Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Назаров, Асимптотика собственных колебаний
массивного упругого тела с тонкой перегородкой, *Изв.
РАН. Сер. матем.*, 2013, том 77, выпуск 1, 91–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7804>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 08:06:21

УДК 517.956.8+517.956.328+539.3(4)

С. А. Назаров

Асимптотика собственных колебаний массивного упругого тела с тонкой перегородкой

Построена асимптотика собственных чисел и векторов задачи теории упругости для анизотропного тела, к которому присоединена тонкая (переменной толщины $O(h)$, $h \ll 1$) пластина-перегородка. В спектре выделены две серии собственных чисел с устойчивыми асимптотиками. Первая серия образована собственными числами $O(h^2)$, отвечающими поперечным колебаниям пластины с жестко заземленной боковой поверхностью, а вторая содержит собственные числа $O(1)$ и порождена продольными колебаниями пластины, а также собственными колебаниями тела без перегородки. Проверена теорема о сходимости для первой серии и установлены оценки погрешностей для обеих серий. Обсуждаются поправочные асимптотические члены и явление пограничного слоя. Аналогичные, но более простые результаты получены для скалярной задачи.

Библиография: 53 наименования.

Ключевые слова: сочленение массивного тела с тонкой пластиной, спектр упругого тела, асимптотика собственных чисел и векторов, процедура понижения размерности.

DOI: 10.4213/im7804

§ 1. Постановка задачи и описание результатов

1.1. Упругое тело с тонкой перегородкой. Пусть Ξ – область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ с гладкой (для простоты) границей $\partial\Xi$ и компактным замыканием $\bar{\Xi} = \Xi \cup \partial\Xi$. Пусть, кроме того, $\omega \subset \mathbb{R}^2$ – область на плоскости

$$\{x = (x_1, x_2, x_3) = (y, z): y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, z = 0\}, \quad (1.1)$$

ограниченная простым гладким замкнутым контуром $\gamma = \partial\omega \subset \partial\Xi$, причем $\Xi \cap \omega = \emptyset$ (рис. 1, а).

Отметим, что далее, несколько вольно, не различаем в обозначениях двумерные фигуры и их погружения в плоскость (1.1). Введем еще две гладкие функции $H_{\pm}$ на области $\omega' \in \mathbb{R}^2$, содержащей замыкание $\bar{\omega} = \omega \cup \partial\omega$, и определим тонкую трехмерную пластину

$$\Omega_h = \{x = (y, z): y \in \omega, z \in \Upsilon_h(y)\}, \quad \Upsilon_h(y) = (-hH_-(y), hH_+(y)). \quad (1.2)$$

Пластина Ω_h имеет переменную толщину $hH(y)$, а функция $H = H_- + H_+$ считается положительной в ω' . Боковую поверхность пластины обозначим через Σ_h^0 , а основания – через $\Sigma_h^{\pm}$. Более широкая пластина Ω'_h задана первой формулой в (1.2) с заменой $\omega \mapsto \omega'$, а ее продольное сечение ω' подобрано так, что боковая поверхность $(\Sigma_h^0)' = \{x \in \partial\Omega'_h: y \in \partial\omega\}$ содержится внутри области Ξ при $h \in (0, h_0]$. Далее при необходимости уменьшаем верхнюю грань $h_0 \in (0, 1)$ изменения параметра h , сохраняя за ней прежнее обозначение.

Тело с тонкой перегородкой (рис. 1, б) и сама перегородка $\Omega(h)$ имеют вид

$$\Xi(h) = \Xi \cup \Omega'_h, \quad \Omega(h) = \Xi(h) \setminus \bar{\Xi}. \quad (1.3)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-01-00348).

Рис. 1. Двумерное изображение пластины с перегородкой (b) и соответствующая предельная гибридная область (a)

В общей ситуации множества Ω_h и $\Omega(h)$ различаются, однако в § 6 вводим упрощающее геометрическое ограничение (6.1) и предполагаем, что $\Omega_h = \Omega(h)$.

1.2. Задача теории упругости. Столбец $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))^T$, где T – знак транспонирования, представляет собой вектор смещений точки x при деформации упругого тела $\Xi(h)$. Столбец деформаций

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{11}(u), \varepsilon_{22}(u), 2^{1/2}\varepsilon_{12}(u), 2^{1/2}\varepsilon_{23}(u), 2^{1/2}\varepsilon_{31}(u), \varepsilon_{33}(u))^T \quad (1.4)$$

можно вычислить по формуле

$$\varepsilon(u; x) = \mathcal{D}(\nabla_x)u(x),$$

в которой $\nabla_x = \text{grad}$, а $\mathcal{D}(\nabla_x)$ – (6×3) -матрица дифференциальных операторов первого порядка,

$$\mathcal{D}(\xi)^T = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 2^{-1/2}\xi_2 & 0 & 2^{-1/2}\xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_2 & 2^{-1/2}\xi_1 & 2^{-1/2}\xi_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{-1/2}\xi_2 & 2^{-1/2}\xi_1 & \xi_3 \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Кроме того, $\varepsilon_{jk}(u) = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j})$ – декартовы компоненты тензора деформаций, а множители $2^{1/2}$ и $2^{-1/2}$ введены в определения (1.4) и (1.5) для того, чтобы уравнивать естественные нормы названного тензора второго ранга и шестимерного столбца деформаций (ср. [1, § 2.1]). Столбец напряжений $\sigma(u)$, имеющий аналогичное (1.4) строение, связан со столбцом деформаций линейным законом Гука $\sigma(u; x) = A\varepsilon(u; x)$, где A – симметричная и положительно определенная вещественная числовая матрица размером 6×6 , составленная из модулей упругости материала (см. [2] и [1, § 2.1]). Иными словами, упругое сочленение $\Xi(h)$ анизотропное, но однородное. Тела с такими формами встречаются среди природных и рукотворных объектов, тонкие перемычки появляются, например, при образовании пустот (вымывание или выработка породы) в грунтовых или горных массивах. Многие конструкции (строения, корпуса аппаратов и пр.) также включают перемычки, которые по своему назначению делаются более жесткими, чем основное тело (см. далее п. 7.2 по поводу доступных обобщений).

Задача о собственных колебаниях упругого тела $\Xi(h)$ имеет следующий вид:

$$L(\nabla_x)u^h(x) := \mathcal{D}(-\nabla_x)^T A \mathcal{D}(\nabla_x)u^h(x) = \rho \Lambda u^h(x), \quad x \in \Xi(h), \quad (1.6)$$

$$N(x, \nabla_x)u^h(x) := \mathcal{D}(n(x))^\top A \mathcal{D}(\nabla_x)u^h(x) = 0, \quad x \in \Gamma_N(h) := \partial\Xi(h) \setminus \overline{\Gamma_D}, \quad (1.7)$$

$$u^h(x) = 0, \quad x \in \Gamma_D. \quad (1.8)$$

Здесь n – единичный вектор (столбец) внешней нормали, определенной всюду на поверхности $\partial\Xi(h)$, за исключением одномерных ребер $(\Sigma_h^\pm)' \cap \partial\Xi$, появившихся в зоне присоединения перегородки к телу, а $\Gamma_D \neq \emptyset$ – заземленная часть поверхности $\partial\Xi$, причем $\Gamma_D \cap \gamma = \emptyset$. Плотность $\rho = 1$ упругого материала и характерный размер области ω , например ее диаметр, берем в качестве эталонов, т. е. после масштабирования делаем все величины безразмерными.

Основная цель работы – исследование асимптотического поведения при $h \rightarrow +0$ спектра задачи (1.6)–(1.8).

1.3. Скалярное уравнение. Еще одна задача, обсуждаемая в статье, имеет вид

$$-\Delta u^h(x) = \Lambda^h u^h(x), \quad x \in \Xi(h), \quad (1.9)$$

$$\partial_n u^h(x) = 0, \quad x \in \Gamma_N(h), \quad (1.10)$$

$$u^h(x) = 0, \quad x \in \Gamma_D, \quad (1.11)$$

где $\Delta_x = \nabla_x^\top \nabla_x$ – оператор Лапласа. Результат асимптотического анализа, проведенного в § 5, показывает, что каждый член последовательности

$$0 < \Lambda_1^h \leq \Lambda_2^h \leq \dots \leq \Lambda_m^h \leq \dots \rightarrow +\infty \quad (1.12)$$

собственных чисел задачи (1.9)–(1.11) стремится при $h \rightarrow +0$ к соответствующему члену последовательности

$$0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_m \leq \dots \rightarrow +\infty, \quad (1.13)$$

полученной объединением спектров двух предельных задач, трехмерной и двумерной:

$$-\Delta_x v(x) = \mu^\Xi v(x), \quad x \in \Xi, \quad \partial_n v(x) = 0, \quad x \in \partial\Xi \setminus \overline{\Gamma_D}, \quad v(x) = 0, \quad x \in \Gamma_D, \quad (1.14)$$

$$-\nabla_y^\top H(y) \nabla_y w(y) = \mu^\omega H(y) w(y), \quad y \in \omega, \quad w(y) = 0, \quad y \in \partial\omega. \quad (1.15)$$

Первая из них получается удалением перегородки $\overline{\Omega(h)}$ из сочленения $\Xi(h)$, а вторая – при помощи асимптотической процедуры понижения размерности (см., например, [1, § 1.2, 7.1]). Отметим, что собственные числа включены в списки (1.12) и (1.13) при учете кратностей.

Указанный факт (теорема 5.2) согласуется со ставшим уже классическим результатом (см. работы [3], [4], а также подробный обзор литературы в статье [5]) об асимптотическом строении спектра задачи Неймана на сочленении массивного тела с тонким стержнем: пределы членов последовательности (1.12) для этой задачи также образуют объединение последовательностей собственных чисел двух предельных задач, трехмерной и одномерной.

1.4. Спектр задачи теории упругости. Обобщенная формулировка [6] задачи (1.6)–(1.8) заключается в нахождении числа Λ^h и нетривиальной вектор-функции $u^h \in \dot{H}^1(\Xi(h); \Gamma_D)^3$, удовлетворяющих интегральному тождеству

$$a(u^h, v^h; \Xi(h)) = \Lambda^h (u^h, v^h)_{\Xi(h)}, \quad v^h \in \mathcal{H}^h := \dot{H}^1(\Xi(h); \Gamma_D)^3. \quad (1.16)$$

Пространство $\dot{H}^1(\Xi(h); \Gamma_D)^3$ составлено из вектор-функций, принадлежащих классу Соболева $H^1(\Xi(h))^3$ и подчиненных условию Дирихле (1.8). Билинейная форма

$$a(u^h, v^h; \Xi(h)) = (AD(\nabla_x)u^h, \mathcal{D}(\nabla_x)v^h)_{\Xi(h)} \quad (1.17)$$

при $u^h = v^h$ является удвоенной упругой энергией сочленения $\Xi(h)$. Под $(\cdot, \cdot)_{\Xi(h)}$ подразумевается скалярное произведение в пространстве Лебега $L_2(\Xi(h))^m$, скалярном ($m = 1$) или векторном ($m > 1$); индекс m указывает количество компонент вектор-функции, но в обозначениях норм и скалярных произведений не пишется.

Ввиду неравенства Корна

$$\|u^h; H^1(\Xi(h))\| \leq C(h) \|\mathcal{D}(\nabla_x)u^h; L_2(\Xi(h))\|, \quad u^h \in \dot{H}^1(\Xi(h); \Gamma_D)^3 \quad (1.18)$$

(см., например, [7]–[9]) билинейную форму (1.17) можно назначить скалярным произведением в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^h$. Таким образом, благодаря компактности вложения $H^1(\Xi(h)) \subset L_2(\Xi(h))$ спектр задачи (1.17) (или (1.6)–(1.8) в дифференциальной форме) является дискретным и образует неограниченную монотонную последовательность (1.12) (см. [10, теорема 10.2.2]). Соответствующие собственные векторы $u_{(1)}^h, u_{(2)}^h, \dots, u_{(m)}^h, \dots \in \mathcal{H}^h$ можно подчинить условиям ортогональности и нормировки

$$(u_{(m)}^h, u_{(p)}^h)_{\Xi(h)} = \delta_{m,p}, \quad m, p \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}, \quad (1.19)$$

где $\delta_{m,p}$ – символ Кронекера.

Отметим, что множитель $C(h)$ в неравенстве Корна (1.18) сложным (зачастую неизвестным) образом зависит от геометрии области $\Xi(h)$, т.е. в рассматриваемой ситуации – от малого параметра $h > 0$. В §3 запись неравенства (1.18) будет изменена путем введения весовой нормы¹ в пространстве Соболева $H^1(\Xi(h))^3$ (ср. [11]–[13] и см. теорему 3.1), что позволит сделать множитель C в модифицированном неравенстве Корна общим для всех $h \in (0, h_0]$.

Полученные в §2–4 результаты показывают, что асимптотическое строение спектра упругой задачи (1.6)–(1.8) существенно отличается от скалярного случая (1.9)–(1.11). Так, в §3 (теорема 3.2) установлено соотношение

$$\lim_{h \rightarrow +0} h^{-2} \Lambda_m^h = \lambda_m, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (1.20)$$

где λ_m – собственные числа первой предельной задачи для пластины, выведенной в п. 2.1 на основе процедуры понижения размерности в задачах теории упругости (см., например, [14] и [1, гл. 4 и §7.2]) и представляющей собой задачу Дирихле для эллиптической по Дуглису–Ниренбергу системы трех дифференциальных уравнений в области $\omega \subset \mathbb{R}^2$. Отметим, что спектральный параметр λ присутствует только в одном из трех уравнений, однако последовательность ее собственных чисел

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m \leq \dots \rightarrow +\infty \quad (1.21)$$

все-таки оказывается монотонно возрастающей и неограниченной (лемма 2.1). Формула (1.20) описывает эффект концентрации спектра задачи (1.6)–(1.8): все

¹В качестве весовых множителей выступают степени малого параметра h и расстояния $\text{dist}(x, \gamma)$ от точки x до зоны присоединения перемычки к телу (ср. нормы (3.7) и (3.8)). Первые призваны описать различия в реакции тонких тел на растяжение и изгиб, а вторые, в частности, отражают краевые эффекты (см. [11, §2]) и объясняют, откуда происходят краевые условия Дирихле (2.22) и (2.32) в предельных задачах.

