Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, Вещественные M -триквадрики, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2013, том 77, выпуск 1, 33–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7801>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 14:32:29

УДК 512.7

В. А. Краснов

Вещественные M -триквадрики

Рассматриваются неособые пересечения трех вещественных квадрик. Такие многообразия для краткости названы вещественными триквадриками. Доказываются критерии максимальности для триквадрик. В основе этих критериев лежит связь триквадрик с плоскими кривыми.

Библиография: 11 наименований.

Ключевые слова: M -многообразие, триквадрика, спектральная кривая, спектральное расслоение, индекс-функция, индекс-ориентация.

DOI: 10.4213/im7801

Введение

Сначала приведем несколько обозначений и определений. Пусть даны три линейно независимые квадратичные формы с вещественными коэффициентами

$$q_1(X_0, \dots, X_N) = q_1(X), \quad q_2(X_0, \dots, X_N) = q_2(X), \quad q_3(X_0, \dots, X_N) = q_3(X). \quad (0.1)$$

Тогда можно рассмотреть связку квадрик в комплексном проективном пространстве $\mathbb{P}^N$

$$\lambda_1 q_1(X) + \lambda_2 q_2(X) + \lambda_3 q_3(X) = 0. \quad (0.2)$$

Пусть M_1, M_2, M_3 – матрицы квадратичных форм (0.1). Тогда рассмотрим уравнение

$$\det(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3) = 0. \quad (0.3)$$

Будем предполагать, что это уравнение задает неособую кривую на комплексной проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ с однородными координатами $(\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3)$. Тогда система уравнений

$$q_1(X_0, \dots, X_N) = 0, \quad q_2(X_0, \dots, X_N) = 0, \quad q_3(X_0, \dots, X_N) = 0$$

определяет неособое $(N-3)$ -мерное комплексное многообразие $V \subset \mathbb{P}^N$, инвариантное относительно инволюции комплексного сопряжения $\tau: \mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}^N$. Такое многообразие будем называть *вещественной триквадрикой*. Связка квадрик (0.2) восстанавливается из триквадрики V . Она состоит из квадрик, проходящих через триквадрику V .

Рассмотрим двумерную сферу $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, заданную уравнением $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$. На этой сфере определена целочисленная функция $I(\lambda) = I_V(\lambda)$, равная отрицательному индексу инерции квадратичной формы

$$q_\lambda(X) = \lambda_1 q_1(X) + \lambda_2 q_2(X) + \lambda_3 q_3(X). \quad (0.4)$$

© В. А. Краснов, 2013

Эта функция называется *индекс-функцией* триквадрики V . В общем случае индекс-функция $I(\lambda)$ удовлетворяет неравенствам $0 \leq I(\lambda) \leq N + 1$. Рассмотрим уравнение (0.3), оно определяет кривую $C = C_V$ степени $N + 1$ в комплексной плоскости $\mathbb{P}^2$. Эта кривая называется *спектральной кривой* триквадрики V (см. [1]). По нашему предположению кривая C неособая. Спектральная кривая $C \subset \mathbb{P}^2$ также имеет вещественную структуру $\tau: C \rightarrow C$, через $\mathbb{R}C \subset \mathbb{RP}^2$ обозначим вещественную часть кривой C . Индекс-функция $I(\lambda)$ имеет точки разрыва на кривой $\Gamma = \Gamma_V \subset S^2$, равной прообразу вещественной части $\mathbb{R}C$ спектральной кривой C при проекции $\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$. Функция $I(\lambda)$ также удовлетворяет следующим свойствам:

- 1) функция $I(\lambda)$ полунепрерывна снизу;
- 2) при переходе через компоненты связности кривой Γ значения функции $I(\lambda)$ изменяются на ± 1 ;
- 3) в точках непрерывности выполняется равенство $I(-\lambda) = N + 1 - I(\lambda)$;
- 4) в точках разрыва выполняется равенство $I(-\lambda) = N - I(\lambda)$.

Через $I_{\min}$ обозначим минимальное значение индекс-функции $I(\lambda)$.

Напомним, что вещественное алгебраическое многообразие V называется M -многообразием, если неравенство Гарнака–Смита–Тома

$$\sum_{i \geq 0} \dim H^i(\mathbb{R}V) \leq \sum_{i \geq 0} \dim H^i(V)$$

становится равенством, где когомологии рассматриваются с коэффициентами в поле из двух элементов $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$. Далее все группы когомологий рассматриваются с коэффициентами в поле $\mathbb{F}_2$, причем размерность пространства когомологий $H^i(-)$ обозначается через $h^i(-)$, соответственно, размерность полного пространства когомологий $H^*(-)$ обозначается через $h^*(-)$.

На спектральной кривой C определено вещественное линейное расслоение $L = L_V$, называемое *спектральным расслоением* триквадрики V . Если $\lambda \in C$, то слой L_λ равен ядру квадратичной формы (0.4) в пространстве $\mathbb{C}^{N+1}$. (Поскольку мы предполагаем, что спектральная кривая C неособая, ядро квадратичной формы $q_\lambda(X)$ – одномерное подпространство в $\mathbb{C}^{N+1}$; см. [1].)

В работе [2] для триквадрик произвольной четной размерности доказаны две теоремы. Здесь мы объединим их в одну теорему.

ТЕОРЕМА 0.1. *Для вещественной триквадрики V размерности $N - 3 = 2m > 0$ справедливы следующие утверждения:*

- 1) *если триквадрика V является M -многообразием, то спектральная кривая C триквадрики V также будет M -многообразием, а для индекс-функции $I(\lambda)$ триквадрики V выполняются неравенства*

$$m + 1 \leq I(\lambda) \leq m + 3, \quad (0.5)$$

а также выполняются следующие равенства для размерностей пространств когомологий:

$$h^0(\mathbb{R}V) = \dots = h^{m-2}(\mathbb{R}V) = 1, \quad h^{m-1}(\mathbb{R}V) = n + 1, \quad h^m(\mathbb{R}V) = 2p,$$

где p, n – соответственно число четных и нечетных овалов кривой $\mathbb{R}C \subset \mathbb{RP}^2$;

2) если спектральная кривая C триквадрики V является M -кривой, а для индекс-функции $I(\lambda)$ триквадрики V выполняются неравенства (0.5), то триквадрика V является M -многообразием или $(M - 2)$ -многообразием, причем в случае $(M - 2)$ -многообразия выполняются следующие равенства для размерностей пространств когомологий:

$$h^0(\mathbb{R}V) = \dots = h^{m-2}(\mathbb{R}V) = 1, \quad h^{m-1}(\mathbb{R}V) = n, \quad h^m(\mathbb{R}V) = 2p - 2;$$

3) если спектральная кривая C триквадрики V является M -кривой с вещественной схемой

$$\langle 1\langle a_1 \rangle \sqcup \dots \sqcup 1\langle a_r \rangle \sqcup b \rangle, \quad (0.6)$$

а для индекс-функции $I(\lambda)$ триквадрики V выполнены неравенства (0.5), то триквадрика V будет M -многообразием тогда и только тогда, когда на нечетных овалах кривой $\mathbb{R}C \subset \mathbb{R}P^2$ вещественная часть $\mathbb{R}L$ спектрального расслоения L тривиальна.

