D_l^- могут компенсироваться только k_{1l} нулями функции $\prod_{q=1}^{k_{1l}} [R_1^2 + (z - z_1)(\bar{z}_1 - \bar{a}_{1lq})]$, далее, r_{1l} точек из числа точек $b_{1lq} = \pi_1^+(a_{1lq}) \in D_l^-$ должны совпасть со всеми точками $d_{1l}^{(r)}$, $0 \leq r \leq r_{1l}$, таким образом, положения соответствующих r_{1l} точек $a_{1lq} \in D_1^-$ не могут выбираться произвольно, а определяются свойствами (а именно, положениями полюсов) известной функции $\tilde{G}_1^+(z)$ (в дальнейшем будем называть эти вполне определенные точки $b_{1lq} \in D_l^-$ *основными*, а остальные $k_{1l} - r_{1l} \geq 0$ точек из числа b_{1lq} назовем *дополнительными*);

б₁) $k_{0l} \geq s_{1l}$, и s_{1l} точек из числа точек $b_{0lq} = \pi_0^-(a_{0lq}) \in D_l^-$ должны совпасть со всеми точками $c_{1l}^{(s)}$, $0 \leq s \leq s_{1l}$ (назовем точки b_{0lq} *основными*, их прообразы $a_{0lq} \in D_0^-$ определяются по свойствам функции $\tilde{G}_1^+(z)$; остальные $k_{0l} - s_{1l} \geq 0$ точек $b_{0lq} \in D_l^-$ будем называть *дополнительными*);

$c_1)$ $k_{0l} - s_{1l} = k_{1l} - r_{1l}$, так как индекс функции $F_1^+(z)/F_0^+(z)$ по окружности Γ_l равен нулю, т.е. число полюсов должно быть равно числу нулей, более того, на самом деле не должно быть ни нулей, ни полюсов, поэтому если $k_{0l} - s_{1l} > 0$ дополнительных точек вида $\pi_0^-(a_{0lq})$ выбраны произвольно, то другие в равном количестве $k_{1l} - r_{1l}$ дополнительных точек вида $\pi_1^+(a_{1lq})$ должны быть выбраны с условием $\pi_0^-(a_{0lq}) = \pi_1^+(a_{1lq})$.

Рассмотрим теперь функции $f_{j0}(z)$, $j \geq 2$. Для них имеем представление

$$\begin{aligned} \frac{F_j^+(z)}{F_0^+(z)} &= c_j z^{-k_0+k'_j} \tilde{G}_j^+(z) (z - z_j)^{-(p+m_j+q_j)} \prod_{l \neq j} \prod_{q=1}^{k_{jl}} [R_j^2 + (z - z_j)(\bar{z}_j - \bar{a}_{jlq})] \\ &\times \prod_{l=1}^n \prod_{q=1}^{k_{0l}} \left(\frac{R_0^2}{\bar{a}_{0lq}} - z \right)^{-1}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad a_{jlq} \neq a_j = \frac{|z_j|^2 - R_j^2}{\bar{z}_j}, \quad c_j = \text{const}. \end{aligned} \quad (56)$$

Функция $\tilde{G}_j^+(z) = \hat{G}_j^+(z)/\hat{G}_0^+(z)$ по необходимому условию из теоремы 6 определена и мероморфна в $K \setminus D_j^-$. Функция $F_j^+(z)/F_0^+(z)$ в области D^+ не имеет ни нулей, ни полюсов, а в D_l^- , $l \neq j$, $l \geq 1$, может иметь k_{jl} нулей (в первой группе произведений) и k_{0l} полюсов (во второй группе произведений).

Сначала разберем случай областей D_l^- , $l > 1$ (в этом случае необходимые рассуждения аналогичны предыдущему рассмотрению и мы их представим без подробного обоснования). Пусть в D_l^- , $l \neq j$, $l > 1$, функция $\tilde{G}_j^+(z)$ имеет $s_{jl} \geq 0$ нулей в точках $c_{jl}^{(s)}$, $0 \leq s \leq s_{jl}$, и $r_{jl} \geq 0$ полюсов в точках $d_{jl}^{(r)}$, $0 \leq r \leq r_{jl}$. Количества нулей и полюсов связаны соотношением

$$\text{Ind}_{\Gamma_l} \tilde{G}_j^+(t) = \varkappa_{jl} = r_{jl} - s_{jl}, \quad 1 \leq j, l \leq n, \quad j \neq l > 1. \quad (57)$$

Из (56) видно, что для того, чтобы функция $F_j^+(z)/F_0^+(z)$ не имела в D_l^- , $l \neq j$, $l \geq 2$, нулей и полюсов, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