собственные числа со скоростью $O(h^2)$ стремятся к нулю. В п. 4.2 (теорема 4.1) этот результат уточнен и установлена оценка

$$|\Lambda_m^h - h^2 \lambda_m| \leq C_m h^{5/2} |\ln h|. \quad (1.22)$$

Кроме того, построена асимптотика соответствующих собственных вектор-функций.

Для объединенной последовательности (1.13) собственных чисел двух других предельных задач в плоской и пространственной областях ω и Ξ , указанных в п. 2.2 и п. 2.3 соответственно, проверено (теорема 4.2) соотношение

$$|\Lambda_{N^h(j)}^h - \mu_j| \leq C_j |\ln h|^{-1/2}. \quad (1.23)$$

Отметим особо, что оценка (1.23) не влечет за собой какую-либо сходимость: номер $N^h(j)$ фигурирующего в ней члена последовательности (1.12) зависит от параметра h , что согласуется с асимптотикой (1.22).

В § 5 доказаны сходимость

$$\lim_{h \rightarrow +0} \Lambda_m^h = \mu_m \quad (1.24)$$

и оценка

$$|\Lambda_m^h - \mu_m| \leq c_m |\ln h|^{-1/2} \quad (1.25)$$

для собственных чисел скалярной задачи (1.9)–(1.11). Формула (1.24) и оценка (1.25) отличаются от соответствующих формул (1.20) и (1.22) в случае векторной задачи: в левой части (1.24) отсутствует множитель h^{-2} и фигурирует объединенная последовательность (1.13) собственных чисел двух предельных задач (1.14) и (1.15), а в левой части (1.25) совпадают номера собственных чисел из последовательностей (1.12) и (1.13).

Отметим, что погрешность, описанная неравенством (1.22), имеет степенной характер малости, а именно $h^{1/2} |\ln h|$ (при учете множителя h^2 в левой части (1.22)), но погрешность, указанная неравенствами (1.23) и (1.25), убывает медленно, только со скоростью $O(|\ln h|^{-1/2})$. Асимптотическая точность оценки (1.22) проверена в п. 7.1 посредством построения пограничного слоя; там же обсуждается возможность улучшения оценок (1.23) и (1.25). Оказывается, что собственные функции предельной задачи на перегородке служат “хорошим” приближением к собственным функциям сингулярно возмущенной задачи, а собственные функции задачи на массивном теле – “плохим”, т. е. нуждающимся в исправлении как около края перегородки, так и на ней самой. Нужные конструкции, учитывающие явление пограничного слоя, указаны в § 6.

Другие варианты и доступные обобщения, в частности упругие сочленения с контрастными свойствами, а также вопросы моделирования упругого сочленения краевой задачей на гибридной области [15], упомянуты в § 7.

Основные результаты статьи собраны в § 2–5, а последние два параграфа, § 6, 7, посвященные исследованию пограничных слоев, сочленений с контрастными жесткостями и моделей, использующих гибридные области и технику самосопряженных расширений, написаны конспективно: в них только указаны возможные направления продолжения исследований и открытые вопросы, а подробное изложение материала, даже формулировки результатов потребовали бы значительного увеличения объема статьи.

§ 2. Пределные задачи

2.1. Первая предельная задача. Сводка результатов по асимптотическому анализу тонких упругих пластин. Для сужения на перегородку $\Omega(h)$ (см. определение (1.3)) собственного вектора u^h задачи (1.6)–(1.8) рассмотрим анзац, обычный в линейной теории тонких пластин (см., например, статьи [13], [14], [16], [17], книги [1], [18], [19] и др. публикации):

$$u^h(x) = h^{-2}U^{-2}(y) + h^{-1}U^{-1}(y, \zeta) + h^0U^0(y, \zeta) + h^1U^1(y, \zeta) + h^2U^2(y, \zeta) + \dots \quad (2.1)$$

Здесь $\zeta = h^{-1}z \in \Upsilon_1(y)$ – “растянутая” координата,

$$U^{-2}(y) = w_3(y)e_3, \quad U^{-1}(y, \zeta) = \sum_{i=1}^2 e_i \left(w_i(y) - \zeta \frac{\partial w_3}{\partial y_i}(y) \right), \quad (2.2)$$

e_j – орт оси x_j , $w = (w_1, w_2, w_3)^\top$ – вектор-функция, подлежащая определению, причем ее компонента w_3 связана с (приближенным – осредненным) прогибом пластины, а компоненты w_1 и w_2 – с приближенными продольными смещениями вдоль осей $x_1 = y_1$ и $x_2 = y_2$.

Предвосхищая результат формального асимптотического анализа, укажем, что функция w_3 в анзаце (2.1), (2.2) может быть ненулевой только при малых собственных числах задачи (1.6)–(1.8), для которых примем следующий анзац:

$$\Lambda^h = h^2\lambda + \dots \quad (2.3)$$

В координатах y и ζ матрица $L(\nabla_x)$ дифференциальных операторов второго порядка из системы (1.6) допускает расщепление

$$L(\nabla_x) = h^{-2}L^0(\partial_\zeta) + h^{-1}L^1(\nabla_y, \partial_\zeta) + h^0L^2(\nabla_y), \quad (2.4)$$

$$L^0 = -\mathcal{D}_\zeta^\top A \mathcal{D}_\zeta, \quad L^1 = -\mathcal{D}_\zeta^\top A \mathcal{D}_y - \mathcal{D}_y^\top A \mathcal{D}_\zeta, \quad L^2 = -\mathcal{D}_y^\top A \mathcal{D}_y,$$

$$\mathcal{D}_y = \mathcal{D}(\nabla_y, 0), \quad \nabla_y = \left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2} \right)^\top, \quad \mathcal{D}_\zeta = \mathcal{D}(0, 0, \partial_\zeta), \quad \partial_\zeta = \frac{\partial}{\partial \zeta}. \quad (2.5)$$

Аналогично для матрицы $N^\pm(x, \nabla_x)$ дифференциальных операторов первого порядка из краевых условий (1.7) на поверхностях $\Sigma^\pm(h)$ перегородки $\Omega(h)$ имеем

$$N(x, \nabla_x) = \mathbf{n}_\pm(h, y)^{-1/2} (h^{-1}(N^0)^\pm(y, \partial_\zeta) + h^0(N^1)^\pm(y, \nabla_y, \partial_\zeta) + h^1(N^2)^\pm(y, \nabla_y)), \quad (2.6)$$

$$(N^0)^\pm = \pm \mathcal{D}_3^\top A \mathcal{D}_\zeta, \quad (N^1)^\pm = \pm \mathcal{D}_3^\top A \mathcal{D}_y - \mathcal{D}_\pm^\top A \mathcal{D}_\zeta, \quad (N^2)^\pm = \pm \mathcal{D}_3^\top A \mathcal{D}_y,$$

$$\mathcal{D}_3 = \mathcal{D}(e_3), \quad \mathcal{D}_\pm = \mathcal{D}_y H_\pm, \quad \mathbf{n}_\pm(h, y) = 1 + h^2 |\nabla_y H_\pm(y)|^2. \quad (2.7)$$

Разложение (2.6) и выражения (2.7) найдены при учете следующего представления единичной внешней нормали на основаниях пластины Ω_h , вытекающего из формулы (1.2):

$$\mathbf{n}^\pm(h, y) = \mathbf{n}_\pm(h, y)^{-1/2} (-h \nabla_y H_\pm(y), \pm 1)^\top. \quad (2.8)$$

Подставим соотношения (2.4), (2.6) и (2.1), (2.3) в уравнение (1.6) на перегородке $\Omega(h)$ и краевые условия (1.7) на ее основаниях $\Sigma^\pm(h)$. Собирая слагаемые с одинаковыми множителями h^p , приходим к рекуррентной последовательности краевых задач Неймана для системы обыкновенных дифференциальных

уравнений на интервале $\Upsilon_1(y)$ с параметром $y \in \omega$

$$\begin{aligned} L^0 U^k &= F^k := -L^1 U^{k-1} - L^2 U^{k-2} + \delta_{k,2} \lambda \quad \text{на } \Upsilon_1, \\ (N^0)^\pm U^k &= G^{k\pm} := -(N^1)^\pm U^{k-1} - (N^2)^\pm U^{k-2} \quad \text{при } \zeta = \pm H_\pm, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $k = -2, \dots, 2$ и $U^p = 0$ при $p < -2$. Нетрудно убедиться в том, что вектор-функции (2.2) удовлетворяют задачам (2.9) при $k = -2$ и $k = -1$. Кроме того, в случае $k = 0$ при помощи формул (2.2), (2.5), (2.7) и простых алгебраических преобразований, использующих вытекающее из формул (2.2) и (1.5), (2.5) равенство

$$\mathcal{D}_\zeta U^{-1} + \mathcal{D}_y U^{-2} = 0,$$

получаем соотношения

$$\begin{aligned} F^0 &= \mathcal{D}_\zeta^\top A \mathcal{D}_y U^{-1} + \mathcal{D}_y^\top A (\mathcal{D}_\zeta U^{-1} + \mathcal{D}_y U^{-2}) = \mathcal{D}_\zeta^\top A \mathcal{D}_y U^{-1}, \\ (G^0)^\pm &= \mp \mathcal{D}_3^\top A \mathcal{D}_y U^{-1} \mp \mathcal{D}_3^\top A (\mathcal{D}_\zeta U^{-1} + \mathcal{D}_y U^{-2}) = \mp \mathcal{D}_3^\top A \mathcal{D}_y U^{-1}, \\ \mathcal{D}_y U^{-1}(y, \zeta) &= \mathcal{Y}(\zeta) \mathbf{D}(\nabla_y) w(y), \\ \mathbf{D}(\xi_1, \xi_2)^\top &= \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 2^{-1/2} \xi_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & 2^{-1/2} \xi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{-1/2} \xi_1^2 & 2^{-1/2} \xi_2^2 & \xi_1 \xi_2 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{Y}(\zeta) &= \begin{pmatrix} \mathbb{I}_3 & -2^{1/2} \zeta \mathbb{I}_3 \\ \mathbb{O}_3 & \mathbb{O}_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь $\mathbb{I}_N$ и $\mathbb{O}_N$ – единичная и нулевая матрицы размером $N \times N$. Таким образом, решение задачи (2.9) при $k = 0$ приобретает вид

$$U^0(y, \zeta) = \mathcal{X}(y, \zeta) \mathbf{D}(\nabla_y) w(y), \quad (2.11)$$

где $\mathcal{X}$ – (3×6) -матрица-функция, удовлетворяющая (матричной, а не векторной (2.9)) задаче

$$-\mathcal{D}_\zeta^\top A \mathcal{D}_\zeta \mathcal{X} = \mathcal{D}_\zeta^\top A \mathcal{Y} \quad \text{на } \Upsilon_1, \quad \pm \mathcal{D}_3^\top A \mathcal{D}_\zeta \mathcal{X} = \mp \mathcal{D}_3^\top A \mathcal{Y} \quad \text{при } \zeta = \pm H_\pm. \quad (2.12)$$

Формула интегрирования по частям и первые два равенства в (2.10) позволяют проверить условия разрешимости этой задачи:

$$\int_{\Upsilon_1(y)} F_p^0(y, \zeta) d\zeta + (G_p^0)^+(y) - (G_p^0)^-(y) = 0, \quad p = 1, 2, 3. \quad (2.13)$$

При $k = 1$ правые части равенств (2.9) имеют вид

$$\begin{aligned} F^1 &= \mathcal{D}_\zeta^\top A \mathcal{D}_y U^0 + \mathcal{D}_y^\top A (\mathcal{D}_\zeta U^0 + \mathcal{D}_y U^{-1}), \\ (G^1)^\pm &= \mp \mathcal{D}_3^\top A \mathcal{D}_y U^0 + \mathcal{D}_\pm^\top A (\mathcal{D}_\zeta U^0 + \mathcal{D}_y U^{-1}). \end{aligned} \quad (2.14)$$

В [14, п. 2.5] и [1, п. 4.3.4] проверено, что третье ($p = 3$) условие разрешимости (2.13) задачи (2.9), $k = 0$, с правыми частями (2.14) выполнено автоматически. Действительно, во-первых,

$$\int_{\Upsilon_1(y)} \mathcal{D}_\zeta^\top A \mathcal{D}_y U^0 d\zeta + \sum_{\pm} \mp \mathcal{D}_3^\top A \mathcal{D}_y U^0|_{\zeta=\pm H_\pm} = 0, \quad (2.15)$$

и, во-вторых, выражение

$$\int_{\Upsilon_1(y)} F_i^1(y, \zeta) d\zeta + \sum_{\pm} (G_i^1)^\pm(y) \quad (2.16)$$

с индексом $i = 3$ есть

$$\begin{aligned}
 e_3^\top & \left(\int_{\Upsilon_1(y)} \mathcal{D}_y^\top A(\mathcal{D}_\zeta U^0 + \mathcal{D}_y U^{-1}) d\zeta + \sum_{\pm} \mathcal{D}_\pm^\top A(\mathcal{D}_\zeta U^0 + \mathcal{D}_y U^{-1})|_{\zeta=\pm H_\pm} \right) \\
 &= e_3^\top \mathcal{D}_y^\top \int_{\Upsilon_1(y)} A(\mathcal{D}_\zeta U^0 + \mathcal{D}_y U^{-1}) d\zeta \\
 &= \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_i} e_i^\top \int_{\Upsilon_1(y)} \mathcal{D}_3^\top A(\mathcal{D}_\zeta U^0 + \mathcal{D}_y U^{-1}) d\zeta \\
 &= \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_i} e_i^\top \int_{\Upsilon_1(y)} (\mathcal{D}_\zeta \zeta)^\top A(\mathcal{D}_\zeta U^0 + \mathcal{D}_y U^{-1}) d\zeta \\
 &= \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_i} e_i^\top \left(- \int_{\Upsilon_1(y)} \zeta \mathcal{D}_\zeta^\top A(\mathcal{D}_\zeta \mathcal{X} + \mathcal{Y}) d\zeta \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\pm} \pm \zeta \mathcal{D}_3^\top A(\mathcal{D}_\zeta \mathcal{X} + \mathcal{Y})|_{\zeta=\pm H_\pm} \right) \mathbf{D}(\nabla_y) w = 0. \quad (2.17)
 \end{aligned}$$

При этом $e_j = (\delta_{j,1}, \delta_{j,2}, \delta_{j,3})^\top$ – орт в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. В преобразованиях применены формулы дифференцирования интегралов с переменными пределами и интегрирования по частям (дважды), а также простое соотношение

$$e_3^\top \mathcal{D}_y^\top = \sum_{i=1}^2 e_i^\top \mathcal{D}_3^\top \frac{\partial}{\partial y_i},$$

вытекающее из определений (2.5) и (2.7) матриц $\mathcal{D}_y$ и $\mathcal{D}_3$. Последнее равенство в (2.17) выполнено благодаря соотношениям (2.12) для $\mathcal{X}$, а также (2.11) и (2.10) для U^0 и $\mathcal{D}_y U^{-1}$ соответственно.