Напомним, что вещественное алгебраическое многообразие V называется $(M - k)$ -многообразием, если выполняется равенство

$$\sum_{i \geq 0} h^i(\mathbb{R}V) = \sum_{i \geq 0} h^i(V) - 2k.$$

Кроме того, напомним, что овал кривой $\mathbb{R}C$ называется *четным*, если он содержится внутри четного числа овалов этой кривой, в противном случае овал называется *нечетным*.

Рассмотрим в качестве примера двумерные вещественные триквадрики. Они являются КЗ-поверхностями степени 8. Среди таких КЗ-поверхностей вещественные части M -поверхностей могут иметь следующие три топологических типа (см. [3]): $S_{10} \sqcup S$, $S_2 \sqcup 9S$, $S_6 \sqcup 5S$, где S_g – компактная ориентируемая топологическая поверхность рода g , S – двумерная сфера. Соответствующие спектральные M -кривые имеют следующие вещественные схемы: $\langle 1\langle 1 \rangle \sqcup 9 \rangle$, $\langle 1\langle 9 \rangle \sqcup 1 \rangle$, $\langle 1\langle 5 \rangle \sqcup 5 \rangle$ (это кривые Гарнака, Гильберта и Гудкова). Для четырехмерных триквадрик спектральная кривая имеет степень 8. Заметим, что для M -кривых степени 8 вещественная схема может иметь вид (0.6) для $r = 1, 2, 3$, но, кроме этого, возможна схема (см., например, [4, табл. 1])

$$\langle 1\langle a \sqcup 1\langle b \rangle \rangle \sqcup c \rangle. \quad (0.7)$$

В настоящей работе доказывается максимальное обобщение утверждения 3) теоремы 0.1, а именно дополнительных ограничений на вещественную схему спектральной кривой C уже не предполагается. Чтобы сформулировать соответствующую теорему, необходимо привести вспомогательные обозначения.

Обозначим через $C_1, \dots, C_s$ компоненты связности кривой $\mathbb{R}C$. Положим $\varepsilon(C_i) = 0$, если расслоение $\mathbb{R}L$ тривиально на овале C_i , в противном случае положим $\varepsilon(C_i) = 1$. Здесь числа 0, 1 рассматриваются как элементы поля $\mathbb{F}_2$. Эти числа будем называть *спектральными числами*.

Пусть число N нечетное, тогда разность $\mathbb{R}P^2 \setminus \mathbb{R}C$ состоит из $s + 1$ компонент связности, одна из которых неориентируемая. Каждая ориентируемая компонента связности разности $\mathbb{R}P^2 \setminus \mathbb{R}C$ ограничена снаружи овалом. Обозначим

компоненту связности разности $\mathbb{RP}^2 \setminus \mathbb{RC}$ через D_i , если она снаружи ограничена овалом C_i . Пусть внутренняя граница области D_i состоит из овалов $C_{j_1}, \dots, C_{j_k}$. Введем тогда для овала C_i инвариант

$$S(C_i) = \varepsilon(C_{j_1}) + \dots + \varepsilon(C_{j_k}).$$

В настоящей работе доказывается следующий критерий максимальности четномерной триквадрики.

ТЕОРЕМА 0.2. *Вещественная триквадрика V размерности $N - 3 = 2m > 0$ с неособой спектральной кривой C является M -многообразием, если и только если спектральная кривая C является M -кривой, выполняются неравенства (0.5) для индекс-функции триквадрики V и для каждого нечетного овала C_i кривой $\mathbb{RC}$ выполняется равенство $S(C_i) = \varepsilon(C_i)$.*

Для нечетномерных триквадрик в работе [2] доказаны два очень частных предложения, с помощью которых можно строить M -триквадрики нечетной размерности. Будем предполагать, что $N = 2m + 2$, тогда $\dim V = 2m - 1$. Для такой M -триквадрики выполняются неравенства $m \leq I(\lambda) \leq m + 3$. Из этих неравенств следует, что функция $I(\lambda)$ в случае M -триквадрики может принимать либо два значения $m + 1$, $m + 2$, либо четыре значения m , $m + 1$, $m + 2$, $m + 3$. В работе [2], в частности, доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.1. *Пусть спектральная кривая C вещественной триквадрики V размерности $N - 3 = 2m - 1$ является M -кривой и индекс-функция $I(\lambda)$ принимает два значения $m + 1$, $m + 2$. Тогда вещественная триквадрика V будет M -многообразием, причем выполняются равенства*

$$h^0(\mathbb{R}V) = \dots = h^{m-2}(\mathbb{R}V) = 1, \quad h^{m-1}(\mathbb{R}V) = g, \quad (0.8)$$

где g – род кривой C .

В случае, когда $I_{\min} = m$, в работе [2] приведен пример M -триквадрики нечетной размерности. Здесь мы докажем общую теорему. Чтобы ее сформулировать, нужно привести дополнительные обозначения. Пусть C – спектральная кривая триквадрики размерности $2m - 1$. Обозначим овалы кривой $\mathbb{RC}$ через $C_2, \dots, C_s$, а через C_1 будем обозначать одностороннюю компоненту кривой $\mathbb{RC}$. Прообраз компоненты C_1 при проекции $\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ обозначим через Γ_1 . Кривая Γ_1 связная, она разбивает сферу S^2 на две части, которые мы обозначим через $S' = S'_V$, $S'' = S''_V$. Заметим, что эти половинки гомеоморфны диску, поэтому если их изображать дисками на плоскости $\mathbb{R}^2$, то кривая Γ_1 будет изображаться граничной окружностью. Прообраз каждого овала C_i , $i = 2, \dots, s$, при проекции $\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ состоит из двух компонент связности, одна из которых содержится в половинке S' , ее обозначим через Γ'_i , а другая компонента содержится в половинке S'' , ее обозначим через Γ''_i .

Обозначим через U' ту компоненту разности $S^2 \setminus \Gamma$, которая содержится в половинке S' , причем кривая Γ_1 входит в ее границу. Аналогично, обозначим через U'' ту компоненту разности $S^2 \setminus \Gamma$, которая содержится в половинке S'' , причем кривая Γ_1 входит в ее границу. Мы можем считать, что индекс-функция $I(\lambda)$ принимает на области U' значения, равные $m + 1$, а на

области U'' принимает значения, равные $m + 2$. В противном случае умножим квадратичные формы (0.1) на -1 (или переобозначим половинки S' , S''). Через D_i , $i = 2, \dots, s$, обозначим область разности $\mathbb{RP}^2 \setminus \mathbb{RC}$, которая снаружи ограничена овалом C_i . Прообраз каждой области D_i , $i = 2, \dots, s$, при проекции $\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ состоит из двух компонент связности, одна из которых содержится в половинке S' , ее обозначим через D'_i , а другая компонента содержится в половинке S'' , ее обозначим через D''_i .

Обозначим через $\mathcal{M}$ подмножество множества индексов $j \in \{2, \dots, s\}$ таких, что овал C_j входит во внутреннюю границу одной из областей D_i , на прообразе которой $D'_i \cup D''_i$ индекс-функция $I(\lambda)$ принимает значения, равные m или $m + 3$. Обозначение этого подмножества индексов через $\mathcal{M}$ соответствует значениям индекс-функции. Положим, что число $\sigma(j) \in \mathbb{F}_2$ по определению равно сумме чисел $\varepsilon(C_k)$, где овал C_k содержится во внутренности овала C_j . В настоящей работе мы докажем следующий критерий максимальности триквадрики нечетной размерности в случае, когда выполняется равенство $I_{\min} = m$.