$a_j)$ $k_{jl} \geq r_{jl}$ и r_{jl} точек из числа точек $b_{jlq} = \pi_j^+(a_{jlq}) \in D_l^-$ должны совпасть со всеми точками $d_{jl}^{(r)}$, $0 \leq r \leq r_{jl}$, таким образом, положения соответствующих r_{jl} точек $a_{jlq} \in D_j^-$ не могут выбираться произвольно, а определяются свойствами известной функции $\tilde{G}_j^+(z)$ (в дальнейшем будем называть эти вполне определенные точки $b_{jlq} \in D_l^-$ *основными*, а остальные $k_{jl} - r_{jl} \geq 0$ точек из числа b_{jlq} назовем *дополнительными*);

$b_j)$ $k_{0l} \geq s_{jl}$ и s_{jl} точек из числа точек $b_{0lq} = \pi_0^-(a_{0lq}) \in D_l^-$ должны совпасть со всеми точками $c_{jl}^{(s)}$, $0 \leq s \leq s_{jl}$ (назовем эти точки b_{0lq} *основными*, их прообразы $a_{0lq} \in D_0^-$ определяются по свойствам функции $\tilde{G}_j^+(z)$; остальные $k_{0l} - s_{jl} \geq 0$ точек $b_{0lq} \in D_l^-$ будем называть *дополнительными*);

$c_j)$ $k_{0l} - s_{jl} = k_{jl} - r_{jl}$, так как на самом деле не должно быть ни нулей, ни полюсов, поэтому если $k_{0l} - s_{jl} > 0$ дополнительных точек вида $\pi_0^-(a_{0lq})$ выбраны произвольно, то другие в равном количестве $k_{jl} - r_{jl}$ дополнительных точек вида $\pi_j^+(a_{jlq})$ должны быть выбраны с условием $\pi_0^-(a_{0lq}) = \pi_j^+(a_{jlq})$.

При изменении j нули и полюсы функции $\tilde{G}_j^+(z)$ в D_l^- изменяют, вообще говоря, свое число и положение. Пусть s_l – общее число нулей всех функций $\tilde{G}_j^+(z)$ в D_l^- , $j \neq l \geq 2$, причем общие нули нескольких функций, если

они существуют, подсчитываются не по суммарной, а по максимальной встречающейся кратности. Поскольку эти нули должны компенсироваться только полюсами, которые входят в число k_{0l} полюсов *одной и той же* функции $\prod_{q=1}^{k_{0l}} (\frac{R_0^2}{a_{0lq}} - z)^{-1}$, то $k_{0l} \geq s_l$ и положение s_l основных точек вида $\pi_0^-(a_{0lq})$ точно определяется положением и кратностью нулей всех функций $\tilde{G}_j^+(z)$, а остальные $k'_{0l} = k_{0l} - s_l \geq 0$ дополнительных точек могут быть выбраны произвольно. Положения основных точек вида $\pi_j^+(a_{jlq}) \in D_l^-, 1 \leq j \leq n, l \geq 2$, определяются полюсами известных функций $\tilde{G}_j^+(z)$, а дополнительные точки совпадают с уже выбранными дополнительными точками вида $\pi_0^-(a_{0lq}) \in D_l^-$. Итак, мы должны иметь равенства

$$k_{0l} = s_l + k'_{0l}, \quad k'_{0l} \geq 0, \quad 2 \leq l \leq n, \quad (58)$$

$$k_{jl} = \kappa_{jl} + k_{0l} = r_{jl} + k'_{jl}, \quad k'_{jl} = k_{0l} - s_{jl} \geq 0 \quad l \geq 2, \quad j \geq 1, \quad j \neq l. \quad (59)$$

Случай области D_1^- требует отдельного рассмотрения, так как тогда в представлении (56) надо принять во внимание множитель $z^{-k_0+k'_j}$. Не излагая подробно рассмотрение этого случая, приведем итоговый результат. Пусть в D_1^- функция $\tilde{G}_j^+(z)$ вне точки $z_0 = 0$ имеет $s_{j1} \geq 0$ нулей и r_{j1} полюсов, а в окрестности точки $z_0 = 0$ имеет представление $\tilde{G}_j^+(z) \sim c_0 z^{s_0^{(j)}}$, $c_0 \neq 0, z \rightarrow 0$. Тогда

$$\kappa_{j1} = r_{j1} - s_{j1} - s_0^{(j)}. \quad (60)$$

Полюсы и нули, появляющиеся за счет произведений, входящих в правую часть формулы (56), дают различные выражения вида $(z-a)$, которые в итоге должны сократиться. Среди них нет ни одной скобки для $a = 0$. Значит, степень $z^{k'_j - k_0 + s_0^{(j)}}$ должна быть с нулевым показателем, поэтому имеем равенство

