Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Гриценко, О нулях линейных комбинаций специального вида функций, связанных с рядами Дирихле из класса Сельберга, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1996, том 60, выпуск 4, 3–42

DOI: <https://doi.org/10.4213/im78>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 16:56:28

УДК 511

С. А. Гриценко

О нулях линейных комбинаций специального вида функций, связанных с рядами Дирихле из класса Сельберга

При условии справедливости одной гипотезы Сельберга и некоторых дополнительных предположениях получена оценка снизу для числа нулей на отрезке критической прямой функции, являющейся линейной комбинацией аналогов функций Римана, соответствующих рядам Дирихле из класса Сельберга.

Библиография: 17 наименований.

§ 1. Введение. Формулировка теоремы

1. А. Сельберг определил в [1] класс S рядов Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}, \quad \operatorname{Re} s > 1,$$

удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) существует неотрицательное число m такое, что функция $(s-1)^m F(s)$ целая;
- 2) коэффициенты Дирихле $a(n)$ удовлетворяют неравенствам

$$a(n) \ll_{\varepsilon} n^{\varepsilon} \tag{1}$$

для любого положительного ε , причем $a(1) = 1$;

- 3) существует функция $\gamma_F(s)$ вида

$$\gamma_F(s) = \varepsilon_1 Q^s \prod_{\nu=1}^k \Gamma(\lambda_{\nu}s + \mu_{\nu}),$$

где

$$|\varepsilon_1| = 1, \quad Q > 0, \quad \lambda_{\nu} > 0, \quad \operatorname{Re} \mu_{\nu} \geq 0,$$

и такая, что для функции $\Phi(s) = \gamma_F(s)F(s)$ справедливо тождество

$$\Phi(s) = \overline{\Phi}(1 - \bar{s}); \tag{2}$$

- 4) при $\operatorname{Re} s > 1$ функция $F(s)$ раскладывается в эйлерово произведение:

$$F(s) = \prod_p (1 + a(p)p^{-s} + a(p^2)p^{-2s} + \dots),$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 94-01-00002).

p пробегает все простые числа;

$$\ln F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n)n^{-s},$$

где $b(n) = 0$, если n не равно положительной степени простого числа, причем

$$b(n) \ll n^{\theta} \quad \text{для некоторого } \theta \leq 1/2.$$

В статье [2] для любой функции $F(s)$ из S определена степень $F(s)$ следующим образом:

$$d_F = 2 \sum_{\nu=1}^k \lambda_{\nu}.$$

2. Изложим некоторые известные факты и гипотезы о распределении нулей рядов Дирихле (см. [3]–[6]).

Пусть $F(s)$ – функция из класса S . Назовем нули $F(s)$, совпадающие с полюсами функции $\gamma_F(s)$, *тривиальными*, а остальные – *нетривиальными*.

Известно (см. [1]), что нетривиальные нули расположены в полосе $1 - A \leq \operatorname{Re} s \leq A$, $A = A(F) > 0$. Кроме того, так как $F(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению риманова типа, то

$$N(T) \sim cT \log T, \quad c = c(F) > 0,$$

где $N(T)$ – число нетривиальных нулей ρ функции $F(s)$ таких, что $0 < \operatorname{Im} \rho \leq T$.

Будем говорить, что для $F(s)$ справедлива гипотеза Римана, если все ее нетривиальные нули лежат на прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$.

Известно, что существуют функции, представляющиеся в области $\operatorname{Re} s > 1$ рядами Дирихле и удовлетворяющие функциональным уравнениям риманова типа, но не имеющие разложений в эйлеровы произведения, для которых гипотеза Римана неверна. Таковы, например, функция Дэвенпорта–Хейльбронна (см. [7], [8], [3]) и дзета-функции Эшштейна, соответствующие неодноклассным бинарным квадратичным формам (см. [9], [10], [5], [6]).

Следующие гипотезы пока не доказаны и не опровергнуты:

для всех функций из класса S (которые по определению не только удовлетворяют функциональным уравнениям риманова типа, но и имеют разложения в эйлеровы произведения) справедлива гипотеза Римана [1];

почти все нетривиальные нули функции Дэвенпорта–Хейльбронна лежат на прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$ [3].

Гипотеза, подобная последней, для дзета-функций Эшштейна принадлежит Г. Монтгомери (см. [1, с. 384]). Э. Бомбьери и Д. Хейчал дали в [5] условное доказательство гипотезы Монтгомери.

3. Введем три функции:

$$\rho(s) = \bar{\gamma}_F(1 - \bar{s})\gamma_F^{-1}(s) = \bar{\varepsilon}_1^2 Q^{1-2s} \prod_{\nu=1}^k \Gamma(\lambda_{\nu}(1-s) + \bar{\mu}_{\nu}) \Gamma^{-1}(\lambda_{\nu}s + \mu_{\nu}), \quad (3)$$

$$\exp(i\theta(t)) = \left(\rho\left(\frac{1}{2} + it\right) \right)^{-1/2}, \quad (4)$$

$$Z(t) = \exp(i\theta(t)) F\left(\frac{1}{2} + it\right). \quad (5)$$

Из (2) следует, что $Z(t)$ принимает вещественные значения при вещественных t .

Пусть теперь $a_1, \dots, a_N$ – произвольные вещественные числа. Рассмотрим функцию $\Phi_1(s)$ вида

$$\Phi_1(s) = \sum_{j=1}^N a_j (\rho_j(s))^{-1/2} F_j(s),$$

где $F_j(s)$ – функции из S . Полагая $s = \frac{1}{2} + it$, находим

$$\mathcal{F}(t) = \Phi_1\left(\frac{1}{2} + it\right) = \sum_{j=1}^N a_j \left(\rho_j\left(\frac{1}{2} + it\right)\right)^{-1/2} F_j\left(\frac{1}{2} + it\right) = \sum_{j=1}^N a_j Z_j(t). \quad (6)$$

Начиная отсюда, будем считать, что $T \geq T_0 > 0$, где T_0 – достаточно большая абсолютная постоянная.

Пусть $N_0(T)$ – число нулей функции $\mathcal{F}(t)$ на отрезке $[0, T]$, или, что то же самое, число нулей функции $\Phi_1(s)$ на отрезке $\operatorname{Re} s = 1/2$, $0 \leq \operatorname{Im} s \leq T$.

Как отмечено в [3], $\Phi_1(s)$ “подобна” функции Дэвенпорта–Хейльбронна (все $F_j(s)$ удовлетворяют функциональным уравнениям риманова типа, а $\Phi_1(s)$, вообще говоря, не имеет разложения в эйлерово произведение).

Если для $\Phi_1(s)$ справедлива гипотеза, сформулированная в конце п. 2 для функции Дэвенпорта–Хейльбронна (в связи с этим см. [1, п. 4]), то существует постоянная $c_1 = c_1(\Phi_1) > 0$ такая, что

$$N_0(T) \geq c_1 T \log T.$$

Назовем последнее неравенство “ожидаемым”.

Для случая, когда $F_1(s), \dots, F_N(s)$ являются L -функциями Дирихле, отвечающими примитивным характерам (в нашей терминологии они относятся к функциям из класса S степени 1), А. А. Карацуба получил в [3] своим методом следующие оценки снизу величины $N_0(T)$:

$$N_0(T) \geq T(\log T)^{2\beta} \exp(-c_2 \sqrt{\ln \ln T}),$$

если характеры Дирихле $\chi_1, \dots, \chi_N$ имеют одинаковую четность;

$$N_0(T) \geq T(\log T)^\beta \exp(-c_3 \sqrt{\ln \ln T})$$

в противном случае. Здесь $\beta = \varphi^{-1}(K)$, K – наименьшее общее кратное натуральных чисел $k_1, \dots, k_N$ – модулей характеров $\chi_1, \dots, \chi_N$, $\varphi(K)$ – функция Эйлера, c_2, c_3 – абсолютные положительные постоянные.

Целью настоящей статьи является оценка снизу величины $N_0(T)$ для случая, когда $F_1(s), \dots, F_N(s)$ – функции из S степени 2.

Для $F_1(s), \dots, F_N(s)$ принимается ряд гипотез, точные формулировки которых приводятся ниже.

Если в условиях нашей теоремы прямо применить метод Харди–Литтлвуда–Ландау [11], то получится неравенство

$$N_0(T) \geq c_4 T, \quad c_4 > 0,$$

и задача будет состоять в его уточнении.

Из теоремы легко вывести, что

$$N_0(T) \geq \frac{1}{2}T \exp(\sqrt{\ln \ln \ln T}).$$

Эта оценка (хотя из нее следует, что прямая $\operatorname{Re} s = 1/2$ является “особой” для нулей функции $\Phi_1(s)$), очевидно, гораздо менее точна, чем выписанные выше оценки А. А. Карацубы, и далека от “ожидаемой”.

Первый результат о том, что прямая $\operatorname{Re} s = 1/2$ является “особой” для нулей функции Дэвенпорта–Хейльбронна, был получен в 1980 г. С. М. Ворониным [13]. Им было доказано, что

$$N_0(T) \geq c_5 T \exp\left(\frac{1}{20} \sqrt{\ln \ln \ln T}\right), \quad c_5 > 0 \text{ — постоянная.}$$

4. Перейдем к формулировкам гипотез о функциях $F_1(s), F_2(s), \dots, F_N(s)$. Прежде всего, будем считать, что $F_j(s)$ ($j = 1, 2, \dots, N$) — примитивные функции из S , т.е. не представляются в виде $G_1(s)G_2(s)$, где $G_1(s) \in S$, $G_2(s) \in S$.

Для примитивных функций из своего класса А. Сельберг сформулировал в [1] ряд гипотез, в частности следующие.

ГИПОТЕЗА 1. При $x \rightarrow +\infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\sum_{p \leq x} |a_j(p)|^2 p^{-1} = \ln \ln x + O(1), \quad (7)$$

где $a_j(n)$ — коэффициенты Дирихле примитивных функций $F_j(s)$, $j = 1, 2, \dots, N$, а p здесь и везде в дальнейшем обозначает простые числа.

ГИПОТЕЗА 2. При $x \rightarrow +\infty$ справедлива оценка

$$\sum_{p \leq x} a(p) \bar{a}'(p) p^{-1} = O(1), \quad (8)$$

где $a(n)$ и $a'(n)$ — коэффициенты двух различных примитивных функций $F(s)$ и $F'(s)$ из S .

Будем считать, что наши функции $F_1(s), \dots, F_N(s)$ удовлетворяют гипотезе 2. Пусть, кроме того, они удовлетворяют следующим условиям.

УСЛОВИЕ 1. При $x \rightarrow +\infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\sum_{p \leq x} |a_j(p)|^2 \ln p = x + O(x \ln^{-1} x), \quad (9)$$

где $a_j(n)$ — коэффициенты Дирихле функции $F_j(s)$, $j = 1, 2, \dots, N$.

УСЛОВИЕ 2. При любых j , $1 \leq j \leq N$, существуют положительные постоянные c_{F_j} такие, что

$$|1 + a_j(p)p^{-\frac{1}{2}-it} + a_j(p^2)p^{-1-2it} + \dots| > c_{F_j}, \quad (10)$$

где t — произвольное число из отрезка $[T, 2T+1]$, а p — произвольное простое число.

УСЛОВИЕ 3. Пусть $F(s)$ – любая из функций $F_1(s), \dots, F_N(s)$. Тогда при $x \rightarrow +\infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\sum_{n \leq x} |a(n)|^2 n^{-1} = A_F \ln x + B_F + O(\ln^{-4} x), \quad (11)$$

где $a(n)$ – коэффициенты Дирихле функции $F(s)$, $A_F > 0$, B_F – постоянные, зависящие только от F .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие 1 несколько сильнее, чем гипотеза 1. Поэтому если $F_j(s)$ удовлетворяет условию 1, то справедлива и формула (7), что доказывается частным суммированием.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из (1) следует, что неравенство (10) справедливо при всех достаточно больших p . Условию 2 удовлетворяют L -функции Гекке, понимаемые в том же смысле, что и в [12].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Легко показать, что из (7) и (1) следуют оценки

$$\ln x \ll \sum_{n \leq x} |a(n)|^2 n^{-1} \ll \ln x.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из (11) и (1) частным суммированием получается формула

$$\sum_{n \leq x} |a(n)|^2 = A_F x + O(x \ln^{-4} x). \quad (12)$$

Сформулируем наш основной результат.

ТЕОРЕМА. Пусть N – произвольное натуральное число, $a_1, \dots, a_N$ – произвольные вещественные числа, $a_1 \neq 0$, $T \geq T_0 > 0$. Пусть $\mathcal{F}(t)$ – определенная формулой (6) функция, а $F_1(s), \dots, F_N(s)$ – примитивные попарно различные функции степени 2 из S , удовлетворяющие гипотезе 2 и условиям 1–3.

Тогда на отрезке $[T, 2T]$ лежит не меньше чем

$$T \exp(\sqrt{\ln \ln \ln T})$$

нулей нечетного порядка функции $\mathcal{F}(t)$.

Доказательство теоремы проводится методом С.М. Воронина (см. [13], [12]), разработанным им в 1980 г. для оценки числа нулей функции Дэвенпорта–Хейлбронна, лежащих на отрезке критической прямой.

В §2 приводятся ряд лемм, а в §3 – доказательство основной теоремы.

§ 2. Леммы

ЛЕММА 1. Пусть τ – произвольное число из отрезка $[0, 5T; 2,5T]$, $T \geq T_0 > 0$, $\rho(\sigma + i\tau)$ и $\exp(i\theta(\tau))$ – функции, определенные соотношениями (3) и (4), и $F(s)$ – соответствующие функции из S степени 2.