ТЕОРЕМА 0.3. *Вещественная триквадрика V размерности $N - 3 = 2m - 1$ при $I_{\min} = m$ и неособой спектральной кривой C является M -многообразием, если и только если спектральная кривая C является M -кривой и для каждого индекса $j \in \mathcal{M}$ выполняется равенство $\sigma(j) = \varepsilon(C_j)$.*

Содержание настоящей работы следующее. Кроме введения, имеются пять параграфов. В §1 изучается инвариант $\ell(V)$ для триквадрик. Этот инвариант равен максимальному числу q , при котором гомоморфизм ограничения

$$H^q(\mathbb{RP}^N) \rightarrow H^q(\mathbb{R}V)$$

не равен нулю. В работе [2] показано, что для триквадрик справедливо неравенство $\ell(V) \leq I_{\min} - 1$. Главным результатом в §1 является утверждение: если $I_{\min} < N/2$, то равенство $\ell(V) = I_{\min} - 1$ равносильно обращению в нуль первого класса Штифеля–Уитни некоторого векторного расслоения (см. лемму 1.1 и предложение 1.1). Здесь применяется спектральная последовательность Агравачева. В §2 доказывается, что если триквадрика V является четномерным M -многообразием, то выполняется равенство $S(C_i) = \varepsilon(C_i)$ для каждого нечетного овала кривой $\mathbb{RC}$ (см. предложение 2.1). В §3 доказывается обратное утверждение. Таким образом, из результатов, полученных в §2, 3, вытекает теорема 0.2. В §4 доказана теорема 0.3. Здесь мы применяем одно следствие спектральной последовательности Агравачева. В §5 доказаны предложения, показывающие, что условия теорем 0.2, 0.3 и предложения 0.1 реализуются (см. предложения 5.1–5.3). Здесь мы применяем следствия из общих теорем о построении триквадрик в работах [1], [5].

§ 1. Инвариант $\ell(V)$ для триквадрик

Далее мы предполагаем, что $V \subset \mathbb{P}^N$ – вещественная триквадрика размерности $N - 3 > 0$, $C = C_V \subset \mathbb{P}^2$ – спектральная кривая триквадрики V . Рассмотрим инвариант $\ell(V)$, он равен максимальному числу q , при котором гомоморфизм ограничения $H^q(\mathbb{RP}^N) \rightarrow H^q(\mathbb{R}V)$ не равен нулю. Если $I_{\min}$ – минимальное значение индекс-функции $I(\lambda)$, то выполняется неравенство $\ell(V) < I_{\min}$ (см. [2]).

Обозначим через $\mu = \mu(V)$ число $I_{\min} - 1$. Далее мы хотим выяснить, когда выполняется равенство $\ell(V) = \mu(V)$. Мы дадим ответ на этот вопрос при условии, что $I_{\min} < N/2$.

Для триквადрики V рассмотрим на сфере S^2 семейство векторных пространств $F_+ = F_+(V)$, которое устроено следующим образом. Если $\lambda \in S^2$, то слой $(F_+)_{\lambda}$ равен линейной оболочке собственных векторов в пространстве $\mathbb{R}^{N+1}$ матрицы

$$M(\lambda) = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3,$$

отвечающих положительным собственным значениям. Определение семейства векторных пространств было введено в [6]. Нетрудно проверить, что подмножество $F_+ \subset S^2 \times \mathbb{R}^{N+1}$ с индуцированной топологией и проекцией $\pi: S^2 \times \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow S^2$ действительно является семейством векторных пространств на S^2 . Пусть $\mathbb{P}(F_+)$ – проекивизация семейства векторных пространств F_+ . Тогда существует гомотопическая эквивалентность пространства $\mathbb{P}(F_+)$ с многообразием $\mathbb{RP}^N \setminus \mathbb{R}V$. Она строится следующим образом. Пусть L_+ – открытое подмножество произведения $S^2 \times \mathbb{RP}^N$, заданное формулой

$$L_+ = \{(\lambda, x) \in S^2 \times \mathbb{RP}^N \mid q_{\lambda}(x) > 0\}.$$

Тогда проекция

$$p: S^2 \times \mathbb{RP}^N \rightarrow \mathbb{RP}^N$$

индуцирует гомотопическую эквивалентность $p: L_+ \rightarrow \mathbb{RP}^N \setminus \mathbb{R}V$ (см. [1]). С другой стороны, отображение вложения $\mathbb{P}(F_+) \hookrightarrow L_+$ также индуцирует гомотопическую эквивалентность.

Спектральная последовательность Лере проекции $\pi: \mathbb{P}(F_+) \rightarrow S^2$ имеет вид (см. [1], [7])

$$E_2^{i,j} = H^i(\Omega_{N-j}) \Rightarrow H^{i+j}(\mathbb{P}(F_+)) = H^{i+j}(L_+) = H^{i+j}(\mathbb{RP}^N \setminus \mathbb{R}V), \quad (1.1)$$

где $\Omega_j = \{\lambda \in S^2 \mid I(\lambda) \leq j\}$. Из спектральной последовательности (1.1) и неравенства $I_{\min} < N/2$ вытекает равенство

$$H^{N-\mu}(\mathbb{P}(F_+)) = H^1(\Omega_{\mu+1}).$$

Поэтому согласно последнему равенству, если t – базисный элемент одномерного пространства $H^1(\mathbb{RP}^N)$, элемент $p^*(t^{N-\mu})$ принадлежит пространству $H^1(\Omega_{\mu+1})$. Этот элемент будем обозначать через $\kappa(F_+)$ и называть *характеристическим классом семейства векторных пространств F_+* .

ЛЕММА 1.1. *Гомоморфизм*

$$H_{\mu}(\mathbb{R}V) \rightarrow H_{\mu}(\mathbb{RP}^N) \quad (1.2)$$

не равен нулю тогда и только тогда, когда $\kappa(F_+(V)) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из точной гомологической последовательности пары $(\mathbb{RP}^N, \mathbb{R}V)$

$$\cdots \rightarrow H_{\mu}(\mathbb{R}V) \rightarrow H_{\mu}(\mathbb{RP}^N) \rightarrow H_{\mu}(\mathbb{RP}^N, \mathbb{R}V) \rightarrow \cdots$$

получаем утверждение: гомоморфизм (1.2) не равен нулю тогда и только тогда, когда гомоморфизм

$$H_\mu(\mathbb{RP}^N) \rightarrow H_\mu(\mathbb{RP}^N, \mathbb{R}V)$$

равен нулю. Применим двойственность Пуанкаре–Лефшеца и получим утверждение: гомоморфизм (1.2) не равен нулю тогда и только тогда, когда гомоморфизм ограничения

$$H^{N-\mu}(\mathbb{RP}^N) \rightarrow H^{N-\mu}(\mathbb{RP}^N \setminus \mathbb{R}V) \quad (1.3)$$

равен нулю. Осталось заметить, что согласно приведенным выше рассуждениям образ элемента $t^{N-\mu}$ при гомоморфизме (1.3) равен элементу $p^*(t^{N-\mu}) \in H^{N-\mu}(\mathbb{P}(F_+))$, если использовать равенство $H^{N-\mu}(\mathbb{P}(F_+)) = H^{N-\mu}(\mathbb{RP}^N \setminus \mathbb{R}V)$. Лемма доказана.