$$k_0 = k'_j + s_0^{(j)}. \quad (61)$$

Тогда, в частности, $k_0 \geq s_0^{(j)}$ для всех $j \geq 2$. Кроме того, если снова, по аналогии с областями $D_l^-, l > 1$, ввести число s_1 , то будет $k_{01} \geq s_1$. Аналогами соотношений (58) и (59) будут равенства

$$k_{01} = s_1 + k'_{01}, \quad k'_{01} \geq 0, \quad (62)$$

$$k_{j1} = \kappa_{j1} + k_{01} = r_{j1} + k'_{j1}, \quad j \geq 2 \quad (63)$$

(отметим, что равенства для k_{ji} в формулах (59) и (63) совпали с их значениями в (53), полученными из других соображений). Для выбора точек $a_{j1q} \in D_j^-, j \geq 0$, также можно провести классификацию на основные и дополнительные точки. Как вывод получаем, что если числа $k_{jl}, k_0, j \geq 0, l \geq 1, j \neq l$, удовлетворяют уравнениям (58)–(63) и точки $a_{jlq} \in D_j^-, j \geq 0$, выбраны так, как было описано выше, то все функции $F_j(z)/F_0(z)$ будут определены в области $K \setminus D_j^- = E \setminus (D_0 \cup D_j^-)$ и не будут иметь в ней ни нулей, ни полюсов, следовательно, их логарифм будет в этой области однозначной голоморфной функцией.

Рассмотрим теперь функции $F_j(z)/F_1(z), j \geq 2$. Каждая функция определена, голоморфна и не имеет ни нулей, ни полюсов в области $K \setminus (D_j^- \cup D_1^-)$, так как в ней эту функцию можно представить в виде $(F_j(z)/F_0(z))(F_1(z)/F_0(z))^{-1}$.

Необходимо проверить такие же ее свойства в области D_0^- . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{F_j(z)}{F_1(z)} &= C_j z^{k'_j} \frac{(z - z_1)^{p+m_1+q_1}}{(z - z_j)^{p+m_j+q_j}} \frac{\tilde{G}_j(z)}{\tilde{G}_1(z)} \prod_{l \neq j} \prod_{q=1}^{k_{jl}} [R_j^2 + (z - z_j)(\bar{z}_j - \bar{a}_{jlq})] \\ &\times \prod_{l \neq 1} \prod_{q=1}^{k_{1l}} [R_1^2 + (z - z_1)(\bar{z}_1 - \bar{a}_{1lq})]^{-1}, \quad z \in E \setminus (D_1^- \cup D_j^-), \quad C_j = \text{const}. \end{aligned} \quad (64)$$

По установленному в конце предыдущего абзаца свойству функция $F_j(z)/F_0(z)$, $j \geq 1$, не имеет в соответствующей области $D^+ \setminus D_j^-$ ни нулей, ни полюсов. Поскольку $F_j(z)/F_1(z) = (F_j(z)/F_0(z))(F_0(z)/F_1(z))$, такими же будут и функции $(F_j(z)/F_1(z))$, но только в области $K \setminus (D_1^- \cup D_j^-)$. Это значит, что у мероморфной функции $\tilde{G}_{1j}(z)$, полученной аналитическим продолжением функции $\tilde{G}_j^+(z)/\tilde{G}_1^+(z) = \hat{G}_j^+(z)/\hat{G}_1^+(z)$ по необходимому условию в область $E \setminus (D_1^- \cup D_j^-)$, все нули и полюсы расположены в области D_0^- . Пусть $\tilde{G}_{1j}(z)$ имеет в этой области τ_j нулей в точках $x_{j\tau} \neq \infty$, $0 \leq \tau \leq \tau_j$, и σ_j полюсов в точках $y_{j\sigma} \neq \infty$, $0 \leq \sigma \leq \sigma_j$. Пусть $\tilde{G}_{1j}(z) \sim cz^{r_j}$, $r_j \in \mathbb{Z}$, $z \rightarrow \infty$. С учетом числа нулей и полюсов функции $\tilde{G}_{1j}(z)$ в области D_0^- имеем

$$\text{Ind}_{\Gamma_0} \frac{\tilde{G}_j(t)}{\tilde{G}_1(z)} = \varkappa_{j0} - \varkappa_{10} = -\tau_j + \sigma_j + r_j, \quad (65)$$

а из требуемого поведения $F_j(z)/F_1(z) \rightarrow \text{const} \neq 0$, $z \rightarrow \infty$, получаем, что должно быть выполнено равенство

$$k_j - k_1 = r_j - (m_j - m_1) \quad (66)$$

(учтены равенства (35)). Для того чтобы функция $F_j^+(z)/F_1^+(z)$, определенная формулой (64), не имела в D_0^- ни нулей, ни полюсов, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