Тогда справедливы асимптотические формулы

$$\begin{aligned} \exp(i\theta(\tau)) &= \varepsilon_2(Q_1\tau)^{i\tau} e^{-i\tau} \exp(iQ_2 \ln \tau) (1 + O(T^{-1})), \\ \rho(\sigma + i\tau) &= \bar{\varepsilon}_2^2(Q_1\tau)^{1-2\sigma-2i\tau} \exp(-2iQ_2 \ln \tau) (1 + O(T^{-1})), \end{aligned}$$

где

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \exp \left(i \left(\sum_{\nu=1}^k (\operatorname{Im} \mu_\nu) \ln \lambda_\nu + \frac{\pi}{2} \sum_{\nu=1}^k \operatorname{Re} \mu_\nu - \frac{\pi}{4} (k-1) \right) \right),$$

$$Q_1 = Q \exp \left(\sum_{\nu=1}^k \lambda_\nu \ln \lambda_\nu \right), \quad Q_2 = \sum_{\nu=1}^k \operatorname{Im} \mu_\nu,$$

σ – вещественное число из отрезка $[-2, 2]$, $a, \varepsilon_1, Q, \lambda_\nu, \mu_\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots, k$) – постоянные из функционального уравнения для $F(s)$ – тождества (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения следует, что

$$\exp(2i\theta(\tau)) = \varepsilon_1^2 Q^{2i\tau} \prod_{\nu=1}^k \Gamma \left(\lambda_\nu \left(\frac{1}{2} + i\tau \right) + \mu_\nu \right) \Gamma^{-1} \left(\lambda_\nu \left(\frac{1}{2} - i\tau \right) + \bar{\mu}_\nu \right).$$

Логарифмируя и пользуясь формулой Стирлинга и равенством $\sum_{\nu=1}^k \lambda_\nu = 1$, получаем

$$2i\theta(\tau) = \ln \varepsilon_1^2 + 2i\tau \ln(Q_1 \tau) - 2iQ_2 \ln \tau + O(T^{-1}),$$

т.е.

$$\exp(i\theta(\tau)) = \varepsilon_1 (Q_1 \tau)^{i\tau} e^{-i\tau} \exp(iQ_2 \ln \tau) (1 + O(T^{-1})),$$

что и требовалось доказать.

Асимптотическая формула для $\rho(\sigma + i\tau)$ устанавливается аналогично.

ЛЕММА 2. Пусть ε – произвольно малое положительное число, $F(s)$ – функция из класса Сельберга S степени 2, $s = 0,5 + i\tau$, $0,5T \leq \tau \leq 2,5T$, $T \geq T_0 > 0$.

Тогда справедлива асимптотическая формула

$$F(s) = W_1 + \varepsilon_2^2 (Q_1 \tau)^{-2i\tau} e^{2i\tau} \exp(-2iQ_2 \ln \tau) (W_2 - W_3 + W_4) + O(T^{\varepsilon-1/2}),$$

где

$$W_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-s} \exp(-nT^{-1}),$$

$$W_2 = \sum_{n \leq T} \bar{a}(n) n^{s-1},$$

$$W_3 = \sum_{n \leq T} \bar{a}(n) n^{s-1} \exp(-Q_1^2 \tau^2 T^{-1} n^{-1}),$$

$$W_4 = \sum_{T < n} \bar{a}(n) n^{s-1} (1 - \exp(-Q_1^2 \tau^2 T^{-1} n^{-1})),$$

ε_2, Q_1, Q_2 – те же постоянные, что и в лемме 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что для частного случая, когда $F(s) = \zeta^2(s)$, аналогичная формула получена в [14].

Начнем с равенства

$$\exp(-nT^{-1}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Gamma(w) T^w n^{-w} dw;$$

умножим обе его части на $a(n)n^{-s}$ и просуммируем по n от 1 до ∞ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s} \exp(-nT^{-1}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Gamma(w) T^w F(s+w) dw.$$

Будем преобразовывать интеграл, стоящий в правой части (обозначим его через A). Прежде всего, пользуясь известным неравенством

$$|\Gamma(2+iv)| \ll |v|^{3/2} \exp\left(-\frac{\pi}{2}|v|\right),$$

получим

$$A = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\ln^2 T}^{2+i\ln^2 T} \Gamma(w) T^w F(s+w) dw + O(T^{-1}).$$

Перенесем отрезок интегрирования на $\operatorname{Re} w = -3/4$, $-\ln^2 T \leq \operatorname{Im} w \leq \ln^2 T$. При этом пройдем через простой полюс в точке $w = 0$ с вычетом $F(s)$. По теореме Коши получим

$$A = F(s) + A_1 + O(T^{-1}),$$

где

$$A_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{3}{4}-i\ln^2 T}^{-\frac{3}{4}+i\ln^2 T} \Gamma(w) T^w F(s+w) dw.$$

Воспользуемся функциональным уравнением для $F(s)$ (равенство (2)):

$$A_1 = A_2 + A_3,$$

где

$$A_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{3}{4}-i\ln^2 T}^{-\frac{3}{4}+i\ln^2 T} \Gamma(w) T^w \rho(s+w) \sum_{n \leq T} \bar{a}(n) n^{s+w-1} dw,$$

$$A_3 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{3}{4}-i\ln^2 T}^{-\frac{3}{4}+i\ln^2 T} \Gamma(w) T^w \rho(s+w) \sum_{T < n} \bar{a}(n) n^{s+w-1} dw.$$

В интеграле A_2 перенесем отрезок интегрирования на $\operatorname{Re} w = 1/4$, $-\ln^2 T \leq \operatorname{Im} w \leq \ln^2 T$; при этом пройдем через простой полюс в точке $w = 0$ с вычетом $-\rho(s) \sum_{n \leq T} \bar{a}(n) n^{s-1}$. Получим

$$A_2 = -\rho(s) \sum_{n \leq T} \bar{a}(n) n^{s-1} + A_4,$$

где

$$A_4 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{4}-i\ln^2 T}^{\frac{1}{4}+i\ln^2 T} \Gamma(w) T^w \rho(s+w) \sum_{n \leq T} \bar{a}(n) n^{s+w-1} dw. \quad (13)$$

В силу леммы 1

$$\begin{aligned} \rho(s+w) &= \varepsilon_2^2 (Q_1 \tau)^{-2i\tau} \exp(2i\tau) \\ &\quad \times \exp(-2iQ_2 \ln \tau) (Q_1^2 \tau^2)^{-w} (1 + O(T^{-1}) + O(v^2 T^{-1})), \end{aligned}$$

где $v = \operatorname{Im} w$.

Подставим в (13) вместо $\rho(s+w)$ остаточный член последней формулы, обозначим соответствующую величину через R_4 и воспользуемся неравенством (1):

$$R_4 = O\left(T^{-5/4} \sum_{n \leq T} n^{\varepsilon-1/4} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \Gamma\left(\frac{1}{4} + iv\right) \right| (1+v^2) dv\right) = O(T^{\varepsilon-1/2}).$$

Таким образом,

$$A_4 = \varepsilon_2^2 (Q_1 \tau)^{-2i\tau} \exp(2i\tau) \exp(-2iQ_2 \ln \tau) \sum_{n \leq T} \bar{a}(n) n^{s-1} \mathcal{B}_4(n),$$

где

$$\mathcal{B}_4(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{4}-i\ln^2 T}^{\frac{1}{4}+i\ln^2 T} \Gamma(w) (Q_1^2 \tau^2 T^{-1} n^{-1})^{-w} dw.$$

Аналогично рассуждая, приходим к формуле

$$A_3 = \varepsilon_2^2 (Q_1 \tau)^{-2i\tau} \exp(2i\tau) \exp(-2iQ_2 \ln \tau) \sum_{T < n} \bar{a}(n) n^{s-1} \mathcal{B}_3(n) + O(T^{\varepsilon-1/2}),$$

где

$$\mathcal{B}_3(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{3}{4}-i\ln^2 T}^{-\frac{3}{4}+i\ln^2 T} \Gamma(w) (Q_1^2 \tau^2 T^{-1} n^{-1})^{-w} dw.$$

Наконец, распространяя пределы интегрирования соответственно на прямые $\operatorname{Re} w = 1/4$ и $\operatorname{Re} w = -3/4$, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_4(n) &= \exp(-Q_1^2 \tau^2 T^{-1} n^{-1}) + O(T^{-1}), \\ \mathcal{B}_3(n) &= -(1 - \exp(-Q_1^2 \tau^2 T^{-1} n^{-1})) + O(T^{-1} n^{-3/4}), \end{aligned}$$

что и завершает доказательство леммы 2.

ЛЕММА 3. Пусть $\{c_n\}$ – произвольная последовательность комплексных чисел такая, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|^2$ сходится. Тогда

$$\int_0^T \left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{it} \right|^2 dt \ll T \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|^2.$$

Доказательство см. в [15, гл. 5].

ЛЕММА 4. Пусть $a(n)$ – коэффициенты Дирихле функции $F(s)$ из S степени 2, удовлетворяющей условию 3.

Тогда справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_1 &= \int_T^{2T+1} \left| \sum_{n \leq T} a(n) n^{-1/2} n^{-it} (1 - \exp(-nT^{-1})) \right| dt \ll T, \\ \mathcal{U}_2 &= \int_T^{2T+1} \left| \sum_{T < n} a(n) n^{-1/2} n^{-it} \exp(-nT^{-1}) \right| dt \ll T, \\ \mathcal{U}_3 &= \int_T^{2T+1} \left| \sum_{n \leq T} \bar{a}(n) n^{-1/2} n^{it} \exp(-Q_1^2 t^2 T^{-1} n^{-1}) \right| dt \ll T, \\ \mathcal{U}_4 &= \int_T^{2T+1} \left| \sum_{T < n} \bar{a}(n) n^{-1/2} n^{it} (1 - \exp(-Q_1^2 t^2 T^{-1} n^{-1})) \right| dt \ll T.\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Оценим $\mathcal{U}_1$. Воспользуемся неравенством Коши и леммой 3:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_1 &\ll T^{1/2} \left(T \sum_{n \leq T} |a(n)|^2 n^{-1} (1 - \exp(-nT^{-1}))^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n \leq T} |a(n)|^2 (1 - \exp(-nT^{-1}))^2 \right)^{1/2} \\ &\ll T \left(\sum_{n \leq T} |a(n)|^2 n^{-1} (1 - \exp(-nT^{-1})) \right)^{1/2} \ll T \left(T^{-1} \sum_{n \leq T} |a(n)|^2 \right)^{1/2},\end{aligned}$$

так как при $n \leq T$ $n^{-1}(1 - \exp(-nT^{-1})) \leq T^{-1}$. Теперь нужная оценка следует из (12).

2) Для оценки $\mathcal{U}_2$ применим тот же прием; получим

$$\mathcal{U}_2 \ll T^{1/2} \left(\sum_{T < n} |a(n)|^2 \exp(-2nT^{-1}) \right)^{1/2}.$$

Воспользуемся формулой частного суммирования и (12):

$$\begin{aligned}\sum_{T < n} |a(n)|^2 \exp(-2nT^{-1}) &\ll \int_T^\infty \sum_{n \leq u} |a(n)|^2 d(-\exp(-2uT^{-1})) \\ &\ll \int_T^\infty uT^{-1} \exp(-2uT^{-1}) du \ll T,\end{aligned}$$

т.е.

$$\mathcal{U}_2 \ll T.$$

3) Оценим $\mathcal{U}_3$. Применим к сумме по n формулу частного суммирования в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \sum_{n \leq T} \bar{a}(n) n^{-1/2} n^{it} \exp(-Q_1^2 t^2 T^{-1} n^{-1}) \\ &= - \int_1^T \mathbb{C}(u) d \exp \left(-u^{-1} \left(Q_1^2 t^2 T^{-1} - \frac{1}{2} Q_1^2 T \right) \right) \\ & \quad + \mathbb{C}(T) \exp \left(-T^{-1} \left(Q_1^2 t^2 T^{-1} - \frac{1}{2} Q_1^2 T \right) \right), \end{aligned}$$

где

$$\mathbb{C}(u) = \sum_{n \leq u} \bar{a}(n) n^{-1/2} n^{it} \exp \left(-\frac{1}{2} Q_1^2 T n^{-1} \right).$$

Перейдем к неравенствам:

$$\mathcal{U}_3 \ll \int_1^T \int_T^{2T+1} |\mathbb{C}(u)| dt d \exp(-Q_1^2 T u^{-1}) + \int_T^{2T+1} |\mathbb{C}(T)| dt.$$

Оценим $\int_T^{2T+1} |\mathbb{C}(u)| dt$ при любом u , $1 \leq u \leq T$. Применим неравенство Коши и лемму 3, получим

$$\int_T^{2T+1} |\mathbb{C}(u)| dt \ll T \left(\sum_{n \leq T} |a(n)|^2 n^{-1} \exp \left(-\frac{1}{2} Q_1^2 T n^{-1} \right) \right)^{1/2}.$$

Для оценки суммы по n воспользуемся формулой частного суммирования и (11):

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq T} |a(n)|^2 n^{-1} \exp \left(-\frac{1}{2} Q_1^2 T n^{-1} \right) &= - \int_1^T A_F \ln u d \exp \left(-\frac{1}{2} Q_1^2 T u^{-1} \right) \\ & \quad + A_F \ln T \exp \left(-\frac{1}{2} Q_1^2 T \right) + O(1). \end{aligned}$$

Наконец, интегрируя по частям, приходим к оценке

$$\sum_{n \leq T} |a(n)|^2 n^{-1} \exp \left(-\frac{1}{2} Q_1^2 T n^{-1} \right) = O(1),$$

откуда следует нужная оценка для $\mathcal{U}_3$.

4) Оценим $\mathcal{U}_4$. Имеем

$$\mathcal{U}_4 \ll \sum_{l=1}^{\infty} (4Q_1^2 T)^l (l!)^{-1} \int_T^{2T+1} \left| \sum_{T < n} \bar{a}(n) n^{-\frac{1}{2}-l+it} \right| dt.$$

Применяя неравенство Коши, лемму 3, формулу частного суммирования и (12), получаем

$$\int_T^{2T+1} \left| \sum_{T < n} \bar{a}(n) n^{-\frac{1}{2}-l+it} \right| dt \ll \left(T \sum_{T < n} |a(n)|^2 n^{-2l} \right)^{\frac{1}{2}} \ll T^{1-l},$$

т.е.

$$\mathcal{U}_4 \ll T.$$

Лемма 4 полностью доказана.

ЛЕММА 5. Пусть N_1 и N_2 – произвольные положительные числа, $d_1(\nu_1)$, $d_2(\nu_2)$, $f(\nu_1, \nu_2)$ – произвольные комплексные числа, $|f(\nu_1, \nu_2)| \leq f$ при любых $1 \leq \nu_1 \leq N_1$, $1 \leq \nu_2 \leq N_2$.

