Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Б. Диденко, О непрерывной обратимости и фредгольмовости дифференциальных операторов с многозначными импульсными воздействиями, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2013, том 77, выпуск 1, 5–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7800>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 06:51:06

УДК 517.9

В. Б. Диденко

О непрерывной обратимости и фредгольмовости дифференциальных операторов с многозначными импульсными воздействиями

Получены необходимые и достаточные условия для непрерывной обратимости и фредгольмовости операторов, порожденных семейством эволюционных операторов, граничными условиями, заданными линейным отношением, и импульсными воздействиями, также заданными при помощи линейного отношения.

Библиография: 17 наименований.

Ключевые слова: непрерывная обратимость, фредгольмовость, семейство эволюционных операторов, линейное отношение, импульсное воздействие.

DOI: 10.4213/im7800

§ 1. Введение

Часто на практике (см. [1], [2]) возникают задачи, в которых рассматривается эволюция процессов с кратковременными возмущениями. В этом случае удобно пренебречь длительностью этих возмущений, т. е. считать, что они носят мгновенный характер. Это приводит нас к необходимости рассматривать динамические системы с разрывными траекториями. Обычно такие системы описываются дифференциальными уравнениями с импульсными воздействиями.

Линейные дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями рассматривались в конечномерном пространстве [3], [4] и в банаховом пространстве [5]. В этих работах импульсные воздействия задавались с помощью линейного ограниченного оператора, определенного на всем фазовом пространстве. В то же время возникают задачи, в которых импульсные воздействия задаются многозначными отображениями, а также отображениями, область которых не совпадает со всем фазовым пространством. Например, такие задачи в случае конечномерного пространства были рассмотрены в работах [6], [7].

Для постановки задачи используется понятие линейного отношения (многозначного линейного оператора) на банаховом пространстве X . *Линейным отношением на банаховом пространстве X над полем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ называется линейное подпространство из декартова произведения $X \times X$. Частным случаем линейного отношения является график линейного оператора. Множество всех линейных отношений обозначим через $LR(X)$, множество всех замкнутых линейных отношений обозначим через $LRC(X)$. Основные сведения из теории линейных отношений приведены в следующем параграфе.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-01-00378).

В настоящей работе рассматривается линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad t \in [t_0, t_2], \quad (1)$$

где $A(t): D(A(t)) \subset X \rightarrow X$ – семейство линейных замкнутых операторов, действующих в банаховом пространстве X .

Разрыв решения x в точке $t_1 \in (t_0, t_2)$ определяется с помощью линейного отношения $\mathcal{A}$ из $\text{LRC}(X)$ следующим образом:

$$(x(t_1), x^+(t_1)) \in \mathcal{A}, \quad (2)$$

где $x^+(t_1)$ – предел справа функции x в точке t_1 .

Кроме того, решение x должно удовлетворять граничным условиям, заданным при помощи линейного отношения $\Gamma \in \text{LRC}(X)$:

$$(x(t_0), x(t_2)) \in \Gamma. \quad (3)$$

Часто линейные отношения задаются при помощи упорядоченной пары линейных операторов. Если (A, B) – упорядоченная пара линейных операторов из $\text{End } X$, то можно ввести в рассмотрение линейные отношения вида

$$\Gamma_1 = \{(Ax, Bx) : x \in X\}, \quad \Gamma_2 = \{(x, y) : Ax = By\}.$$

Естественным образом переписываются условия (2) и (3) для линейных отношений, заданных парой линейных операторов.

Предполагается корректная разрешимость задачи Коши

$$x(s) = x_0 \in D(A(s)), \quad s \in [t_0, t_2], \quad (4)$$

для однородного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad t \in [t_0, t_2], \quad t \geq s, \quad (5)$$

что ведет к существованию семейства эволюционных операторов (определение будет дано далее) $\mathcal{U}: \Delta_+ \rightarrow \text{End } X$, где $\Delta_+ = \{(t, s) \in [t_0, t_2] \times [t_0, t_2] \mid s \leq t\}$ и $\text{End } X$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, определенных на всем пространстве X .

Кроме того, мы будем предполагать непрерывную обратимость операторов $\mathcal{U}(t, s)$ для любой пары (t, s) из Δ_+ . Это условие равносильно тому, что семейство $\mathcal{U}$ можно продолжить на весь квадрат $\Delta = [t_0, t_2] \times [t_0, t_2]$ с сохранением приведенных ниже свойств 1)–3) по формуле $\mathcal{U}(t, s) = \mathcal{U}^{-1}(s, t)$ для любой пары (t, s) из $\Delta_- = \{(t, s) \in [t_0, t_2] \times [t_0, t_2] \mid s \geq t\}$.

Отображение $\mathcal{U}: \Delta \rightarrow \text{End } X$ называется (сильно непрерывным) *семейством эволюционных операторов* на $[t_0, t_2]$, если выполнены следующие условия:

- 1) $\mathcal{U}(t, t) = I$ – тождественный оператор для любого $t \in [t_0, t_2]$;
- 2) $\mathcal{U}(t, s)\mathcal{U}(s, \tau) = \mathcal{U}(t, \tau)$ для всех t, s, τ из $[t_0, t_2]$;
- 3) отображение $(t, s) \mapsto \mathcal{U}(t, s)x: \Delta \rightarrow X$ непрерывно для любого $x \in X$.

Семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}: \Delta \rightarrow \text{End } X$ решает абстрактную задачу Коши (4), (5), если для любого $s \in [t_0, t_2]$ существует плотное в X подпространство X_s из $D(A(s))$ такое, что для каждого x_0 из X_s функция $x(t) = \mathcal{U}(t, s)x_0$, $t_0 \leq s \leq t \leq t_2$, дифференцируема при всех $t \geq s$, причем $x(t) \in D(A(t))$ и выполнены равенства (4), (5).

Для операторнозначной функции A , принимающей значения в банаховой алгебре линейных ограниченных операторов $\text{End } X$ и, кроме того, сильно измеримой и интегрируемой по Бохнеру, в [8] было доказано, что семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}$ имеет вид $\mathcal{U}(t, s) = U(t)U^{-1}(s)$, где U – оператор Коши уравнения (5), который является решением уравнения

$$\frac{dU}{dt} = A(t)U.$$

Если функция $f: [t_0, t_2] \rightarrow X$ принадлежит пространству $L_1([t_0, t_2], X)$ суммируемых измеримых по Бохнеру (классов) функций, определенных на промежутке $[t_0, t_2]$ со значениями в X , то (слабым) решением уравнения (1) (при условии, что семейство $\mathcal{U}$ на $[t_0, t_2]$ решает задачу Коши (4), (5)) называется любая непрерывная функция $x: [t_0, t_2] \rightarrow X$, удовлетворяющая при всех $t_0 \leq s \leq t \leq t_2$ равенствам

$$x(t) = \mathcal{U}(t, s)x(s) + \int_s^t \mathcal{U}(t, \tau)f(\tau) d\tau. \quad (6)$$

Через $\tilde{C} = \tilde{C}([t_0, t_2], X)$ обозначим пространство непрерывных на каждом из промежутков $[t_0, t_1]$ и $(t_1, t_2]$ ограниченных функций $x: [t_0, t_2] \rightarrow X$, имеющих предел справа в точке t_1 . Норму в $\tilde{C}$ определим равенством

$$\|x\| = \sup_{t \in [t_0, t_2]} \|x(t)\|.$$

Стандартным образом можно показать, что пространство $\tilde{C}$ является банаховым.

Каждому семейству эволюционных операторов $\mathcal{U}: \Delta \rightarrow \text{End } X$ и паре замкнутых линейных отношений $\mathcal{A}$ и Γ можно поставить в соответствие линейный оператор

$$\mathcal{L}: D(\mathcal{L}) \subset \tilde{C} \rightarrow \tilde{C},$$

который определяется следующим образом. Функция x из $\tilde{C}$, для которой выполняются условия (2) и (3), включается в область определения $D(\mathcal{L})$ оператора $\mathcal{L}$, если существует такая функция f из $\tilde{C}$, что для пары функций (x, f) равенства (6) выполняются для всех (t, s) таких, что $t_0 \leq s \leq t \leq t_1$ или $t_1 < s \leq t \leq t_2$.

При этом полагается $\mathcal{L}x = f$. Отметим корректность определения оператора $\mathcal{L}$, т. е. единственность функции f , построенной по функции x .

В работе найдены необходимые и достаточные условия непрерывной обратимости и фредгольмовости оператора $\mathcal{L}$, построенного описанным выше способом.