а) $k_{10} \geq \tau_j$ (так как нули $x_{j\tau}$ могут компенсироваться только полюсами из $\prod_{q=1}^{k_{10}} [R_1^2 + (z - z_1)(\bar{z}_1 - \bar{a}_{10q})]^{-1}$) и τ_j точек из числа точек $\pi_1^+(a_{10q}) = b_{10q} \in D_0^-$ должны совпасть со всеми точками $x_{j\tau}$, $0 \leq \tau \leq \tau_j$ (назовем эти точки b_{10q} *основными*, а остальные $k_{10} - \tau_j \geq 0$ точек из числа b_{10q} будем называть *дополнительными*);

б) $k_{j0} \geq \sigma_j$ и σ_j точек вида $\pi_j^+(a_{j0q}) = b_{j0q}$ должны совпасть со всеми точками $y_{j\sigma}$, $0 \leq \sigma \leq \sigma_j$ (назовем эти точки b_{j0q} *основными*, а остальные $k_{j0} - \sigma_j \geq 0$ точек из числа b_{j0q} будем называть *дополнительными*);

γ) выполнено равенство²⁰

$$k_{10} - \tau_j = k_{j0} - \sigma_j, \quad (67)$$

причем если $k_{10} - \tau_j$ дополнительных точек $\pi_1^+(a_{10q})$ выбраны произвольно, то $k_{j0} - \sigma_j$ дополнительных точек $\pi_j^+(a_{j0q})$ должны быть выбраны с условием $\pi_j^+(a_{j0q}) = \pi_1^+(a_{10q})$.

²⁰ Оно получается из условия равенства числа расположенных в D_0^- и отличных от ∞ нулей и полюсов в числителе и знаменателе выражения для функции $F_j(z)/F_1(z)$, но может быть получено и из условия равенства нулю индекса этой функции по границе области D_0^- .

В сокращениях, которые были рассмотрены в пп. $\alpha)$ – $\gamma)$, участвовали все нули и полюсы, дающие в разложениях знаменателей и числителей скобки вида $(z - a)$, $a \neq 0$, однако имеется еще сомножитель вида $z^{k'_j} z^{r_j}$, которому не с чем сократиться. Значит, сумма $k'_j + r_j$ должна быть равна нулю, т. е. имеем соотношение

$$r_j = -k'_j \leq 0, \quad 2 \leq j \leq n. \quad (68)$$

Важность этого соотношения состоит в том, что неравенства $r_j \leq 0$ оказываются *необходимым* условием разрешимости задачи (1), так как числа r_j вычисляются по данному коэффициенту $G(t)$ краевого условия. Кроме того, мы с учетом формулы (61) можем найти значение k_0 :

$$k_0 = -r_j + s_0^{(j)}, \quad 2 \leq j \leq n. \quad (69)$$

Соотношение (69) дает нам два новых необходимых условия разрешимости задачи (1), а именно

$$-r_j + s_0^{(j)} \geq 0, \quad j \geq 2, \quad -r_2 + s_0^{(2)} = \dots = -r_n + s_0^{(n)}. \quad (70)$$

Заметим, что здесь мы имеем ситуацию, не встречающуюся в других постановках краевых задач в теории аналитических функций: порядок нуля решения на бесконечности *точно* определяется свойствами коэффициента задачи (вернее, в “обычных” задачах существование решения однородной задачи могло зависеть от требования обращения или необращения в нуль решения на бесконечности, но в случае требования обращения в нуль решения на бесконечности оставался некоторый интервал для возможных значений порядка нуля).

При изменении j нули и полюсы функции $\tilde{G}_j(z)/G_1(z)$ в D_0^- , вообще говоря, изменяются как в количественном, так и в позиционном смысле. Пусть τ_0 – общее число отличных от ∞ нулей всех функций $\tilde{G}_j(z)/G_1(z)$, $2 \leq j \leq n$, в D_0^- , подсчитанных по максимальной краткости, если существуют общие нули нескольких функций. Тогда $k_{10} \geq \tau_0$ и положение $\tau_0 \geq 0$ основных точек вида $\pi_1^+(a_{10q})$ точно определяется положением нулей всех функций $\tilde{G}_{1j}(z)$, а остальные $k'_{10} = k_{10} - \tau_0 \geq 0$ дополнительных точек $b_{10q} = \pi_1^+(a_{10q})$ могут быть выбраны произвольно. Положение основных $k_{j0} - \sigma_j \geq 0$ точек вида $\pi_j^+(a_{j0q})$ определяется полюсами функции $\tilde{G}_{1j}$ в D_0^- , а дополнительных $\pi_j^+(a_{j0q})$ – выбранными положениями дополнительных точек $\pi_1^+(a_{10q})$.