Тогда для любого $T \geq 0$

$$\begin{aligned} & \int_{-T}^T \left| \sum_{\nu_1 \leq N_1} \sum_{\nu_2 \leq N_2} d_1(\nu_1) d_2(\nu_2) f(\nu_1, \nu_2) \left(\frac{\nu_1}{\nu_2} \right)^{-it} \right|^2 dt \\ & \leq 4f^2 \int_{-4T}^{4T} \left| \sum_{\nu \leq N_1 N_2} d(\nu) \nu^{-it} \right|^2 dt d(\nu) \\ & = \sum_{\nu_1 \nu_2 = \nu} |d_1(\nu_1)| |d_2(\nu_2)|. \end{aligned}$$

Лемма 5 доказывается так же, как теорема 3 из [12] (см. [12, с. 332, 333]).

ЛЕММА 6. Пусть U – произвольное вещественное число, большее y , $\mathbb{P} = \prod_{p \leq y} p$, $a(n)$ – коэффициенты Дирихле функции из класса Сельберга, удовлетворяющей условиям 1–3.

Тогда справедлива оценка

$$S = \sum_{\substack{n \leq U \\ (n, \mathbb{P})=1}} |a(n)|^2 \ll U(\ln y)^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности будем считать, что $y \rightarrow +\infty$.

Пусть ε – любое число из промежутка $(0; 0,01]$; d – натуральное бесквадратное число, $100 < d \leq y^2$; $\omega(d)$ – число различных простых делителей d ; M_d – множество натуральных чисел, состоящее из 1 и тех чисел, чьи простые делители делят d .

Известно, что существует абсолютная положительная постоянная c_1 такая, что

$$\omega(d) \leq c_1 \ln d (\ln \ln d)^{-1}$$

(см., например, [16, § 22.10]). Справедливы неравенства

$$\sum_{n \in M_d} n^{\varepsilon-1} \ll \exp((\ln y)^\varepsilon), \quad (14)$$

$$\sum_{\substack{n \in M_d \\ n > y^{10c_1}}} n^{\varepsilon-1} \ll y^{-c_1}. \quad (15)$$

Докажем (14); имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n \in M_d} n^{\varepsilon-1} &= \prod_{p|d} (1 + p^{\varepsilon-1} + p^{2\varepsilon-2} + \dots) \ll \exp\left(\sum_{p|d} p^{\varepsilon-1}\right) \\ &\ll \exp\left(\sum_{p \leq \omega(d)} p^{\varepsilon-1}\right) \ll \exp\left(\left(c_1 \frac{\ln y^2}{\ln \ln y^2}\right)^\varepsilon\right) \ll \exp((\ln y)^\varepsilon). \end{aligned}$$

Докажем (15). Воспользуемся формулой частного суммирования:

$$\sum_{\substack{n \in M_d \\ n > y^{10c_1}}} n^{\varepsilon-1} \leq \int_{y^{10c_1}}^{\infty} \mathbb{C}(u) u^{\varepsilon-2} du,$$

где

$$\mathbb{C}(u) = \sum_{\substack{n \in M_d \\ n \leq u}} 1.$$

Так как $u \geq y^{10c_1}$, то имеем

$$\mathbb{C}(u) \ll (\ln u)^{\omega(d)} \leq (\ln u)^{c_1 \frac{\ln y^2}{\ln \ln y^2}} \leq u^{\frac{1}{2}},$$

что и доказывает (15).

Рассмотрим сначала случай, когда

$$y^{100(c_1+1)} < U.$$

Оценку S теперь проведем, пользуясь методом решета Сельберга.

Пусть $c(\varepsilon)$ – константа из неравенства $|a(n)|^2 \leq c(\varepsilon)n^\varepsilon$, $\xi = \max(100c^2(\varepsilon), (2(c(\varepsilon/2) + 1)^{2\varepsilon-1}))$, $\mathbb{P}_1 = \prod_{\xi < p \leq y} p$.

Тогда

$$\begin{aligned} S &\leq \sum_{\substack{n \leq U \\ (n, \mathbb{P}_1)}} |a(n)|^2 = \sum_{n \leq U} |a(n)|^2 \sum_{d|(n, \mathbb{P}_1)} \mu(d) \\ &\leq \sum_{n \leq U} |a(n)|^2 \left(\sum_{d|(n, \mathbb{P}_1)} \lambda_d \right)^2 = \sum_{\substack{d_1 | \mathbb{P}_1 \\ d_1 \leq y}} \sum_{\substack{d_2 | \mathbb{P}_1 \\ d_2 \leq y \\ [d_1, d_2] = d}} \lambda_{d_1} \lambda_{d_2} S_d, \end{aligned}$$

где λ_d – вещественные числа такие, что $\lambda_1 = 1$, $\lambda_d = 0$ при $d > y$,

$$S_d = \sum_{n \leq U d^{-1}} |a(dn)|^2.$$

Получим для S_d асимптотическую формулу, пользуясь мультипликативностью $a(n)$,

$$S_d = \sum_{n_1 \in M_d} |a(dn_1)|^2 \sum_{\substack{n \leq U d^{-1} n_1^{-1} \\ (n, d) = 1}} |a(n)|^2.$$

Определим коэффициенты $\beta(\nu)$ из равенства

$$\prod_{p|d} (1 + |a(p)|^2 p^{-s} + |a(p^2)|^2 p^{-2s} + \dots) = \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \in M_d}}^{\infty} \beta(\nu) \nu^{-s}, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Докажем, что $|\beta(\nu)| \leq \nu^\varepsilon$. Так как функция $\beta(\nu)$ мультипликативна, достаточно доказать, что для любого числа γ , $\gamma \geq 1$, и любого простого числа p , делящего d ,

$$|\beta(p^\gamma)| \leq p^{\gamma\varepsilon}.$$

Так как из $p \mid d$ следует, что $\xi < p$, то имеем

$$\beta(p^\gamma) = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \sum_{\substack{k_1=1 \\ k_1+\dots+k_l=\gamma}}^{\gamma} \dots \sum_{k_l=1}^{\gamma} |a(p^{k_1})|^2 \dots |a(p^{k_l})|^2.$$

Пользуясь неравенствами

$$|a(p^{k_j})|^2 \leq c \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) p^{k_j\varepsilon/2}, \quad j = 1, \dots, l,$$

имеем

$$\begin{aligned} |\beta(p^\gamma)| &\leq \left(c \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) p^{\frac{\varepsilon}{2}}\right)^\gamma \sum_{l=1}^{\gamma} \sum_{\substack{k_1=1 \\ k_1+\dots+k_l=\gamma}}^{\gamma} \dots \sum_{k_l=1}^{\gamma} 1 \\ &= \left(c \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) p^{\frac{\varepsilon}{2}}\right)^\gamma \sum_{l=1}^{\gamma} \binom{\gamma-1}{l-1} \leq \left(c \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) p^{\frac{\varepsilon}{2}} \cdot 2\right)^\gamma \leq p^{\varepsilon\gamma}, \end{aligned}$$

так как

$$p > \left(2c \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)^{2\varepsilon^{-1}}.$$

Получено равенство

$$S_d = \sum_{n_1 \in M_d} |a(dn_1)|^2 \sum_{\nu \in M_d} \beta(\nu) \sum_{n \leq U d^{-1} n_1^{-1} \nu^{-1}} |a(n)|^2,$$

причем

$$|\beta(\nu)| \leq \nu^\varepsilon.$$

Докажем, что

$$S_d = \sum_{\substack{n_1 \in M_d \\ n_1 \leq y^{10c_1+2}}} |a(dn_1)|^2 \sum_{\substack{\nu \in M_d \\ \nu \leq y^{10c_1+2}}} \beta(\nu) \sum_{n \leq U d^{-1} n_1^{-1} \nu^{-1}} |a(n)|^2 + O(U d^{-1} y^{-c_1/2}). \quad (16)$$

Прежде всего, при любых значениях n_1 и ν

$$\sum_{n \leq U d^{-1} n_1^{-1} \nu^{-1}} |a(n)|^2 \ll y^\varepsilon U d^{-1} n_1^{-1} \nu^{-1}. \quad (17)$$

Действительно, если $U d^{-1} n_1^{-1} \nu^{-1} > y$, то (17) следует из (12); если $1 \leq U d^{-1} \times n_1^{-1} \nu^{-1} \leq y$, то

$$\begin{aligned} n &\leq y, \quad |a(n)|^2 \ll n^\varepsilon \ll y^\varepsilon, \\ \sum_{n \leq U d^{-1} n_1^{-1} \nu^{-1}} |a(n)|^2 &\ll y^\varepsilon [U d^{-1} n_1^{-1} \nu^{-1}] \leq y^\varepsilon U d^{-1} n_1^{-1} \nu^{-1}; \end{aligned}$$

если же $Ud^{-1}n_1^{-1}\nu^{-1} < 1$, то сумма по n пуста, т.е. равна нулю.

Оценим теперь

$$R_1 = \sum_{\substack{n_1 \in M_d \\ n_1 > y^{10c_1+2}}} |a(dn_1)|^2 \sum_{\nu \in M_d} \beta(\nu) \sum_{n \leq Ud^{-1}n_1^{-1}\nu^{-1}} |a(n)|^2.$$

Применим (17) и оценки $|a(dn_1)|^2 \ll (dn_1)^{\varepsilon/2} \ll n_1^\varepsilon$, $|\beta(\nu)| \leq \nu^\varepsilon$, а также (14) и (15):

$$R_1 \ll y^\varepsilon Ud^{-1} \sum_{\substack{n_1 \in M_d \\ n_1 > y^{10c_1}}} n_1^{\varepsilon-1} \sum_{\nu \in M_d} \nu^{\varepsilon-1} \ll Ud^{-1} y^{2\varepsilon-c_1} \ll Ud^{-1} y^{-c_1/2}$$

(считаем, что $\varepsilon < c_1/4$). Аналогично получается оценка величины R_2 :

$$R_2 = \sum_{n_1 \in M_d} |a(dn_1)|^2 \sum_{\substack{\nu \in M_d \\ \nu > y^{10c_1+2}}} \beta(\nu) \sum_{n \leq Ud^{-1}n_1^{-1}\nu^{-1}} |a(n)|^2.$$

Формула (16) доказана.

Пусть теперь $n_1 \leq y^{10c_1+2}$, $\nu \leq y^{10c_1+2}$. Так как рассматривается случай

$$U > y^{100(c_1+1)}, \quad d \leq y^2,$$

то в силу (12)

$$\sum_{n \leq Ud^{-1}n_1^{-1}\nu^{-1}} |a(n)|^2 = A_F Ud^{-1}n_1^{-1}\nu^{-1} + O(Ud^{-1}n_1^{-1}\nu^{-1} \ln^{-4} y).$$

Подставив эту асимптотическую формулу в (16), будем иметь

$$S_d = \frac{U}{f(d)} + O(U \ln^{-4} y g^{-1}(d)) + O(Ud^{-1}y^{-c_1/2}),$$

где

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(d)} &= \frac{1}{d} \prod_{p|d} (|a(p)|^2 + |a(p^2)|^2 p^{-1} + \dots) (1 + |a(p)|^2 p^{-1} + |a(p^2)|^2 p^{-2} + \dots)^{-1}, \\ \frac{1}{g(d)} &= \frac{1}{d} \prod_{p|d} (|a(p)|^2 + |a(p^2)|^2 p^{-1} + \dots) (1 - (|a(p)|^2 p^{-1} + |a(p^2)|^2 p^{-2} + \dots))^{-1}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что $0 < \frac{1}{f(p)} < 1$. Кроме того, $0 < \frac{1}{g(p)} < 1$, так как $p > \xi$ при $p \mid d$.

Выберем числа λ_d :

$$\lambda_d = f(d) \sum_{\substack{\sigma \in \mathbb{P}_1 \\ \sigma \leq yd^{-1}}} \mu(\sigma) u_{d\sigma},$$

где

$$\begin{aligned} u_\rho &= \mu(\rho) V^{-1} f_1^{-1}(\rho), \\ f_1^{-1}(\rho) &= f^{-1}(\rho) \prod_{p|\rho} \left(1 - \frac{1}{f(p)}\right)^{-1}, \\ V &= \sum'_{n \leq y} \frac{\mu^2(n)}{f_1(n)}, \end{aligned}$$

а штрих означает, что суммирование ведется по числам, все простые делители которых делят $\mathbb{P}_1$.

Хорошо известно (см., например, [17, с. 17–19], что при таком выборе чисел λ_d сумма

$$\sum_{\substack{d_1 \leq y \\ d_1 | \mathbb{P}_1}} \sum_{\substack{d_2 \leq y \\ d_2 | \mathbb{P}_1 \\ [d_1, d_2] = d}} \lambda_{d_1} \lambda_{d_2} \frac{1}{f(d)}$$

равна V^{-1} ; кроме того, $|\lambda_d| \leq 1$; поэтому

$$S \leq UV^{-1} + O(R_3) + O(R_4),$$

где

$$R_3 = U \ln^{-4} y \sum_{\substack{d_1 | \mathbb{P}_1 \\ d_1 \leq y}} \sum_{\substack{d_2 | \mathbb{P}_1 \\ d_2 \leq y \\ [d_1, d_2] = d}} \frac{1}{g(d)}, \quad R_4 = U y^{-0,5c_1} \sum_{\substack{d_1 | \mathbb{P}_1 \\ d_1 \leq y}} \sum_{\substack{d_2 | \mathbb{P}_1 \\ d_2 \leq y \\ [d_1, d_2] = d}} \frac{1}{d}.$$

Оценим R_3 сверху. Пусть $g_1(\rho) = g(\rho) \prod_{p|\rho} \left(1 - \frac{1}{g(p)}\right)$; тогда, так как $g_1(\rho) \leq g(\rho)$,

$$\begin{aligned} R_3 &\ll U \ln^{-4} y \sum_{\rho | \mathbb{P}_1} g_1(\rho) \left(\sum_{d \leq y \rho^{-1}} \frac{\mu^2(d\rho)}{g(d\rho)} \right)^2 \\ &\ll U \ln^{-4} y \left(\sum_{\rho | \mathbb{P}_1} \frac{\mu^2(\rho)}{g(\rho)} \right)^3 = U \ln^{-4} y \prod_{\xi < p \leq y} \left(1 + \frac{1}{g(p)}\right)^3 \ll U \ln^{-1} y \end{aligned}$$

(для оценки произведения использована формула (7)).

R_4 оценивается аналогично:

$$R_4 \ll U y^{-0,5c_1} \left(\sum_{d \leq y} \frac{1}{d} \right)^3 \ll U y^{-0,25c_1}.$$

Осталось оценить снизу величину

$$V = \sum'_{n \leq y} \frac{\mu^2(n)}{f_1(n)},$$

где n пробегает натуральные числа, все простые делители которых делят $\mathbb{P}_1$.