Введем в рассмотрение линейное отношение

$$\mathcal{D} = \Gamma - \mathcal{U}(t_2, t_1)\mathcal{A}\mathcal{U}(t_1, t_0) \quad (7)$$

и два подпространства из X

$$\mathcal{X}_1 = \Gamma 0 \cap \mathcal{U}(t_2, t_1) \mathcal{A} 0, \quad (8)$$

$$\mathcal{X}_2 = \mathcal{U}(t_1, t_0) D(\Gamma) + D(\mathcal{A}). \quad (9)$$

Основными результатами статьи являются следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Оператор $\mathcal{L}$ непрерывно обратим тогда и только тогда, когда непрерывно обратимым является отношение $\mathcal{D}$ и выполняются равенства*

$$\mathcal{X}_1 = \{0\}, \quad (10)$$

$$\mathcal{X}_2 = X. \quad (11)$$

ТЕОРЕМА 2. *Оператор $\mathcal{L}$ фредгольмов тогда и только тогда, когда фредгольмовым является отношение $\mathcal{D}$, пространство $\mathcal{X}_1$ является конечномерным и пространство $\mathcal{X}_2$ имеет конечную коразмерность. Если оператор $\mathcal{L}$ фредгольмов, то его индекс можно вычислить по формуле*

$$\text{ind } \mathcal{L} = \dim \text{Ker } \mathcal{D} - \text{codim Im } \mathcal{D} + \dim \mathcal{X}_1 - \text{codim } \mathcal{X}_2. \quad (12)$$

Доказательства теорем 1, 2 приведены в § 3.

§ 2. Некоторые определения из теории линейных отношений

Пусть X – банахово пространство над полем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Любое линейное подпространство $\mathcal{A} \subseteq X \times X$ является линейным отношением на пространстве X . Линейные операторы будут часто отождествляться с их графиком, т. е. рассматриваться в качестве линейных отношений. Через $\text{End } X$ обозначим банахову алгебру линейных ограниченных операторов, определенных на всем пространстве X . Используемые далее понятия из теории линейных отношений (многозначных линейных операторов) можно найти в [9]–[11].

Областью определения $D(\mathcal{A})$ отношения $\mathcal{A} \in \text{LR}(X)$ называется подпространство вида $D(\mathcal{A}) = \{x \in X : (x, y) \in \mathcal{A} \text{ для некоторого } y \in X\}$.

Образом $\text{Im } \mathcal{A}$ отношения $\mathcal{A} \in \text{LR}(X)$ называется подпространство вида $\text{Im } \mathcal{A} = \{y \in X : (x, y) \in \mathcal{A} \text{ для некоторого } x \in X\}$.

Ядром линейного отношения $\mathcal{A}$ из $\text{LR}(X)$ называется подпространство $\text{Ker } \mathcal{A} = \{x \in D(\mathcal{A}) : (x, 0) \in \mathcal{A}\}$.

Для отношения $\mathcal{A} \in \text{LR}(X)$ и элемента $x \in X$ определим множество вида $\mathcal{A}x = \{y : (x, y) \in \mathcal{A}\}$. В частности, подпространство $\mathcal{A}0$ имеет вид $\mathcal{A}0 = \{y : (0, y) \in \mathcal{A}\}$.

ЛЕММА 1. *Пусть $\mathcal{A}$ – произвольное линейное отношение. Тогда для любой пары элементов (x, y) , принадлежащей отношению $\mathcal{A}$, выполняется равенство*

$$\mathcal{A}x = y + \mathcal{A}0. \quad (13)$$

ЛЕММА 2. *Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ – произвольные отношения из $\text{LR}(X)$ такие, что $\mathcal{A}0 \cap \mathcal{B}0 = \{0\}$, и пусть элементы x, y, z из X таковы, что пара (x, z) принадлежит отношению $\mathcal{A}$, а пара (y, z) принадлежит отношению $\mathcal{B}$. Тогда элемент z можно найти из равенства*

$$\{z\} = \mathcal{A}x \cap \mathcal{B}y. \quad (14)$$

Суммой двух линейных отношений $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ из $\text{LR}(X)$ называется линейное отношение вида $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = \{(x, y) \in X \times X : x \in D(\mathcal{A}_1) \cap D(\mathcal{A}_2), y \in \mathcal{A}_1 x + \mathcal{A}_2 x\}$. Здесь под $\mathcal{A}_1 x + \mathcal{A}_2 x$ понимается алгебраическая сумма двух множеств $\mathcal{A}_1 x, \mathcal{A}_2 x$. Из этого определения следует, что $D(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) = D(\mathcal{A}_1) \cap D(\mathcal{A}_2)$.

Обратным к линейному отношению $\mathcal{A} \in \text{LR}(X)$ называется линейное отношение $\mathcal{A}^{-1} = \{(y, x) \in X \times X : (x, y) \in \mathcal{A}\}$.

Отношение $\mathcal{A}$ из $\text{LRC}(X)$ называется *непрерывно обратимым*, если обратное отношение $\mathcal{A}^{-1}$ принадлежит алгебре $\text{End } X$, т.е. является линейным ограниченным оператором, определенным на всем пространстве X . Отметим, что замкнутое линейное отношение является непрерывно обратимым тогда и только тогда, когда $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0\}$ (отношение $\mathcal{A}$ инъективно) и $\text{Im } \mathcal{A} = X$ (отношение $\mathcal{A}$ сюръективно).

Линейное отношение $\mathcal{A}$ из $\text{LR}(X)$ называется *фредгольмовым*, если его ядро $\text{Ker } \mathcal{A}$ конечномерно, образ $\text{Im } \mathcal{A}$ замкнут и его коразмерность $\beta(\mathcal{A}) = \text{Codim Im } \mathcal{A} = \dim(X / \text{Im } \mathcal{A})$ конечна.

Число $\text{ind } \mathcal{A} = \alpha(\mathcal{A}) - \beta(\mathcal{A})$, где $\alpha(\mathcal{A}) = \dim \text{Ker } \mathcal{A}$, называется *индексом* фредгольмова отношения $\mathcal{A}$.

Если $\mathcal{A} \in \text{LRC}(X)$, то $D(\mathcal{A})$ – банахово пространство с нормой графика $\|x\|_{\mathcal{A}} = \|x\| + \|\mathcal{A}x\|$, где $\|\mathcal{A}x\| = \inf_{y \in \mathcal{A}x} \|y\|$.

ЛЕММА 3. *Если замкнутый оператор $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ имеет образ $\text{Im } A$ конечной коразмерности, то образ замкнут.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию леммы пространство X разлагается в прямую сумму двух подпространств:

$$X = \text{Im } A \oplus X_1,$$

причем X_1 конечномерно. Если рассматривать оператор A как действующий из банахова пространства $D(A)$ (с нормой графика) в пространство $\text{Im } A$ (с нормой пространства X), то A будет ограничен, поскольку $\|Ax\| \leq \|x\| + \|\mathcal{A}x\| = \|x\|_{\mathcal{A}}$. Таким образом, пространство X разлагается в прямую сумму подпространств, каждое из которых является образом ограниченного оператора, определенного на некотором банаховом пространстве. Из критерия Като (см. [12, теорема 7.4.20]) следует, что подпространство $\text{Im } A$ замкнуто. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если замкнутый оператор $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ имеет ядро конечной размерности и образ конечной коразмерности, то он фредгольмов.*

§ 3. Теоремы о непрерывной обратимости и фредгольмовости

Введем в рассмотрение линейные операторы $\mathcal{B}_i: X \rightarrow \tilde{C}, \mathcal{C}_i: \tilde{C} \rightarrow X, i = 1, 2$, определенные по правилам

$$(\mathcal{B}_1 x)(s) = \begin{cases} \frac{1}{t_1 - t_0} \mathcal{U}(s, t_1) x, & s \in [t_0, t_1], \\ 0, & s \in (t_1, t_2]; \end{cases} \quad (15)$$

$$(\mathcal{B}_2 x)(s) = \begin{cases} \frac{1}{t_2 - t_1} \mathcal{U}(s, t_2) x, & s \in (t_1, t_2], \\ 0, & s \in [t_0, t_1]; \end{cases} \quad (16)$$

$$\mathcal{C}_i f = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathcal{U}(t_i, s) f(s) ds, \quad f \in \tilde{C}, \quad i = 1, 2. \quad (17)$$

ЛЕММА 4. Операторы $\mathcal{B}_i, \mathcal{C}_i, i = 1, 2$, ограничены и удовлетворяют равенствам

$$\mathcal{C}_i \mathcal{B}_i = I_X, \quad i = 1, 2, \quad (18)$$

где I_X – тождественный оператор в X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению семейства эволюционных операторов $\mathcal{U}$ для любого элемента x из X функция $x: \Delta \rightarrow X$, определенная по правилу $x(t, s) = \mathcal{U}(t, s)x_0, (t, s) \in \Delta$, является непрерывной и, значит, ограниченной на Δ . Из принципа равномерной ограниченности (см. [13, теорема П.2.11]) следует, что существует такое число M , что $\|\mathcal{U}(t, s)\| \leq M$ для любой пары (t, s) из Δ . Отсюда следует ограниченность операторов $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$.