Заметим, что ограничение семейства векторных пространств F_+ на замкнутое множество $\Omega_{\mu+1}$ не является векторным расслоением, но ограничение его на внутренность $\mathring{\Omega}_{\mu+1}$ является векторным расслоением. Поскольку $H^1(\Omega_{\mu+1}) = H^1(\mathring{\Omega}_{\mu+1})$, можно считать, что $\kappa(F_+(V)) \in H^1(\mathring{\Omega}_{\mu+1})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Если для триквадрики V выполняется неравенство $I_{\min} < N/2$, то равенство $\ell(V) = \mu(V)$ выполняется тогда и только тогда, когда*

$$w_1(F_+(V)|_{\mathring{\Omega}_{\mu+1}}) = 0,$$

где $w_1(F_+(V)|_{\mathring{\Omega}_{\mu+1}})$ – первый характеристический класс Штифеля–Уитни векторного расслоения $F_+(V)|_{\mathring{\Omega}_{\mu+1}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим гомоморфизм ограничения спектральной последовательности Лере для проекции $\pi: \mathbb{P}(F_+) \rightarrow S^2$ в спектральную последовательность Лере для проекции $\pi: \mathbb{P}(F_+|_{\mathring{\Omega}_{\mu+1}}) \rightarrow \mathring{\Omega}_{\mu+1}$. Тогда получим равенства

$$H^{N-\mu}(\mathbb{P}(F_+)) = H^{N-\mu}(\mathbb{P}(F_+|_{\mathring{\Omega}_{\mu+1}})) = H^1(\mathring{\Omega}_{\mu+1}).$$

Заметим, что класс когомологий

$$p^*(t^{N-\mu}) \in H^{N-\mu}(\mathbb{P}(F_+|_{\mathring{\Omega}_{\mu+1}})) = H^1(\mathring{\Omega}_{\mu+1})$$

равен обычному первому характеристическому классу Штифеля–Уитни векторного расслоения $F_+|_{\mathring{\Omega}_{\mu+1}}$. Следовательно, выполняется равенство

$$\kappa(F_+(V)) = w_1(F_+(V)|_{\mathring{\Omega}_{\mu+1}}).$$

Осталось применить лемму 1.1. Предложение доказано.

§ 2. Необходимые условия максимальности четномерных триквадрик

Пусть вещественная триквадрика V имеет размерность $2m = N - 3 > 0$, C – ее спектральная кривая. Обозначим четные овалы кривой $\mathbb{R}C$ через $C_1, \dots, C_p$, а через $C_{p+1}, \dots, C_s$ обозначим нечетные овалы. Разность $\mathbb{RP}^2 \setminus \mathbb{R}C$ состоит

из $s + 1$ областей, одна из которых неориентируемая. Для этих областей введем следующие обозначения. Неориентируемую область обозначим через U , ориентируемую область, для которой внешней границей является овал C_i , будем обозначать через D_i .

Если V является M -триквადрикой, то $\ell(V) \geq m$ (см., например, [8]). Следовательно,

$$m + 1 \leq I_{\min} \leq m + 2.$$

В работе [2] показано, что для M -триквадрик равенство $I_{\min} = m + 2$ не выполняется. Поэтому индекс-функция $I(\lambda)$ принимает значения $m + 1$, $m + 2$, $m + 3$ и выполняется равенство $\ell(V) = m$.

Рассмотрим проекцию $\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$. Прообраз области U при этой проекции обозначим через $\hat{U}$. На области $\hat{U}$ индекс-функция $I(\lambda)$ принимает значения, равные $m + 2$. Прообраз области D_i при проекции $\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ состоит из двух областей, которые мы будем обозначать через D'_i , D''_i . Если $1 \leq i \leq p$, то на одной из областей D'_i , D''_i индекс-функция $I(\lambda)$ принимает значения, равные $m + 1$, а на другой принимает значения, равные $m + 3$. Мы можем считать, что при $1 \leq i \leq p$ на области D'_i индекс-функция $I(\lambda)$ принимает значения, равные $m + 1$. Прообраз овала C_i при проекции $\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ состоит из двух овалов, которые мы обозначим через Γ'_i , Γ''_i . Можно считать, что овал Γ'_i является внешней границей области D'_i , а овал Γ''_i – внешней границей области D''_i . При $p + 1 \leq i \leq s$ на каждой из областей D'_i , D''_i индекс-функция $I(\lambda)$ принимает значения, равные $m + 2$. Мы можем считать, что овал Γ'_i , $p + 1 \leq i \leq s$, входит во внутреннюю границу области D'_j при некотором $j = 1, \dots, p$. Соответственно, овал Γ''_i , $p + 1 \leq i \leq s$, входит во внутреннюю границу области D''_j при некотором $j = 1, \dots, p$.

Ограничения семейства векторных пространства F_+ на области D'_i , D''_i являются векторными подрасслоениями тривиального расслоения $\mathbb{R}^{N+1}$. При $1 \leq i \leq p$ размерность этих подрасслоений равна соответственно $m + 3$, $m + 1$, а при $p + 1 \leq i \leq s$ равна $m + 2$ на D'_i и D''_i . Все эти подрасслоения однозначно продолжаются до подрасслоений тривиального расслоения $\mathbb{R}^{N+1}$ на замкнутые области $\bar{D}'_i$, $\bar{D}''_i$. Эти подрасслоения обозначим соответственно через F'_i , F''_i . Если $\lambda \in \Gamma'_i$, $i = 1, \dots, p$, то слой $(F'_i)_\lambda$ равен линейной оболочке собственных векторов матрицы $M(\lambda)$, отвечающих неотрицательным собственным значениям. Если $i = p + 1, \dots, s$, то при $\lambda \in \bar{D}'_i$ выполняется равенство $(F'_i)_\lambda = (F_+)_\lambda$. Если $a: S^2 \rightarrow S^2$ – антиподальная инволюция, то расслоение F''_i является ортогональным дополнением расслоения $a^*(F'_i)$ в $\mathbb{R}^{N+1}$.