Пусть $y_1 = y^\delta$, где δ – положительное число, значение которого будет уточнено позже. Тогда

$$V \geq \prod_{\xi < p \leq y_1} \left(1 + \frac{1}{f_1(p)}\right) - V_1;$$

здесь

$$V_1 = \sum_{n > y}'' \frac{\mu^2(n)}{f_1(n)},$$

а два штриха означают, что суммирование идет по n , все простые делители которых больше ξ и не превосходят y_1 . Оценим V_1 сверху. Имеем

$$V_1 \leq y^{-\sigma} \sum_{n > y}'' \frac{\mu^2(n)}{f_1(n)} n^\sigma = y^{-\sigma} \prod_{\xi < p \leq y_1} \left(1 + \frac{p^\sigma}{f_1(p)}\right),$$

где $\sigma = \frac{1}{\ln y_1}$. Тогда

$$\begin{aligned} p^\sigma &= \exp\left(\frac{\ln p}{\ln y_1}\right) = 1 + O\left(\frac{\ln p}{\ln y_1}\right), \\ V_1 &\ll y^{-\sigma} \exp\left(\sum_{\xi < p \leq y_1} |a(p)|^2 p^{-1} + \frac{1}{\ln y_1} \sum_{p \leq y_1} |a(p)|^2 \ln p \cdot p^{-1}\right). \end{aligned}$$

Отсюда и из (9) и (7) следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{\xi < p \leq y_1} |a(p)|^2 p^{-1} &= \ln \ln y_1 + O(1), \\ \frac{1}{\ln y_1} \sum_{\xi < p \leq y_1} |a(p)|^2 \ln p \cdot p^{-1} &= O(1), \end{aligned}$$

и существует положительная постоянная c_2 , при которой выполняется неравенство

$$V_1 \leq c_2 \exp\left(-\frac{\ln y}{\ln y_1}\right) \ln y_1 = c_2 \exp\left(-\frac{1}{\delta}\right) \ln y_1.$$

Из определений, (7) и (1) следует неравенство

$$\prod_{\xi < p \leq y_1} \left(1 + \frac{1}{f_1(p)}\right) \geq c_3 \ln y_1, \quad c_3 > 0.$$

Выбирая δ столь малым, чтобы выполнялось неравенство

$$c_2 \exp\left(-\frac{1}{\delta}\right) \leq \frac{c_3}{2},$$

получаем

$$V \geq \frac{c_3}{2} \delta \ln y.$$

Так как постоянные c_2 и c_3 не зависят от y , то и δ не зависит от y , поэтому

$$S \ll UV^{-1} + U \ln^{-1} y \ll U \ln^{-1} y.$$

Случай, когда $y^{100(c_1+1)} < U$, полностью разобран.

Рассмотрим теперь случай, когда $U \leq y^{c_4}$, $c_4 = 100(c_1+1)$. Оценим сначала R_3 ,

$$R_3 = \sum_{n \in \mathcal{A}} |a(n)|^2,$$

где $\mathcal{A}$ – множество натуральных чисел, не превосходящих U , взаимно простых с $\mathbb{P}$ и не являющихся бесквадратными. Имеем

$$\begin{aligned} R_3 &\leq \sum_{y < d \leq \sqrt{U}} \sum_{n \leq U d^{-2}} |a(d^2 n)|^2 \leq \sum_{y < d} \sum_{n_1 \in M_d} |a(d^2 n_1)|^2 \sum_{n \leq U d^{-2} n_1^{-1}} |a(n)|^2 \ll \\ &\ll U y^\varepsilon \sum_{y < d} d^{-2} \prod_{\substack{p|d \\ p > y}} (|a(p)|^2 + |a(p^2)|^2 p^{-1} + \dots) \ll U y^\varepsilon \sum_{y < d} d^{\varepsilon-2} \ll U y^{-1/2}. \end{aligned}$$

Оценим теперь R_4 ,

$$R_4 = \sum_{n \in \mathcal{B}} |a(n)|^2,$$

где $\mathcal{B}$ – множество бесквадратных чисел, не превосходящих U и взаимно простых с $\mathbb{P}$. Имеем

$$\begin{aligned} R_4 &\leq (\ln y)^{-1} \sum_{y < p \leq U} |a(p)|^2 \ln p \\ &+ \sum_{v=2}^{c_4} \sum_{y < p_1 \leq U} |a(p_1)|^2 \dots \sum_{y < p_{v-1} \leq U} |a(p_{v-1})|^2 \sum_{y < p \leq U(p_1 \dots p_{v-1})^{-1}} |a(p)|^2 \ln p (\ln y)^{-1}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (9) получаем

$$R_4 \ll U (\ln y)^{-1} \left(1 + \sum_{v=2}^{c_4} \left(\sum_{y < p \leq y^{c_4}} |a(p)|^2 p^{-1} \right)^v \right);$$

теперь оценка

$$R_4 \ll U (\ln y)^{-1}$$

следует из (7). Лемма 6 полностью доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x \leq 0. \end{cases}$$

ЛЕММА 7. Пусть $N \geq 1$, $f_1(t), \dots, f_N(t)$ – произвольные вещественные функции, определенные на отрезке $[T, 2T]$, а $H_1(x)$ – неотрицательная монотонно возрастающая функция.

Тогда справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \int_T^{2T} \prod_{j=1}^N H_1(f_j(t)) dt - H_1(0) \sum_{n=1}^N \int_T^{2T} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^N H_1(f_j(t)) dt \\ & - \sum_{n=1}^N \int_T^{2T} H_1^2(f_n(t)) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^N H_1(f_j(t)) dt \leq \int_T^{2T} \prod_{j=1}^N H(f_j(t)) dt \\ & = \text{mes}\{t \in [T, 2T] \mid f_1(t) > 0, \dots, f_N(t) > 0\}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим множества U_0 и U_1 :

$$\begin{aligned} U_0 &= \{t \in [T, 2T] \mid \text{существует } j, \ 1 \leq j \leq N, \text{ такое, что } f_j(t) \leq 0\}, \\ U_1 &= \{t \in [T, 2T] \mid \text{существует } j, \ 1 \leq j \leq N, \text{ такое, что } H_1(f_j(t)) > 1\}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\int_{[T, 2T] \setminus (U_0 \cup U_1)} \prod_{j=1}^N H_1(f_j(t)) dt \leq \int_T^{2T} \prod_{j=1}^N H(f_j(t)) dt,$$

но

$$\begin{aligned} \int_{[T, 2T] \setminus (U_0 \cup U_1)} \prod_{j=1}^N H_1(f_j(t)) dt & \geq \int_T^{2T} \prod_{j=1}^N H_1(f_j(t)) dt \\ & - \int_{U_0} \prod_{j=1}^N H_1(f_j(t)) dt - \int_{U_1} \prod_{j=1}^N H_1(f_j(t)) dt. \end{aligned}$$

Наконец, по определению множеств U_0 и U_1

$$\begin{aligned} \int_{U_0} \prod_{j=1}^N H_1(f_j(t)) dt & \leq H_1(0) \sum_{n=1}^N \int_T^{2T} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^N H_1(f_j(t)) dt, \\ \int_{U_1} \prod_{j=1}^N H_1(f_j(t)) dt & \leq \sum_{n=1}^N \int_T^{2T} H_1^2(f_n(t)) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^N H_1(f_j(t)) dt. \end{aligned}$$

Лемма 7 доказана.

ЛЕММА 8. Пусть N – произвольное натуральное число, $F_1(s), \dots, F_N(s)$ – попарно различные примитивные функции степени 2 из класса Сельберга, удовлетворяющие условиям 1–3 и гипотезе 2, $a_j(n)$ – их коэффициенты Дирихле, $1 \leq j \leq N$.

Пусть a и b – неотрицательные вещественные числа, ограниченные постоянной, зависящей только от N .

Пусть

$$\begin{aligned} f_1(t) &= (\ln \ln y)^{-1/2} \operatorname{Re} \left(\sum_{p \leq y} \frac{a_1(p)}{\sqrt{p}} p^{-it} \right) - 2, \\ f_j(t) &= -(\ln \ln y)^{-1/2} \operatorname{Re} \left(\sum_{p \leq y} \frac{a_j(p)}{\sqrt{p}} p^{-it} \right) - 2, \\ y &= \ln T (\ln \ln T)^{-2}, \quad 2 \leq j \leq N. \end{aligned}$$

Пусть n – любое натуральное число такое, что $1 \leq n \leq N$.

Тогда для V ,

$$V = \int_T^{2T} \exp \left(a \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^N f_j(t) + b f_n(t) \right) dt,$$

справедлива асимптотическая формула

$$V = T \exp \left(\frac{a^2}{4} (N-1) + \frac{b^2}{4} - 2a(N-1) - 2b \right) \left(1 + O((\ln \ln y)^{-1}) \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначение

$$\beta_j(p) = \frac{\delta(j)}{\sqrt{\ln \ln y}} \operatorname{Re} \left(\frac{a_j(p)}{\sqrt{p}} p^{-it} \right),$$

где

$$\delta(j) = \begin{cases} 1, & \text{если } j = 1, \\ -1, & \text{если } j \neq 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \exp \left(a \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^N f_j(t) + b f_n(t) \right) \\ &= \exp(-2a(N-1) - 2b) \prod_{p \leq y} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^N \exp(a \beta_j(p)) \exp(b \beta_n(p)). \end{aligned}$$

Так как a и b ограничены постоянной, не зависящей от T , а $\beta_j(p)$ стремятся к нулю с ростом T ($j = 1, 2, \dots, N$), то можно считать T настолько большим, что

$$|a \beta_j(p)| \leq 0,5, \quad |b \beta_n(p)| \leq 0,5.$$

Для любого вещественного α , $|\alpha| \leq 0,5$, имеет место неравенство

$$\left(1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2}\right) (1 - |\alpha|^3) \leq \exp(\alpha) \leq \left(1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2}\right) (1 + |\alpha|^3).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \Pi_1 & \prod_{p \leq y} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^N \left(1 + a\beta_j(p) + \frac{a^2}{2}\beta_j^2(p)\right) \left(1 + b\beta_n(p) + \frac{b^2}{2}\beta_n^2(p)\right) \\ & \leq \prod_{p \leq y} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^N \exp(a\beta_j(p)) \exp(b\beta_n(p)) \\ & \leq \Pi_2 \prod_{p \leq y} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^N \left(1 + a\beta_j(p) + \frac{a^2}{2}\beta_j^2(p)\right) \left(1 + b\beta_n(p) + \frac{b^2}{2}\beta_n^2(p)\right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \prod_{p \leq y} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^N (1 - a^3|a_j(p)|^3 p^{-3/2} (\ln \ln y)^{-3/2}) (1 - b^3|a_n(p)|^3 p^{-3/2} (\ln \ln y)^{-3/2}), \\ \Pi_2 &= \prod_{p \leq y} \prod_{j=1}^N (1 + a^3|a_j(p)|^3 p^{-3/2} (\ln \ln y)^{-3/2}) (1 + b^3|a_n(p)|^3 p^{-3/2} (\ln \ln y)^{-3/2}). \end{aligned}$$

Так как в силу (1)

$$\Pi_1 = 1 + O((\ln \ln y)^{-3/2}), \quad \Pi_2 = 1 + O((\ln \ln y)^{-3/2}),$$

для доказательства леммы достаточно вывести для V_1 ,

$$V_1 = \int_T^{2T} \prod_{p \leq y} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^N \left(1 + a\beta_j(p) + \frac{a^2}{2}\beta_j^2(p)\right) \left(1 + b\beta_n(p) + \frac{b^2}{2}\beta_n^2(p)\right),$$

асимптотическую формулу вида

$$V_1 = T \exp\left(\frac{a^2}{4}(N-1) + \frac{b^2}{4}\right) (1 + O((\ln \ln y)^{-1})).$$

По определению имеем

$$\begin{aligned}
1 + a\beta_j(p) + \frac{a^2}{2}\beta_j^2(p) &= 1 + \frac{a}{2}\delta(j)(\ln \ln y)^{-1/2} \frac{a_j(p)}{\sqrt{p}} p^{-it} \\
&+ \frac{a}{2}\delta(j)(\ln \ln y)^{-1/2} \frac{\bar{a}_j(p)}{\sqrt{p}} p^{it} + \frac{a^2}{8}(\ln \ln y)^{-1} \frac{a_j^2(p)}{p} p^{-2it} \\
&+ \frac{a^2}{8}(\ln \ln y)^{-1} \frac{\bar{a}_j^2(p)}{p} p^{2it} + \frac{a^2}{4}(\ln \ln y)^{-1} \frac{|a_j(p)|^2}{p}, \\
1 + b\beta_n(p) + \frac{b^2}{2}\beta_n^2(p) &= 1 + \frac{b}{2}\delta(n)(\ln \ln y)^{-1/2} \frac{a_n(p)}{\sqrt{p}} p^{-it} \\
&+ \frac{b}{2}\delta(n)(\ln \ln y)^{-1/2} \frac{\bar{a}_n(p)}{\sqrt{p}} p^{it} + \frac{b^2}{8}(\ln \ln y)^{-1} \frac{a_n^2(p)}{p} p^{-2it} \\
&+ \frac{b^2}{8}(\ln \ln y)^{-1} \frac{\bar{a}_n^2(p)}{p} p^{2it} + \frac{b^2}{4}(\ln \ln y)^{-1} \frac{|a_n(p)|^2}{p}.
\end{aligned}$$

Перемножим левые и правые части этих формул по $p \leq y$ и $1 \leq j \leq N$, $j \neq n$, и раскроем скобки в правой части; получим $6^{N\pi(y)}$ слагаемых; затем объединим слагаемые, не зависящие от t (неосциллирующие); их сумма равна

$$\begin{aligned}
&\prod_{p \leq y} \left(1 + \frac{a^2}{4}(\ln \ln y)^{-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^N \frac{|a_j(p)|^2}{p} + \frac{b^2}{4}(\ln \ln y)^{-1} \frac{|a_n(p)|^2}{p} \right. \\
&+ \frac{a^2}{4}(\ln \ln y)^{-1} \sum_{1 \leq j \neq m \neq n \leq N} \delta(j)\delta(m)p^{-1}(a_j(p)\bar{a}_m(p) + \bar{a}_j(p)a_m(p)) \\
&+ \frac{ab}{4}(\ln \ln y)^{-1} \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq n}} \delta(j)\delta(n)p^{-1}(a_j(p)\bar{a}_n(p) + \bar{a}_j(p)a_n(p)) \\
&\left. + O((\ln \ln y)^{-3/2} p^{-4/3}) \right). \tag{18}
\end{aligned}$$

Зависящие от t (осциллирующие) слагаемые (их меньше, чем $6^{N\pi(y)}$) имеют вид

$$d \left(\frac{l}{g} \right)^{it}, \tag{19}$$

где $|d| \ll 1$, l и g – натуральные числа, не равные друг другу и не превосходящие $\prod_{p \leq y} p^2 < \exp(2y \ln y)$; поэтому интеграл по t от слагаемых (19) есть

$$O(\exp(2y \ln y)),$$

а интеграл по t от суммы осциллирующих слагаемых есть

$$O(6^{\pi(y)N} \exp(2y \ln y)) = O(T^\varepsilon)$$

для любого положительного ε .