Докажем равенства (18). Для произвольного вектора x из X имеют место равенства

$$\mathcal{C}_i \mathcal{B}_i x = \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathcal{U}(t_i, s) \mathcal{U}(s, t_i) x ds = \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} x ds = x.$$

Итак, для любого элемента x из X выполняется равенство $\mathcal{C}_i \mathcal{B}_i x = x$, т. е. $\mathcal{C}_i \mathcal{B}_i = I_X$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть $\mathcal{L}x = f$ для некоторых функций x и f из $\tilde{C}$. Тогда справедливы равенства

$$x(t) = \mathcal{U}(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \mathcal{U}(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (19)$$

$$x(t) = \mathcal{U}(t, t_1)x^+(t_1) + \int_{t_1}^t \mathcal{U}(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad t_1 < t \leq t_2. \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (19) получается из (6) при s , равном t_0 .

Докажем равенство (20). Для любой пары элементов (t, s) таких, что $t_1 < s \leq t \leq t_2$, справедлива следующая цепочка равенств и неравенств:

$$\begin{aligned} & \left\| \mathcal{U}(t, t_1)x^+(t_1) + \int_{t_1}^t \mathcal{U}(t, \tau) f(\tau) d\tau - x(t) \right\| \\ &= \left\| \mathcal{U}(t, t_1)x^+(t_1) + \int_{t_1}^t \mathcal{U}(t, \tau) f(\tau) d\tau - \mathcal{U}(t, s)x(s) - \int_s^t \mathcal{U}(t, \tau) f(\tau) d\tau \right\| \\ &= \left\| \mathcal{U}(t, t_1)x^+(t_1) - \mathcal{U}(t, s)x^+(t_1) + \mathcal{U}(t, s)x^+(t_1) - \mathcal{U}(t, s)x(s) \right. \\ & \quad \left. + \int_{t_1}^s \mathcal{U}(t, \tau) f(\tau) d\tau \right\| \\ &\leq \|(\mathcal{U}(t, t_1) - \mathcal{U}(t, s))x^+(t_1)\| + \|\mathcal{U}(t, s)(x^+(t_1) - x(s))\| \\ & \quad + \left\| \int_{t_1}^s \mathcal{U}(t, \tau) f(\tau) d\tau \right\| \\ &\leq \|(\mathcal{U}(t, t_1) - \mathcal{U}(t, s))x^+(t_1)\| + M\|x^+(t_1) - x(s)\| + M(s - t_1)\|f\|, \quad (21) \end{aligned}$$

где число M таково, что $\|\mathcal{U}(\tau_2, \tau_1)\| \leq M$ для любой пары (τ_1, τ_2) из Δ (такое число существует; см. доказательство леммы 4). Последняя часть неравенства (21) стремится к нулю при $s \rightarrow t_1+$ ввиду сильной непрерывности семейства $\mathcal{U}$, а значит, выполняется равенство (20). Лемма доказана.

ЛЕММА 6. *Оператор $\mathcal{L}$ замкнут.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть последовательность (x_n, f_n) такая, что $x_n \in D(\mathcal{L})$ и $\mathcal{L}x_n = f_n$, $n \geq 1$, сходится к паре (x, f) . Покажем, что $x \in D(\mathcal{L})$ и $\mathcal{L}x = f$. Обозначим через M число $\sup_{(t,s) \in \Delta} \|\mathcal{U}(t, s)\|$. Имеем

$$\begin{aligned} & \left\| x(t) - \mathcal{U}(t, s)x(s) - \int_s^t \mathcal{U}(t, \tau)f(\tau) d\tau \right\| \\ &= \left\| x(t) - x_n(t) - \mathcal{U}(t, s)(x(s) - x_n(s)) - \int_s^t \mathcal{U}(t, \tau)(f(\tau) - f_n(\tau)) d\tau \right\| \\ &\leq \|x - x_n\| + M\|x - x_n\| + M(t_2 - t_0)\|f - f_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

для любой пары (t, s) , удовлетворяющей одному из неравенств $t_0 \leq s \leq t \leq t_1$ или $t_1 < s \leq t \leq t_2$. Отсюда получаем, что для пары (x, f) выполняются равенства (6). Поскольку (x_n) сходится к x , то последовательности $(x_n(t_0), x_n(t_2))$ и $(x_n(t_1), x_n^+(t_1))$ сходятся к $(x(t_0), x(t_2))$ и $(x(t_1), x^+(t_1))$ соответственно. В силу замкнутости отношений Γ и $\mathcal{A}$ получаем, что $(x(t_0), x(t_2)) \in \Gamma$, $(x(t_1), x^+(t_1)) \in \mathcal{A}$. Таким образом, по определению оператора $\mathcal{L}$ получаем, что $x \in D(\mathcal{L})$ и $\mathcal{L}x = f$. Лемма доказана.

ЛЕММА 7. *Ядро $\text{Ker } \mathcal{L}$ оператора $\mathcal{L}$ имеет конечную размерность тогда и только тогда, когда имеют конечную размерность подпространства $\text{Ker } \mathcal{D}$ и $\mathcal{X}_1$. Если ядро оператора $\mathcal{L}$ конечномерно, то для него справедливо равенство*

$$\dim \text{Ker } \mathcal{L} = \dim \text{Ker } \mathcal{D} + \dim \mathcal{X}_1. \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть ядро оператора $\mathcal{L}$ конечномерно. Докажем конечномерность подпространств $\text{Ker } \mathcal{D}$ и $\mathcal{X}_1$. Из равенств (19) и (20) следует, что функция x принадлежит ядру $\text{Ker } \mathcal{L}$ оператора $\mathcal{L}$ тогда и только тогда, когда она может быть представлена в виде

$$x(t) = \mathcal{U}(t, t_0)x' \quad (23)$$

на отрезке $[t_0, t_1]$ и в виде

$$x(t) = \mathcal{U}(t, t_1)x'' \quad (24)$$

на интервале $(t_1, t_2]$, где точки x' и x'' удовлетворяют условиям

$$(\mathcal{U}(t_1, t_0)x', x'') \in \mathcal{A}, \quad (25)$$

$$(x', \mathcal{U}(t_2, t_1)x'') \in \Gamma. \quad (26)$$

Из условий (25), (26) следует, что x' принадлежит подпространству $\text{Ker}(\Gamma - \mathcal{U}(t_2, t_1)\mathcal{A}\mathcal{U}(t_1, t_0))$, которое по определению совпадает с ядром $\text{Ker } \mathcal{D}$ отношения $\mathcal{D}$.

Рассмотрим произвольную функцию x , задаваемую с помощью равенств (23) и (24), где x' принадлежит ядру $\text{Ker } \mathcal{D}$ отношения $\mathcal{D}$, а x'' — любой элемент из множества $\mathcal{AU}(t_1, t_0)x'$. Очевидно, что эта функция удовлетворяет условиям (25) и (26) и, значит, принадлежит ядру оператора $\mathcal{L}$. Построенные таким образом по линейно независимым векторам из ядра отношения $\mathcal{D}$ функции будут также линейно независимыми. Следовательно, для того чтобы ядро оператора $\mathcal{L}$ имело конечную размерность, необходимо, чтобы конечную размерность имело ядро $\text{Ker } \mathcal{D}$ отношения $\mathcal{D}$.

Рассмотрим произвольную функцию x , равную нулю на отрезке $[t_0, t_1]$ и задаваемую с помощью равенств (24) на интервале $(t_1, t_2]$, где x'' принадлежит подпространству $\mathcal{U}(t_1, t_2)\mathcal{X}_1$. Очевидно, что эта функция удовлетворяет условиям (25) и (26) и, значит, принадлежит ядру оператора $\mathcal{L}$. Построенные таким образом по линейно независимым векторам из подпространства $\mathcal{U}(t_1, t_2)\mathcal{X}_1$ функции будут также линейно независимыми. Следовательно, для того чтобы ядро оператора $\mathcal{L}$ имело конечную размерность, необходимо, чтобы конечную размерность имело подпространство $\mathcal{X}_1$.