Пара других условий разрешимости (2.13) задачи (2.9), $k = 0$, т. е. обращение в нуль выражений (2.16) с индексами $i = 1, 2$, принимает вид двух верхних строк следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{L}(y, \nabla_y) w(y) := \mathbf{D}(\nabla_y)^\top \mathbf{A}(y) \mathbf{D}(\nabla_y) w(y) = \lambda H(y) e_3 w_3(y), \quad y \in \omega. \quad (2.18)$$

Здесь $\mathbf{A} - (6 \times 6)$ -матрица-функция, допускающая представление

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}(y) &= \int_{\Upsilon_1(y)} \mathcal{Y}(\zeta)^\top A(\mathcal{D}_\zeta \mathcal{X}(y, \zeta) + \mathcal{Y}(\zeta)) d\zeta \\
 &= \int_{\Upsilon_1(y)} (\mathcal{D}_\zeta \mathcal{X}(y, \zeta) + \mathcal{Y}(\zeta))^\top A(\mathcal{D}_\zeta \mathcal{X}(y, \zeta) + \mathcal{Y}(\zeta)) d\zeta, \quad (2.19)
 \end{aligned}$$

а использованное в формуле (2.19) соотношение

$$\int_{\Upsilon_1(y)} (\mathcal{D}_\zeta \mathcal{X}(y, \zeta))^\top A(\mathcal{D}_\zeta \mathcal{X}(y, \zeta) + \mathcal{Y}(\zeta)) d\zeta = 0$$

вытекает из равенств (2.12). Нижняя строка системы (2.18) представляют собой третье ($p = 3$) условие разрешимости (2.13) задачи (2.9) с индексом $k = 2$, в которой правые части имеют вид

$$\begin{aligned}
 F^2 &= \mathcal{D}_\zeta^\top A \mathcal{D}_y U^1 + \mathcal{D}_y^\top A(\mathcal{D}_\zeta U^1 + \mathcal{D}_y U^0) + \lambda U^{-2}, \\
 G^{2\pm} &= \mp \mathcal{D}_3^\top A \mathcal{D}_y U^1 + \mathcal{D}_\pm^\top A(\mathcal{D}_\zeta U^1 + \mathcal{D}_y U^0). \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

В самом деле, аналогично выкладке (2.17) получаем

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Upsilon_1(y)} F_3^2 d\zeta + \sum_{\pm} (G_3^2)^{\pm} = \lambda H U_3^{-2} \\
&\quad + e_3^{\top} \left(\int_{\Upsilon_1(y)} \mathcal{D}_y^{\top} A(\mathcal{D}_{\zeta} U^1 + \mathcal{D}_y U^0) d\zeta + \sum_{\pm} \mathcal{D}_{\pm}^{\top} A(\mathcal{D}_{\zeta} U^1 + \mathcal{D}_y U^0) \Big|_{\zeta=\pm H_{\pm}} \right) \\
&= \lambda H w_3 + e_3^{\top} \mathcal{D}_y^{\top} \int_{\Upsilon_1(y)} A(\mathcal{D}_{\zeta} U^1 + \mathcal{D}_y U^0) d\zeta \\
&= \lambda H w_3 + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_i} e_i^{\top} \int_{\Upsilon_1(y)} (\mathcal{D}_{\zeta} \zeta)^{\top} A(\mathcal{D}_{\zeta} U^1 + \mathcal{D}_y U^0) d\zeta \\
&= \lambda H w_3 + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_i} e_i^{\top} \left(- \int_{\Upsilon_1(y)} \zeta \mathcal{D}_{\zeta}^{\top} A(\mathcal{D}_{\zeta} U^1 + \mathcal{D}_y U^0) d\zeta \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\pm} \pm \zeta \mathcal{D}_3^{\top} A(\mathcal{D}_{\zeta} U^1 + \mathcal{D}_y U^0) \Big|_{\zeta=\pm H_{\pm}} \right) \\
&= \lambda H w_3 + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_i} e_i^{\top} \left(\int_{\Upsilon_1(y)} \zeta \mathcal{D}_y^{\top} A(\mathcal{D}_{\zeta} U^0 + \mathcal{D}_y U^{-1}) d\zeta \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\pm} \zeta \mathcal{D}_{\pm}^{\top} A(\mathcal{D}_{\zeta} U^0 + \mathcal{D}_y U^{-1}) \Big|_{\zeta=\pm H_{\pm}} \right) \\
&= \lambda H w_3 + \sum_{i=1}^2 e_i^{\top} \mathcal{D}_y^{\top} \frac{\partial}{\partial y_i} \int_{\Upsilon_1(y)} \zeta A(\mathcal{D}_{\zeta} \mathcal{X} + \mathcal{Y}) d\zeta \mathbf{D}(\nabla_y) w. \tag{2.21}
\end{aligned}$$

Отметим, что теперь дополнительно использовалась задача (2.9) с индексом $k = 1$ и правыми частями (2.14), в которых первые слагаемые справа взаимно уничтожаются в силу равенства (2.15) с заменой $0 \mapsto 1$ верхнего индекса. Для превращения формулы (2.21) (без средней ее части) в третью строку системы (2.18) необходимо учесть соотношение

$$\sum_{i=1}^2 e_i^{\top} \mathcal{D}_y^{\top} \frac{\partial}{\partial y_i} \zeta = -e_3^{\top} \mathbf{D}(\nabla_y) \mathcal{Y}(\zeta)^{\top},$$

обеспеченное определением входящих в него матриц. Аналогичные, но полностью очевидные соотношения

$$e_i^{\top} \mathcal{D}_y^{\top} = e_i^{\top} \mathbf{D}(\nabla_y) \mathcal{Y}(\zeta)^{\top}$$

позволили ранее сделать вывод о первых двух строках системы (2.18).

В [14, п. 2.5] и [1, п. 4.3.6] также установлено, что $\mathbf{A}(y)$ – симметрическая положительно определенная (6×6) -матрица, гладко зависящая от переменных $y \in \omega'$, а значит, матрица $\mathbf{L}(y, \nabla_y)$ дифференциальных операторов эллиптическая с оснащением $\vec{\mathbf{t}} = (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3) = (1, 1, 2)$ и $\vec{\mathbf{s}} = -\vec{\mathbf{t}} = (-1, -1, -2)$ (см. [20] и [21, пример 1.14]). Кроме того, оператор системы (2.18) является формально положительным [7] и обладает полиномиальным свойством [21], [22].

Снабдим систему уравнений (2.18) краевыми условиями

$$w_q(y) = 0, \quad q = 1, 2, 3, \quad \partial_n w_3(y) = 0, \quad y \in \partial\omega. \tag{2.22}$$

Итак, сформирована первая предельная спектральная задача для пластины.

ЛЕММА 2.1. Задача (2.18), (2.22) обладает последовательностью собственных чисел (1.21), а соответствующие собственные векторы $w_{(m)} = (w_{(m)1}, w_{(m)2}, w_{(m)3})^\top$ можно подчинить условиям ортогональности и нормировки

$$(Hw_{(m)3}, w_{(p)3})_\omega = \delta_{m,p}, \quad m, p \in \mathbb{N}. \quad (2.23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В гильбертовом пространстве $\mathbf{H} = \dot{H}^1(\omega)^2 \times \dot{H}^2(\omega)$ введем скалярное произведение

$$\langle w, v \rangle = (\mathbf{AD}(\partial_z)w, \mathbf{D}(\partial_z)v)_\Upsilon,$$

а также положительный, непрерывный и симметрический, а значит, самосопряженный оператор $\mathbf{T}$,

$$\langle \mathbf{T}w, v \rangle = (w_3, v_3)_\Upsilon, \quad w, v \in \mathbf{H}.$$

В итоге обобщенная постановка задачи (2.18), (2.22), т. е. интегральное тождество [6]

$$(\mathbf{AD}(\nabla_y)w, \mathbf{D}(\nabla_y)v)_\omega = \lambda(Hw_3, v_3)_\omega, \quad v \in \mathbf{H}, \quad (2.24)$$

оказывается эквивалентной абстрактному уравнению

$$\mathbf{T}w = \tau w \quad \text{в } \mathbf{H}.$$

Связь $\tau = \lambda^{-1}$ спектральных параметров переделывает последовательность

$$\tau_1 \geq \tau_2 \geq \dots \geq \tau_m \geq \dots \rightarrow +0 \quad (2.25)$$

собственных чисел компактного оператора $\mathbf{T}$ в последовательность (1.21) собственных чисел задачи (2.24) (или (2.18), (2.22) в дифференциальной форме). Напомним, что согласно [10, теоремы 10.1.5, 10.2.2] спектр оператора $\mathbf{T}$ состоит из дискретного спектра (2.25) и существенного спектра $\{\tau = 0\}$. Поскольку точка $\tau = 0$ переводится в бесконечно удаленную точку, спектр задачи (1.21) целиком дискретный.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Члены анзаца (2.1) можно представить в виде

$$U^q(y, \zeta) = \mathcal{U}^q(y, \zeta, \nabla_y)w(y), \quad q = -2, -1, 0, 1, \quad (2.26)$$

где $\mathcal{U}^q$ – (3×3) -матрицы дифференциальных операторов с порядками

$$\begin{pmatrix} q+1 & q+1 & q+2 \\ q+1 & q+1 & q+2 \\ q+1 & q+1 & q+2 \end{pmatrix}$$

(дифференциальный оператор отрицательного порядка по определению нулевой). Нужные формулы нетрудно вывести из соотношений (2.2), (2.11) и (2.14), (2.20).

2.2. Вторая предельная задача для пластины. Помимо серии малых собственных чисел (2.3) задачи (1.6)–(1.8) возникает серия собственных чисел, представимых в виде

$$\Lambda^h = \mu + \dots. \quad (2.27)$$

Процедура вывода [23] соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений, в целом, повторяет вывод системы (2.18). Тем не менее,

имеются и различия. В силу модификации асимптотического анзаца для собственных чисел условием разрешимости задачи (2.9) с номером $k = 0$ служит равенство

$$\mu H(y)w_3(y) = 0, \quad y \in \omega.$$

Поэтому в определениях (2.1) и (2.2) приходится положить $w_3 = 0$ и тем самым получить формулы

$$u^h(x) = h^{-1}U^{-1}(y, \zeta) + h^0U^0(y, \zeta) + h^1U^1(y, \zeta) + \dots, \quad (2.28)$$

$$U^{-1}(y, \zeta) = w_1(y)e_1 + w_2(y)e_2. \quad (2.29)$$

Кроме того, в силу изменения анзаца (2.27) для собственного числа правая часть первой формулы (2.14) приобретает дополнительное слагаемое μU^{-1} . В результате условия разрешимости (2.13) задачи (2.9) при $k = 1$ записываются как система двух дифференциальных уравнений в частных производных

$$\mathbf{D}'(-\nabla_y)^\top \mathbf{A}'(y) \mathbf{D}'(\nabla_y) w'(y) = \mu H(y) w'(y), \quad y \in \omega. \quad (2.30)$$

При этом $w' = (w_1, w_2)^\top$, $\mathbf{A}'(y)$ – верхний левый (3×3) -блок матрицы (2.19) и $\mathbf{D}'(\xi)$ – верхний левый (3×2) -блок матриц $\mathcal{D}(\xi)$ и $\mathbf{D}(\xi)$ из формул (1.5) и (2.10), т. е.

$$\mathbf{D}'(\xi)^\top = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 2^{-1/2}\xi_2 \\ 0 & \xi_2 & 2^{-1/2}\xi_1 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что слагаемое U^0 приобретает вид

$$U^0(y, \zeta) = \mathcal{X}'(y, \zeta) \mathbf{D}'(\nabla_y) w'(y), \quad (2.31)$$

где $\mathcal{X}'$ – (3×3) -матрица, полученная уничтожением трех последних столбцов в (3×6) -матрице $\mathcal{X}$ решений задачи (2.12).