Итак, кроме (66), должны быть верны соотношения

$$k_{10} = \tau_0 + k'_{10}, \quad k'_{10} \geq 0, \quad (71)$$

$$k_{j0} = k_{10} + \sigma_j - \tau_j = k_{10} - r_j + \kappa_{j0} - \kappa_{10}, \quad 2 \leq j \leq n, \quad (72)$$

и если числа k_1 , k'_{10} , k'_{0l} (остальные по ним и по известным характеристикам коэффициентов $G_j(t)$ вычисляются) и точки $a_{j0q} \in D_j^-$, $j \geq 1$, выбраны описанным выше способом, то функция $F_j^+(z)/F_1^+(z)$ не будет иметь в D_0^- ни нулей, ни полюсов, и ее логарифм будет в D_0^- однозначной голоморфной функцией, что и нужно для разрешимости задачи.

При этих же условиях любая функция $F_j^+(z)/F_i^+(z)$ не имеет в $E \setminus (D_j^- \cup D_i^-)$ ни нулей, ни полюсов, так как в $K \setminus (D_j^- \cup D_i^-)$ она представима как $(F_j^+(z)/F_0^+(z))/(F_i^+(z)/F_0^+(z))$, а в D_0 она представима как $(F_j^+(z)/F_1^+(z)) \times (F_i^+(z)/F_1^+(z))$. Если мы добьемся существования в уравнении (44) нужных

нам функций $\ln F(t)$, то, решив это уравнение, мы по описанному в случае двусвязной области способу придем к решению исходной задачи (1).

Для окончательного представления соотношения между числом нулей функции $\psi^\pm(z)$ и характеристиками функций $G_j^+(z)$ осталось подсчитать q_j и подставить эти значения q_j в (33). С учетом (40), (58)–(63) и (66)–(72) имеем следующие равенства (через θ_i , $i = 1, 2$, обозначены соответственно суммы $\sum_{l \geq i}^n (s_l + k'_{0l})$):

$$q_0 = k_0 + \sum_{l=1}^n k_{0l} = k_0 + \theta_1 \quad (73)$$

(на основании формул (58) и (62)),

$$q_1 = k_1 + k_{10} + \sum_{l \geq 2} k_{1l} = k_1 + \tau_0 + \sum_{l \geq 2} \varkappa_{1l} + \theta_2 + k'_{10} \quad (74)$$

(см. (59) и (71)),

$$\begin{aligned} q_j = k_j + k'_j + k_{j0} + k_{j1} + \sum_{2 \leq l \neq j} k_{jl} = k_0 + k_1 + \tau_0 + (m_1 - m_j) \\ - \varkappa_{10} + \sum_{0 \leq l \neq j} \varkappa_{jl} + \theta_1 - (s_j + k'_{0j}) + k'_{10}, \quad j \geq 2 \end{aligned} \quad (75)$$

(см. (59), (63), (66), (67) и (72)).

Сложив все q_j , найдем

$$\sum_{j=0}^n q_j = n(\theta_1 + k_0 + k_1 + \tau_0 + m_1 - \varkappa_{10} + k'_{10}) + \sum_{j=1}^n \sum_{l=0}^n \varkappa_{jl} - \sum_{j=1}^n \varkappa_j - \sum_{j=1}^n m_j. \quad (76)$$

Слагаемые, связанные с $\varkappa_{jl}$, являются индексами функций $\tilde{G}_j(t)$ вдоль окружностей Γ_l . Представляя эти функции по их определению в виде

$$\tilde{G}_j(z) = \frac{\hat{G}_j^+(z)}{\hat{G}_0^+(z)} = \frac{G_j^+(z)}{G_0^+(z)} \frac{p_{G_j} n_{G_0}}{p_{G_0} n_{G_j}},$$

найдем

$$\varkappa_{10} = \text{Ind}_{\Gamma_0} \frac{\hat{G}_1^+(t)}{\hat{G}_0^+(t)} = \text{Ind}_{\Gamma_0} \frac{G_1^+(t)}{G_0^+(t)} + P_1 + N_0 - N_1 - P_0, \quad (77)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \varkappa_j &= \sum_{j \geq 1} \text{Ind}_{\Gamma_j} \tilde{G}_j(t) = \text{Ind}_{\Gamma} \tilde{G}(t) = \text{Ind}_{\Gamma} G(t) - \text{Ind}_{\Gamma} G_0^+(t) \\ &= \text{Ind}_{\Gamma} G(t) + P_0 - N_0 \end{aligned} \quad (78)$$