Достаточность. Пусть подпространства $\text{Ker } \mathcal{D}$ и $\mathcal{X}_1$ имеют конечную размерность. Будем считать, что набор $x_1, \dots, x_n$ является базисом в $\text{Ker } \mathcal{D}$, набор $z_1, \dots, z_k$ является базисом в $\mathcal{U}(t_1, t_2)\mathcal{X}_1$, набор $y_1, \dots, y_n$ удовлетворяет условиям $y_i \in \mathcal{AU}(t_1, t_0)x_i$, $i = 1, \dots, n$. Определим функции $u_i: [t_0, t_2] \rightarrow X$, $i = 1, \dots, n$, при помощи равенств

$$u_i(t) = \begin{cases} \mathcal{U}(t, t_0)x_i, & t \in [t_0, t_1], \\ \mathcal{U}(t, t_1)y_i, & t \in (t_1, t_2], \end{cases}$$

и функции $v_j: [t_0, t_2] \rightarrow X$, $j = 1, \dots, k$, с помощью равенств

$$v_j(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_0, t_1], \\ \mathcal{U}(t, t_1)z_j, & t \in (t_1, t_2]. \end{cases}$$

По построению эти функции принадлежат ядру оператора $\mathcal{L}$. Обозначим через F_1 и F_2 подпространства, являющиеся линейными оболочками наборов функций $u_1, \dots, u_n$ и $v_1, \dots, v_k$ соответственно. Покажем, что $\text{Ker } \mathcal{L} = F_1 \oplus F_2$. Возьмем произвольную функцию f из ядра оператора $\mathcal{L}$. Как было показано ранее, $f(t_0)$ принадлежит подпространству $\text{Ker } \mathcal{D}$. Поэтому найдется такая функция u из F_1 , причем единственная, что $u(t_0) = f(t_0)$. Обозначим через v функцию $f - u$. Поскольку любая функция из ядра задается равенствами (23) и (24), функция v на отрезке $[t_0, t_1]$ тождественно равна нулю, так как $v(t_0) = 0$. Поскольку функция v принадлежит ядру оператора $\mathcal{L}$ (как сумма функций из ядра), для нее должны выполняться условия (2) и (3), которые для функции v имеют вид

$$(0, v(t_2)) \in \Gamma, \quad (0, v^+(t_1)) \in \mathcal{A}.$$

Учитывая тот факт, что $v^+(t_1) = \mathcal{U}(t_1, t_2)v(t_2)$, получаем, что элемент $v(t_2)$ принадлежит пересечению подпространств $\Gamma 0$ и $\mathcal{U}(t_2, t_1)\mathcal{A}0$, а значит, принадлежит пространству $\mathcal{X}_1$. Отсюда следует, что функция v принадлежит подпространству F_2 .

Итак, любая функция из ядра представима в виде суммы функций из F_1 и F_2 , причем это представление единственно. Значит, ядро $\text{Ker } \mathcal{L}$ представимо в виде прямой суммы двух конечномерных подпространств, и потому само имеет конечную размерность. Достаточность доказана.

Равенство (22) следует из равенства $\text{Ker } \mathcal{L} = F_1 \oplus F_2$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Оператор $\mathcal{L}$ инъективен тогда и только тогда, когда инъективным является отношение $\mathcal{D}$ и выполняется равенство (10).*

ЛЕММА 8. *Для любой функции f из образа $\text{Im } \mathcal{L}$ оператора $\mathcal{L}$ выполняется включение*

$$\mathcal{C}_1 f \in \mathcal{X}_2. \quad (27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольную пару функций (x, f) таких, что $\mathcal{L}x = f$. Равенство (19) при $t = t_1$ имеет вид

$$x(t_1) = \mathcal{U}(t_1, t_0)x(t_0) + \mathcal{C}_1 f. \quad (28)$$

По определению оператора $\mathcal{L}$ для функции x должны выполняться включения (2) и (3). Отсюда следует, что элемент $x(t_0)$ принадлежит области определения $D(\Gamma)$ отношения Γ , а элемент $x(t_1)$ принадлежит области определения $D(\mathcal{A})$ отношения $\mathcal{A}$. Тогда из равенства (28) следует, что элемент $\mathcal{C}_1 f$ принадлежит сумме подпространств $\mathcal{U}(t_1, t_0)D(\Gamma)$ и $D(\mathcal{A})$, которая по определению совпадает с подпространством $\mathcal{X}_2$. Лемма доказана.

ЛЕММА 9. *Для любого элемента y из X функция $\mathcal{B}_2 y$ принадлежит образу оператора $\mathcal{L}$ тогда и только тогда, когда элемент y принадлежит образу отношения $\mathcal{D}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Если функция $\mathcal{B}_2 y$ принадлежит образу оператора $\mathcal{L}$, то существует такая функция x из $\tilde{C}$, для которой выполняются равенства

$$x(t) = \mathcal{U}(t, t_0)x(t_0), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (29)$$

$$x(t) = \mathcal{U}(t, t_1)x^+(t_1) + \int_{t_1}^t (\mathcal{B}_2 y)(s) ds, \quad t \in (t_1, t_2], \quad (30)$$

и, кроме того, выполняются условия (2) и (3). Поскольку для функции x справедливо равенство $x(t_2) = \mathcal{U}(t_2, t_1)x^+(t_1) + y$ и $x^+(t_1) \in \mathcal{AU}(t_1, t_0)x(t_0)$, выполняется включение

$$x(t_2) \in \mathcal{U}(t_2, t_1)\mathcal{AU}(t_1, t_0)x(t_0) + y. \quad (31)$$

С другой стороны, из условия (3) следует, что выполняется включение

$$x(t_2) \in \Gamma x(t_0). \quad (32)$$

Из условий (31), (32) и леммы 1 следует, что выполняется равенство

$$\mathcal{U}(t_2, t_1)\mathcal{AU}(t_1, t_0)x(t_0) + y + \Gamma 0 = \Gamma x(t_0) + \mathcal{U}(t_2, t_1)\mathcal{A}0,$$

откуда следует, что y принадлежит множеству $(\Gamma - \mathcal{U}(t_2, t_1)\mathcal{AU}(t_1, t_0))x(t_0) = \mathcal{D}x(t_0)$. Таким образом, элемент y принадлежит подпространству $\text{Im } \mathcal{D}$.

Достаточность. Если y принадлежит образу отношения $\mathcal{D}$, то найдутся такие векторы x' и x'' , что для них будут выполняться условия

$$(\mathcal{U}(t_1, t_0)x', x'') \in \mathcal{A}, \quad (x', \mathcal{U}(t_2, t_1)x'' + y) \in \Gamma.$$

Тогда для функции x , построенной при помощи равенств (29), (30), при $x(t_0) = x'$, $x^+(t_1) = x''$ будут выполняться условия (2) и (3) и, значит, $\mathcal{L}x = \mathcal{B}_2 y$, т. е. $\mathcal{B}_2 y$ принадлежит образу оператора $\mathcal{L}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 10. *Оператор $\mathcal{L}$ имеет конечную коразмерность образа $\text{Im } \mathcal{L}$ тогда и только тогда, когда имеют конечную коразмерность подпространства $\text{Im } \mathcal{D}$ и $\mathcal{X}_2$. Если подпространство $\text{Im } \mathcal{L}$ имеет конечную коразмерность, то для него справедливо равенство*

$$\text{codim Im } \mathcal{L} = \text{codim Im } \mathcal{D} + \text{codim } \mathcal{X}_2. \quad (33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть оператор $\mathcal{L}$ имеет конечную коразмерность образа, т. е. пространство $\tilde{C}$ представимо в виде прямой суммы двух подпространств:

$$\tilde{C} = \text{Im } \mathcal{L} \oplus F_0,$$

где $\dim F_0 = n < \infty$. Покажем, что тогда подпространство $\mathcal{X}_2$ также имеет конечную коразмерность. Предположим противное. В этом случае найдется такой набор линейно независимых векторов $x_1, \dots, x_{n+1}$ из X , который удовлетворяет следующим условиям: x_1 не принадлежит подпространству $\mathcal{X}_2$, x_{i+1} не принадлежит подпространству $\mathcal{X}_2 + L(x_1, \dots, x_i)$ для любого $i = 1, \dots, n$, где $L(x_1, \dots, x_i)$ – линейная оболочка над векторами $x_1, \dots, x_i$.