Задача (2.9) при $k = 2$ остается невоastreбованной: при обосновании асимптотики в п. 4.3 точность, обеспеченная анзацем (2.28), оказывается достаточной.

Система (2.30), снабженная граничными условиями

$$w'(y) = 0, \quad y \in \partial\omega, \quad (2.32)$$

представляет собой плоскую задачу теории упругости, для которой следующее утверждение известно (и очевидно).

ЛЕММА 2.2. *Задача (2.30), (2.32) обладает последовательностью собственных чисел*

$$0 < \mu_1^\omega \leq \mu_2^\omega \leq \dots \leq \mu_m^\omega \leq \dots \rightarrow +\infty, \quad (2.33)$$

а соответствующие собственные векторы $w'_{(m)} = (w_{(m)1}, w_{(m)2})^\top$ можно подчинить условиям ортогональности и нормировки

$$(Hw'_{(m)}, w'_{(p)})_\omega = \delta_{m,p}, \quad m, p \in \mathbb{N}. \quad (2.34)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Две предельные задачи для пластины в некотором смысле дополняют одна другую: в системе (2.18) спектральный параметр является множителем при третьей компоненте w_3 вектора w , а в системе (2.30) – при первых двух w_1 и w_2 . Те же самые компоненты фигурируют в условиях ортогональности и нормировки (2.23) и (2.34) соответственно.

2.3. Предельная задача на теле. Включение задачи

$$\begin{aligned} L(\nabla_x)v(x) &= \mu v(x), \quad x \in \Omega, & N(x, \nabla_x)v(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega \setminus \overline{\Gamma_D}, \\ v(x) &= 0, \quad x \in \Gamma_D, \end{aligned} \quad (2.35)$$

в список предельных не может вызвать недоумения. Благодаря неравенству Корна

$$\|v; H^1(\Xi)\| \leq c_{\Xi} \|\mathcal{D}(\nabla_x)v; L_2(\Xi)\|, \quad v \in \dot{H}^1(\Xi; \Gamma_D)^3 \quad (2.36)$$

(см. [7]–[9] и др.), следующее утверждение вполне аналогично лемме 2.2.

ЛЕММА 2.3. *Задача (2.35) обладает последовательностью собственных чисел*

$$0 < \mu_1^{\Xi} \leq \mu_2^{\Xi} \leq \dots \leq \mu_m^{\Xi} \leq \dots \rightarrow +\infty, \quad (2.37)$$

а соответствующие собственные векторы $v_{(m)}$ можно подчинить условиям ортогональности и нормировки

$$(v_{(m)}, v_{(p)})_{\Xi} = \delta_{m,p}, \quad m, p \in \mathbb{N}. \quad (2.38)$$

§ 3. Теорема о сходимости

3.1. Весовое анизотропное неравенство Корна. Пусть $u^h \in \dot{H}^1(\Xi(h); \Gamma_D)^3$. В дополнение к неравенству Корна (2.36) напомним следствие

$$\|r^{-1}(1 + |\ln r|)^{-1}u^h; L_2(\Xi)\| \leq c\|u^h; H^1(\Xi)\| \quad (3.1)$$

одномерного неравенства Харди “с логарифмом”

$$\int_0^d r^{-1} \left| \ln \frac{r}{d} \right|^{-2} |U(r)|^2 dr \leq 4 \int_0^d \left| \frac{dU}{dr}(r) \right|^2 r dr, \quad (3.2)$$

$$U \in C^1[0, d], \quad U(d) = 0, \quad d > 0.$$

Здесь $r(x) = \text{dist}(x, \omega)$. Для вывода формулы (3.1) необходимо умножить поле смещений u^h на срезающую функцию χ_d , имеющую носитель в d -окрестности $\mathcal{V}_d$ контура γ и равную единице вблизи γ (где d – малое, но фиксированное, т.е. не зависящее от h , положительное число), затем в плоскостях, перпендикулярных контуру, перейти к полярным координатам (r, φ) и, наконец, проинтегрировать соотношение (3.2) по угловой φ и касательной $\varsigma \in \gamma$ переменным. Указанный в левой части (3.1) весовой множитель появляется при учете якобиана для перехода к системе полярных координат.

Введем срезающую функцию $\chi^\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\chi^\alpha(t) = 1$ при $t \leq \alpha$ и $\chi^\alpha(t) = 0$ при $t \geq 1$; параметр $\alpha \in (0, 1)$ будет зафиксирован далее. Еще одну срезающую функцию $\mathfrak{r}_h^\alpha$, заданную уже на сочленении $\Xi(h)$, определим формулами

$$\mathfrak{r}_h^\alpha(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega(h), \\ 0, & x \in \Xi \setminus \mathcal{V}_d, \\ \chi^\alpha\left(\frac{\ln(d^{-1}r)}{\ln h}\right), & x \in \mathcal{V}_d \setminus \Omega(h). \end{cases} \quad (3.3)$$

Размер $d > 0$ подберем так, чтобы функция (3.3) оказалась гладкой (т.е. $d > \max\{|H_\pm(y)| \mid y \in \partial\omega\}$; ср. определение (1.2)). Рассмотрим пластину Ω_h^α , полученную расширением пластины Ω_h ,

$$\Omega_h^\alpha = \{x \in \Omega'_h : y \in \omega_h^\alpha\}, \quad \omega_h^\alpha = \{y \in \omega' : \text{dist}(y, \omega) < dh^\alpha\}. \quad (3.4)$$

При малом h боковая поверхность $(\Sigma_h^\alpha)^0$ этой пластины попадает вовнутрь области Ξ . Поскольку $\nabla_x \mathfrak{r}_h^\alpha(x) \neq 0$ при $x \in \mathcal{V}_{dh^\alpha} \setminus \overline{\mathcal{V}_{dh}} = \{x \in \overline{\mathcal{V}_d} : dh \leq r \leq dh^\alpha\}$,

верна формула

$$\begin{aligned}
& \| \mathcal{D}(\nabla_x)(\mathfrak{x}_h^\alpha u^h); L_2(\Omega_h^\alpha) \|^2 - \| \mathcal{D}(\nabla_x)u^h; L_2(\Omega_h^\alpha) \|^2 \\
& \leq c(\| \nabla_x u^h; L_2(\Omega_h^\alpha \setminus \Omega(h)) \|^2 + |\ln h|^{-2} \| r^{-1} u^h; L_2(\mathcal{V}_{dh^\alpha} \setminus (\mathcal{V}_{dh} \cap \Omega_h^\alpha)) \|^2) \\
& \leq c(\| \nabla_x u^h; L_2(\Omega_h^\alpha \setminus \Omega(h)) \|^2 + \| r^{-1}(1 + |\ln r|)^{-1} u^h; L_2(\mathcal{V}_{2h^\alpha} \setminus (\mathcal{V}_{dh} \cap \Omega_h^\alpha)) \|^2) \\
& \leq c \| u^h; H^1(\Xi) \|^2.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

При этом множители $|\ln h|^{-2}$ и r^{-1} снаружи и внутри нормы возникли вследствие дифференцирования срезки, но погашены весовым множителем из левой части (3.1). Отметим также, что $\ln(r/d) < 0$ при $x \in \mathcal{V}_d$ и $\ln h < 0$ в силу требования $h_0 \in (0, 1)$.

Согласно [11, теорема 2.6] и [1, теорема 3.3.3] (см. первоисточники [12]–[14]) на тонкой пластине Ω_h^α с защемленной боковой поверхностью $(\Sigma_h^\alpha)^0$ (обращаем внимание на то, что произведение $u^{h^\alpha} = \mathfrak{x}_h^\alpha u^h$ обращается в нуль при $y \in \partial\omega_h^\alpha$) справедливо весовое анизотропное неравенство Корна

$$\| u^{h^\alpha}; \Omega_h^\alpha \|_h \leq c \| \mathcal{D}(\nabla_x)u^{h^\alpha}; L_2(\Omega_h^\alpha) \|, \tag{3.6}$$

в котором постоянная c не зависит от параметра $h \in (0, h_0]$ и, разумеется, от вектор-функции u^{h^α} , а норма из левой части (3.6) задана [11]–[13] следующим образом:

$$\begin{aligned}
\| u^{h^\alpha}; \Omega_h^\alpha \|_h^2 = \int_{\Omega_h^\alpha} \left(\sum_{i=1,2} \left(\sum_{k=1,2} \left| \frac{\partial u_i^{h^\alpha}}{\partial y_k} \right|^2 + h^2 \varrho_{h^\alpha}^{-2} \left(\left| \frac{\partial u_i^{h^\alpha}}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_3^{h^\alpha}}{\partial y_i} \right|^2 \right) \right. \right. \\
\left. \left. + \varrho_{h^\alpha}^{-2} |u_i^{h^\alpha}|^2 \right) + h^2 \varrho_{h^\alpha}^{-4} |u_3^{h^\alpha}|^2 \right) dx.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Здесь $\varrho_{h^\alpha}(y) = h + \text{dist}(y, \partial\omega_h^\alpha)$ – весовой множитель, равный $O(1)$ внутри пластины (3.4), $O(h)$ вблизи боковой поверхности $(\Sigma_h^\alpha)^0$, но равный $O(h^\alpha)$ около края перегородки $\Omega(h)$.

Далее удобно использовать еще один весовой множитель $r_h(x) = \text{dist}(x, \gamma) + h$ на теле и норму

$$\| u^h; \Xi \|_h = (\| \nabla_x u^h; L_2(\Xi) \|^2 + \| r_h^{-1}(1 + |\ln r_h|)^{-1} u^h; L_2(\Xi) \|^2)^{1/2}, \tag{3.8}$$

согласованную с оценками (3.1) и (2.36). Поскольку $u^{h^\alpha} = \mathfrak{x}_h^\alpha u = u$ на перегородке $\Omega(h)$, в силу соотношений (3.5) и (3.6) имеем

$$\| u^h; \Omega(h) \|_h \leq \| u^{h^\alpha}; \Omega_h^\alpha \|_h \leq c \| \mathcal{D}(\nabla_x)u^h; L_2(\Xi(h)) \|, \tag{3.9}$$

где норма из левой части получена сужением области интегрирования Ω_h^α в определении (3.7) до $\Omega(h)$ (вес остается неизменным).

Итак, установлено следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.1. *Для вектор-функции $u^h \in \dot{H}^1(\Xi; \Gamma_D)^3$ выполнено неравенство*

$$\| u^h; \Xi(h) \|_h \leq c \| \mathcal{D}(\nabla_x)u^h; L_2(\Xi(h)) \|, \tag{3.10}$$

где фигурирует весовая анизотропная норма

$$\| u^h; \Xi(h) \|_h = \| u^h; \Xi \|_h + \| u^h; \Omega(h) \|_h, \tag{3.11}$$

а две нормы в правой части (3.11) определены формулами (3.7) и (3.8). Множитель c в оценке (3.10) не зависит от параметра $h \in (0, h_0]$ и вектор-функции u .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Распределение весовых множителей во введенной норме (3.7) на расширенной пластине Ω_h^α является асимптотически точным (проверку см., например, в книге [1] или обзоре [11]). Тот факт, что продольное сечение ω_h^α пластины Ω_h^α зависит от параметра h , не сказывается на доказательстве [12] неравенства (3.6) (см. пояснения в [11, § 2]), так как $\partial\omega_h^\alpha$ – малое регулярное возмущение контура $\gamma = \partial\omega$. Далее будет использовано то, что множителями при $|u_3^h|^2$ и $|u_i^h|^2$, $i = 1, 2$, в интеграле $\|u^h; \Omega(h)\|_h^2$ (см. (3.7)) служат величины, приобретающие на множестве $\{x \in \mathcal{V}_d \cap \Omega(h) : r < ch\}$ порядки $h^{2-4\alpha}$ и $h^{-2\alpha}$ соответственно. С другой стороны, на множестве $\{x \in \mathcal{V}_d \cap \Xi : r < ch\}$ общий весовой множитель при $|u_j^h|^2$, $j = 1, 2, 3$, в интеграле $\|u^h; \Xi\|_h^2$ (см. формулу (3.8)) равен $O(|\ln h|^{-2}h^{-2})$. Такое рассогласование порядков вызвано предложенным способом проверки неравенства (3.9) (без средней его части). Вместе с тем, предельный переход $\alpha \rightarrow 1$ невозможен, и неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(h)} \left(\sum_{i=1,2} \left(\sum_{k=1,2} \left| \frac{\partial u_i^h}{\partial y_k} \right|^2 + h^2 \varrho_h^{-2} \left(\left| \frac{\partial u_i^h}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_3^h}{\partial y_i} \right|^2 \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \varrho_h^{-2} (1 + |\ln \varrho_h|)^{-2} |u_i^h|^2 \right) + h^2 \varrho_h^{-4} (1 + |\ln \varrho_h|)^{-2} |u_3^h|^2 \right) dx \\ & \leq c \|\mathcal{D}(\nabla_x) u^h; L_2(\Xi(h))\|^2, \quad u^h \in \dot{H}^1(\Xi(h); \Gamma_D)^3, \end{aligned} \quad (3.12)$$

с согласованными весовыми множителями неверно (контрпример строится на основе асимптотических конструкций из § 6). В формуле (3.12) и, далее, в формуле (3.13) используем вес $\varrho_h(x) = \varrho_{h1}(x) = h + \text{dist}(y, \gamma)$. Если в рассуждениях, приведших к теореме 3.1, заменить срезку $\mathfrak{r}_h^\alpha$ с параметром $\alpha \in (0, 1)$ срезкой $\mathfrak{X}_h$, равной единице на перегородке $\Omega(h)$ и в dh -окрестности контура γ , но нулю вне $2dh$ -окрестности контура, то получится оценка

$$\begin{aligned} & |\ln h|^{-2} \int_{\Omega(h)} \left(\sum_{i=1,2} \left(\sum_{k=1,2} \left| \frac{\partial u_i^h}{\partial y_k} \right|^2 + h^2 \varrho_h^{-2} \left(\left| \frac{\partial u_i^h}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_3^h}{\partial y_i} \right|^2 \right) + \varrho_h^{-2} |u_i^h|^2 \right) \right. \\ & \quad \left. + h^2 \varrho_h^{-4} |u_3^h|^2 \right) dx \leq c \|\mathcal{D}(\nabla_x) u^h; L_2(\Xi(h))\|^2, \quad u^h \in \dot{H}^1(\Xi(h); \Gamma_D)^3, \end{aligned} \quad (3.13)$$

которая демонстрирует обсуждаемое согласование, но не является удовлетворительной в силу общего малого множителя $|\ln h|^{-2}$.