Итак,

$$V_1 = T\Pi + O(T^\varepsilon),$$

где Π – произведение из левой части (18). Из (7) и (8) следует, что

$$\Pi = \exp\left(\frac{a^2}{4}(N-1) + \frac{b^2}{4}\right) (1 + O((\ln \ln y)^{-1})).$$

Лемма 8 доказана.

ЛЕММА 9. Пусть $F(s)$ – функция из класса Сельберга, $a(n)$ – ее коэффициенты Дирихле,

$$y = \ln T (\ln \ln T)^{-2},$$

$$P(s) = \prod_{p \leq y} (1 + a(p)p^{-s} + a(p^2)p^{-2s} + \dots), \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Тогда справедлива оценка

$$\int_T^{2T} \left| \ln \left| P\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| - \operatorname{Re} \left(\sum_{p \leq y} \frac{a(p)}{\sqrt{p}} p^{-it} \right) \right|^2 dt = O(T). \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению

$$\begin{aligned} \ln \left| P\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| &= \frac{1}{2} \ln \left| P\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 = \frac{1}{2} \ln P\left(\frac{1}{2} + it\right) + \frac{1}{2} \ln \bar{P}\left(\frac{1}{2} + it\right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\sum_{p \leq y} \frac{a(p)}{\sqrt{p}} p^{-it} \right) + \operatorname{Re} \left(\sum_{p \leq y} \frac{a(p^2)}{p} p^{-2it} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\sum_{p \leq y} \frac{a^2(p)}{p} p^{-2it} \right) + O(1). \end{aligned}$$

Поэтому, пользуясь леммой 3 и неравенством (1), получаем

$$\begin{aligned} \int_T^{2T} \left| \ln \left| P\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| - \operatorname{Re} \left(\sum_{p \leq y} \frac{a(p)}{\sqrt{p}} p^{-it} \right) \right|^2 dt \\ \ll T \left(\sum_{p \leq y} \frac{|a(p^2)|^2}{p^2} + \sum_{p \leq y} \frac{|a(p)|^4}{p^2} + 1 \right) \ll T. \end{aligned}$$

Лемма 9 доказана.

СЛЕДСТВИЕ. В условиях леммы 9 имеет место оценка

$$\operatorname{mes} \left\{ t \in [T, 2T] \mid \left| \ln \left| P\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| - \operatorname{Re} \left(\sum_{p \leq y} \frac{a(p)}{\sqrt{p}} p^{-it} \right) \right| > L \right\} \ll TL^{-2}, \quad L > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим лемму 9 и неравенство Чебышева (см., например, [12, с. 344]).

§ 3. Доказательство теоремы

1. Положим

$$y = \ln T (\ln \ln T)^{-2}, \quad h = \exp(-1,5\sqrt{\ln \ln \ln T}).$$

Рассмотрим интеграл

$$J(t) = \int_0^h \int_0^h |\mathcal{F}(t + u_1 + u_2)| du_1 du_2.$$

Пусть $s = \frac{1}{2} + i(t + u_1 + u_2)$; пусть при $j = 1, \dots, N$

$$P_j(s) = \prod_{p \leq y} (1 + a_j(p)p^{-s} + a_j(p^2)p^{-2s} + \dots),$$

$$Q_j(s) = F_j(s)P_j^{-1}(s),$$

$$g(s) = \overline{P}_1(s)(|P_1(s)|)^{-1}$$

(последние определения корректны, так как полагается справедливой формула (10)). Тогда

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(t + u_1 + u_2)| &= \left| |a_1| |P_1(s)| + \sum_{j=2}^N a_j P_j(s) g(s) \exp(-i\theta_1(t + u_1 + u_2)) \right. \\ &\quad \left. + i\theta_j(t + u_1 + u_2) a_1 |a_1|^{-1} + \sum_{j=1}^N a_j P_j(s) g(s) \exp(-i\theta_1(t + u_1 + u_2)) \right. \\ &\quad \left. + i\theta_j(t + u_1 + u_2) (Q_j(s) - 1) a_1 |a_1|^{-1} \right|, \\ J(t) &\gg \int_0^h \int_0^h \left(|a_1| |P_1(s)| - \sum_{j=2}^N |a_j| |P_j(s)| \right) du_1 du_2 - \sum_{j=1}^N |a_j| J_{1j}(t), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} J_{1j}(t) &= \left| \int_0^h \int_0^h P_j(s) g(s) \exp(-i\theta_1(t + u_1 + u_2)) \right. \\ &\quad \left. + i\theta_j(t + u_1 + u_2) (Q_j(s) - 1) du_1 du_2 \right|. \end{aligned}$$

Нам нужны оценки сверху интегралов I_{1j} ,

$$I_{1j} = \int_T^{2T} J_{1j}(t) dt, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Получению этих оценок посвящены пп. 2–9.

2. Интегралы I_{1j} при любых j , $1 \leq j \leq N$, оцениваются одинаково. Зафиксируем j . Для упрощения обозначений положим

$$F(s) = F_j(s), \quad Q(s) = Q_j(s), \quad P(s) = P_j(s), \\ \theta(t + u_1 + u_2) = \theta_j(t + u_1 + u_2).$$

Теперь в формулу, определяющую $Q(s)$, подставим вместо функции $F(s)$ приближенное ее значение из леммы 2. Получим

$$I_{1j} \leq \sum_{\mu=1}^6 I_1(\mu) + O(T^{3/4}),$$

где

$$I_1(\mu) = \int_T^{2T} J_{2\mu}(t) dt, \\ J_{21}(t) = \left| \int_0^h \int_0^h G(s) \left(\sum_{n \leq T} a(n) n^{-s} P^{-1}(s) - 1 \right) du_1 du_2 \right|, \\ J_{22}(t) = \left| \int_0^h \int_0^h H(s) \rho(s) \sum_{n \leq T} \bar{a}(n) n^{s-1} du_1 du_2 \right|, \\ G(s) = g(s) P(s) \exp(-i\theta_1(t + u_1 + u_2) + i\theta(t + u_1 + u_2)), \\ H(s) = g(s) \exp(-i\theta_1(t + u_1 + u_2) + i\theta(t + u_1 + u_2)),$$

$\rho(s)$ – функция, определенная (3),

$$J_{23}(t) = \int_0^h \int_0^h \left| \sum_{n \leq T} a(n) n^{-1} (1 - \exp(-nT^{-1})) \right| du_1 du_2, \\ J_{24}(t) = \int_0^h \int_0^h \left| \sum_{T < n} a(n) n^{-s} \exp(-nT^{-1}) \right| du_1 du_2, \\ J_{25}(t) = \int_0^h \int_0^h \left| \sum_{n \leq T} \bar{a}(n) n^{s-1} \exp(-t^2 Q_1^2 T^{-1} n^{-1}) \right| du_1 du_2, \\ J_{26}(t) = \int_0^h \int_0^h \left| \sum_{T < n} \bar{a}(n) n^{s-1} (1 - \exp(-t^2 Q_1^2 T^{-1} n^{-1})) \right| du_1 du_2.$$

Из леммы 4 следует, что

$$I_1(3) + I_1(4) + I_1(5) + I_1(6) \ll Th^2.$$

3. Приступим к оценке интеграла $I_1(1)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Натуральное число n принадлежит множеству M , если $n = 1$ или если все простые делители n не превосходят y .

Нам потребуются следующие два неравенства: при любом $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n \in M} n^{\varepsilon-1/2} \ll \exp(y^{1/2+\varepsilon}), \quad (21)$$

$$\sum_{\substack{n \in M \\ T^{0,01} < n}} n^{\varepsilon-1/2} \ll T^{-0,005+\varepsilon}. \quad (22)$$

Неравенство (21) следует из

$$\sum_{n \in M} n^{\varepsilon-1/2} = \prod_{p \leq y} (1 + p^{\varepsilon-1/2} + p^{2\varepsilon-1} + \dots)$$

и асимптотического закона распределения простых чисел.

Докажем (22). Применим формулу частного суммирования:

$$\sum_{\substack{n \in M \\ T^{0,01} < n}} n^{\varepsilon-1/2} \leq - \int_{T^{0,01}}^{\infty} \mathbb{C}(u) du^{\varepsilon-1/2},$$

где

$$\mathbb{C}(u) = \sum_{\substack{n \leq u \\ n \in M}} 1.$$

Для доказательства (22) теперь достаточно установить, что $\mathbb{C}(u) \ll u^\varepsilon$; но последнее неравенство следует из

$$\mathbb{C}(u) \ll (\ln u)^{\pi(y)}, \quad y = \ln T (\ln \ln T)^{-2}, \quad u > T^{0,01}.$$

Неравенство (22) доказано.

Рассмотрим сумму S :

$$S = \sum_{n \leq T} a(n) n^{-s}.$$

Положим $\mathbb{P} = \prod_{p \leq y} p$ и воспользуемся мультипликативностью функции $a(n)$:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n_1 \in M} a(n_1) n_1^{-s} \sum_{\substack{n \leq T n_1^{-1} \\ (n, \mathbb{P})=1}} a(n) n^{-s} = \sum_{n_1 \in M} a(n_1) n_1^{-s} \sum_{\substack{n \leq T \\ (n, \mathbb{P})=1}} a(n) n^{-s} \\ &- \sum_{\substack{n_1 \in M \\ n_1 \leq T^{0,01}}} a(n_1) n_1^{-s} \sum_{\substack{T n_1^{-1} < n \leq T \\ (n, \mathbb{P})=1}} a(n) n^{-s} \\ &+ O \left(\sum_{\substack{n_1 \in M \\ n_1 > T^{0,01}}} \frac{|a(n_1)|}{\sqrt{n_1}} \left| \sum_{\substack{T n_1^{-1} < n \leq T \\ (n, \mathbb{P})=1}} a(n) n^{-s} \right| \right). \end{aligned}$$

Теперь так как

$$\sum_{n_1 \in M} a(n_1) n_1^{-s} = P(s), \quad a(1) = 1, \quad a(n) \ll n^\varepsilon,$$

имеем

$$\begin{aligned} G(s) \left(\sum_{n \leq T} a(n) n^{-s} P^{-1}(s) - 1 \right) &= G(s) \sum_{\substack{y < n \leq T \\ (n, \mathbb{P})=1}} a(n) n^{-s} \\ &\quad - H(s) \sum_{\substack{n_1 \in M \\ n_1 \leq T^{0,01}}} a(n_1) n_1^{-s} \sum_{\substack{T n_1^{-1} < n \leq T \\ (n, \mathbb{P})=1}} a(n) n^{-s} \\ &\quad + O \left(\sum_{\substack{n_1 \in M \\ T^{0,01} < n_1}} n_1^{\varepsilon-1/2} \left| \sum_{\substack{T n_1^{-1} < n \leq T \\ (n, \mathbb{P})=1}} a(n) n^{-s} \right| \right). \end{aligned}$$

Итак, мы пришли к неравенству

$$I_1(1) \ll I_1'(1) + I_1''(1) + I_1'''(1),$$

где

$$\begin{aligned} I_1'(1) &= \int_T^{2T} \left| \int_0^h \int_0^h G(s) \sum_{\substack{y < n \leq T \\ (n, \mathbb{P})=1}} a(n) n^{-s} du_1 du_2 \right| dt, \\ I_1''(1) &= \int_T^{2T} \left| \int_0^h \int_0^h H(s) \sum_{\substack{n_1 \in M \\ n_1 \leq T^{0,01}}} a(n_1) n_1^{-s} \sum_{\substack{T n_1^{-1} < n \leq T \\ (n, \mathbb{P})=1}} a(n) n^{-s} du_1 du_2 \right| dt, \\ I_1'''(1) &= h^2 \sum_{\substack{n_1 \in M \\ T^{0,01} < n_1}} n_1^{\varepsilon-1/2} \int_T^{2T+1} \left| \sum_{\substack{T n_1^{-1} < n \leq T \\ (n, \mathbb{P})=1}} \frac{a(n)}{\sqrt{n}} n^{-it} \right| dt. \end{aligned}$$

4. Оценим $I_1'''(1)$. Воспользуемся неравенством Коши, леммой 3 и (22):

$$\begin{aligned} I_1'''(1) &\ll h^2 \sum_{\substack{T^{0,01} < n_1 \\ n_1 \in M}} n_1^{\varepsilon-1/2} T \left(\sum_{n \leq T} |a(n)|^2 n^{-1} \right)^{1/2} \\ &\ll h^2 T (\ln T)^{1/2} \sum_{\substack{T^{0,01} < n_1 \\ n_1 \in M}} n_1^{\varepsilon-1/2} \ll T h^2. \end{aligned} \tag{23}$$

5. Для оценки интегралов $I_1'(1)$, $I_1''(1)$ и $I_1(2)$ нам потребуются приближенные формулы для функций $G(s)$ и $H(s)$.

Прежде всего, из леммы 1 следует, что

$$\begin{aligned} & \exp(-i\theta_1(t+u_1+u_2) + i\theta(t+u_1+u_2)) \\ &= \varepsilon_3 \exp(iQ_3 t) \exp(iQ_4 \ln t) \exp(iQ_3(u_1+u_2)) (1 + O(T^{-1})), \end{aligned} \quad (24)$$

где ε_3 , Q_3 , Q_4 – константы, зависящие только от $F(s)$ и $F_1(s)$, причем Q_3 и Q_4 вещественные.