Рассмотрим набор функций $f_1, \dots, f_{n+1}$, определенных по правилу $f_i = \mathcal{B}_1 x_i$, $i = 1, \dots, n+1$. Из леммы 8 следует, что для набора функций $f_1, \dots, f_{n+1}$ выполняются следующие условия: f_1 не входит в $\text{Im } \mathcal{L}$, f_{i+1} не входит в $\text{Im } \mathcal{L} + L(f_1, \dots, f_i)$ для любого $i = 1, \dots, n$, так как $\mathcal{C}_1 f_i = \mathcal{C}_1 \mathcal{B}_1 x_i = x_i$. Это противоречит тому, что коразмерность подпространства $\text{Im } \mathcal{L}$ равна n . Таким образом, подпространство $\mathcal{X}_2$ имеет конечную коразмерность.

Покажем, что имеет конечную коразмерность подпространство $\text{Im } \mathcal{D}$. Предположим противное. Тогда существует набор векторов $y_1, \dots, y_{n+1}$, для которого выполняются следующие условия: y_1 не входит в $\text{Im } \mathcal{D}$, вектор y_{i+1} не принадлежит подпространству $\text{Im } \mathcal{D} + L(y_1, \dots, y_i)$ для любого $i = 1, \dots, n$, где $L(y_1, \dots, y_i)$ – линейная оболочка над векторами $y_1, \dots, y_i$.

Из леммы 9 следует, что для набора функций u_i , $i = 1, \dots, n+1$, определенных по правилу $u_i = \mathcal{B}_2 y_i$, $i = 1, \dots, n+1$, выполняются условия: u_1 не принадлежит подпространству $\text{Im } \mathcal{L}$, u_{i+1} не принадлежит подпространству $\text{Im } \mathcal{L} + L(u_1, \dots, u_i)$ для любого $i = 1, \dots, n$. Это противоречит тому, что коразмерность подпространства $\text{Im } \mathcal{L}$ равна n . Таким образом, подпространство $\text{Im } \mathcal{D}$ имеет конечную коразмерность.

Достаточность. Пусть подпространства $\text{Im } \mathcal{D}$ и $\mathcal{X}_2$ имеют конечную коразмерность, т. е. существуют такие конечномерные подпространства X_1 и X_2 , что пространство X может быть представлено в виде

$$X = \mathcal{X}_2 \oplus X_1, \quad (34)$$

$$X = \text{Im } \mathcal{D} \oplus X_2. \quad (35)$$

Покажем, что тогда пространство $\tilde{C}$ представимо в виде прямой суммы:

$$\tilde{C} = \text{Im } \mathcal{L} \oplus \mathcal{B}_1 X_1 \oplus \mathcal{B}_2 X_2. \quad (36)$$

Возьмем произвольную функцию f из $\tilde{C}$. Из представления (34) следует, что вектор $\mathcal{C}_1 f$ представим в виде $\mathcal{C}_1 f = x'_1 + x'_2 + x'_3$, где $x'_1 \in \mathcal{U}(t_1, t_0)D(\Gamma)$, $x'_2 \in D(\mathcal{A})$, $x'_3 \in X_1$. Обозначим через f_1 функцию $\mathcal{B}_1 x'_3$, через y_1 – произвольный элемент из $\Gamma \mathcal{U}(t_0, t_1)x'_1$, через y_2 – произвольный элемент из $\mathcal{U}(t_2, t_1)\mathcal{A}x'_2$. Из представления (35) следует, что элемент $(y_1 + y_2 + \mathcal{C}_2 f)$ можно представить в виде $(y_1 + y_2 + \mathcal{C}_2 f) = x''_1 + x''_2$, где $x''_1 \in \text{Im } \mathcal{D}$, $x''_2 \in X_2$. Обозначим через f_2 функцию $\mathcal{B}_2 x''_2$.

Покажем, что функция $f_3 = f - f_1 - f_2$ принадлежит образу оператора $\mathcal{L}$. Поскольку x''_1 принадлежит образу отношения $\mathcal{D}$, существует элемент z_1 такой, что $(z_1, x''_1) \in \mathcal{D}$. Тогда существуют элементы x_1 и x_2 такие, что $(z_1, x_1) \in \Gamma$, $(\mathcal{U}(t_1, t_0)z_1, x_2) \in \mathcal{A}$ и $x_1 - \mathcal{U}(t_2, t_1)x_2 = x''_1$.

Определим функцию x следующим образом: на отрезке $[t_0, t_1]$ она задается формулой

$$x(t) = \mathcal{U}(t, t_0)(z_1 - \mathcal{U}(t_0, t_1)x'_1) + \int_{t_0}^t \mathcal{U}(t, \tau)f_3(\tau) d\tau, \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

а на интервале $(t_1, t_2]$ имеет вид

$$x(t) = \mathcal{U}(t, t_1)(\mathcal{U}(t_1, t_2)y_2 + x_2) + \int_{t_1}^t \mathcal{U}(t, \tau)f_3(\tau) d\tau, \quad t_1 < t \leq t_2.$$

Для функции x выполняются равенства

$$\begin{aligned} x(t_0) &= z_1 - \mathcal{U}(t_0, t_1)x'_1, \\ x(t_1) &= \mathcal{U}(t_1, t_0)z_1 - x'_1 + \mathcal{C}_1 f_3 = \mathcal{U}(t_1, t_0)z_1 - x'_1 + \mathcal{C}_1 f - \mathcal{C}_1 f_1 \\ &= \mathcal{U}(t_1, t_0)z_1 - x'_1 + x'_1 + x'_2 + x'_3 - x'_3 = \mathcal{U}(t_1, t_0)z_1 + x'_2, \\ x^+(t_1) &= x_2 + \mathcal{U}(t_1, t_2)y_2, \\ x(t_2) &= y_2 + \mathcal{U}(t_2, t_1)x_2 + \mathcal{C}_2 f_3 = y_2 + \mathcal{U}(t_2, t_1)x_2 + \mathcal{C}_2 f - \mathcal{C}_2 f_2 \\ &= y_2 + \mathcal{U}(t_2, t_1)x_2 + x''_1 + x''_2 - y_1 - y_2 - x''_2 = x_1 - y_1. \end{aligned}$$

Следовательно, выполняются включения $(x(t_0), x(t_2)) \in \Gamma$ и $(x(t_1), x^+(t_1)) \in \mathcal{A}$, а значит, $\mathcal{L}x = f_3$. Таким образом, мы показали, что f_3 принадлежит образу оператора $\mathcal{L}$. Следовательно, функция f представима в виде суммы: $f = f_1 + f_2 + f_3$, где $f_1 \in \mathcal{B}X_1$, $f_2 \in \mathcal{B}X_2$, $f_3 \in \text{Im } \mathcal{L}$.

Покажем единственность представления. Пусть f также представима в виде $f = f'_1 + f'_2 + f'_3$, где $f'_1 \in \mathcal{B}_1 \mathcal{X}_1$, $f'_2 \in \mathcal{B}_2 \mathcal{X}_2$, $f'_3 \in \text{Im } \mathcal{L}$. Из леммы 8 следует, что элемент $\mathcal{C}_1 f'_3$ принадлежит подпространству $\mathcal{X}_2$. Поскольку $\mathcal{C}_1 f'_3 = x'_1 + x'_2 + x'_3 - \mathcal{C}_1 f'_1$, последнее включение выполняется, только если $\mathcal{C}f'_1 = x'_3$. Отсюда следует, что $f'_1 = \mathcal{B}x'_3$, а значит, функции f'_1 и f_1 совпадают.

Покажем теперь, что совпадают функции f_2 и f'_2 . Пусть функция y такова, что $\mathcal{L}y = f'_3$. Элемент $y(t_1)$ имеет вид

$$y(t_1) = \mathcal{U}(t_1, t_0)y(t_0) + \mathcal{C}_1 f'_3 = \mathcal{U}(t_1, t_0)y(t_0) + x'_1 + x'_2,$$

и, значит,

$$y(t_0) + \mathcal{U}(t_0, t_1)x'_1 = \mathcal{U}(t_0, t_1)y(t_1) - \mathcal{U}(t_0, t_1)x'_2. \quad (37)$$

Обозначим через v элемент $y(t_0) + \mathcal{U}(t_0, t_1)x'_1$. Поскольку элементы $y(t_0)$ и $\mathcal{U}(t_0, t_1)x'_1$ принадлежат подпространству $D(\Gamma)$, элемент v также принадлежит этому подпространству. С другой стороны, из равенства (37) следует, что элемент v принадлежит подпространству $\mathcal{U}(t_0, t_1)D(\mathcal{A})$ как сумма элементов из этого подпространства. Итак, элемент v принадлежит подпространствам $D(\Gamma)$ и $\mathcal{U}(t_0, t_1)D(\mathcal{A})$ одновременно и, следовательно, принадлежит области определения отношения $\mathcal{D}$.