3.2. Выделение сходящихся последовательностей. В п. 4.2 будет доказано, что при любом $m \in \mathbb{N}$ справедливо соотношение

$$\Lambda_m^h \leq C_m h^2, \quad h \in (0, h_m), \quad (3.14)$$

где C_m и h_m – некоторые положительные величины (зависящие от порядкового номера m). Пусть $u_{(m)}^h$ – собственная вектор-функция задачи (1.6)–(1.8), отвечающая собственному числу Λ_m^h и нормированная согласно формуле (1.19). В силу интегрального тождества (1.16) имеем

$$c_m h^2 \geq \Lambda_m^h = (A \mathcal{D}(\nabla_x) u_{(m)}^h, \mathcal{D}(\nabla_x) u_{(m)}^h)_{\Xi(h)} \geq c_A \|\mathcal{D}(\nabla_x) u_{(m)}^h; L_2(\Xi(h))\|^2, \quad (3.15)$$

а значит, при учете оценки (3.10) находим, что

$$\begin{aligned} \|u_{(m)}^h; L_2(\Xi)\| &\leq c \|u_{(m)}^h; \Xi\|_h \leq ch, \\ h \|u_{(m)3}^h; L_2(\Omega)\| + \sum_{i=1}^2 \|u_{(m)i}^h; L_2(\Omega)\| &\leq c \|u_{(m)}^h; \Omega_h^\alpha\|_h \leq ch. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Здесь и далее мажоранты по-прежнему зависят от номера m собственного числа, однако это не отражено в обозначениях.

Определим функции

$$w_{(m)i}^h(y) = X_h(y) h^{-1/2} \bar{u}_{(m)i}^h(y), \quad i = 1, 2, \quad w_{(m)3}^h(y) = X_h(y) h^{1/2} \bar{u}_{(m)3}^h(y), \quad (3.17)$$

где $X_h \in C^\infty(\overline{\Xi(h)})$ – срезающая функция, равная нулю на теле Ξ и в dh -окрестности контура $\gamma \in \partial\Xi$, но единице на перегородке $\Omega(h)$ вне $2dh$ -окрестности контура, а $\bar{u}_j^h$ – компоненты вектора смещений, осредненные по толщине пластины,

$$\bar{u}_{(m)j}^h(y) = \frac{1}{hH(y)} \int_{-hH_-(y)}^{hH_+(y)} u_{(m)j}^h(y, z) dy, \quad j = 1, 2, 3. \quad (3.18)$$

Учитывая введенные ранее определения и второе неравенство (3.16) вместе с формулой (3.15), получаем цепочки соотношений

$$\begin{aligned} \|w_{(m)i}^h; L_2(\omega)\|^2 &\leq ch^{-1} \int_{\omega} X_h(y)^2 |\bar{u}_{(m)i}^h(y)|^2 dy \\ &\leq ch^{-3} \int_{\omega} X_h(y)^2 \left| \int_{-hH_-(y)}^{hH_+(y)} u_{(m)i}^h(y, z) dy \right|^2 dz \\ &\leq ch^{-2} \|u_{(m)i}^h; L_2(\Omega(h))\|^2 \leq ch^{-2} \|u_{(m)}^h; \Omega(h)\|_h^2 \leq c, \quad i = 1, 2, \\ \|w_{(m)3}^h; L_2(\omega)\|^2 &\leq ch \int_{\omega} X_h(y)^2 |\bar{u}_{(m)3}^h(y)|^2 dy \\ &\leq ch^{-1} \int_{\omega} X_h(y)^2 \left| \int_{-hH_-(y)}^{hH_+(y)} u_{(m)3}^h(y, z) dy \right|^2 dz \\ &\leq c \|u_{(m)3}^h; L_2(\Omega(h))\|^2 \leq ch^{-2} \|u_{(m)}^h; \Omega(h)\|_h^2 \leq c. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Отметим, что расхождение в обработке функций $w_{(m)i}^h$ и $w_{(m)3}^h$ вызвано разными коэффициентами h^0 и h^1 при компонентах u_i^h и u_3^h в норме (3.7) и коэффициентами $h^{-1/2}$ и $h^{1/2}$ в определениях (3.17) соответственно. Кроме того, весовые множители $\varrho_{h\alpha}(y)^{-2}$ и $\varrho_{h\alpha}(y)^{-4}$ в норме $\|u_{(m)}^h; \Omega(h)\|_h$ оценены снизу положительной постоянной. Эти множители учитываются при рассмотрении норм функций $w_{(m)i}^h$ и $w_{(m)3}^h$ в пространстве Кондратьева $V_\beta^l(\omega)$ с весовой нормой

$$\|w; V_\beta^l(\omega)\| = \left(\sum_{q=0}^l \|\varrho_0^{\beta-l+q} \nabla_y^q w; L_2(\omega)\|^2 \right)^{1/2}, \quad (3.20)$$

где $l = 0, 1, 2, \dots$ и $\beta \in \mathbb{R}$ – показатели гладкости и веса соответственно, а $\varrho_0(y)$ – расстояние от точки y до границы $\partial\omega$ (ср. весовые множители в соотношениях (3.12) и (3.13)).

Ближайшая цель – вывести равномерные оценки кондратьевских норм

$$\|w_{(m)3}^h; V_{1-2\alpha}^1(\omega)\|, \quad \|w_{(m)i}^h; V_{1-\alpha}^l(\omega)\|, \quad i = 1, 2. \quad (3.21)$$

Весовые нормы возникают по нескольким причинам. Первая вскрывается в очередном утверждении, а вторая – в лемме 3.2. Наконец, причины отказа от обычных соболевских норм поясняются в замечании 3.3.

ЛЕММА 3.1. Вложение $V_\beta^1(\omega) \subset L_2(\omega)$ компактно при $\beta < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При малом $\varepsilon > 0$ представим оператор вложения E как сумму $E_X + E_{1-X}$, где E_X и E_{1-X} – операторы умножения на срезки X_ε и $1 - X_\varepsilon$ соответственно. Поскольку множитель ϱ_0 отделен от нуля на носителе $\text{supp } X_\varepsilon$, согласно определению (3.20) верно соотношение

$$\|E_X w; H^1(\omega)\| \leq c_{\beta, \varepsilon} \|w; V_\beta^1(\omega)\|,$$

и оператор E_X компактен благодаря компактности вложения $H^1(\omega) \subset L_2(\omega)$. Кроме того,

$$\|E_{1-X} w; L_2(\omega)\| \leq c\varepsilon^{1-\beta} \|\varrho_0^{\beta-1} E_{1-X} w; L_2(\omega)\| \leq c\varepsilon^{1-\beta} \|w; V_\beta^1(\omega)\|.$$

Итак, удалось приблизить E по операторной норме компактными операторами. Лемма доказана.

Изучим норму компоненты $w_{(m)3}^h$ в списке (3.21). Сначала укажем, что, во-первых, $\nabla_y X_h(y) \neq 0$ только при $dh \leq \varrho_0(y) \leq 2dh$ и, во-вторых, $\varrho_0(y)$ и $\varrho_h(y) = \varrho_{h1}(y)$ – бесконечно малые одного порядка при $y \in \Omega_h \cap \text{supp } |\nabla X_h|$. Имеем

$$\begin{aligned} \|w_{(m)3}^h; V_{1-2\alpha}^1(\omega)\|^2 &\leq ch \int_{\omega} \varrho_0(y)^{2-4\alpha} (X_h(y)^2 (|\nabla_y \bar{u}_{(m)3}^h(y)|^2 \\ &\quad + \varrho_0(y)^{-2} |\bar{u}_{(m)3}^h(y)|^2) + |\nabla_y X_h(y)|^2 |\bar{u}_{(m)3}^h(y)|^2) dy \\ &\leq c \int_{\text{supp } X_h} \varrho_h(y)^{2-4\alpha} \int_{\Upsilon_h(y)} (|\nabla_y u_{(m)3}^h(y, z)|^2 + \varrho_h(y)^{-2} |u_{(m)3}^h(y, z)|^2) dz dy. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Прервем выкладку пояснениями: как и в преобразованиях (3.19), мы пользовались определениями (3.17), (3.18) и неравенством Коши–Буняковского–Шварца, но дополнительно применили формулу дифференцирования интегралов с переменными пределами

$$\begin{aligned} \nabla_y \int_{-hH_-(y)}^{hH_+(y)} u_{(m)j}^h(y, z) dy &= \int_{-hH_-(y)}^{hH_+(y)} \nabla_y u_{(m)j}^h(y, z) dy \\ &\quad + h \sum_{\pm} u_{(m)j}^h(y, \pm hH_{\pm}(y)) \nabla_y H_{\pm}(y) \end{aligned}$$

и следовое неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\omega} Y_j(y) |u_{(m)j}^h(y, \pm hH_{\pm}(y))|^2 dy &\leq ch \int_{\Omega_h} Y_j(y) (|\partial_z u_{(m)j}^h(y, z)|^2 \\ &\quad + h^{-2} |u_{(m)j}^h(y, z)|^2) dy dz, \end{aligned} \quad (3.23)$$

содержащее подходящий множитель $Y_j(y)$ в подынтегральном выражении и проверяемое по стандартной схеме [6]. Теперь, заметив, что $\varrho_{h1}(y)^\alpha \geq \varrho_{h\alpha}(y)$ при $y \in \text{supp } X_h$, продолжаем выкладку (3.22) и обнаруживаем, что

$$\begin{aligned} \|w_{(m)3}^h; V_{1-2\alpha}^1(\omega)\|^2 &\leq c \int_{\text{supp } X_h} \int_{\Upsilon_h(y)} (\varrho_{h1}(y)^{-2\alpha} |\nabla_y u_{(m)3}^h(x)|^2 \\ &\quad + \varrho_{h1}(y)^{-4\alpha} |u_{(m)3}^h(x)|^2) dz dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c \int_{\Omega(h)} (\varrho_{h\alpha}(y)^{-2} |\nabla_y u_{(m)3}^h(x)|^2 + \varrho_{h\alpha}(y)^{-4} |u_{(m)3}^h(x)|^2) dz dy \\
&\leq ch^{-2} \|u_{(m)}^h; \Omega_h^\alpha\|_h^2 \leq c.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Для двух последних норм в списке (3.21) похожие вычисления показывают, что при $i = 1, 2$ справедливы оценки

$$\begin{aligned}
&\|w_{(m)i}^h; V_{1-\alpha}^1(\omega)\|^2 \\
&\leq ch^{-1} \int_{\omega} \varrho_0(y)^{2-2\alpha} (X_h(y)^2 (|\nabla_y \bar{u}_{(m)i}^h(y)|^2 + \varrho_0(y)^{-2} |\bar{u}_{(m)i}^h(y)|^2) \\
&\quad + |\nabla_y X_h(y)|^2 |\bar{u}_{(m)i}^h(y)|^2) dy \\
&\leq ch^{-2} \int_{\text{supp } X_h} \int_{\Upsilon_h(y)} (|\nabla_y u_{(m)i}^h(x)|^2 + \varrho_{h1}(y)^{-2\alpha} |u_{(m)i}^h(x)|^2) dz dy \\
&\leq c \int_{\Omega(h)} (|\nabla_y u_{(m)i}^h(x)|^2 + \varrho_{h\alpha}(y)^{-2} |u_{(m)i}^h(x)|^2) dz dy \leq ch^{-2} \|u_{(m)}^h; \Omega_h^\alpha\|_h^2 \leq c.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Подведем итог. В силу соотношений (3.19), (3.24), (3.25), (1.15) и леммы 3.1 существует бесконечно малая положительная последовательность $\{h_p\}$, вдоль которой верны сходимости

$$\begin{aligned}
&h^{-2} \Lambda_m^{h_p} \rightarrow \lambda_m^0, \\
&w_{(m)}^{h_p} \rightarrow w_{(m)}^0 \text{ слабо в } V_{1-\alpha}^1(\omega)^2 \times V_{1-2\alpha}^1(\omega) \text{ и сильно в } L_2(\omega)^3.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Равенство

$$\|H^{1/2} w_{(m)3}^0; L_2(\omega)\| = 1 \tag{3.27}$$

(ср. условие нормировки (2.23)) выводится предельным переходом при учете следующих соотношений:

$$\begin{aligned}
&\|u_{(m)}^h; L_2(\Xi(h))\| = 1, \\
&\|u_{(m)}^h; L_2(\Xi)\| \leq c \|u_{(m)}^h; \Xi\|_h \leq ch, \\
&\|u_{(m)i}^h; L_2(\Omega(h))\| \leq c \|u_{(m)}^h; \Omega(h)\|_h \leq ch, \quad i = 1, 2, \\
&\|(1 - X_h^2)^{1/2} u_{(m)3}^h; L_2(\Omega(h))\| \leq ch^{2\alpha} \|\varrho_{h\alpha}^{-2} u_{(m)3}^h; L_2(\Omega(h))\| \\
&\leq ch^{2\alpha-1} \|u_{(m)}^h; \Omega(h)\|_h \leq ch^{2\alpha}, \\
&\|X_h u_{(m)3}^h; L_2(\Omega(h))\|^2 - h^{-1} \|w_{(m)3}^h; L_2(\Omega(h))\|^2 = \|X_h (u_{(m)3}^h - \bar{u}_{(m)3}^h); L_2(\Omega(h))\|^2 \\
&\leq ch^2 \|X_h \partial_z u_{(m)3}^h; L_2(\Omega(h))\|^2 \leq ch^2 \|u_{(m)}^h; \Omega(h)\|_h \leq ch^4, \\
&h^{-1} \|w_{(m)3}^h; L_2(\Omega(h))\|^2 = \|H^{1/2} w_{(m)3}^h; L_2(\omega)\|^2 \rightarrow \|H^{1/2} w_{(m)3}^0; L_2(\omega)\|^2.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Первое соотношение в (3.28) есть не что иное, как условие нормировки (1.19). Второе и третье уже возникали в (3.16). Четвертое, как и в выкладках (3.24) и (3.25), получено введением под знак нормы множителя $\varrho_{h\alpha}^{-1}$, большого на носителе функции $1 - X_h$. В пятом соотношении из списка (3.28) учтено, что согласно определениям (3.17) и (3.18) разность $X_h u_{(m)3}^h - h^{-1/2} w_{(m)3}^h$ имеет нулевое среднее по интервалу $\Upsilon_h(y) \ni z$, а затем применено неравенство Пуанкаре с малым множителем $\pi^{-2} h^2 H(y)^2$. Наконец, последнее – результат выполнения интегрирования по переменной z и вычисления предела при $h_p \rightarrow +0$ (см. последнее утверждение в (3.26)).