Пусть ε – произвольное число из промежутка $(0, 10^{-6}]$. В силу (1) существует положительная постоянная $c = c(\varepsilon)$ такая, что для любого натурального n выполняется неравенство

$$|a_1(n)|^2 \leq c(\varepsilon)n^\varepsilon. \quad (25)$$

Пусть

$$\xi = (2(\sqrt{c(\varepsilon)} + 1))^{2\varepsilon^{-1}}.$$

С учетом (21), (22) и (24) имеем

$$G(s) = g_1(t+u_1+u_2)g_2(t)P(s)\overline{P}_1(s)H_1(s) + O(T^{-1/2}), \quad (26)$$

$$H(s) = g_1(t+u_1+u_2)g_2(t)\overline{P}_1(s)H_1(s) + O(T^{-1/2}), \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} g_1(t+u_1+u_2) &= \varepsilon_3 \exp(iQ_3(t+u_1+u_2)) \\ &\times \prod_{p \leq \xi} \left| 1 + \frac{a_1(p)}{\sqrt{p}} p^{-i(t+u_1+u_2)} + \frac{a_1(p^2)}{p} p^{-2i(t+u_1+u_2)} + \dots \right|^{-1}, \\ g_2(t) &= \exp(iQ_4 \ln t), \\ H_1(s) &= \prod_{\xi < p \leq y} |1 + a_1(p)p^{-s} + a_1(p^2)p^{-2s} + \dots|^{-1}. \end{aligned}$$

Рассмотрим $H_1(s)$. Имеет место тождество

$$\begin{aligned} H_1(s) &= \prod_{\xi < p \leq y} (1 + a_1(p)p^{-s} + a_1(p^2)p^{-2s} + \dots)^{-1/2} \\ &\times \prod_{\xi < p \leq y} (1 + \bar{a}_1(p)p^{-\bar{s}} + \bar{a}_1(p^2)p^{-2\bar{s}} + \dots)^{-1/2} = |H_2(s)|^2. \end{aligned} \quad (28)$$

Покажем, что $H_2(s)$ можно представить в виде

$$H_2(s) = \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \in M}}^{\infty} \alpha(\nu)\nu^{-s}, \quad (29)$$

где $\alpha(\nu)$ – комплексные числа, удовлетворяющие неравенству

$$|\alpha(\nu)| \ll \nu^\varepsilon. \quad (30)$$

Действительно, при $\xi < p$

$$|a_1(p)p^{-s} + a_1(p^2)p^{-2s} + \dots| \leq \frac{1}{2},$$

поэтому

$$\begin{aligned} (1 + a_1(p)p^{-s} + a_1(p^2)p^{-2s} + \dots)^{-1/2} &= 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \binom{-1/2}{l} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_1(p^\nu)p^{-\nu s} \right)^l \\ &= 1 + \sum_{\gamma=1}^{\infty} p^{-\gamma s} \sum_{l=1}^{\gamma} \binom{-1/2}{l} \sum_{\substack{\nu_1=1 \\ \nu_1+\dots+\nu_l=\gamma}}^{\gamma} \dots \sum_{\nu_l=1}^{\gamma} a_1(p^{\nu_1}) \dots a_1(p^{\nu_l}), \end{aligned}$$

т.е.

$$\alpha(p^\gamma) = \sum_{l=1}^{\gamma} \binom{-1/2}{l} \sum_{\substack{\nu_1=1 \\ \nu_1+\dots+\nu_l=\gamma}}^{\gamma} \dots \sum_{\nu_l=1}^{\gamma} a_1(p^{\nu_1}) \dots a_1(p^{\nu_l}).$$

Оценим $|\alpha(p^\gamma)|$, используя (25):

$$\begin{aligned} |\alpha(p^\gamma)| &\leq p^{\gamma\varepsilon/4} (\sqrt{c(\varepsilon)} + 1)^\gamma \sum_{l=1}^{\gamma} \sum_{\substack{\nu_1=1 \\ \nu_1+\dots+\nu_l=\gamma}}^{\gamma} \dots \sum_{\nu_l=1}^{\gamma} 1 \\ &= p^{\gamma\varepsilon/4} (\sqrt{c(\varepsilon)} + 1)^\gamma \sum_{l=1}^{\gamma} \binom{\gamma-1}{l-1} < (2p^{\varepsilon/4} (\sqrt{c(\varepsilon)} + 1))^\gamma < p^{\gamma\varepsilon}, \end{aligned}$$

так как $\xi < p$.

Теперь (30) следует из мультипликативности функции $\alpha(\nu)$.

Вводя обозначения

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{\nu_1 \in M \\ \nu_1 \leq T^{0,01}}} \alpha(\nu_1) \nu_1^{-s} \sum_{\substack{\nu_2 \in M \\ \nu_2 \leq T^{0,01}}} \bar{\alpha}(\nu_2) \nu_2^{-\bar{s}} \sum_{\substack{\nu_3 \in M \\ \nu_3 \leq T^{0,01}}} \bar{a}_1(\nu_3) \nu_3^{-s} \\ &= \sum_{\substack{l, m \in M \\ (l, m)=1 \\ 1 \leq l, m \leq T^{0,02}}} c_{l, m} \left(\frac{l}{m} \right)^{-i(t+u_1+u_2)}, \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{\nu_1 \in M \\ \nu_1 \leq T^{0,01}}} \alpha(\nu_1) \nu_1^{-s} \sum_{\substack{\nu_2 \in M \\ \nu_2 \leq T^{0,01}}} \bar{\alpha}(\nu_2) \nu_2^{-\bar{s}} \sum_{\substack{\nu_3 \in M \\ \nu_3 \leq T^{0,01}}} \bar{a}_1(\nu_3) \nu_3^{-\bar{s}} \sum_{\substack{\nu_4 \in M \\ \nu_4 \leq T^{0,01}}} a(\nu_4) \nu_4^{-s} \\ &= \sum_{\substack{l, m \in M \\ (l, m)=1 \\ 1 \leq l, m \leq T^{0,02}}} d_{l, m} \left(\frac{l}{m} \right)^{-i(t+u_1+u_2)} \end{aligned} \tag{32}$$

и используя (21), (22), (26)–(30), получаем для $G(s)$ и $H(s)$ искомые приближенные формулы:

$$G(s) = g_1(t + u_1 + u_2)g_2(t) \sum_{(l,m) \in \mathcal{M}} d_{l,m} \left(\frac{l}{m}\right)^{-i(t+u_1+u_2)} + O(T^{-0,001}), \quad (33)$$

$$H(s) = g_1(t + u_1 + u_2)g_2(t) \sum_{(l,m) \in \mathcal{M}} c_{l,m} \left(\frac{l}{m}\right)^{-i(t+u_1+u_2)} + O(T^{-0,001}), \quad (34)$$

где запись $\sum_{(l,m) \in \mathcal{M}}$ означает, что суммирование ведется по парам натуральных чисел l и m таких, что $l \in M$, $m \in M$, $(l, m) = 1$, $1 \leq l, m \leq T^{0,02}$.

В заключение этого пункта доказательства отметим, что ввиду (10)

$$|g_1(t)| \ll 1, \quad |g'_1(t)| \ll 1, \quad |g''_1(t)| \ll 1 \quad (35)$$

при любых t из отрезка $[T, 2T + 1]$.

6. Оценим $I'_1(1)$. В правой части равенства, определяющего $I'_1(1)$, произведем интегрирование по u_2 и применим равенство (33):

$$I'_1(1) \leq h(I_{11}(1) + I_{12}(1)), \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned} I_{11}(1) &= \int_T^{2T+h} \left| \sum_{(l,m) \in \mathcal{M}} d_{l,m} \sum_{\substack{y < n \leq T^{0,1} \\ (n, \mathbb{P})=1}} \frac{a(n)}{\sqrt{n}} \left(\frac{ln}{m}\right)^{-it} \right. \\ &\quad \times \left. \int_0^h g_1(t+u) \left(\frac{ln}{m}\right)^{-iu} du \right| dt, \\ I_{12}(1) &= \int_T^{2T+h} \left| \sum_{(l,m) \in \mathcal{M}} d_{l,m} \sum_{\substack{T^{0,1} < n \leq T \\ (n, \mathbb{P})=1}} \frac{a(n)}{\sqrt{n}} \left(\frac{ln}{m}\right)^{-it} \right. \\ &\quad \times \left. \int_0^h g_1(t+u) \left(\frac{ln}{m}\right)^{-iu} du \right| dt. \end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned} \Delta(l, m) &= (y, T^{0,1}] \cap [ml^{-1} \exp(-h^{-1}), ml^{-1} \exp(h^{-1})], \\ \Delta_1(l, m) &= (y, T^{0,1}] \setminus \Delta(l, m). \end{aligned}$$

Тогда

$$I_{11}(1) \leq hI_{111}(1) + I_{112}(1), \quad (37)$$

где

$$I_{111}(1) = \int_T^{2T+1} \left| \sum_{(l,m) \in \mathcal{M}} d_{l,m} \sum_{\substack{n \in \Delta(l,m) \\ (n, \mathbb{P})=1}} \frac{a(n)}{\sqrt{n}} \left(\frac{ln}{m} \right)^{-it} \right| dt,$$

$$I_{112}(1) = \int_T^{2T+h} \left| \sum_{(l,m) \in \mathcal{M}} d_{l,m} \sum_{\substack{n \in \Delta_1(l,m) \\ (n, \mathbb{P})=1}} \frac{a(n)}{\sqrt{n}} \left(\frac{ln}{m} \right)^{-it} \right. \\ \left. \times \int_0^h g_1(t+u) \left(\frac{ln}{m} \right)^{-iu} du \right| dt.$$

Берем интегралы по u один раз по частям, делаем интегрирование по u внешним и, используя (35), получаем

$$I_{12}(1) \ll \int_T^{2T+1} \left| \sum_{(l,m) \in \mathcal{M}} d_{l,m} \left(\frac{l}{m} \right)^{-it} \sum_{\substack{T^{0,1} < n \leq T \\ (n, \mathbb{P})=1}} \frac{a(n)}{\sqrt{n}} n^{-it} \ln^{-1} \frac{ln}{m} \right| dt, \quad (38)$$

$$I_{112}(1) \ll \int_T^{2T+1} \left| \sum_{(l,m) \in \mathcal{M}} d_{l,m} \sum_{\substack{n \in \Delta_1(l,m) \\ (n, \mathbb{P})=1}} \frac{a(n)}{\sqrt{n}} \left(\frac{ln}{m} \right)^{-it} \ln^{-1} \frac{lm}{n} \right| dt. \quad (39)$$

Применим неравенство Коши:

$$(I_{111}(1))^2 \ll \\ \ll T \left(T \sum_{(l,m) \in \mathcal{M}} \sum_{(l_1, m_1) \in \mathcal{M}} \sum_{\substack{n \in \Delta(l,m) \\ (n, \mathbb{P})=1}} \sum_{\substack{n_1 \in \Delta(l_1, m_1) \\ (n_1, \mathbb{P})=1}} d_{l,m} \bar{d}_{l_1, m_1} \frac{a(n)}{\sqrt{n}} \frac{\bar{a}(n_1)}{\sqrt{n_1}} + T^{0,3} \right).$$

$\frac{ln}{m} = \frac{l_1 n_1}{m_1}$

Так как $(n, \mathbb{P}) = 1$, $(n_1, \mathbb{P}) = 1$, а l, m, l_1, m_1 — числа из множества M , то

$$(n, l m l_1 m_1) = 1, \quad (n_1, l m l_1 m_1) = 1.$$

Кроме того, $(l, m) = 1$, $(l_1, m_1) = 1$, поэтому из равенства $\frac{ln}{m} = \frac{l_1 n_1}{m_1}$ следует, что $l = l_1$, $m = m_1$, $n = n_1$, т.е.

$$I_{111}(1) \ll T \left(\sum_{(l,m) \in \mathcal{M}} |d_{l,m}|^2 \sum_{\substack{n \in \Delta(l,m) \\ (n, \mathbb{P})=1}} \frac{|a(n)|^2}{n} \right)^{1/2} + T^{0,65}. \quad (40)$$

Аналогичное рассуждение дает

$$I_{112}(1) \ll T \left(\sum_{(l,m) \in M} |d_{l,m}|^2 \sum_{\substack{n \in \Delta_1(l,m) \\ (n, \mathbb{P})=1}} \frac{|a(n)|^2}{n} \ln^{-2} \frac{ln}{m} \right)^{1/2} + T^{0,65}. \quad (41)$$

Оценим суммы по n в правых частях (40) и (41). Разбивая промежутки суммирования по геометрическим прогрессиям, получаем

$$\sum_{\substack{n \in \Delta(l, m) \\ (n, \mathbb{P})=1}} \frac{|a(n)|^2}{n} \ll h^{-1} U^{-1} \sum_{\substack{n \leq U \\ (n, \mathbb{P})=1}} |a(n)|^2,$$

где U – некоторое число из промежутка $(y, T^{0,1}]$;

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \Delta_1} \frac{|a(n)|^2}{n} \ln^{-2} \frac{ln}{m} &\ll \sum_{r=0}^{\infty} (r + h^{-1})^{-2} \sum_{\substack{n \leq U_r \\ (n, \mathbb{P})=1}} |a(n)|^2 U_r^{-1} \\ &+ \sum_{r=0}^{\infty} (r + h^{-1})^{-2} \sum_{\substack{n \leq V_r \\ (n, \mathbb{P})=1}} |a(n)|^2 V_r^{-1}, \end{aligned}$$

где $U_r = ml^{-1} \exp(r + h^{-1})$, $V_r = ml^{-1} \exp(-(r + h^{-1}))$, а штрих означает, что суммирование идет по тем r , для которых $y < U_r \leq T^{0,1}$, $y < V_r \leq T^{0,1}$.