Обозначим через v' элемент $y^+(t_1) - \mathcal{U}(t_1, t_2)y_2$. Поскольку справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} y(t_1) &= \mathcal{U}(t_1, t_0)y(t_0) + \mathcal{C}_1 f'_3 = \mathcal{U}(t_1, t_0)(v - \mathcal{U}(t_0, t_1)x'_1) + \mathcal{C}_1(f - f'_1 - f'_2) \\ &= \mathcal{U}(t_1, t_0)v - x'_1 + x'_1 + x'_2 + x'_3 - x'_3 = \mathcal{U}(t_1, t_0)v + x'_2, \end{aligned}$$

и, кроме того, выполняются включения $y^+(t_1) \in \mathcal{A}y(t_1)$, $(x'_2, \mathcal{U}(t_1, t_2)y_2) \in \mathcal{A}$, то элемент v' принадлежит множеству $\mathcal{A}(y(t_1) - x'_2) = \mathcal{A}\mathcal{U}(t_1, t_0)v$.

Тогда в принятых нами обозначениях элемент $y(t_2)$ можно выписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} y(t_2) &= \mathcal{U}(t_2, t_1)y^+(t_1) + \mathcal{C}_2 f'_3 = \mathcal{U}(t_2, t_1)(v' + \mathcal{U}(t_1, t_2)y_2) + \mathcal{C}_2 f - \mathcal{C}_2 f'_2 \\ &= \mathcal{U}(t_2, t_1)v' + y_2 + \mathcal{C}_2 f - \mathcal{C}_2 f'_2 + y_1 - y_1 \\ &= \mathcal{U}(t_2, t_1)v' + x''_1 + x''_2 - y_1 - \mathcal{C}_2 f'_2. \end{aligned} \quad (38)$$

Для функции y должно выполняться граничное условие $(y(t_0), y(t_2)) \in \Gamma$. Используя лемму 1, мы можем переписать граничное условие в виде

$$\Gamma y(t_0) = y(t_2) + \Gamma 0.$$

Подставляя в последнее равенство выражение для $y(t_2)$ из (38) и прибавляя к обеим частям равенства множество $\mathcal{U}(t_2, t_1)\mathcal{A}0 + \Gamma 0 = \mathcal{D}0$, получаем равенство

$$\Gamma y(t_0) + \mathcal{D}0 = \mathcal{U}(t_2, t_1)v' + x''_1 + x''_2 - y_1 - \mathcal{C}_2 f'_2 + \mathcal{D}0.$$

Поскольку $y(t_0) = v - \mathcal{U}(t_0, t_1)x'_1$, а v' принадлежит множеству $\mathcal{A}\mathcal{U}(t_1, t_0)v$ и y_1 принадлежит множеству $\Gamma\mathcal{U}(t_0, t_1)x'_1$, последнее равенство можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Gamma v - \Gamma\mathcal{U}(t_0, t_1)x'_1 + \mathcal{D}0 \\ = \mathcal{U}(t_2, t_1)\mathcal{A}\mathcal{U}(t_1, t_0)v - \Gamma\mathcal{U}(t_0, t_1)x'_1 + x''_1 + x''_2 - \mathcal{C}_2 f'_2 + \mathcal{D}0. \end{aligned} \quad (39)$$

Отметим, что $\Gamma v - \mathcal{U}(t_2, t_1)\mathcal{A}\mathcal{U}(t_1, t_0)v = \mathcal{D}v$, $\Gamma\mathcal{U}(t_0, t_1)x'_1 - \Gamma\mathcal{U}(t_0, t_1)x'_1 = \Gamma 0$. С учетом сделанных замечаний равенство (39) можно переписать в виде

$$\mathcal{D}v = x''_1 + x''_2 - \mathcal{C}_2 f'_2 + \mathcal{D}0.$$

Отсюда получаем, что элемент $x''_1 + x''_2 - \mathcal{C}_2 f'_2$ принадлежит образу отношения $\mathcal{D}$. Поскольку по построению x''_1 принадлежит подпространству $\text{Im } \mathcal{D}$, элемент $x''_2 - \mathcal{C}_2 f'_2$ также должен принадлежать данному подпространству. С другой стороны, этот элемент должен принадлежать подпространству X_2 , а значит, из разложения (35) следует, что $x''_2 - \mathcal{C}_2 f'_2$ равен нулю, т. е. $f'_2 = \mathcal{B}x''_2 = f_2$.

Итак, $f'_1 = f_1$, $f'_2 = f_2$, а значит, $f'_3 = f_3$. Единственность разложения установлена.

Формула (33) непосредственно следует из разложения (36). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Оператор $\mathcal{L}$ сюръективен тогда и только тогда, когда сюръективным является отношение $\mathcal{D}$ и выполняется равенство (11).*

ТЕОРЕМА 3. *Если оператор $\mathcal{L}$ непрерывно обратим, то для любой функции f из $\tilde{C}$ функция $x = \mathcal{L}^{-1}f$ задается равенствами (19) и (20), где $x(t_0)$ можно найти из равенства*

$$x(t_0) = \mathcal{D}^{-1}(v_1 + v_2 + \mathcal{C}_2 f) - \mathcal{U}(t_0, t_1)y_1, \quad (40)$$

а $x^+(t_1)$ можно найти из равенства

$$\{x^+(t_1)\} = \mathcal{A}(\mathcal{U}(t_1, t_0)x(t_0) + \mathcal{C}_1 f) \cap \mathcal{U}(t_1, t_2)(\Gamma x(t_0) - \mathcal{C}_2 f), \quad (41)$$

где v_1 – произвольный элемент из множества $\Gamma \mathcal{U}(t_0, t_1)y_1$, v_2 – произвольный элемент из $\mathcal{U}(t_2, t_1)\mathcal{A}y_2$, y_1 и y_2 – элементы из $\mathcal{U}(t_1, t_0)D(\Gamma)$ и $D(\mathcal{A})$ такие, что $y_1 + y_2 = \mathcal{C}_1 f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что если оператор $\mathcal{L}$ непрерывно обратим, то из следствий 2, 3 вытекают равенства (10), (11). Из этих следствий также получаем, что отношение $\mathcal{D}^{-1}$ является линейным оператором, определенным на всем пространстве X .

Элемент $x(t_0)$ будем искать в виде $x(t_0) = z - \mathcal{U}(t_0, t_1)y_1$, где элемент z принадлежит области определения отношения $\mathcal{D}$. Поскольку для функции x должно выполняться включение $(x(t_1), x^+(t_1)) \in \mathcal{A}$, элемент $x(t_2)$ будет принадлежать множеству $\mathcal{U}(t_2, t_1)\mathcal{A}(\mathcal{U}(t_1, t_0)z + \mathcal{U}(t_2, t_1)\mathcal{A}y_2 + \mathcal{C}_2 f)$. С другой стороны, функция x должна удовлетворять граничным условиям $(x(t_0), x(t_2)) \in \Gamma$. Поэтому элемент $x(t_2)$ также будет принадлежать множеству $\Gamma z - \Gamma \mathcal{U}(t_0, t_1)y_1$. Таким образом, мы получаем, что справедливо равенство

$$\mathcal{U}(t_2, t_1)\mathcal{A}(\mathcal{U}(t_1, t_0)z + \mathcal{U}(t_2, t_1)\mathcal{A}y_2 + \mathcal{C}_2 f) + \Gamma 0 = \Gamma z - \Gamma \mathcal{U}(t_0, t_1)y_1 + \mathcal{U}(t_2, t_1)\mathcal{A}0.$$

Из последнего равенства получаем, что

$$\mathcal{D}z = \mathcal{U}(t_2, t_1)\mathcal{A}y_2 + \Gamma \mathcal{U}(t_0, t_1)y_1 + \mathcal{C}_2 f.$$

Поскольку ядро $\text{Ker } \mathcal{D}^{-1}$ оператора $\mathcal{D}^{-1}$ содержит подпространства $\Gamma 0$ и $\mathcal{U}(t_2, t_1)\mathcal{A}0$ (как сумма этих подпространств), множество $\mathcal{D}^{-1}(\mathcal{U}(t_2, t_1)\mathcal{A}y_2 + \Gamma \mathcal{U}(t_0, t_1)y_1 + \mathcal{C}_2 f)$ состоит из одного элемента, который можно найти из формулы

$$z = \mathcal{D}^{-1}(v_1 + v_2 + \mathcal{C}_2 f).$$

Отсюда непосредственно вытекает формула (40).