3.3. Предельный переход в интегральном тождестве. В обобщенной постановке (1.16) спектральной задачи (1.6)–(1.8) выберем специальную пробную функцию $v^h \in \dot{H}^1(\Xi(h); \Gamma_D)^3$, имитирующую асимптотическую конструкцию (2.1). Именно, зафиксируем какую-нибудь вектор-функцию $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \in C_c^\infty(\omega)^3$ и определим выражения $\mathbf{V}^{-2}$, $\mathbf{V}^{-1}$, $\mathbf{V}^0$ по формулам (2.2) и (2.11) с ингредиентами $\mathbf{v}_j$, а $\mathbf{V}^1$ – как решение задачи (2.9) с номером $k = 1$ и правыми частями

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^1 - \mathbf{f}^1, \quad \mathbf{G} = \mathbf{G}^1, \quad (3.29)$$

где $\mathbf{F}^1$ и $\mathbf{G}^1$ заданы равенствами (2.14), в которых выражения U^0 и U^{-1} заменены выражениями $\mathbf{V}^0$ и $\mathbf{V}^{-1}$ соответственно, и

$$\mathbf{f}^1(y, z) = H(y)^{-1} \sum_{i=1}^2 e_i \mathbf{L}_i(\nabla_y) \mathbf{v}(z), \quad (3.30)$$

$$\mathbf{L}_i(\nabla_y) \mathbf{v}(y) = \int_{\Upsilon_1(y)} \mathbf{F}_i^1(y, \zeta) d\zeta + (\mathbf{G}_i^1)^+(y) + (\mathbf{G}_i^1)^-(y), \quad i = 1, 2. \quad (3.31)$$

При этом $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$ – столбцы (3×3) -матрицы $\mathbf{L}$ дифференциальных операторов, введенной формулами (2.18), (2.19). Равенства (3.29)–(3.31) обусловлены построениями, которые проведены в п. 2.1, и к тому же обеспечивают условия разрешимости обсуждаемой задачи.

Положим

$$v^h(x) = h^{-5/2} \mathbf{V}^{-2}(y) + h^{-3/2} \mathbf{V}^{-1}(y, \zeta) + h^{-1/2} \mathbf{V}^0(y, \zeta) + h^{1/2} \mathbf{V}^1(y, \zeta) \quad (3.32)$$

(ср. анзац (2.1), умноженный на $h^{-1/2}$) и заметим, что при малом $h \in (0, h_{\mathbf{v}})$ (верхняя грань $h_{\mathbf{v}} > 0$ зависит от $\mathbf{v}$) носитель вектор-функции (3.32) лежит в $\overline{\Omega(h)}$, т.е. v^h можно продолжить нулем на тело Ξ . Из формулы Грина и соотношений (1.6)–(1.8) вытекает равенство

$$\Lambda_m^h(u_{(m)}^h, v^h)_{\Xi(h)} = (u_{(m)}^h, Lv^h)_{\Xi(h)} + (u_{(m)}^h, Nv^h)_{\partial\Xi(h)}, \quad (3.33)$$

в котором по указанной выше причине множества $\Xi(h)$ и $\partial\Xi(h)$ можно заменить множествами $\Omega(h)$ и $\partial\Omega(h) \cap \partial\Xi(h)$. Имеем

$$\begin{aligned} & |(u_{(m)}^h, v)_{\Omega(h)} - h^{-5/2} (u_{(m)}^h, \mathbf{v}_3)_{\Omega(h)}| \\ & \leq c_{\mathbf{v}} h^{-5/2} \left(h^2 \|u_{(m)}^h\|_{L_2(\Omega(h))} + h \sum_{i=1}^2 \|u_{(m)}^h\|_{L_2(\Omega(h))} \right) (\text{mes}_3 \Omega(h))^{1/2} \\ & \leq c_{\mathbf{v}} h^{-1} \|u_{(m)}^h\|_{L_2(\Omega(h))} \leq c_{\mathbf{v}}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

При этом из скалярного произведения $(u_{(m)}^h, v)_{\Omega(h)}$ удален член

$$h^{-5/2} (u_{(m)}^h, \mathbf{v}_3)_{\Omega(h)} = h^{-2} (Hw_{(m)}^h, \mathbf{v}_3)_{\omega}, \quad (3.35)$$

а оставшиеся члены оценены в соответствии со строением (2.2) слагаемых из конструкции (3.32): компонента $\mathbf{V}_3^{-1}$ равна нулю, и поэтому в средней части (3.34) норма $\|u_{(m)}^h\|_{L_2(\Omega(h))}$ приобрела коэффициент h^2 , а нормы $\|u_{(m)}^h\|_{L_2(\Omega(h))}$ и $\|u_{(m)}^h\|_{L_2(\Omega(h))}$ – только h . Кроме того, учтены соотношение $\|\mathbf{V}^{-q}\|_{L_2(\Omega(h))} = O(h^{1/2})$ и определение (3.7), а также неравенства (3.15) и (3.10).

В итоге находим, что в силу первой формулы в (3.26) и равенства (3.35) левая часть соотношения (3.33) при $h_p \rightarrow +0$ имеет предел

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \Lambda_m^{h_p}(u_{(m)}^{h_p}, v^{h_p})_{\Omega(h)} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \Lambda_m^{h_p} h_p^{-2} (H w_{(m)3}^{h_p}, \mathbf{v}_3)_\omega = \lambda_m^0 (H w_{(m)3}^0, \mathbf{v}_3)_\omega. \quad (3.36)$$

Рассмотрим скалярные произведения в правой части (3.33). При учете расщеплений (2.4), (2.6) находим, что

$$\begin{aligned} L v^h &= h^{-9/2} L^0 \mathbf{V}^{-2} + h^{-7/2} (L^0 \mathbf{V}^{-1} + L^1 \mathbf{V}^{-2}) + h^{-5/2} (L^0 \mathbf{V}^0 + L^1 \mathbf{V}^{-1} + L^2 \mathbf{V}^{-2}) \\ &\quad + h^{-3/2} (L^0 \mathbf{V}^1 + L^1 \mathbf{V}^0 + L^2 \mathbf{V}^{-1}) + h^{-1/2} (L^1 \mathbf{V}^1 + L^2 \mathbf{V}^0) + h^{1/2} L^2 \mathbf{V}^1, \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{n}^\pm)^{1/2} N^\pm v^h &= h^{-7/2} (N^0)^\pm \mathbf{V}^{-2} + h^{-5/2} ((N^0)^\pm \mathbf{V}^{-1} + (N^1)^\pm \mathbf{V}^{-2}) \\ &\quad + h^{-3/2} ((N^0)^\pm \mathbf{V}^0 + (N^1)^\pm \mathbf{V}^{-1} + (N^2)^\pm \mathbf{V}^{-2}) \\ &\quad + h^{-1/2} ((N^0)^\pm \mathbf{V}^1 + (N^1)^\pm \mathbf{V}^0 + (N^2)^\pm \mathbf{V}^{-1}) \\ &\quad + h^{1/2} ((N^1)^\pm \mathbf{V}^1 + (N^2)^\pm \mathbf{V}^0) + h^{3/2} (N^2)^\pm \mathbf{V}^1. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Благодаря построениям из п. 2.1 аннулируются первые тройки слагаемых из правых частей (3.37) и (3.38). Кроме того, согласно определению выражения $\mathbf{V}^1$ верны равенства

$$L^0 \mathbf{V}^1 + L^1 \mathbf{V}^0 + L^2 \mathbf{V}^{-1} = -\mathbf{f}^1, \quad (N^0)^\pm \mathbf{V}^1 + (N^1)^\pm \mathbf{V}^0 = 0, \quad (3.39)$$

где $\mathbf{f}^1$ – вектор-функция (3.30). Наконец, учитывая комментарий к формуле (2.20), предоставляющей правые части задачи (2.9) с индексом $k = 2$, получаем

$$\begin{aligned} &-e_3^\top \int_{\Upsilon(y)} (L^1(\nabla_y, \partial_\zeta) \mathbf{V}^1(y, \zeta) + L^2(\nabla_y) \mathbf{V}^0(y, \zeta)) d\zeta \\ &\quad - e_3^\top ((N^1)^+(y, \nabla_y, \partial_\zeta) \mathbf{V}^1(y, H_+(y)) + (N^1)^-(y, \nabla_y, \partial_\zeta) \mathbf{V}^1(y, -H_-(y))) \\ &= \mathbf{L}_3(y, \nabla_y) \mathbf{v}(y). \end{aligned} \quad (3.40)$$

В силу определений (3.17), (3.18) соотношения (3.39), (3.40) и (3.30) показывают, что

$$h^{-3/2} (u_{(m)}^h, \mathbf{f}^1)_{\Omega(h)} + h^{-1/2} (u_{(m)3}^h, \mathbf{L}_3 \mathbf{v})_{\Omega(h)} = (w_{(m)}^h, \mathbf{L} \mathbf{v})_\omega. \quad (3.41)$$

Оценить скалярные произведения, оставшиеся в правой части (3.33) после удаления слагаемого (3.41), несложно, так как при компоненте $u_{(m)3}^h$ появляются множители h^α с показателями $\alpha \geq 1/2$, а при компонентах $u_{(m)1}^h$ и $u_{(m)2}^h$ – с показателями $\alpha \geq -1/2$. Таким образом, принимая во внимание дополнительный коэффициент $h^{1/2}$, возникающий при вычислении $L_2(\Omega(h))$ -норм производных функций $\mathbf{v}_j$ (ср. тот же коэффициент в средней части (3.34)), имеем

$$\begin{aligned} &|(u_{(m)}^h, L v^h)_{\Xi(h)} + (u_{(m)}^h, N v^h)_{\partial \Xi(h)} - (w_{(m)}^h, \mathbf{L} \mathbf{v})_\omega| \\ &\leq c_{\mathbf{v}} h^{1/2} \left(h^{1/2} \|u_{(m)3}^h; L_2(\Omega(h))\| + \sum_{i=1}^2 h^{-1/2} \|u_{(m)i}^h; L_2(\Omega(h))\| \right) \\ &\leq c_{\mathbf{v}} \|u_{(k)}^h; \Omega(h)\|_h \leq c_{\mathbf{v}} h. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Подводя итог проделанным вычислениям, видим, что в силу соотношений (3.36) и (3.42), (3.41) предел равенства (3.33) вдоль некоторой бесконечно

малой положительной последовательности $\{h_p\}$ принимает вид интегрального тождества

$$\lambda_m^0(Hw_{(m)3}^0, \mathbf{v}_3)_\omega = (w_{(m)3}^0, \mathbf{L}\mathbf{v})_\omega, \quad (3.43)$$

в котором $\mathbf{v}$ – произвольная вектор-функция из $C_c^\infty(\omega)^3$. Согласно локальным оценкам [20] (см. также [24, гл. 10], [25, гл. 2] и др.) решений эллиптических систем дифференциальных уравнений в частных производных из интегрального тождества (3.43) для вектор-функции $w \in L_2(\omega)^3$ вытекает, что она попадает в пространство $H_{\text{loc}}^3(\omega)^2 \times H_{\text{loc}}^4(\omega)$ и удовлетворяет системе (2.18) внутри области ω .