ЛЕММА 2.1. *Если триквадрика V является M -многообразием, то при $i = 1, \dots, p$ выполняются равенства $w_1(F'_i) = w_1(F''_i) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства $\hat{\Omega}_{m+1} = D'_1 \cup \dots \cup D'_p$ и предложения 1.1 получаем $w_1(F'_i) = 0$. Чтобы доказать равенство $w_1(F''_i) = 0$, применим антиподальную инволюцию $a: S^2 \rightarrow S^2$. Тогда на области D''_i получим тривиальное расслоение

$$F''_i \oplus a^*(F'_i) = \mathbb{R}^{N+1}.$$

Поэтому равенство $w_1(F''_i) = 0$ следует из равенства $w_1(F'_i) = 0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2. Пусть триквадрика V является M -многообразием и внутренняя граница области D'_i , $p+1 \leq i \leq s$, состоит из овалов $\Gamma'_{i_1}, \dots, \Gamma'_{i_a}, \Gamma''_{i_b}, \dots, \Gamma''_{i_c}$. Тогда выполняются равенства

$$\begin{aligned} w_1(F'_i)([\Gamma'_{i_1}]) &= \varepsilon(C_{i_1}), \quad \dots, \quad w_1(F'_i)([\Gamma'_{i_a}]) = \varepsilon(C_{i_a}), \\ w_1(F'_i)([\Gamma''_{i_b}]) &= \varepsilon(C_{i_b}), \quad \dots, \quad w_1(F'_i)([\Gamma''_{i_c}]) = \varepsilon(C_{i_c}). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathcal{L}$ расслоение $\pi^*(\mathbb{R}L)$ на кривой Γ , которое получается из расслоения $\mathbb{R}L$ при проекции $\pi: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}C$. Если $j \in \{i_1, \dots, i_a\}$, то выполняется равенство $F'_i|_{\Gamma'_j} = F'_j|_{\Gamma'_j} \oplus \mathcal{L}|_{\Gamma'_j}$. Применим лемму 2.1, тогда из последнего равенства вытекает требуемое равенство

$$w_1(F'_i)([\Gamma'_j]) = \varepsilon(C_j).$$

Если $j \in \{i_b, \dots, i_c\}$, то выполняется равенство $F'_i|_{\Gamma''_j} = F''_j|_{\Gamma''_j} \oplus \mathcal{L}|_{\Gamma''_j}$. Применим лемму 2.1, тогда из последнего равенства вытекает требуемое равенство

$$w_1(F'_i)([\Gamma''_j]) = \varepsilon(C_j).$$

Лемма доказана.

Аналогично доказываются следующие леммы.

ЛЕММА 2.3. Пусть триквадрика V является M -многообразием и внутренняя граница области D''_i , $p+1 \leq i \leq s$, состоит из овалов $\Gamma'_{i_1}, \dots, \Gamma'_{i_a}, \Gamma''_{i_b}, \dots, \Gamma''_{i_c}$. Тогда выполняются равенства

$$\begin{aligned} w_1(F''_i)([\Gamma'_{i_1}]) &= \varepsilon(C_{i_1}), \quad \dots, \quad w_1(F''_i)([\Gamma'_{i_a}]) = \varepsilon(C_{i_a}), \\ w_1(F''_i)([\Gamma''_{i_b}]) &= \varepsilon(C_{i_b}), \quad \dots, \quad w_1(F''_i)([\Gamma''_{i_c}]) = \varepsilon(C_{i_c}). \end{aligned}$$

ЛЕММА 2.4. Пусть триквадрика V является M -многообразием. Тогда при $p+1 \leq i \leq s$ выполняются равенства

$$w_1(F'_i)([\Gamma'_i]) = \varepsilon(C_i), \quad w_1(F''_i)([\Gamma''_i]) = \varepsilon(C_i).$$

Заметим, что из лемм 2.2–2.4 вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть триквадрика V является M -многообразием. Тогда при $i = p+1, \dots, s$ выполняются равенства $S(C_i) = \varepsilon(C_i)$.

§ 3. Достаточные условия максимальности четномерных триквадрик

Для каждого четного овала C_i введем число $r(C_i)$, называемое рангом, которое равно числу r , если существует гнездо из r овалов, содержащееся в овале C_i , но не существует такого гнезда из $r+1$ овалов. В частности, ранг пустого овала равен нулю.

ЛЕММА 3.1. Пусть спектральная кривая S триквадрики V является M -кривой, причем для каждого нечетного овала C_i кривой $\mathbb{R}C$ выполняется равенство $S(C_i) = \varepsilon(C_i)$, а для индекс-функции $I(\lambda)$ выполняются неравенства $t+1 \leq I(\lambda) \leq t+3$. Тогда для каждого четного овала C_i имеют место равенства $w_1(F'_i) = 0$, $w_1(F''_i) = 0$, где F'_i, F''_i – расслоения на замкнутых областях $\bar{D}'_i, \bar{D}''_i$, определенные в § 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать равенство $w_1(F'_i) = 0$ для каждого $i = 1, \dots, p$, так как выполняется равенство $F''_i \oplus a^*(F'_i) = \mathbb{R}^{N+1}$. Если $r(C_i) = 0$, т. е. овал C_i пустой, то расслоение F'_i тривиально. Следовательно, имеем $w_1(F'_i) = 0$. Будем предполагать, что утверждение леммы доказано для всех четных овалов C_t , удовлетворяющих неравенству $r(C_t) \leq \varrho$. Покажем, что тогда утверждение леммы справедливо для четных овалов C_i , удовлетворяющих равенству $r(C_i) = \varrho + 1$. Пусть внутренняя граница области $\overline{D}'_i$ состоит из овалов $\Gamma'_{i_1}, \dots, \Gamma'_{i_k}$. Мы должны доказать равенства

$$w_1(F'_i)([\Gamma'_{i_1}]) = 0, \quad \dots, \quad w_1(F'_i)([\Gamma'_{i_k}]) = 0.$$

Пусть j принимает одно из значений $i_1, \dots, i_k$. Тогда выполняется равенство

$$w_1(F'_i)([\Gamma'_j]) = w_1(F'_j)([\Gamma'_j]) + \varepsilon(C_j), \quad (3.1)$$

где F'_j – расслоение на области $\overline{D}'_j$, определенное в § 2. Равенство (3.1) вытекает из равенств расслоений на кривой Γ'_j

$$F'_i|_{\Gamma'_j} = F'_j|_{\Gamma'_j} \oplus \mathcal{L}|_{\Gamma'_j}.$$

Пусть внутренняя граница области $\overline{D}'_j$ состоит из овалов $\Gamma'_{t_1}, \dots, \Gamma'_{t_a}, \Gamma''_{t_b}, \dots, \Gamma''_{t_c}$. Поскольку ранги овалов $C_{t_1}, \dots, C_{t_a}, C_{t_b}, \dots, C_{t_c}$ не больше ϱ , по нашему предположению должны выполняться равенства

$$w_1(F'_{t_1}) = 0, \quad \dots, \quad w_1(F'_{t_a}) = 0, \quad w_1(F''_{t_b}) = 0, \quad \dots, \quad w_1(F''_{t_c}) = 0.$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} w_1(F'_j)([\Gamma'_j]) &= w_1(F'_j)([\Gamma'_{t_1}]) + \dots + w_1(F'_j)([\Gamma'_{t_a}]) \\ &\quad + w_1(F'_j)([\Gamma''_{t_b}]) + \dots + w_1(F'_j)([\Gamma''_{t_c}]) \\ &= \varepsilon(C_{t_1}) + \dots + \varepsilon(C_{t_a}) + \varepsilon(C_{t_b}) + \dots + \varepsilon(C_{t_c}). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Применяя равенства (3.1), (3.2), получим

$$w_1(F'_i)([\Gamma'_j]) = S(C_j) + \varepsilon(C_j) = 0.$$

Лемма доказана.