Оценивая получившиеся суммы по n по лемме 6, имеем

$$hI_{111}(1) + I_{112}(1) \ll Th^{1/2}(\ln y)^{-1/2} \left(\sum_{(l, m) \in \mathcal{M}} |d_{l, m}|^2 \right)^{1/2}. \quad (42)$$

Оценим сумму

$$V = \sum_{(l, m) \in \mathcal{M}} |d_{l, m}|^2.$$

Из (33), (1) и определения $G(s)$ следует, что

$$\begin{aligned} V &\ll T^{-1} \int_T^{2T} \left| P \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^2 dt + T^{-0,001} \\ &\ll \prod_{p \leq y} (1 + |a(p)|^2 p^{-1} + |a(p^2)|^2 p^{-2} + \dots) + T^{-0,001}. \end{aligned}$$

Но ввиду (7) последнее произведение оценивается как $\ll \ln y$, значит,

$$\sum_{(l, m) \in \mathcal{M}} |d_{l, m}|^2 \ll \ln y. \quad (43)$$

Подставляя эту оценку в (42) и (37), получаем

$$I_{11}(1) \ll Th^{1/2}. \quad (44)$$

7. Оценим $I_{12}(1)$. К сумме по n в правой части (38) применим формулу частного суммирования:

$$\begin{aligned}
I_{12}(1) &\ll \int_{T^{0,1}}^T u^{-1} \int_T^{2T+1} \left| \sum_{(l,m) \in \mathcal{M}} d_{l,m} \left(\frac{l}{m} \right)^{-it} \ln^{-2} \frac{lu}{m} \right| \\
&\times \left| \sum_{\substack{T^{0,1} < n \leq u \\ (n, \mathbb{P})=1}} \frac{a(n)}{\sqrt{n}} n^{-it} \right| dt du + \int_T^{2T+1} \left| \sum_{(l,m) \in \mathcal{M}} d_{l,m} \left(\frac{l}{m} \right)^{-it} \ln^{-1} \frac{lT}{m} \right| \\
&\times \left| \sum_{\substack{T^{0,1} < n \leq T \\ (n, \mathbb{P})=1}} \frac{a(n)}{\sqrt{n}} n^{-it} \right| dt. \tag{45}
\end{aligned}$$

Пусть теперь u – произвольное число из промежутка $(T^{0,1}, T]$. Тогда $\ln \frac{lu}{m} \asymp \ln T$. Применим неравенство Коши, лемму 3 и соотношения (11) и (43):

$$\begin{aligned}
&\int_T^{2T+1} \left| \sum_{(l,m) \in \mathcal{M}} d_{l,m} \left(\frac{l}{m} \right)^{-it} \ln^{-2} \frac{lu}{m} \right| \left| \sum_{\substack{T^{0,1} < n \leq u \\ (n, \mathbb{P})=1}} \frac{a(n)}{\sqrt{n}} n^{-it} \right| dt \\
&\ll \left(\int_T^{2T+1} \left| \sum_{(l,m) \in \mathcal{M}} d_{l,m} \left(\frac{l}{m} \right)^{-it} \ln^{-2} \frac{lu}{m} \right|^2 dt \right)^{1/2} \\
&\times \left(\int_T^{2T+1} \left| \sum_{\substack{T^{0,1} < n \leq u \\ (n, \mathbb{P})=1}} \frac{a(n)}{\sqrt{n}} n^{-it} \right|^2 dt \right)^{1/2} \ll T \left(\sum_{(l,m) \in \mathcal{M}} |d_{l,m}|^2 \ln^{-4} T \right)^{1/2} \\
&\times \left(\sum_{n \leq T} \frac{|a(n)|^2}{n} \right)^{1/2} \ll T (\ln y)^{1/2} (\ln T)^{-3/2}.
\end{aligned}$$

Второй интеграл аналогичными рассуждениями оценивается как $T(\ln y)^{1/2} \times (\ln T)^{-1/2}$; теперь ввиду (45) имеем

$$I_{12}(1) \ll T(\ln y)^{1/2} (\ln T)^{-1/2} \ll Th.$$

Подставляя эту оценку и (44) в (36), получаем искомую оценку

$$I_1'(1) \ll Th^{3/2}. \tag{46}$$

8. Оценим $I_1''(1)$. Применим (34):

$$\begin{aligned}
I_1''(1) &\ll \int_T^{2T} \left| \sum_{(l,m) \in \mathcal{M}} c_{l,m} \sum_{\substack{n_1 \in M \\ n_1 \leq T^{0,01}}} \frac{a(n_1)}{\sqrt{n_1}} \left(\frac{ln_1}{m} \right)^{-it} \sum_{Tn_1^{-1} < n \leq T} \frac{a(n)}{\sqrt{n}} n^{-it} \right. \\
&\times \left. \int_0^h \int_0^h g_1(t + u_1 + u_2) \left(\frac{ln_1 n}{m} \right)^{-i(u_1 + u_2)} du_1 du_2 \right| dt + T^{1-0,001}.
\end{aligned}$$

Проинтегрируем по частям по u_1 и u_2 и воспользуемся (35); тогда

$$I_1''(1) \ll \int_T^{2T+1} \left| \sum_{(l,m) \in \mathcal{M}} c_{l,m} \sum_{\substack{n_1 \in M \\ n_1 \leq T^{0,01}}} \frac{a(n_1)}{\sqrt{n_1}} \left(\frac{ln_1}{m} \right)^{-it} \right. \\ \left. \times \sum_{\substack{Tn_1^{-1} < n \leq T \\ (n, \mathbb{P})=1}} \frac{a(n)}{\sqrt{n}} n^{-it} \ln^{-2} \frac{ln_1 n}{m} \right| dt + T^{1-0,001}.$$

Применим стандартный прием, позволяющий сделать пределы суммирования по n независимыми от n_1 :

$$\sum_{\substack{Tn_1^{-1} < n \leq T \\ (n, \mathbb{P})=1}} \frac{a(n)}{\sqrt{n}} n^{-it} \ln^{-2} \frac{ln_1 n}{m} = U^{-1} \sum_{b=0}^{U-1} \left(\sum_{T^{0,99} < n \leq T} \frac{a(n)}{\sqrt{n}} \right. \\ \left. \times \exp \left(\frac{2\pi i b n}{U} \right) n^{-it} \ln^{-2} \frac{ln_1 n}{m} \right) \left(\sum_{Tn_1^{-1} < n_2 \leq T} \exp \left(-\frac{2\pi i b n_2}{U} \right) \right),$$

где $U = [2T] + 1$;

$$I_1''(1) \ll \sum_{b=0}^U \frac{1}{b+1} \int_T^{2T+1} \left| \sum_{(l,m) \in \mathcal{M}} c_{l,m} \sum_{\substack{n_1 \in M \\ n_1 \leq T^{0,01}}} \frac{a'(n_1)}{\sqrt{n_1}} \left(\frac{ln_1}{m} \right)^{-it} \right. \\ \left. \times \sum_{\substack{T^{0,99} < n \leq T \\ (n, \mathbb{P})=1}} \frac{a''(n)}{\sqrt{n}} n^{-it} \ln^{-2} \frac{ln_1 n}{m} \right| dt + T^{1-0,001}, \\ a'(n) = a(n) \exp \left(-2\pi i \frac{b}{U} n \right), \\ a''(n) = a(n) \exp \left(2\pi i \frac{b}{U} n \right).$$

Теперь, как и в п. 7, применим к сумме по n формулу частного суммирования и,

проведя соответствующие рассуждения, придем к неравенству

$$\begin{aligned}
I_1''(1) &\ll \sum_{b=0}^U \frac{1}{b+1} \left(\int_{T^{0,99}}^T u^{-1} \right. \\
&\quad \times \left. \int_T^{2T+1} \left| \sum_{(l,m) \in \mathcal{M}} c_{l,m} \sum_{\substack{n_1 \in M \\ n_1 \leq T^{0,01}}} \frac{a'(n_1)}{\sqrt{n_1}} \left(\frac{\ln n_1}{m} \right)^{-it} \ln^{-3} \frac{\ln n_1 u}{m} \right| \right. \\
&\quad \times \left. \left| \sum_{\substack{T^{0,99} < n \leq u \\ (n, \mathbb{P})=1}} \frac{a''(n)}{\sqrt{n}} n^{-it} \right| dt du \right. \\
&\quad + \left. \int_T^{2T+1} \left| \sum_{(l,m) \in \mathcal{M}} c_{l,m} \sum_{\substack{n_1 \in M \\ n_1 \leq T^{0,01}}} \frac{a'(n_1)}{\sqrt{n_1}} \left(\frac{\ln n_1}{m} \right)^{-it} \ln^{-2} \frac{\ln n_1 T}{m} \right| \right. \\
&\quad \times \left. \left| \sum_{\substack{T^{0,99} < n \leq T \\ (n, \mathbb{P})=1}} \frac{a''(n)}{\sqrt{n}} n^{-it} \right| dt \right) + T^{1-0,001}. \tag{47}
\end{aligned}$$

В правой части (47) два интеграла; они оцениваются одинаково. Оценим, например, первый из них. Применим неравенство Коши в той же форме, как в п. 7; тогда при любом u ($T^{0,99} \leq u \leq T$)

$$\begin{aligned}
K &= \int_T^{2T+1} \left| \sum_{(l,m) \in \mathcal{M}} c_{l,m} \sum_{\substack{n_1 \in M \\ n_1 \leq T^{0,01}}} \frac{a'(n_1)}{\sqrt{n_1}} \left(\frac{\ln n_1}{m} \right)^{-it} \ln^{-3} \frac{\ln n_1 u}{m} \right| \\
&\quad \times \left| \sum_{\substack{T^{0,99} < n \leq u \\ (n, \mathbb{P})=1}} \frac{a''(n)}{\sqrt{n}} n^{-it} \right| dt \ll \left(T \ln T \int_T^{2T+1} \left| \sum_{(l,m) \in \mathcal{M}} c_{l,m} \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left. \sum_{\substack{n_1 \in M \\ n_1 \leq T^{0,01}}} \frac{a'(n_1)}{\sqrt{n_1}} \left(\frac{\ln n_1}{m} \right)^{-it} \ln^{-3} \frac{u n_1 l}{m} \right|^2 dt \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Для оценки последнего интеграла применим лемму 5, в которой с учетом (31) положим

$$\begin{aligned}
d_1(\nu_1) &= \sum_{\substack{\mu_1 \mu_2 = \nu_1 \\ 1 \leq \mu_1, \mu_2 \leq T^{0,01}}} \alpha(\mu_1) a'(\mu_2), \\
d_2(\nu_2) &= \sum_{\substack{\mu_1 \mu_2 = \nu_2 \\ 1 \leq \mu_1, \mu_2 \leq T^{0,01}}} \bar{\alpha}(\mu_1) a_1(\mu_2), \\
f(\nu_1, \nu_2) &= \ln^{-3} u \nu_1 \nu_2^{-1}, \quad f = \ln^{-3} T, \\
N_1 &= N_2 = T^{0,02}, \\
d(\nu) &= \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 = \nu} |\alpha(\mu_1) \alpha(\mu_2) a(\mu_3) a_1(\mu_4)|.
\end{aligned}$$

Заметим, что $d(\nu)$ – мультипликативная функция, причем

$$|d(p)|^2 \leq 6|a_1(p)|^2 + 3|a(p)|^2, \quad |d(\nu)| \ll \nu^\varepsilon;$$

поэтому ввиду (7)

$$K \ll \left(T^2 \ln^{-5} T \prod_{p \leq y} (1 + |d(p)|^2 p^{-1} + |d(p^2)|^2 p^{-2} + \dots) \right)^{1/2} \ll T \ln^{-2,5} T \ln^{4,5} y.$$

Оценив аналогичным образом второй интеграл по t как $\ll T \ln^{-1,5} T \ln^{4,5} y$ и подставив полученные оценки в (47), получим

$$I_1''(1) \ll T \ln^{-0,5} T \ln^{4,5} y \ll Th^2.$$

Объединяя эту оценку с (46), приходим к оценке

$$I_1(1) \ll Th^{3/2}. \quad (48)$$

9. Оценим $I_1(2)$. Пользуясь формулой Стирлинга и (34) и делая интегрирование по u_2 внешним, получаем

$$\begin{aligned} I_1(2) &\ll h \int_T^{2T+h} \left| \sum_{(l,m) \in \mathcal{M}} c_{l,m} \left(\frac{l}{m} \right)^{-it} \sum_{n \leq T} \frac{\bar{a}(n)}{\sqrt{n}} n^{it} \right. \\ &\quad \times \left. \int_0^h g_1(t+u) \exp \left(-iu \ln \frac{Q_1^2 t^2 l}{mn} \right) du \right| dt + T^{1-0,0001}. \end{aligned}$$

Проинтегрируем по частям по u и воспользуемся формулой (35):

$$I_1(2) \ll h \int_T^{2T+h} \left| \sum_{(l,m) \in \mathcal{M}} c_{l,m} \left(\frac{l}{m} \right)^{-it} \sum_{n \leq T} \frac{\bar{a}(n)}{\sqrt{n}} n^{it} \ln^{-1} \frac{Q_1^2 t^2 l}{mn} \right| dt + T^{1-0,0001}. \quad (49)$$

Ввиду (31) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{(l,m) \in \mathcal{M}} c_{l,m} \left(\frac{l}{m} \right)^{-it} \sum_{n \leq T} \frac{\bar{a}(n)}{\sqrt{n}} n^{it} \ln^{-1} \frac{Q_1^2 t^2 l}{mn} &= \sum_{\substack{\nu_1 \in M \\ \nu_1 \leq T^{0,01}}} \frac{\alpha(\nu_1)}{\sqrt{\nu_1}} \nu_1^{-it} \\ &\times \sum_{\substack{\nu_2 \in M \\ \nu_2 \leq T^{0,01}}} \frac{\bar{\alpha}(\nu_2)}{\sqrt{\nu_2}} \nu_2^{it} \sum_{\substack{\nu_3 \in M \\ \nu_3 \leq T^{0,01}}} \frac{\bar{a}_1(\nu_3)}{\sqrt{\nu_3}} \nu_3^{it} \sum_{n \leq T} \frac{\bar{a}(n)}{\sqrt{n}} n^{it} \ln^{-1} \frac{Q_1^2 t^2 \nu_1 \nu_3}{n \nu_2}. \end{aligned}$$

Заметим, что $\ln \frac{Q_1^2 t^2 \nu_1 \nu_3}{n \nu_2} \asymp \ln T$ при любых значениях n, ν_1, ν_2, ν_3 из промежутков суммирования. Применим к суммам по каждой переменной формулу частного

суммирования; получим шестнадцать сумм, интегралы по t от их модулей оцениваются одинаково. Оценим, например, следующий интеграл:

$$\begin{aligned} & \int_1^T \int_1^{T^{0,01}} \int_1^{T^{0,01}} \int_1^{T^{0,01}} u_1^{-1} u_2^{-1} u_3^{-1} u_4^{-1} \left(\ln \frac{Q_1^2 T^2 u_2 u_3}{u_1 u_4} \right)^{-5} \\ & \times \int_T^{2T+1} \left| \sum_{\substack{\nu_1 \in M \\ \nu_1 \leq u_2}} \frac{\alpha(\nu_1)}{\sqrt{\nu_1}} \nu_1^{-it} \sum_{\substack{\nu_2 \in M \\ \nu_2 \leq u_3}} \frac{\bar{\alpha}(\nu_2)}{\sqrt{\nu_2}} \nu_2^{it} \sum_{\substack{\nu_3 \in M \\ \nu_3 \leq u_4}} \frac{\bar{a}(\nu_3)}{\sqrt{\nu_3}} \nu_3^{-it} \right| \\ & \times \left| \sum_{n \leq u_1} \frac{\bar{a}(n)}{\sqrt{n}} n^{it} \right| dt du_4 du_3 du_2 du_1. \end{aligned} \quad (50)$$