Поскольку

$$w_{(m)}^0 \in V_{1-\alpha}^1(\omega)^2 \times V_{1-2\alpha}^1(\omega) \subset V_{-\alpha}^0(\omega)^2 \times V_{-2\alpha}^0(\omega) \subset V_{1-2\alpha}^0(\omega)^2 \times V_{-2\alpha}^0(\omega) \quad (3.44)$$

(см. (3.26)), по замыканию тождество (3.43) переносится на пробные функции $\mathbf{v} \in V_{2\alpha}^3(\omega)^2 \times V_{2\alpha}^4(\omega)$. Отметим, что указанные в списке (3.44) вложения – результат сравнения показателей веса: согласно определению (3.20) кондратьевской нормы вложение $V_\beta^l(\omega) \subset V_\gamma^s(\omega)$ имеет место при условиях $l \geq s$ и $\beta - l \geq \gamma - s$, причем оно становится компактным только в том случае, когда оба неравенства строгие. Таким образом, отображение

$$\mathbf{L}: V_\beta^3(\omega)^2 \times V_\beta^4(\omega) \rightarrow V_\beta^1(\omega)^2 \times V_\beta^0(\omega) \quad (3.45)$$

непрерывно при любом $\beta \in \mathbb{R}$. При постановке задачи в весовых классах отпадает необходимость в краевых условиях, так как путем уменьшения весового индекса можно добиться обращения в нуль на границе $\partial\omega$ вектор-функции $w_{(m)}^0$ и градиента $\nabla_y w_{(m)3}^0$, а именно если $w_{(m)}^0 \in H^1(\omega)^2 \times H^2(\omega)$ принадлежит пространству $V_\gamma^1(\omega)^2 \times V_\gamma^2(\omega)$, то $w_{(m)}^0 \in \dot{H}^1(\omega)^2 \times \dot{H}^2(\omega)$ при условии $\gamma < 1/2$ (иначе расходятся весовые интегралы). Наконец, в случае изоморфизма (3.45) компактность вложения $V_\beta^4(\omega) \subset V_\beta^0(\omega)$ влечет за собой корректность задачи о собственных значениях для пучка

$$V_\beta^3(\omega)^2 \times V_\beta^4(\omega) \ni w \mapsto \mathbf{L}w - \lambda H e_3 w_3 \in V_\beta^1(\omega)^2 \times V_\beta^0(\omega).$$

Все перечисленные выше факты и приведенные ниже утверждения вытекают из общих результатов теории эллиптических краевых задач в областях с ребрами на границе (см. работы [26]–[33], а также, например, монографию [34, гл. 8, 13] и список литературы в ней), поскольку гладкую границу $\partial\omega$ можно рассматривать как одномерное ребро, и хотя такая интерпретация в упомянутых публикациях не принималась во внимание, дословное повторение приведенных в них рассуждений и выкладок обеспечивает справедливость следующих фактов.

ЛЕММА 3.2. 1) Если решение $w \in H_{\text{loc}}^3(\omega)^2 \times H_{\text{loc}}^4(\omega)$ системы дифференциальных уравнений

$$\mathbf{D}(-\nabla_y)^\top \mathbf{A}(y) \mathbf{D}(\nabla_y) w(y) = f(y), \quad y \in \omega, \quad (3.46)$$

с правой частью $f \in V_\beta^1(\omega)^2 \times V_\beta^0(\omega)$ принадлежит пространству $V_{\beta-3}^0(\omega)^2 \times V_{\beta-4}^0(\omega)$, то $w \in V_\beta^3(\omega)^2 \times V_\beta^4(\omega)$ и верна оценка

$$\|w; V_\beta^3(\omega)^2 \times V_\beta^4(\omega)\| \leq c_\beta (\|f; V_\beta^0(\omega)\| + \|w; V_{\beta-3}^0(\omega)^2 \times V_{\beta-4}^0(\omega)\|). \quad (3.47)$$

2) Отображение (3.45) является фредгольмовым в том и только в том случае, если $\beta \in (3/2, 5/2)$, причем оно заведомо оказывается изоморфизмом, т.е., в частности, верна оценка (3.47) без последнего слагаемого в правой части. При других весовых показателях отображение перестает быть фредгольмовым.

3) Если $w \in V_{\beta}^3(\omega)^2 \times V_{\beta}^4(\omega)$ – решение системы (3.46) с правой частью $f \in V_{\gamma}^1(\omega)^2 \times V_{\gamma}^0(\omega)$ и $3/2 < \gamma < \beta < 5/2$, то $w \in V_{\gamma}^3(\omega)^2 \times V_{\gamma}^4(\omega)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Поскольку матрица $\mathbf{L}(y, \nabla_y)$ дифференциальных операторов системы (2.18) обладает полиномиальным свойством [22] (ср. [21, пример 1.14]), согласно [32] (см. также [21, теорема 2.11] и [34, предложение 8.4.3]) для проверки утверждения 2) леммы 3.2 достаточно перечислить все степенные решения модельных задач, которые получаются из (2.18), (2.22) замораживанием коэффициентов в произвольной точке $\mathbf{y}^0$ контура $\partial\omega$ и удалением из дифференциальных операторов производных вдоль касательной. Если нормаль к $\partial\omega$ в точке $\mathbf{y}^0$ совпадает с отрицательным направлением на оси y_1 , то модельная задача приобретает вид

$$\mathbf{D}(-\partial_y, 0)^{\top} \mathbf{A}(\mathbf{y}^0) \mathbf{D}(\partial_y, 0) \mathbf{w}(\mathbf{y}) = 0, \quad \mathbf{y} \in (0, +\infty), \quad \mathbf{w}(0) = 0, \quad -\partial_y \mathbf{w}_3(0) = 0. \quad (3.48)$$

Нужных линейно независимых решений задача (3.48) имеет четыре:

$$\mathbf{w}^j(\mathbf{y}) = (\mathbf{a}_1^j \mathbf{y}, \mathbf{a}_2^j \mathbf{y}, \mathbf{a}_3^j \mathbf{y}^2)^{\top}, \quad j = 1, 2, 3, \quad \mathbf{w}^4(\mathbf{y}) = (\mathbf{a}_1^4 \mathbf{y}^2, \mathbf{a}_2^4 \mathbf{y}^2, \mathbf{a}_3^4 \mathbf{y}^3)^{\top}; \quad (3.49)$$

здесь $\mathbf{a}_k^j$ – постоянные, зависящие от матрицы $\mathbf{A}(\mathbf{y}^0)$. При этом ограничение $\beta < 5/2$, принятое в лемме 3.2, обеспечивает попадание в пространства $V_{\beta}^3(\omega)$ и $V_{\beta}^4(\omega)$ соответственно функций ϱ_0 и ϱ_0^2 , поведение которых около границы $\partial\omega$ согласовано со степенями скалярных полиномов из списка (3.49). Система обыкновенных дифференциальных уравнений из задачи Коши (3.48) имеет еще четыре решения

$$e_1, \quad e_2, \quad e_3, \quad \mathbf{y}e_3, \quad (3.50)$$

которые не удовлетворяют однородным начальным условиям. Требование $\beta > 3/2$ исключает из весовых пространств $V_{\beta}^3(\omega)$ и $V_{\beta}^4(\omega)$ соответственно функции 1 и 1, ϱ_0 , имеющие согласованные порядки с решениями (3.50).

Приведенные простые выкладки поясняют утверждение 2) леммы 3.2, которое справедливо благодаря специфике задачи. Утверждения 1), 3) верны и для общих эллиптических краевых задач в областях с ребрами (ср. [34, гл. 8]).

Если $\alpha \in (3/4, 1)$, то формула (3.44) (без средней ее части) показывает, что справедливы включения

$$w_{(m)}^0 \in V_{\beta-3}^0(\omega)^2 \times V_{\beta-4}^0(\omega), \quad \lambda_m^0 e_3 w_{(m)3}^0 \in \{0\}^2 \times V_{-2\alpha}^0(\omega) \subset \{0\}^2 \times V_{\beta}^0(\omega)$$

с показателем $\beta = 4 - 2\alpha \in (2, 5/2)$. Иными словами, выполнены условия леммы 3.2, 1), а значит, $w_{(m)}^0 \in V_{\beta}^3(\omega)^2 \times V_{\beta}^4(\omega)$. Поскольку $V_{-2\alpha}^0(\omega) \subset V_{-2}^0(\omega)$, по лемме 3.2, 3) вектор-функция $w_{(m)}^0$ попадает в пространства

$$V_2^3(\omega)^2 \times V_2^4(\omega) \subset V_0^1(\omega)^2 \times V_0^2(\omega) \subset \dot{H}^1(\omega)^2 \times \dot{H}^2(\omega). \quad (3.51)$$

Отметим, что показатель $\beta = 2$ допустим (в смысле леммы 3.2, 2)), а оба вложения в цепочке (3.51) получаются посредством анализа весовых множителей в нормах (3.20), причем на самом деле вместо последнего знака $\subset$ в формуле (3.51) можно написать знак $=$.

Итак, найденные в (3.26) пределы λ_m^0 и $w_{(m)}^0 \in \dot{H}^1(\omega)^2 \times \dot{H}^2(\omega)$ суть собственное число задачи (2.24) и соответствующая собственная вектор-функция, нормированная условием (3.27). Благодаря гладкости границы $\partial\omega$ обобщенное решение задачи (2.24) оказывается классическим и бесконечно дифференцируемым на множестве $\bar{\omega}$.

3.4. Теорема о сходимости. Сформулируем утверждение, доказательство которого будет завершено в п. 4.2 (непроверенными остались оценка (3.14) и равенство $\lambda_m^0 = \lambda_m$).

ТЕОРЕМА 3.2. *Последовательности (1.12) и (1.21) собственных чисел задач (1.6)–(1.8) и (2.18), (2.22) находятся в отношении (1.20).*

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Если бы нормы

$$\|w_{(m)i}^h; H^1(\omega)\|, \quad i = 1, 2, \quad \text{и} \quad \|w_{(m)3}^h; H^1(\omega)\| \quad (3.52)$$

оказались равномерно ограниченными относительно $h \in (0, h_0]$, то полученный результат можно было бы вывести значительно проще, во всяком случае без обращения к теории эллиптических краевых задач в областях с кусочно гладкими границами. Однако весовое анизотропное неравенство Корна (3.10) в теореме 3.1 и предложенный способ его вывода не позволяют убедиться в ограниченности норм (3.52). Причина кроется в появлении логарифмов в оценках (3.1) и (3.13), происходящих от неравенства Харди (3.2). Логарифмы возникают по существу – они влияют и на асимптотические разложения собственных чисел и векторов (см. описание эффектов пограничного слоя в § 6).

§ 4. Обоснование асимптотики

4.1. Абстрактное уравнение. Поступая аналогично проверке леммы 2.1, скалярным произведением $\langle u^h, v^h \rangle_h$ в пространстве $\mathcal{H}^h = \dot{H}^1(\Xi(h); \Gamma_D)^3$ назовем билинейную форму (1.17) и введем положительный и непрерывный симметрический, а значит, самосопряженный оператор T^h при помощи формулы

$$\langle T^h u^h, v^h \rangle_h = \langle u^h, v^h \rangle_{\Xi(h)}, \quad u^h, v^h \in \mathcal{H}^h. \quad (4.1)$$

При этом оператор T^h компактный, а интегральное тождество (1.16) становится эквивалентным абстрактному уравнению

$$T^h u^h = \tau^h u^h \quad \text{в } \mathcal{H}^h \quad (4.2)$$

с новым спектральным параметром

$$\tau^h = (\Lambda^h)^{-1}. \quad (4.3)$$

Связь (4.3) спектральных параметров преобразует неограниченную монотонно возрастающую последовательность собственных чисел (1.12) в монотонную бесконечно малую последовательность

$$\tau_1^h \geq \tau_2^h \geq \dots \geq \tau_m^h \geq \dots \rightarrow +0 \quad (4.4)$$

собственных чисел оператора T^h . Согласно [10, теоремы 10.1.5, 10.2.2] спектр этого оператора состоит из дискретного спектра (4.4) и существенного спектра $\{\tau^h = 0\}$.

Основным инструментом в настоящем параграфе служит следующее классическое утверждение, известное как лемма “о почти собственных” числах и векторах; его доказательство можно найти, например, в [35], [10, гл. 6], [1, § 7.1] и др.

ЛЕММА 4.1. Пусть $V^h \in \mathcal{H}^h$ и $t^h \in (0, +\infty)$ таковы, что

$$\|V^h; \mathcal{H}^h\| = 1, \quad \|T^h V^h - t^h V^h; \mathcal{H}^h\| = \delta^h \in (0, t^h). \quad (4.5)$$

Тогда на сегменте $[t^h - \delta^h, t^h + \delta^h]$ найдется хотя бы одно собственное число оператора T^h . Более того, при любом $\delta_*^h \in (\delta, t^h)$ справедливо соотношение

$$\left\| V^h - \sum a_k^h \mathcal{U}_{(k)}^h; \mathcal{H}^h \right\| \leq 2 \frac{\delta^h}{\delta_*^h}, \quad (4.6)$$

где суммирование распространено на элементы последовательности (4.4), попадающие на сегмент $[t^h - \delta_*^h, t^h + \delta_*^h]$, $\mathcal{U}_{(k)}^h$ — соответствующие собственные векторы, подчиненные условиям ортогональности и нормировки

$$\langle \mathcal{U}_{(j)}^h, \mathcal{U}_{(k)}^h \rangle_h = \delta_{j,k}, \quad j, k \in \mathbb{N}, \quad (4.7)$$

а коэффициенты a_k^h удовлетворяют равенству $\sum |a_k^h|^2 = 1$.