Используя теперь предложение 1.1 и лемму 3.1, получим

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть для триквадрики $V \subset \mathbb{P}^N$ размерности $2m = N - 3$ выполняются следующие условия:

- 1) индекс-функция $I(\lambda)$ удовлетворяет условию $I_{\min} = m + 1$;
- 2) спектральная кривая $C \subset \mathbb{P}^2$ является M -кривой;
- 3) для каждого нечетного овала C_i кривой $\mathbb{R}C \subset \mathbb{R}\mathbb{P}^2$ выполняется равенство $S(C_i) = \varepsilon(C_i)$.

Тогда триквадрика V является M -многообразием.

Заметим теперь, что из предложений 2.1, 3.1 вытекает теорема 0.2.

§ 4. Нечетномерные триквадрики

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.3. Пусть вещественная триквадрика V имеет размерность $2m - 1 = N - 3 > 0$, C – ее спектральная кривая. Обозначим овалы кривой $\mathbb{R}C$ через $C_2, \dots, C_s$, а через C_1 будем обозначать одностороннюю компоненту кривой $\mathbb{R}C$. Прообраз компоненты C_1 при проекции $\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ обозначим через Γ_1 . Кривая Γ_1 связная, она разбивает сферу S^2 на две части, которые мы обозначим через $S' = S'_V$, $S'' = S''_V$. Заметим, что эти половинки гомеоморфны диску, поэтому мы можем изображать их дисками на плоскости $\mathbb{R}^2$. Тогда кривая Γ_1 будет изображаться граничной окружностью. Прообраз каждого овала C_i , $i = 2, \dots, s$, при проекции $\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ состоит из двух компонент связности, одна из которых содержится в половинке S' , ее обозначим через Γ'_i , а другая компонента содержится в половинке S'' , ее обозначим через Γ''_i .

Обозначим через U' ту компоненту разности $S^2 \setminus \Gamma$, которая содержится в половинке S' , причем кривая Γ_1 входит в ее границу. Аналогично, обозначим через U'' ту компоненту разности $S^2 \setminus \Gamma$, которая содержится в половинке S'' , причем кривая Γ_1 входит в ее границу. Мы можем считать, что индекс-функция $I(\lambda)$ принимает на области U' значения, равные $m + 1$, а на области U'' – значения, равные $m + 2$. В противном случае умножим квадратичные формы (0.1) на -1 (или переобозначим половинки S' , S'').

Сначала покажем, что для индекс-функции $I(\lambda)$ M -триквадрики выполняются неравенства $m \leq I(\lambda) \leq m + 3$. Достаточно проверить неравенство $I(\lambda) \geq m$. Каждое M -многообразие является GM -многообразием. С другой стороны, вещественное неособое полное пересечение $V \subset \mathbb{P}^N$ размерности $2m - 1$ будет GM -многообразием тогда и только тогда, когда гомоморфизм ограничения

$$H^{m-1}(\mathbb{R}P^N) \rightarrow H^{m-1}(\mathbb{R}V)$$

равен нулю (см., например, [9]). Следовательно, $\ell(V) \geq m - 1$, поэтому $I_{\min} \geq m$.

Случай, когда функция $I(\lambda)$ поочередно принимает два значения $m + 1$, $m + 2$, рассматривался в [2]. В этом случае справедливо предложение 0.1. Будем предполагать, что $I_{\min} = m$. В силу [7, следствие 1] в случае $I_{\min} = m$ получаем равенство

$$h^*(\mathbb{R}V) = h^*(\mathbb{R}C) + 2m + 4\delta - 8, \quad (4.1)$$

где δ равно 0 или 1, причем $\delta = 1$ тогда и только тогда, когда $\ell(V) = m - 1$. Из равенства (4.1) и равенств $h^*(V) = 4m^2 + 8m$, $h^*(C) = 4m^2 + 6m + 4$ получаем, что справедлива

ЛЕММА 4.1. *Если $I_{\min} = m$, то триквадрика V будет M -многообразием только в том случае, когда $\ell(V) = m - 1$ и спектральная кривая C является M -кривой.*

Так же, как в четном случае, рассмотрим на замкнутых областях $\overline{D}'_i$, $\overline{D}''_i$, $i = 2, \dots, s$, векторные расслоения F'_i , F''_i . Пусть внутренняя граница области D_i непустая и овал C_j входит во внутреннюю границу области D_i . Тогда

рассмотрим число $\sigma(j)$, равное сумме чисел $\varepsilon(C_k)$ по всем овалам C_k , содержащимся внутри овала C_j .

ЛЕММА 4.2. *Выполняются равенства*

$$w_1(F'_i)[\Gamma'_j] = \sigma(j) + \varepsilon(C_j), \quad (4.2)$$

$$w_1(F''_i)[\Gamma''_j] = \sigma(j) + \varepsilon(C_j), \quad (4.3)$$

где $j = 2, \dots, s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно установить равенство (4.2), так как равенство (4.3) доказывается аналогично, но можно применить равенство $F''_i \oplus a^*(F'_i) = \mathbb{R}^{N+1}$. Так же, как для четного овала в § 3, определим ранг $r(C_j)$, который равен числу r , если существует гнездо из r овалов, содержащееся в овале C_j , но не существует такого гнезда из $r + 1$ овалов. В частности, ранг пустого овала равен нулю. Если $r(C_j) = 0$, то расслоение F'_j тривиально. Следовательно, в этом случае выполняется равенство $\sigma(j) = 0$. Поскольку имеет место одно из равенств для расслоений на овале Γ'_j

$$F'_i|_{\Gamma'_j} = F'_j|_{\Gamma'_j} \oplus \mathcal{L}|_{\Gamma'_j}, \quad F'_j|_{\Gamma'_j} = F'_i|_{\Gamma'_j} \oplus \mathcal{L}|_{\Gamma'_j}, \quad (4.4)$$

выполняется равенство $w_1(F'_i)[\Gamma'_j] = \varepsilon(C_j)$. Поэтому равенство (4.2) также выполняется. Будем предполагать, что равенство (4.2) выполняется для всех $j \in \{2, \dots, s\}$, для которых $r(C_j) \leq \varrho$. Покажем, что для $j \in \{2, \dots, s\}$, для которого $r(C_j) = \varrho + 1$, равенство (4.2) также выполняется.

Пусть овал C_j является внешней границей области D_j и внутренняя граница области D_j состоит из овалов с номерами $k_1, \dots, k_a$. Тогда выполняются неравенства

$$r(C_{k_1}) \leq \varrho, \quad \dots, \quad r(C_{k_a}) \leq \varrho.$$

Следовательно, имеем

$$w_1(F'_j)([\Gamma'_{k_1}]) = \sigma(k_1) + \varepsilon(C_{k_1}), \quad \dots, \quad w_1(F'_j)([\Gamma'_{k_a}]) = \sigma(k_a) + \varepsilon(C_{k_a}).$$

Отсюда вытекают равенства

$$w_1(F'_j)([\Gamma'_j]) = \sigma(k_1) + \dots + \sigma(k_a) + \varepsilon(C_{k_1}) + \dots + \varepsilon(C_{k_a}) = \sigma(j).$$

Поскольку имеет место одно из равенств (4.4), выполняется равенство

$$w_1(F'_i)([\Gamma'_j]) = w_1(F'_j)([\Gamma'_j]) + \varepsilon(C_j),$$

применяя к которому равенство $w_1(F'_j)([\Gamma'_j]) = \sigma(j)$, получим (4.2). Лемма доказана.