Применим к интегралу по t (обозначим его через K_1) неравенство Коши:

$$\begin{aligned} K_1 & \ll \left(\int_T^{2T+1} \left| \sum_{\substack{\nu_1 \in M \\ \nu_1 \leq u_2}} \frac{\alpha(\nu_1)}{\sqrt{\nu_1}} \sum_{\substack{\nu_2 \in M \\ \nu_2 \leq u_3}} \frac{\bar{\alpha}(\nu_2)}{\sqrt{\nu_2}} \sum_{\substack{\nu_3 \in M \\ \nu_3 \leq u_4}} \frac{\bar{a}(\nu_3)}{\sqrt{\nu_3}} \left(\frac{\nu_1 \nu_3}{\nu_2} \right)^{-it} \right|^2 dt \right)^{1/2} \\ & \times \left(\int_T^{2T+1} \left| \sum_{n \leq u_1} \frac{\bar{a}(n)}{\sqrt{n}} n^{it} \right|^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Второй интеграл по лемме 3 и формуле (11) оценим как $\ll T \ln T$. К первому интегралу применим лемму 5 и оценим (в силу рассуждений, аналогичных приведенным в п. 8) как $\ll T \ln^4 y$. Тогда

$$K_1 \ll T (\ln T)^{1/2} \ln^2 y;$$

подставим эту оценку в (50) и убедимся, что наш интеграл оценился как

$$\ll T (\ln T)^{-1/2} \ln^2 y.$$

Аналогично оценим остальные пятнадцать интегралов. Тогда

$$I_1(2) \ll T (\ln T)^{-1/2} \ln^2 y \ll Th^2. \quad (51)$$

Объединяя (51), (48) и оценку, выписанную в конце п. 2, приходим к неравенству

$$\sum_{j=1}^N |a_j| I_{1j} \ll Th^{3/2}. \quad (52)$$

10. Опеним сверху интеграл I_2 :

$$I_2 = \sum_{j=1}^N |a_j| I_{2j}, \quad (53)$$

где

$$I_{2j} = \int_T^{2T} \left| \int_0^h \int_0^h Z_j(t + u_1 + u_2) du_1 du_2 \right| dt,$$

а функции $Z_j(t)$ определены равенствами (3)–(5).

Оценки интегралов I_{2j} проводятся одинаково при любых j , $1 \leq j \leq N$, поэтому зафиксируем j и примем те же соглашения об обозначениях, что в начале п. 2.

Пусть $I_1(3), \dots, I_1(6)$ – интегралы из п. 2. Тогда в силу лемм 1, 2 и 4

$$I_{2j} \ll h I'_{2j} + h^2 I''_{2j} + \sum_{\mu=3}^6 I_1(\mu) + T^{3/4} \ll h I'_{2j} + h^2 I''_{2j} + h^2 T, \quad (54)$$

где

$$I'_{2j} = \int_T^{2T+h} \left| \sum_{n \leq T_1} \frac{a(n)}{\sqrt{n}} n^{-it} \int_0^h \exp(u \ln(Q_1 t n^{-1})) du \right| dt,$$

$$I''_{2j} = \int_T^{2T+1} \left| \sum_{T_1 < n \leq T} \frac{a(n)}{\sqrt{n}} n^{-it} \right| dt,$$

$$T_1 = T \exp(-h^{-1}).$$

Оценим I''_{2j} при помощи леммы 3, (11) и неравенства Коши:

$$I''_{2j} \ll T \left(\sum_{T_1 < n \leq T} \frac{|a(n)|^2}{n} \right)^{1/2} \ll T (\ln(T T_1^{-1}))^{1/2} \ll T h^{-1/2}. \quad (55)$$

Оценим I'_{2j} . Возьмем интеграл по u :

$$I'_{2j} \ll \int_T^{2T+1} \left| \sum_{n \leq T_1} \frac{a(n)}{\sqrt{n}} n^{-it} \ln^{-1}(Q_1 t n^{-1}) \right| dt.$$

Справедливо неравенство

$$\left| \sum_{n \leq T_1} \frac{a(n)}{\sqrt{n}} n^{-it} \ln^{-1}(Q_1 t n^{-1}) \right| \leq \ln 2 \int_1^{T_1} |\mathbb{C}(u)| (u \ln^2(Q_1 T u^{-1}))^{-1} du + |\mathbb{C}(T)|,$$

где

$$\mathbb{C}(u) = \sum_{n \leq u} \frac{a(n)}{\sqrt{n}} n^{-it} \ln^{-1}(Q_1 T n^{-1}).$$

Проинтегрируем обе его части по t и применим неравенство Коши и лемму 3:

$$I'_{2j} \ll T \left(\sum_{n \leq T_1} \frac{|a(n)|^2}{n} \ln^{-2}(Q_1 T n^{-1}) \right)^{1/2}.$$

Отсюда и из (11) частным суммированием получаем

$$I'_{2j} \ll T (\ln(Q_1 T T_1^{-1}))^{-1/2} \ll T h^{1/2},$$

что с учетом (52)–(55) дает

$$I_2 \ll T h^{3/2}. \quad (56)$$

11. Докажем, что существует множество $E_1 \subset [T, 2T]$ такое, что:

$$1) \text{ mes}(E_1) > c_0 T, \quad (57)$$

где c_0 – положительная постоянная, зависящая только от N ;

2) при любом t из E_1 выполнены неравенства

$$\left| P_1 \left(\frac{1}{2} + it \right) \right| > \exp(1,5\sqrt{\ln \ln T}), \quad (58)$$

$$\left| P_j \left(\frac{1}{2} + it \right) \right| \leq 1 \text{ при любых } j, \quad 2 \leq j \leq N. \quad (59)$$

Пусть

$$E_3 = \left\{ t \in [T, 2T] \mid \left| \ln \left| P \left(\frac{1}{2} + it \right) \right| - \operatorname{Re} \left(\sum_{p \leq y} \frac{a_j(p)}{\sqrt{p}} p^{-it} \right) \right| \leq 0,1\sqrt{\ln \ln y} \right. \\ \left. \text{для всех } j, \quad j = 1, 2, \dots, N \right\}, \\ E_2 = \{ t \in [T, 2T] \mid f_1(t) > 0, \dots, f_N(t) > 0 \},$$

где $f_1(t), \dots, f_N(t)$ – функции из леммы 8. Пусть

$$\text{mes}(E_2) > 2c_0 T. \quad (60)$$

Тогда в силу следствия леммы 9, в котором параметр L выбран равным $0,1\sqrt{\ln \ln y}$,

$$\text{mes}(E_2 \cap E_3) > c_0 T.$$

Положим $E_1 = E_2 \cap E_3$; тогда при любых t из E_1 неравенства (57)–(59), очевидно, выполняются и достаточно доказать справедливость (60).

Применим лемму 7, полагая

$$H_1(x) = \exp(ax - a^2), \quad a = 16 + \sqrt{8 \ln N},$$

$f_1(t), \dots, f_N(t)$ – функции из леммы 8. Имеем

$$\begin{aligned} \text{mes}(E_2) &\geq \exp(-a^2 N) \int_T^{2T} \exp \left(a \sum_{j=1}^N f_j(t) \right) dt - \exp(-a^2 N) \\ &\times \sum_{n=1}^N \int_T^{2T} \exp \left(a \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^N f_j(t) \right) dt - \exp(-a^2(N+1)) \\ &\times \sum_{n=1}^N \int_T^{2T} \exp \left(a \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^N f_j(t) + 2af_n(t) \right) dt. \end{aligned}$$

Получившиеся интегралы вычислим асимптотически, применив к ним лемму 7 (в первом случае с $b = a$, во втором с $b = 0$ и в третьем с $b = 2a$):

$$\begin{aligned} \text{mes}(E_2) \geq T \exp\left(-\frac{3a^2}{4}N - 2aN\right) & \left(1 - N \exp\left(-\frac{a^2}{4} - 2a\right)\right. \\ & \left. - N \exp\left(-\frac{a^2}{4} + 2a\right)\right) (1 + O((\ln \ln y)^{-1})). \end{aligned}$$

Но значение параметра a выбрано так, что

$$N \exp\left(-\frac{a^2}{4} - 2a\right) + N \exp\left(-\frac{a^2}{4} + 2a\right) \leq \frac{1}{2},$$

поэтому (60) выполняется при $c_0 = \frac{1}{4} \exp(-\frac{3}{4}a^2N - 2aN)$, и существование множества E_1 со свойствами 1) и 2) доказано.

12. Завершим доказательство теоремы. Пусть S – множество таких t из отрезка $[T, 2T]$, что

$$I(t) = J(t),$$

где

$$\begin{aligned} I(t) &= \left| \int_0^h \int_0^h \mathcal{F}(t + u_1 + u_2) du_1 du_2 \right|, \\ J(t) &= \int_0^h \int_0^h |\mathcal{F}(t + u_1 + u_2)| du_1 du_2. \end{aligned}$$

Оценим интеграл $I = \int_S J(t) dt$ сверху и снизу. Из определения S и (56) следует, что

$$I \leq I_2 \ll Th^{3/2}. \quad (61)$$

Далее, рассуждая, как в п. 1, приходим к

$$\begin{aligned} I \geq h^2 \min_{0 \leq u' \leq 2h} \int_{(S+u') \cap E_1} & \left(|a_1| \left| P_1\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| \right. \\ & \left. - \sum_{j=2}^N |a_j| \left| P_j\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| \right) dt - \sum_{j=1}^N |a_j| I_{1j}, \end{aligned} \quad (62)$$

где E_1 – множество, обладающее свойствами 1) и 2), существование которого доказано в п. 11, I_{1j} – интегралы из п. 1.

Отсюда и из (52), (57)–(59) следует, что

$$I \geq c_2 h^2 \text{mes}((S + u) \cap E_1) \exp(1,5\sqrt{\ln \ln T}) - c_2 Th^{3/2},$$

где c_2 – положительная постоянная, а через u обозначено то значение u' , при котором достигается минимум правой части (62). Сравнивая последнее неравенство с (61), получаем

$$\text{mes}((S + u) \cap E_1) \leq c_3 Th^{-1/2} \exp(-1,5\sqrt{\ln \ln T}) \leq 0,5c_0 T, \quad (63)$$

где c_3 – положительная постоянная.

Пусть $E = [T, 2T] \setminus S$. Тогда из (57) и (63) имеем

$$c_0 T < \text{mes}(E_1) \leq \text{mes}((S+u) \cap E_1) + \text{mes}((E+u) \cap E_1) \leq \text{mes}(E) + 4h + \frac{1}{2}c_0 T,$$

а значит,

$$\frac{1}{4}c_0 T < \text{mes}(E). \quad (64)$$

Разделим отрезок $[T, 2T]$ на промежутки длины $2h$ вида $[T+2nh, T+2nh+2h)$, $n = 0, 1, \dots, [T(2h)^{-1}]$. Ввиду (64) среди таких промежутков по крайней мере $[\frac{1}{4}c_0 T(2h)^{-1}]$ содержат точки из множества E . Но если промежуток $[T+2nh, T+2nh+2h)$ содержит точку из множества E , то промежуток $[T+2nh, T+2nh+4h)$ содержит нуль нечетного порядка функции $\mathcal{F}(t)$. Следовательно, нулей нечетного порядка функции $\mathcal{F}(t)$ на отрезке $[T, 2T]$ не меньше чем

$$\frac{1}{10}c_0 T(2h)^{-1} > T \exp(\sqrt{\ln \ln \ln T}).$$

Теорема доказана.

В заключение выражаю глубокую благодарность С. М. Воронину за полезные советы.

Список литературы

1. Selberg A. Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series // Proc. of the Amalfi Conf. on Anal. Number Theory. Univ. di Salerno, 1992. P. 367–385.
2. Conrey J. B., Ghosh A. On the Selberg class of Dirichlet series: small degrees // Duke Math. J. 1993. V. 72. № 3. P. 673–695.
3. Карацуба А. А. Новый подход к проблеме нулей некоторых рядов Дирихле // Тр. МИРАН. 1994. Т. 207. С. 180–196.
4. Карацуба А. А. Нули арифметических рядов Дирихле // Math. Slovaca. 1994. Т. 44. № 5. С. 633–649.
5. Bombieri E., Hejhal D. Sur les zéros des fonctions zêta d'Epstein // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. Math. 1987. V. 304. P. 213–217.
6. Hejhal D. Zeros of Epstein zeta-functions and supercomputers // Proc. Intern. Congr. Math. Berkeley (Calif., USA). 1986. P. 1362–1384.
7. Davenport H., Heilbronn H. On the zeros of certain Dirichlet series // J. London Math. Soc. 1936. V. 11. P. 181–185, 307–312.
8. Карацуба А. А. О нулях функции Дэвенпорта–Хейльбронна, лежащих на критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 2. С. 303–315.
9. Воронин С. М. О нулях дзета-функций квадратичных форм // Тр. МИАН. 1976. Т. 142. С. 136–147.
10. Воронин С. М. О нулях дзета-функций квадратичных форм // ДАН СССР. 1977. Т. 235. № 2. С. 257–258.
11. Hardy G. H., Littlewood J. E. The zeros of Riemann zeta-function on the critical line // Math. Zs. 1921. V. 10. P. 283–317.
12. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994.
13. Воронин С. М. О нулях некоторых рядов Дирихле, лежащих на критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1980. Т. 44. № 1. С. 63–91.
14. Лаврик А. А. Проблема Титчмарша дискретной теории дзета-функции Римана // Тр. МИРАН. 1994. Т. 207. С. 197–230.
15. Ivič A. The Riemann zeta-function. N. Y.: John Wiley and Sons, 1985.
16. Hardy G. H., Wright E. M. An introduction to the Theory of Numbers. 4-th edition. Oxford: Clarendon Press, 1959.
17. Хооли К. Применение методов решета в теории чисел. М.: Наука, 1987.