Так как для функции x должно выполняться включение $(x(t_1), x^+(t_1)) \in \mathcal{A}$, элемент $x^+(t_1)$ принадлежит множеству $\mathcal{A}(\mathcal{U}(t_1, t_0)x(t_0) + \mathcal{C}_1 f)$. С другой стороны, функция x должна удовлетворять краевым условиям $(x(t_0), x(t_2)) \in \Gamma$. Поскольку $x(t_2) = \mathcal{U}(t_2, t_1)x^+(t_1) + \mathcal{C}_2 f$, пара $(x(t_0), \mathcal{U}(t_2, t_1)x^+(t_1) + \mathcal{C}_2 f)$ должна принадлежать отношению Γ . Из последнего включения следует, что

элемент $x^+(t_1)$ принадлежит множеству $\mathcal{U}(t_1, t_2)(\Gamma x(t_0) - \mathcal{C}_2 f)$. Из равенства (10) и леммы 2 следует, что пересечение множеств $\mathcal{U}(t_1, t_2)(\Gamma x(t_0) - \mathcal{C}_2 f)$ и $\mathcal{A}(\mathcal{U}(t_1, t_0)x(t_0) + \mathcal{C}_1 f)$ состоит из одного элемента и этот элемент можно найти из формулы (41).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Если непрерывно обратимым является отношение $\mathcal{D}$ и выполняются равенства (10) и (11), то из следствий 2, 3 и леммы 6 получаем, что $\mathcal{L}$ является замкнутым оператором с нулевым ядром и областью значений, совпадающей с пространством X . Следовательно, оператор $\mathcal{L}$ непрерывно обратим.

Если оператор $\mathcal{L}$ непрерывно обратим, то из следствий 2, 3 вытекают равенства (10) и (11). Из этих следствий также получаем, что отношение $\mathcal{D}^{-1}$ является линейным оператором, определенным на всем пространстве X .

Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что оператор $\mathcal{D}^{-1}$ ограничен, если оператор $\mathcal{L}$ непрерывно обратим. Предположим противное. Тогда существует такая ограниченная последовательность (z_n) из X , что числовая последовательность $(\|\mathcal{D}^{-1}z_n\|)$ стремится к бесконечности. Рассмотрим последовательность функций (f_n) из $\tilde{C}$, определенных по правилу $f_n = \mathcal{B}_2(z_n)$, $1 \leq n < \infty$. Отметим, что последовательность (f_n) ограничена в силу ограниченности оператора $\mathcal{B}_2$ (см. лемму 4). Из формулы (40) следует, что для последовательности (x_n) функций, определенных по правилу $x_n = \mathcal{L}^{-1}f_n$, $1 \leq n < \infty$, выполняются равенства

$$x_n(t_0) = \mathcal{D}^{-1}(\mathcal{C}_2 f_n) = \mathcal{D}^{-1}(\mathcal{C}_2 \mathcal{B}_2 z_n) = \mathcal{D}^{-1}z_n, \quad 1 \leq n < \infty.$$

Поскольку числовая последовательность $(\|\mathcal{D}^{-1}z_n\|)$ не является ограниченной, неограниченной также будет последовательность функций (x_n) . Это противоречит тому, что оператор $\mathcal{L}$ непрерывно обратим. Значит, оператор $\mathcal{D}^{-1}$ является ограниченным оператором, если оператор $\mathcal{L}$ непрерывно обратим. Теорема доказана.

ЛЕММА 11. Если оператор $\mathcal{L}$ имеет замкнутый образ, то образ $\text{Im } \mathcal{D}$ отношения $\mathcal{D}$ также является замкнутым подпространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную последовательность (x_n) из $\text{Im } \mathcal{D}$, сходящуюся к некоторому элементу x_0 . Докажем, что вектор x_0 принадлежит подпространству $\text{Im } \mathcal{D}$. Построим последовательность (f_n) функций из $\tilde{C}$ по следующим формулам:

$$f_n = \mathcal{B}_2 x_n.$$

Как следует из леммы 9, функции f_n , $n = 1, \dots, n, \dots$, принадлежат образу $\text{Im } \mathcal{L}$ оператора $\mathcal{L}$. В силу ограниченности оператора $\mathcal{B}_2$ последовательность (f_n) сходится к функции $f_0 = \mathcal{B}_2 x_0$. Поскольку образ оператора $\mathcal{L}$ замкнут, функция f_0 принадлежит $\text{Im } \mathcal{L}$. Из леммы 9 следует, что x_0 будет принадлежать подпространству $\text{Im } \mathcal{D}$, что и требовалось показать. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть оператор $\mathcal{L}$ фредгольмов. Из леммы 7 и леммы 10 следует, что отношение $\mathcal{D}$ имеет конечномерное ядро и образ конечной коразмерности. Из леммы 11 следует, что отношение $\mathcal{D}$ имеет замкнутый образ и, значит, является фредгольмовым.

Пусть отношение $\mathcal{D}$ является фредгольмовым. Из лемм 7, 10 следует, что оператор $\mathcal{L}$ имеет конечномерное ядро и образ конечной коразмерности. Из следствия 1 получаем, что оператор $\mathcal{L}$ является фредгольмовым.

Формула (12) непосредственно следует из формул (22) и (33). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Если X – конечномерное пространство, то оператор $\mathcal{L}$ всегда фредгольмов.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из равенств (19), (20), определяющих оператор $\mathcal{L}$, следует, что для любого $\lambda \in \mathbb{K}$ оператор $\mathcal{L} - \lambda I$ задается (с помощью тех же равенств) по семейству эволюционных операторов $\mathcal{U}_\lambda: \Delta \rightarrow \text{End } X$ вида

$$\mathcal{U}_\lambda(t, s) = e^{\lambda(t-s)}\mathcal{U}(t, s), \quad (t, s) \in \Delta. \quad (42)$$

Из замечания 1 и теоремы 1 вытекает следующая

ТЕОРЕМА 4. *Если для оператора $\mathcal{L}$ не выполняется хотя бы одно из равенств (10) или (11), то резольвентное множество $\rho(\mathcal{L})$ оператора $\mathcal{L}$ пусто.*

Далее будем считать, что выполнено следующее

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. *Для оператора $\mathcal{L}$ одновременно выполняются условия (10) и (11).*

Через $\mathcal{D}_\lambda$ обозначим отношение $\Gamma - \lambda\mathcal{U}(t_2, t_1)\mathcal{A}\mathcal{U}(t_1, t_0)$, а через $\sigma(\Gamma, \mathcal{A}, \mathcal{U})$ – множество вида

$$\sigma(\Gamma, \mathcal{A}, \mathcal{U}) = \{\lambda \in \mathbb{K}: \mathcal{D}_\lambda^{-1} \notin \text{End } X\}. \quad (43)$$

ТЕОРЕМА 5. *Спектр $\sigma(\mathcal{L})$ оператора $\mathcal{L}$ имеет вид*

$$\sigma(\mathcal{L}) = \{\lambda \in \mathbb{K}: e^{\lambda(t_2-t_0)} \in \sigma(\Gamma, \mathcal{A}, \mathcal{U})\}. \quad (44)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из теоремы 1 и предположения 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае, когда импульсное воздействие отсутствует, т. е. отношение $\mathcal{A}$ совпадает с тождественным оператором, результаты работы совпадают с результатами, полученными в статье [14].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Использование линейных соотношений при исследовании дифференциальных уравнений и включений осуществлялось в статьях [15]–[17].

§ 4. Примеры

ПРИМЕР 1. Рассмотрим в пространстве $\tilde{C}([t_0, t_2], X)$ задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad t \in [t_0, t_1) \cup (t_1, t_2], \quad (45)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x_0 \in X, \quad (46)$$

$$x^+(t_1) \in \mathcal{A}x(t_1), \quad (47)$$

где операторнозначная функция A принадлежит пространству $\tilde{C}([t_0, t_2], \text{End } X)$, $\mathcal{A}$ – линейное отношение из $\text{LRC}(X)$. Найдем, при каких условиях, налагаемых на отношение $\mathcal{A}$, задача Коши (45)–(47) имеет единственное решение для любой функции f из $\tilde{C}([t_0, t_2], X)$.