Для доказательства теоремы 0.3 надо применить леммы 4.1, 4.2 и предложение 1.1.

§ 5. Существование М-триквадрик

Для формулировки следующих теорем потребуются дополнительные понятия. Заметим, что индекс-функция $I(\lambda)$ дает возможность ориентировать овалы кривой Γ . Если при переходе овала кривой Γ по направлению нормали значения индекс-функции возрастают, то нормаль с таким направлением называется *индекс-ориентированной*. Зафиксируем ориентацию сферы $S^2 = S_V^2$, тогда индекс-ориентированные нормали к овалам определяют на них ориентацию, если полагать, что базис, состоящий из касательного вектора к овалу, направленного в соответствии с ориентацией овала, и нормального индекс-ориентированного вектора, задает ориентацию сферы. Эта ориентация кривой Γ называется *индекс-ориентацией*. Она определена с точностью до замены на противоположную на всех овалах. Такая замена происходит при изменении ориентации сферы S_V^2 .

Индекс-ориентация кривой $\Gamma \subset S^2$ индуцирует ориентацию на кривой $\mathbb{R}C$. Рассмотрим сначала случай четномерных триквадрик. Для каждого овала C_i , $i = 1, \dots, s$, кривой $\mathbb{R}C$ определена внутренность на плоскости $\mathbb{R}P^2$. Она равна компоненте множества $\mathbb{R}P^2 \setminus C_i$, которая гомеоморфна диску. Прообраз овала C_i при проекции $\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ состоит из двух антиподальных овалов Γ'_i, Γ''_i . Следовательно, для каждого из антиподальных овалов Γ'_i, Γ''_i кривой Γ определена внутренность на сфере S^2 , если считать, что она проектируется во внутренность овала C_i . Определенная таким образом внутренность овалов кривой Γ дает возможность сравнивать индекс-ориентации этих овалов. Заметим, что на двух антиподальных овалах индекс-ориентация разная. Поскольку антиподальная инволюция сферы меняет ее ориентацию, проекция $\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ отображает индекс-ориентированные антиподальные овалы кривой Γ в один овал кривой $\mathbb{R}C$, индуцируя на нем одинаковую ориентацию. Таким образом, получаем ориентацию кривой $\mathbb{R}C$, она также называется *индекс-ориентацией*. Индекс-функция $I(\lambda)$ восстанавливается по индекс-ориентации, так как на компоненте U значения индекс-функции известны, они равны $m + 2$. Если изменить индекс-ориентацию на противоположную, то восстановленная по ней индекс-функция будет принимать значения на множестве $S^2 \setminus \Gamma$, равные $N + 1 - I(\lambda)$, а на кривой Γ она принимает значения $N - I(\lambda)$.

В случае нечетномерных триквадрик, если C_1 – односторонняя компонента кривой $\mathbb{R}C$, индекс-ориентация на овалах $C_2, \dots, C_s$ строится аналогично, а на односторонней компоненте C_1 индекс-ориентация индуцируется индекс-ориентацией на кривой Γ_1 с помощью проекции $\pi: \Gamma_1 \rightarrow C_1$. Индекс-функция $I(\lambda)$ также восстанавливается по индекс-ориентации, так как на компонентах U', U'' значения индекс-функции известны.

Если взять произвольную ориентацию σ_Γ кривой $\mathbb{R}C$, то можно построить целочисленную функцию $I_{\sigma_\Gamma}(\lambda)$, удовлетворяющую свойствам индекс-функции и определяющую данную ориентацию. Эту функцию будем называть *псевдо-индекс-функцией*.

Пусть дана вещественная неособая кривая C рода $g > 0$. Будем предполагать, что кривая C имеет тип I. Тогда на вещественной части $\mathbb{R}C = C_1 \cup \dots \cup C_s$ определена комплексная ориентация (см. [10]). Заметим, что комплексная ориентация определена с точностью до замены на противоположную. Для произ-

вольной ориентации $\sigma\tau$ кривой $\mathbb{R}C$ определим набор чисел, полагая $\delta_{\sigma\tau}(C_i) = 0$, если на овале C_i комплексная ориентация совпадает с ориентацией $\sigma\tau$, в противном случае $\delta_{\sigma\tau}(C_i) = 1$. Поскольку комплексная ориентация определена с точностью до замены на противоположную, числа $\delta_{\sigma\tau}(C_1), \dots, \delta_{\sigma\tau}(C_s) \in \mathbb{F}_2$ определены с точностью до замены их на числа $\delta_{\sigma\tau}(C_1) + 1, \dots, \delta_{\sigma\tau}(C_s) + 1 \in \mathbb{F}_2$. Следовательно, можно считать, что $\delta_{\sigma\tau}(C_1) = 0$. В случае плоской кривой C четной степени мы не будем предполагать выполнения этого равенства, но в случае плоской кривой C нечетной степени будем предполагать, что C_1 – односторонняя компонента и выполняется равенство $\delta_{\sigma\tau}(C_1) = 0$.

Далее мы рассматриваем по отдельности построение четномерных и нечетномерных триквадрик. Из общих теорем о построении триквадрик (см. [1], [5]) вытекают следующие следствия (см. [11])

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть дана неособая вещественная M -кривая $C \subset \mathbb{P}^2$ степени $d = 2m + 4$, на вещественной части $\mathbb{R}C = C_1 \cup \dots \cup C_s$ задана произвольная ориентация $\sigma\tau$, а также задан набор чисел $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s \in \mathbb{F}_2$, удовлетворяющий условию

$$\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_s \equiv s \pmod{2}. \quad (5.1)$$

Пусть также выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^s (1 + \varepsilon_i) \delta_{\sigma\tau}(C_i) = 0. \quad (5.2)$$

Тогда существует малое вещественное возмущение кривой C такое, что кривая C станет спектральной кривой вещественной триквадрики размерности $2m$, причем такой триквадрики, что спектральная ориентация спектральной кривой совпадет с заданной ориентацией $\sigma\tau$, спектральные числа $\varepsilon(C_1), \dots, \varepsilon(C_s)$ совпадут с числами $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s$.

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Пусть дана неособая вещественная M -кривая $C \subset \mathbb{P}^2$ степени $d = 2m + 3$, компонента C_1 кривой $\mathbb{R}C = C_1 \cup \dots \cup C_s$ односторонняя, на кривой $\mathbb{R}C$ задана произвольная ориентация $\sigma\tau$, а также задан набор чисел $\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s \in \mathbb{F}_2$. Пусть выполняется равенство

$$\sum_{i=2}^s (1 + \varepsilon_i) \delta_{\sigma\tau}(C_i) = 0. \quad (5.3)$$

Тогда, при одном исключении, существует малое вещественное возмущение кривой C такое, что кривая C станет спектральной кривой вещественной триквадрики размерности $2m - 1$, причем такой триквадрики, что спектральная ориентация спектральной кривой совпадет с заданной ориентацией $\sigma\tau$, спектральные числа $\varepsilon(C_2), \dots, \varepsilon(C_s)$ совпадут с числами $\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s$. Исключение представляет случай, когда $d \equiv \pm 1 \pmod{8}$, псевдоиндекс-функция $I_{\sigma\tau}(\lambda)$, построенная по ориентации $\sigma\tau$, принимает два значения и $\varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_s = 0$.