(так как все нули и полюсы функции $\tilde{G}_j(t)$ находятся вне кривых),

$$\sum_{j=1}^n \sum_{l=0}^n \varkappa_{jl} = \sum_{j=1}^n \text{Ind}_{\Gamma} \tilde{G}_j = 0 \quad (79)$$

(так как $\tilde{G}_j(z)$ в D^+ не имеет ни нулей, ни полюсов). Подставив выражения (77)–(79) в формулу (76), а затем внеся значение суммы $\sum_{j=0}^n q_j$ в соотношение (33), видим, что удивительным образом остаются только слагаемые,

кратные n , и в итоге приходим к следующему уравнению:

$$p + k_1 + k'_{10} + \sum_{l=1}^n k'_{0l} = \text{Ind}_{\Gamma_0} \frac{G_1(t)}{G_0(t)} + N_0 - N - P_0 - k_0 - \sum_{l=1}^n s_l - \tau_0. \quad (80)$$

Обозначим правую часть уравнения (80) через $\varkappa$, она состоит из целых чисел, полностью определяемых коэффициентами задачи (1) (в частности, k_0 определяется формулой (69)), а левая содержит целые неотрицательные неизвестные, число которых равно $n + 3$. Допустим, мы нашли неотрицательные значения этих неизвестных. Посмотрим, можем ли мы найти по ним все значения k_j и k_{jl} , нужные для нахождения q_j по формуле (35). Из формулы (66) имеем $k_j = k_1 + r_j + m_1 - m_j \geq 0$ при всех $j \geq 2$, значит, $k_1 \geq m_j - m_1 - r_j$ для всех $j \geq 2$, и, возможно, значение k_1 должно быть не просто неотрицательным, а строго положительным, так как величина выражения $m_j - m_1 - r_j$ зависит от коэффициента краевого условия задачи (1).

Пусть $A \stackrel{\text{def}}{=} \max_{j \geq 2} (m_j - m_1 - r_j)$. Тогда имеем

$$k_1 = A + k'_1, \quad k'_1 \geq 0, \quad (81)$$

и получаем

$$k_j = A - (m_j - m_1 - r_j) + k'_1 \geq 0 \quad (82)$$

при всех $j \geq 2$. Далее, при $k'_{0l} \geq 0$, $l \geq 1$, по уравнениям (58) и (62) имеем $k_{0l} = s_l + k'_{0l} \geq 0$, $l \geq 1$, а k_{jl} , $l \geq 2$, с учетом равенства (59) определяются по формуле

$$k_{jl} = \varkappa_{jl} + s_l + k'_{0l}, \quad j \geq 1, \quad l \geq 2, \quad l \neq j, \quad (83)$$

и их неотрицательность условием $k'_{0l} \geq 0$ не гарантируется.

Положим $A_l \stackrel{\text{def}}{=} \max_{j \geq 2} (-s_l - \varkappa_{jl})$, $l \geq 2$. Тогда при

$$k'_{0l} = A_l + k''_{0l}, \quad k''_{0l} \geq 0, \quad l \geq 2, \quad (84)$$

имеем

$$k_{jl} = A_l - (-s_l - \varkappa_{jl}) + k''_{0l} \geq 0, \quad l \geq 2.$$

Для установления знака k_{j1} надо учесть формулы (63) и (68). Имеем

$$k_{j1} = \varkappa_{j1} + s_1 + k_0 + r_j + k'_{01} = A_1 - (-\varkappa_{j1} - s_1 - k_0 - r_j) + k''_{01} \geq 0,$$

где положено

$$k'_{01} = A_1 + k''_{01}, \quad A_1 \stackrel{\text{def}}{=} \max_{j \geq 2} (-\varkappa_{j1} - s_1 - k_0 - r_j). \quad (85)$$

Наконец, для k_{j0} имеем

$$k_{j0} = \tau_0 - r_j + \varkappa_{j0} - \varkappa_{10} + k'_{10} = B - (r_j - \tau_0 - \varkappa_{j0} + \varkappa_{10}) + k''_{10} \geq 0, \quad j \geq 2, \quad (86)$$

где мы положили

$$k'_{10} = B + k''_{10}, \quad B \stackrel{\text{def}}{=} \max_{j \geq 2} (r_j - \tau_0 - \varkappa_{j0} + \varkappa_{10}). \quad (87)$$

Напомним, величина k_{10} определяется по формуле

$$k_{10} = \tau_0 + k'_{10}. \quad (88)$$

Теперь (80) переписывается в виде

$$\kappa - A - B - \sum_{l=1}^n A_l = p + k'_1 + k''_{10} + \sum_{l=1}^n k''_{0l}. \quad (89)$$

Обозначим сумму $(|A| + A) + (|B| + B) + \sum_{l=1}^n (|A_l| + A_l)$ через $Q \geq 0$. Предполагаем, что выполнены все необходимые условия, установленные выше при исследовании соотношений между параметрами задачи. Мы утверждаем, что верна следующая точная формулировка основного результата ²¹.