В [8] было установлено, что операторнозначная функция A порождает непрерывное семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}: \Delta \rightarrow \text{End } X$ такое, что если пара функций удовлетворяет равенствам (45), то она удовлетворяет равенствам (19), (20), и наоборот. Кроме того, исходную задачу стандартным образом можно свести к задаче Коши с нулевым начальным условием. Таким образом, мы оказываемся в условиях рассматриваемой в работе задачи, где роль отношения Γ играет пространство $\{0\} \times X$. Тогда отношение $\mathcal{D}$ совпадает с Γ , подпространство $\mathcal{X}_1$ совпадает с подпространством $\mathcal{U}(t_2, t_1)\mathcal{A}0$, подпространство $\mathcal{X}_2$ совпадает с подпространством $D(\mathcal{A})$.

Для того чтобы оператор $\mathcal{L}$, построенный по семейству $\mathcal{U}$ и отношениям $\mathcal{A}$ и Γ , был непрерывно обратим, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия теоремы 1. Поскольку отношение $\mathcal{D}^{-1}$ совпадает с нулевым оператором, для непрерывной обратимости оператора $\mathcal{L}$ необходимо и достаточно, чтобы область определения $D(\mathcal{A})$ совпадала с пространством X и подпространство $\mathcal{A}0$ состояло только из нуля. В силу замкнутости отношения $\mathcal{A}$ эти условия равносильны тому, что отношение $\mathcal{A}$ принадлежит пространству $\text{End } X$.

Итак, задача Коши (45)–(47) имеет единственное решение для любой функции f из $\tilde{C}([t_0, t_2], X)$ тогда и только тогда, когда импульсное воздействие $\mathcal{A}$ является линейным ограниченным оператором, определенным на всем пространстве X .

ПРИМЕР 2. Рассмотрим в пространстве $\tilde{C}([t_0, t_2], X)$ задачу управляемости

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad t \in [t_0, t_1) \cup (t_1, t_2], \quad (48)$$

$$x(t_2) = x_0, \quad x_0 \in X, \quad (49)$$

$$x^+(t_1) \in \mathcal{A}x(t_1), \quad (50)$$

где операторнозначная функция A принадлежит пространству $\tilde{C}([t_0, t_2], \text{End } X)$, $\mathcal{A}$ – линейное отношение из $\text{LRC}(X)$. Найдем при каких условиях, налагаемых на отношение $\mathcal{A}$, задача управляемости (48)–(50) имеет единственное решение для любой функции f из $\tilde{C}([t_0, t_2], X)$.

В [8] было установлено, что операторнозначная функция A порождает непрерывное семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}: \Delta \rightarrow \text{End } X$ такое, что если пара функций удовлетворяет равенствам (48), то она удовлетворяет равенствам (19), (20), и наоборот. Кроме того, исходную задачу стандартным образом можно свести к задаче управляемости с нулевым конечным условием. Таким образом, мы оказываемся в условиях рассматриваемой в работе задачи, где роль отношения Γ играет пространство $X \times \{0\}$ (нулевой оператор). Тогда отношение $\mathcal{D}$ совпадает с $(-\mathcal{U}(t_2, t_1)\mathcal{A}\mathcal{U}(t_1, t_0))$, подпространство $\mathcal{X}_1$ совпадает с пространством X , подпространство $\mathcal{X}_2$ состоит только из нуля. Таким образом, из теоремы 1 следует, что для того, чтобы оператор $\mathcal{L}$, построенный при помощи равенств (48)–(50), был непрерывно обратим, необходимо и достаточно, чтобы непрерывно обратимым было отношение $-\mathcal{U}(t_2, t_1)\mathcal{A}\mathcal{U}(t_1, t_0)$.

Поскольку операторы $\mathcal{U}(t_2, t_1)$ и $\mathcal{U}(t_1, t_0)$ непрерывно обратимы, данное условие эквивалентно непрерывной обратимости отношения $\mathcal{A}$.

Итак, задача управляемости (48)–(50) имеет единственное решение для любой функции f из $\tilde{C}([t_0, t_2], X)$ тогда и только тогда, когда импульсное воздействие $\mathcal{A}$ является непрерывно обратимым отношением.

Список литературы

1. P. S. Sethi, G. L. Thompson, *Optimal control theory. Applications to management science and economics*, Kluwer Acad. Publ., Boston, MA, 2000.
2. T. Yang, *Impulsive control theory*, Lecture Notes in Control and Inform. Sci., **272**, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
3. А. Д. Мышкис, А. М. Самойленко, “Системы с толчками в заданные моменты времени”, *Матем. сб.*, **74(116)**:2 (1967), 202–208; англ. пер.: A. D. Myshkis, A. M. Samoilenko, “Systems with shocks at prescribed instants of time”, *Math. USSR-Sb.*, **3**:2 (1967), 187–193.
4. А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк, *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием*, Вища школа, Киев, 1987.
5. D. D. Baïnov, S. I. Kostadinov, A. D. Myshkis, “Bounded and periodic solutions of differential equations with impulse effect in a Banach space”, *Differential Integral Equations*, **1**:2 (1988), 223–230.
6. J.-P. Aubin, “Optimal impulse control problems and quasi-variational inequalities thirty years later: a viability approach”, *Optimal control and partial differential equations* (Paris, France, 2000), IOS Press, Amsterdam, 2001, 311–324.
7. P. Saint-Pierre, “Hybrid kernels and capture basins for impulse constrained systems”, *Hybrid systems: computation and control* (Stanford, CA, USA, 2002), Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 2002, 378–392.
8. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, М., 1970; англ. пер.: Ju. L. Dalec’kii, M. G. Krein, *Stability of solutions of differential equations in Banach space*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1974.
9. R. Cross, *Multivalued linear operators*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **213**, M. Dekker, New York, 1998.
10. А. Г. Баскаков, “Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:2 (2009), 3–68; англ. пер.: A. G. Baskakov, “Spectral analysis of differential operators with unbounded operator-valued coefficients, difference relations and semigroups of difference relations”, *Izv. Math.*, **73**:2 (2009), 215–278.
11. А. Г. Баскаков, “Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов”, *Функциональный анализ, СМФН*, **9**, МАИ, М., 2004, 3–151; англ. пер.: A. G. Baskakov, “Representation theory for Banach algebras, Abelian groups, and semigroups in the spectral analysis of linear operators”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **137**:4 (2006), 4885–5036.
12. С. С. Кутателадзе, *Основы функционального анализа*, Изд-во ин-та матем. СО РАН, Новосибирск, 1995; англ. пер.: S. S. Kutateladze, *Fundamentals of functional analysis*, Kluwer Texts Math. Sci., **12**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995.
13. Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Ч. 1: Общая теория*, ИЛ, М., 1962; пер. с англ.: N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear operators. I. General theory*, Pure Appl. Math., **7**, Intersci. Publ., New York–London, 1958.

14. В. Б. Диденко, “О спектральных свойствах дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, определяемых линейным отношением”, *Матем. заметки*, **89**:2 (2011), 226–240; англ. пер.: V. B. Didenko, “On the spectral properties of differential operators with unbounded operator coefficients determined by a linear relation”, *Math. Notes*, **89**:2 (2011), 224–237.
15. М. С. Бичегкуев, “Об ослабленной задаче Коши для линейного дифференциального включения”, *Матем. заметки*, **79**:4 (2006), 483–487; англ. пер.: M. S. Bichegkuev, “On a weakened Cauchy problem for a linear differential inclusion”, *Math. Notes*, **79**:4 (2006), 449–453.
16. М. С. Бичегкуев, “Условия разрешимости разностных включений”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72**:4 (2008), 25–36; англ. пер.: M. S. Bichegkuev, “Conditions for solubility of difference inclusions”, *Izv. Math.*, **72**:4 (2008), 647–658.
17. М. С. Бичегкуев, “Об условиях разрешимости разностных уравнений с начальным условием из подпространства”, *Сиб. матем. журн.*, **51**:4 (2010), 751–768; англ. пер.: M. S. Bichegkuev, “Solvability conditions for the difference equations with an initial condition in a subspace”, *Siberian Math. J.*, **51**:4 (2010), 595–609.

В. Б. Диденко (V. B. DIDENKO)
Воронежский государственный университет
E-mail: vladimir.didenko@gmail.com

Поступило в редакцию
09.06.2011
18.11.2011