Покажем, что справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Пусть дана неособая вещественная плоская M -кривая степени $d = 2m + 4$, вещественная часть $\mathbb{R}C$ которой имеет хотя бы один пустой внешний овал. На овалах кривой $\mathbb{R}C$ задана ориентация $\sigma\tau$, для которой

псевдоиндекс-функция $I_{\sigma\tau}(\lambda)$ удовлетворяет неравенствам $m + 1 \leq I_{\sigma\tau}(\lambda) \leq m + 3$. Тогда существует малое вещественное возмущение кривой C такое, что кривая C станет спектральной кривой вещественной M -триквадрики, спектральная ориентация которой совпадет с заданной ориентацией $\sigma\tau$, кроме, может быть, ориентации одного пустого внешнего овала.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbb{R}C = C_1 \cup \dots \cup C_s$ и овал C_1 внешний и пустой. Можем считать, что овалы $C_1, \dots, C_k$ внешние, а остальные овалы внутренние. Рассмотрим вектор $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s) \in (\mathbb{F}_2)^s$ с нулевыми координатами. Если равенство (5.1) не выполняется, то полагаем, что $\varepsilon_k = 1$, а остальные координаты не меняем. Тогда равенство (5.1) будет выполняться. Если равенство (5.2) не выполняется, то меняем ориентацию овала C_1 . Тогда равенство (5.2) будет выполняться. Применим следствие 5.1, тогда получим, что существует малое вещественное возмущение кривой C такое, что кривая C станет спектральной кривой вещественной триквадрики, спектральная ориентация спектральной кривой которой совпадет с заданной ориентацией $\sigma\tau$ на всех овалах, кроме, может быть, овала C_1 , а спектральные числа $\varepsilon(C_1), \dots, \varepsilon(C_s)$ совпадут с числами $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s$. Применяя теорему 0.2, получим, что построенная триквадрика является M -многообразием. Предложение доказано.

Аналогично доказывается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. Пусть дана неособая вещественная плоская M -кривая степени $d = 2m + 3$, вещественная часть $\mathbb{R}C$ которой имеет хотя бы один пустой внешний овал. На компонентах кривой $\mathbb{R}C = C_1 \cup \dots \cup C_s$ задана ориентация $\sigma\tau$, для которой псевдоиндекс-функция $I_{\sigma\tau}(\lambda)$ принимает четыре значения $m, m + 1, m + 2, m + 3$. Тогда существует малое вещественное возмущение кривой C такое, что кривая C станет спектральной кривой вещественной M -триквадрики, спектральная индекс-ориентация которой совпадет с заданной ориентацией $\sigma\tau$, кроме, может быть, ориентации одного пустого внешнего овала.

Заметим, что при доказательстве предложения 5.2 нужно применять следствие 5.2 и теорему 0.3. Мы предполагаем, что компонента C_1 односторонняя, поэтому считаем, что овал C_2 внешний и пустой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Пусть дана неособая вещественная плоская M -кривая степени $d = 2m + 3$. На овалах кривой $\mathbb{R}C$ задана ориентация $\sigma\tau$, для которой псевдоиндекс-функция $I_{\sigma\tau}(\lambda)$ принимает два значения $m + 1, m + 2$. Тогда существует малое вещественное возмущение кривой C такое, что кривая C станет спектральной кривой вещественной M -триквадрики, индекс-спектральная ориентация которой совпадет с заданной ориентацией $\sigma\tau$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы предполагаем, что компонента C_1 односторонняя. Рассмотрим вектор $(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s) \in (\mathbb{F}_2)^{s-1}$ такой, что все его координаты равны 1. Тогда равенство (5.3) выполняется. Применим следствие 5.2. Тогда получим, что существует малое вещественное возмущение кривой C такое, что кривая C станет спектральной кривой вещественной триквадрики, спектральная ориентация спектральной кривой которой совпадет с заданной ориентацией $\sigma\tau$ на всех

компонентах кривой $\mathbb{R}C = C_1 \cup \dots \cup C_s$, а спектральные числа $\varepsilon(C_2), \dots, \varepsilon(C_s)$ будут равны 1. Остается применить предложение 0.1. Предложение доказано.

Список литературы

1. A. Degtyarev, I. Itenberg, V. Kharlamov, *On the number of components of a complete intersection of real quadrics*, arXiv: 0806.4077v2.
2. В. А. Краснов, “Максимальные пересечения трех вещественных квадрик”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:3 (2011), 127–146; англ. пер.: V. A. Krasnov, “Maximal intersections of three real quadrics”, *Izv. Math.*, **75**:3 (2011), 569–587.
3. В. В. Никулин, “О компонентах связности модулей вещественных поляризованных K3-поверхностей”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72**:1 (2008), 99–122; англ. пер.: V. V. Nikulin, “On the connected components of moduli of real polarized K3-surfaces”, *Izv. Math.*, **72**:1 (2008), 91–111.
4. S. Yu. Orevkov, “Classification of flexible M -curves of degree 8 up to isotopy”, *Geom. Funct. Anal.*, **12**:4 (2002), 723–755.
5. A. C. Dixon, “Note on the reduction of a ternary quintic to a symmetrical determinant”, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **5** (1902), 350–351.
6. М. Атья, *Лекции по K-теории*, Мир, М., 1967; пер. с англ.: М. F. Atiyah, *K-theory*, Benjamin, New York–Amsterdam, 1967.
7. А. А. Аграчев, “Гомологии пересечений вещественных квадрик”, *Докл. АН СССР*, **299**:5 (1988), 1033–1036; англ. пер.: A. A. Agrachev, “Homology of intersections of real quadrics”, *Soviet Math. Dokl.*, **37**:2 (1988), 493–496.
8. В. М. Харламов, “Дополнительные сравнения для эйлеровой характеристики четномерных вещественных алгебраических многообразий”, *Функц. анализ и его прил.*, **9**:2 (1975), 51–60; англ. пер.: V. M. Kharlamov, “Additional congruences for the Euler characteristic of real algebraic manifolds of even dimensions”, *Funct. Anal. Appl.*, **9**:2 (1975), 134–141.
9. В. А. Краснов, “Вещественные алгебраические GM-многообразия”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:3 (1998), 39–66; англ. пер.: V. A. Krasnov, “Real algebraic GM-varieties”, *Izv. Math.*, **62**:3 (1998), 465–491.
10. В. А. Рохлин, “Комплексные топологические характеристики вещественных алгебраических кривых”, *УМН*, **33**:5 (1978), 77–89; англ. пер.: V. A. Rokhlin, “Complex topological characteristics of real algebraic curves”, *Russian Math. Surveys*, **33**:5 (1978), 85–98.
11. В. А. Краснов, “Когомологии вещественных трехмерных триквадрик”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **76**:1 (2012), 121–148; англ. пер.: V. A. Krasnov, “Cohomology of real three-dimensional triquadrics”, *Izv. Math.*, **76**:1 (2012), 113–138.

В. А. КРАСНОВ (V. A. KRASNOV)
Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова
E-mail: krasnov@uniyar.ac.ru

Поступило в редакцию
14.06.2011
29.10.2011