ТЕОРЕМА 11. Пусть выполнены все установленные ранее необходимые условия разрешимости задачи. Тогда задача (1):

- 1) при $\kappa > Q/2$ имеет $(2q)$ -параметрическое семейство решений, где $2q = 2\kappa - Q$;
- 2) при $\kappa = Q/2$ имеет единственное решение;
- 3) при $\kappa < Q/2$ неразрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что все числа $A, B, A_l, 1 \leq l \leq n$, неотрицательны, и пусть даны неотрицательные числа p, k'_1, k''_{10} и $k''_{0l}, 1 \leq l \leq n$, удовлетворяющие уравнению (89). Тогда, во-первых, по формулам (81), (82) мы найдем все значения k_j, k_{jl} , а с ними и q_j (см. (73)–(75)), которые вместе с определяемыми соответственно по формулам (81), (84), (85) и (87) величинами k_1, k'_{0l}, k'_{10} будут, как и положено, неотрицательными, во-вторых, по процедуре, описанной при получении формул (43), (54)–(56), (64), мы можем построить функции $\ln((F_j(z)/F_i(z)))$, а по ним с использованием доказательства теоремы 5 построить решение задачи (44), и затем от $\gamma^\pm(z)$ перейти к $\chi^\pm = \exp \gamma^\pm(z)$, от $\chi^\pm(z)$ к $h^\pm(z)$ и так далее, получив решение $\varphi^\pm(z)$ исходной задачи (1). При любом распределении числа $\kappa - Q/2 > 0$, как суммы среди неизвестных, в левой части будут $\kappa - Q/2 > 0$ свободных точек для соответствующего выбора нулей компонент решения и, таким образом, будет $(2q)$ -параметрическое семейство решений, где $2q = 2\kappa - Q$.

В случае, когда некоторые или все величины A, B, A_l отрицательны, проводим следующее рассуждение. Пусть, например, $A < 0$, а остальные из этих величин неотрицательны. Тогда из формулы (81) видим, что для того, чтобы число k_1 было неотрицательным, значения k'_1 должны быть не меньше $|A|$. С другой стороны, левая часть уравнения (80) равна $\kappa + |A| - B - \sum_{l=1}^n A_l$, следовательно, при распределении этого числа среди $n + 3$ неотрицательных слагаемых правой части величине k'_1 надо задавать значения вида $|A| + d$, где d – неотрицательное число, т.е. свободным для распределения остается число $\kappa - B - \sum_{l=1}^n A_l = \kappa - Q/2$, что снова дает $(2\kappa - Q)$ -параметрическое семейство решений. Аналогичные рассуждения используем и в случае отрицательности большего числа параметров.

Далее, если $\kappa - Q/2 = 0$, то левая часть в (89) равна нулю и все искомые величины справа будут равны нулю. Никакого свободного выбора точек нулей решения нет, и оно определяется единственным образом. Если $\kappa - Q/2 < 0$, то решения нет, так как в любом варианте возможных знаков величин A, B, A_l слева в (89) будем иметь отрицательное, а справа неотрицательное число, что невозможно. Теорема доказана.

²¹Из этого текста видно, что сформулированная в вводной части теорема 8 соответствует случаю, когда все величины B и $A_l, 1 \leq l \leq n$, равны нулю.

§ 14

ЗАМЕЧАНИЕ 7. В § 13 мы получили равенство (33), связывающее значения p и $\sum_j q_j$ с некоторыми характеристиками коэффициента $G(t)$ задачи (1). На основании этого равенства мы установили один признак неразрешимости задачи, однако для существования решения мы получим только некоторое необходимое условие (неотрицательность левой части соотношения), так как, во-первых, мы не знаем, можно ли разбить положительное целочисленное значение левой части на $n + 2$ слагаемых так, чтобы первое слагаемое делилось на n , во-вторых, если даже мы сможем указать целочисленные неотрицательные значения p и q_j , необходимо еще доказать, что по этим данным можно построить нужные нам функции $\varphi^\pm(z)$ (например, наше последующее исследование показало, что необходимо, чтобы были выполнены неравенства $q_j \geq -r_j \geq 0$).

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Используя утверждение 3, мы можем посчитать количество типов решений. Количество типов не равно количеству параметров, определяющих решения задачи. Типы указывают только на то, в каких областях и в каком количестве распределены точки, в которых искомые функции равны нулю. В этом факте скрыты, по-видимому, какие-то интересные феномены физических и геометрических проблем, описываемых задачами (1). Например, в задаче о бесконечно малых изгибаниях внутренне гладко склеенных кусочно выпуклых поверхностей наличие обязательного нуля решения задачи говорит о том, что в ходе деформации поверхности в каких-то ее точках скорость деформации должна быть равна нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Предположение отсутствия полюса на граничных окружностях у мероморфных функций $G_j^+(z)$, существующих по значениям коэффициентов задачи в силу необходимого условия ее разрешимости, не является существенным, так как в силу известного расположения данных изолированных полюсов можно ввести эти точки в представление искомых функций, как мы это сделали с предполагаемыми нулями решений с одновременным учетом обращения в нуль в этих точках соответствующих компонент решения. Эта процедура лишь усложнит изложение решения, не меняя ничего принципиально в методе решения.

ЗАМЕЧАНИЕ 10 (о теореме 10). Описанные решения однородной задачи (1) еще не составляют линейного пространства, поскольку было условие, что решения не обращаются в нуль на граничных окружностях, а сумма двух таких решений может иметь нуль в любой заранее выбранной точке. В то же время из способа решения видно, что, выбирая переменной точку нулей искомых решений, мы можем непрерывно изменить положение нулей так, чтобы нули перешли из одной области в другую, пересекая при этом граничные окружности. Это хорошо видно в примере с двусвязной областью. Например, если в первом случае рассмотренного в п. 4 из § 13 примера непрерывно двигать точку ζ за пределы области D^+ (чтобы p стало равным нулю), то изменятся q_0 или q_1 . Таким образом, рассматривая решения, обращающиеся на границе в конечном числе точек в нуль, мы получим новые, по сравнению с теоремой 8, решения, но они также не составляют линейное пространство, так как некоторая линейная комбинация этих решений может иметь на границе бесконечное количество нулей. Проблема нахождения всех решений состоит в следующем. Если мы знаем хотя бы одно решение, получаемое по критериям из теоремы 8,

то по следствию 2 можем найти общий вид решения и согласно голоморфности решения можем попытаться описать все допустимые рациональные функции $f^{\pm}(z)$, участвующие в образовании общего решения, и тогда, может быть, удастся описать базис линейного пространства решений. Если же мы находимся в условиях отсутствия решения по теореме 8, то по той же методике можно попытаться найти решение в классе мероморфных функций, скажем, с определенным расположением их полюсов. Этого также будет достаточно для получения общего вида решения задачи с последующим описанием базиса. Мы не стали исследовать этот вопрос, но путь для его решения кажется правдоподобным.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. В случае общей многосвязной области задача рассмотренного вида может быть сведена к задаче в многосвязной области с круговыми границами, но связь на внешней границе (т. е. на окружности Γ_0) будет задачей со сдвигом. Используя методы работы [2] и делая некоторые предположения о характере сдвига, можно надеяться получить более или менее удовлетворительное описание разрешимости задачи.

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Метод исследования очевидным образом может быть применен к случаю, когда коэффициент задачи обращается в нуль целого порядка на границе в конечном числе точек.

ЗАМЕЧАНИЕ 13. В случае, когда заданные коэффициенты задачи являются рациональными функциями, в способе исследования задачи очевидным образом содержится алгоритм ее решения, легко позволяющий написать компьютерную программу нахождения решений.

Список литературы

1. А. И. Маркушевич, "Об одной граничной задаче теории аналитических функций", *Ученые записки МГУ*, 1946, № 100, 20–30.
2. Э. И. Зверович, Г. С. Литвинчук, "Односторонние краевые задачи теории аналитических функций", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **28**:5 (1964), 1003–1036.
3. И. Н. Векуа, *Обобщенные аналитические функции*, Наука, М., 1959; англ. пер.: I. N. Vekua, *Generalized analytic functions*, Pergamon, London–Paris–Frankfurt; Addison-Wesley, Reading, MA, 1962.
4. Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения*, 2-е изд., Физматгиз, М., 1962; англ. пер. 3-го изд.: N. I. Muskhelishvili, *Singular integral equations*, Wolters-Noordhoff Publ., Groningen, 1972.
5. Ф. Д. Гахов, *Краевые задачи*, Физматлит, М., 1963; англ. пер.: F. D. Gakhov, *Boundary value problems*, Pergamon, London–Paris–Frankfurt; Addison-Wesley, Reading, MA, 1966.
6. И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций*, ГИТТЛ, М.–Л., 1950.

И. Х. САБИТОВ (I. Kh. SABITOV)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова,
 механико-математический факультет
 E-mail: isabitov@mail.ru

Поступило в редакцию
 25.05.2011
 22.12.2011