4.2. Первая серия собственных чисел (низкочастотный диапазон спектра). Пусть λ_m — собственное число задачи (2.18), (2.22) (или (2.24) в обобщенной постановке) с кратностью $\varkappa_m$, т. е. в последовательности (1.21)

$$\lambda_{m-1} < \lambda_m = \dots = \lambda_{m+\varkappa_m-1} < \lambda_{m+\varkappa_m}. \quad (4.8)$$

Построим $\varkappa_m$ экземпляров приближенных решений уравнения (4.2), а именно положим

$$t_p^h = t_m^h = h^{-2} \lambda_m^{-1}, \quad V_{(p)}^h(x) = \|W_{(p)}^h; \mathcal{H}^h\|^{-1} W_{(p)}^h(x), \quad (4.9)$$

где $p = m, \dots, m + \varkappa_m - 1$ и

$$\begin{aligned} W_{(p)}^h(x) &= h^{-2} X_h(y) U_{(p)}^{-2}(y) + h^{-1} X_h(y) U_{(p)}^{-1}(y, \zeta) \\ &\quad + X_h(y) U_{(p)}^0(y, \zeta) + h X_h(y) U_{(p)}^1(y, \zeta) \end{aligned} \quad (4.10)$$

(ср. выражения (2.1) и (3.32)). При этом $U_{(p)}^{-2}$, $U_{(p)}^{-1}$ и $U_{(p)}^0$ определены формулами (2.2) и (2.11) по собственной вектор-функции $w_{(p)}$ задачи (2.18), (2.22), $w_{(p)}$ удовлетворяет условиям ортогональности и нормировки (2.23), а $U_{(p)}^1$ — решение задачи (2.9) с правыми частями (2.14), где $U^0 = U_{(p)}^0$ и $U^1 = U_{(p)}^1$. Срезка X_h , введенная ранее в формуле (3.17), приписана сомножителями при слагаемых в правой части (4.10) для того, чтобы можно было гладко продолжить $W_{(p)}^h$ нулем с перегородки $\Omega(h)$ на тело Ξ . Найдём указанные в лемме 4.1 величины $\delta^h = \delta_p^h$. При помощи соотношений (4.1) и (4.9) выводим, что

$$\begin{aligned} \delta_p^h &= \sup |\langle T^h V_{(p)}^h - t_m^h V_{(p)}^h, v^h \rangle_h| \\ &= \|W_{(p)}^h; \mathcal{H}^h\|^{-1} t_m^h \sup |a(W_{(p)}^h, v^h; \Omega(h)) - h^2 \lambda_m (W_{(p)}^h, v^h)_{\Omega(h)}| \\ &= \|W_{(p)}^h; \mathcal{H}^h\|^{-1} t_m^h \sup |(LW_{(p)}^h - h^2 \lambda_m W_{(p)}^h, v^h)_{\Omega(h)} + (NW_{(p)}^h, v^h)_{\partial\Omega(h) \cap \partial\Xi(h)}|. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Здесь супремум вычисляется по всем пробным функциям $v^h \in \mathcal{H}^h$, для которых $\|v^h; \mathcal{H}^h\| = 1$, а значит, $\|v^h; \Xi(h)\|_h \leq c$ согласно теореме 3.1.

Сначала оценим норму $\|W_{(p)}^h; \mathcal{H}^h\|$, точнее, рассмотрим скалярные произведения $\langle W_{(p)}^h, W_{(q)}^h \rangle_h$. В силу краевых условий (2.22) для вектор-функций

$w_{(p)} \in C^\infty(\bar{\omega})^3$ верны соотношения

$$|\nabla_y^j w_{(p)i}(y)| \leq c_{jp} \varrho_0(y)^{(1-j)+}, \quad i = 1, 2, \quad |\nabla_y^j w_{(p)3}(y)| \leq c_{jp} \varrho_0(y)^{(2-j)+}, \quad (4.12)$$

где $j = 0, 1, 2, \dots$ и $(s)_+ = \frac{1}{2}(s + |s|)$ – положительная часть числа $s \in \mathbb{R}$. Вынесем срезающую функцию из-под дифференциального оператора $\mathcal{D}(\nabla_x)$ и при учете формул (1.5), (2.5) и (2.11) получим равенство

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\nabla_x)W_{(p)}^h(x) &= (\mathcal{D}(\nabla_y, 0)X_h(y))(h^{-2}U_{(p)}^{-2}(y) + h^{-1}U_{(p)}^{-1}(y, \zeta) + \dots) \\ &\quad + X_h(y)(h^{-2}(\mathcal{D}_y U_{(p)}^{-2}(y) + \mathcal{D}_\zeta U_{(p)}^{-1}(y, \zeta)) \\ &\quad + h^{-1}(\mathcal{D}_y U_{(p)}^{-1}(y, \zeta) + \mathcal{D}_\eta U_{(p)}^0(\eta, z)) + \dots). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Многоточием обозначены младшие члены, которые имеют такое же строение, как выделенные – главные, и обрабатываются аналогично. Норма в пространстве $L_2(\Omega(h))^3$ первой группы слагаемых из правой части (4.13) не превосходит ch^0 , поскольку носитель матрицы-функции $\mathcal{D}(\nabla_y, 0)X_h$, имеющей порядок h^{-1} , расположен в малой, шириной $O(h)$, окрестности контура $\partial\omega$, в которой благодаря неравенствам (4.12) и определению асимптотических членов выполнены оценки

$$|U_{(p)}^j(\eta, z)| \leq c\varrho_0(z)^{(-j)+} \leq ch^{(-j)+}. \quad (4.14)$$

Отметим, что здесь и далее постоянные в неравенствах зависят от номера m , но это не отражено в обозначениях. Итак, при учете оценок (4.14) находим, что

$$\begin{aligned} &\|(\mathcal{D}(\nabla_y, 0)X_h(y))(h^{-2}U_{(p)}^{-2}(y) + h^{-1}U_{(p)}^{-1}(y, \zeta) + \dots); L_2(\Omega(h))\| \\ &\leq ch^{-1}(\text{mes}_3(\mathcal{V}_{ch} \cap \Omega(h)))^{1/2} \leq c. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Во второй группе слагаемых имеем

$$\mathcal{D}_y U_{(p)}^{-2} + \mathcal{D}_\zeta U_{(p)}^{-1} = 0, \quad \mathcal{D}_y U_{(p)}^{-1} + \mathcal{D}_\zeta U_{(p)}^0 = (\mathcal{Y} + \mathcal{D}_\zeta \mathcal{X})\mathbf{D}(\nabla_y)w_{(p)}$$

в силу формул (2.2) и (2.11), (2.10). Ясно, что $L_2(\Omega(h))$ -нормы остальных членов не превосходят $c(\text{mes}_3 \Omega(h))^{1/2} \leq Ch^{1/2}$. Кроме того, $L_2(\Omega_h)$ -норма выражения

$$(1 - X_h)(h^{-2}(\mathcal{D}_y U_{(p)}^{-2}(y) + \mathcal{D}_\zeta U_{(p)}^{-1}(y, \zeta)) + h^{-1}(\mathcal{D}_y U_{(p)}^{-1}(y, \zeta) + \mathcal{D}_\eta U_{(p)}^0(\eta, z)) + \dots)$$

обрабатывается аналогично (4.15), т. е. устранение срезки X_h при второй группе слагаемых из правой части (4.13) привносит ту же погрешность $O(h^0)$, что и вся первая группа. В итоге заменяем перегородку $\Omega(h)$ пластиной Ω_h (подынтегральное выражение аннулируется на множестве $\Omega_h \setminus \Omega(h)$) и приходим к оценке

$$\begin{aligned} &\left| \langle W_{(p)}^h, W_{(q)}^h \rangle_h - \frac{1}{h^2} \int_\omega (A(\mathcal{Y} + \mathcal{D}_\zeta \mathcal{X})\mathbf{D}(\nabla_y)w_{(p)}, (\mathcal{Y} + \mathcal{D}_\zeta \mathcal{X})\mathbf{D}(\partial_z)w_{(q)})_{\Upsilon_h(y)} dy \right| \\ &\leq ch^{-1/2}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Учитывая определение (2.19) матрицы $\mathbf{A}$, ввиду интегрального тождества (2.24) и условий ортогональности и нормировки (2.23) для собственных функций $w_{(p)}$ и $w_{(q)}$ получаем равенства

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h^2} \int_\omega (A(\mathcal{Y} + \mathcal{D}_\zeta \mathcal{X})\mathbf{D}(\nabla_y)w_{(p)}, (\mathcal{Y} + \mathcal{D}_\zeta \mathcal{X})\mathbf{D}(\partial_z)w_{(q)})_{\Upsilon_h(y)} dy \\ &= h^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{D}(\nabla_y)w_{(p)}, \mathbf{D}(\nabla_y)w_{(q)})_\omega = h^{-1}\lambda_p(w_{(p)}, w_{(q)})_\omega = h^{-1}\delta_{p,q}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|(AD(\nabla_x)W_{(p)}^h, D(\nabla_x)W_{(q)}^h)_{\Xi(h)} - h^{-1}\lambda_m\delta_{p,q}| \leq ch^{-1/2}, \quad (4.17)$$

и, в частности,

$$\|W_{(p)}^h; \mathcal{H}^h\| = h^{-1/2}\lambda_m^{1/2} + O(1), \quad \|W_{(p)}^h; \mathcal{H}^h\| \geq ch^{-1/2} > 0, \quad c > 0. \quad (4.18)$$

Теперь рассмотрим последнюю пару скалярных произведений в формуле (4.11). Благодаря построениям, проведенным в п. 2.1 (также ср. преобразования (3.37) и (3.38)), справедливы равенства

$$\begin{aligned} LW_{(p)}^h - h^2\lambda_m W_{(p)}^h &= [L, X_h](h^{-2}U_{(p)}^{-2} + h^{-1}U_{(p)}^{-1} + U_{(p)}^0 + hU_{(p)}^1) \\ &\quad + X_h(\underbrace{L^1U_{(p)}^1 + L^2U_{(p)}^0 - \lambda_m U_{(p)}^{-2}}_{(N^1)^\pm U_{(p)}^1} + h(L^2U_{(p)}^1 - \lambda_m(U_{(p)}^{-1} + hU_{(p)}^0 + h^2U_{(p)}^1))), \\ N^\pm W_{(p)}^h &= [N^\pm, X_h](h^{-2}U_{(p)}^{-2} + h^{-1}U_{(p)}^{-1} + U_{(p)}^0 + hU_{(p)}^1) \\ &\quad + hX_h \mathbf{n}_\pm(\underbrace{(N^1)^\pm U_{(p)}^1 + (N^2)^\pm U_{(p)}^0}_{(N^2)^\pm U_{(p)}^0} + h(N^2)^\pm U_{(p)}^0), \end{aligned} \quad (4.19)$$

где $[L, X_h]$ и $[N^\pm, X_h]$ – коммутаторы дифференциальных операторов со срезающей функцией. Выражения, выделенные снизу в (4.19) фигурными скобками, обозначим f^1 и $(g^1)^\pm$ соответственно. Согласно асимптотической процедуре из п. 2.1 имеем

$$\int_{\Upsilon_1(y)} f_3^1(y, \zeta) d\zeta + (g_3^1)^+(y) + (g_3^1)^-(y) = 0. \quad (4.20)$$

Заметим, что в соответствии с представлением (2.8) нормали $n^\pm$ элемент ds_x площади поверхности $\Sigma_h^\pm$ вычисляется по формуле

$$ds_x = (1 + h^2|\nabla_y H_\pm(y)|^2)^{1/2} dy = \mathbf{n}_\pm^{1/2}(h, y) dy. \quad (4.21)$$

В итоге получаем

$$\begin{aligned} \left| (X_h f^1, v^h)_{\Omega_h} + h \sum_{\pm} (X_h g^{1\pm}, v^h)_{\Sigma_h^\pm} \right| &= \left| (X_h f^1, v^h - e_3 \bar{v}_3^h)_{\Omega_h} \right. \\ &\quad \left. + h \sum_{\pm} ((X_h g^{1\pm}, v^h - e_3 \bar{v}_3^h)_\omega + (X_h g^{1\pm}, (1 - \mathbf{n}_\pm^{1/2})v^h)_{\Sigma_h^\pm}) \right| \\ &\leq ch^{1/2} \|v^h; \Omega(h)\|_h. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Среднее $\bar{v}_3^h$ компоненты пробной вектор-функции v^h удалось вычесть в третьем и четвертом скалярных произведениях из (4.22) именно благодаря условию ортогональности (4.20). Для вывода последней оценки в цепочке (4.22) учтены формулы (3.7) и (4.21), а также проинтегрированное по ω одномерное неравенство Пуанкаре на малом интервале $\Upsilon_h(y)$

$$\begin{aligned} \|X_h(v_3^h - \bar{v}_3^h); L_2(\Omega_h)\|^2 &\leq ch^2 \|X_h \partial_3 v_3^h; L_2(\Omega_h)\|^2 \\ &= ch^2 \|X_h \varepsilon_{33}(v^h); L_2(\Omega_h)\|^2 \leq ch^2 \|v^h; \Omega(h)\|_h \end{aligned} \quad (4.23)$$

и следовое неравенство (3.23); отметим, что в цепочке (4.23) фигурирует шестая компонента $\varepsilon_{33}(v^h)$ столбца деформаций (1.4). Понятно, что

$$\begin{aligned} h |(X_h L^2 U_{(p)}^1 - \lambda_m(U_{(p)}^{-1} + hU_{(p)}^0 + h^2 U_{(p)}^1), v^h)_{\Omega_h}| &+ h \sum_{\pm} |(X_h (N^2)^\pm U_{(p)}^1, v^h)_{\Sigma_h^\pm}| \\ &\leq ch^{1/2} \|v^h; \Omega(h)\|_h. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Слагаемые, содержащие коммутаторы, обрабатываются так же, как и первая группа членов в правой части (4.13), т. е. при учете неравенств (4.12) и расположения носителей производных срезки. Единственное нововведение – формула

$$\|v^h; L_2(\mathcal{V}_{ch} \cap \Omega(h))\| \leq c |\ln h| h \|v^h; \Omega(h)\|_h,$$

где коэффициент $|\ln h| h$ приобретен благодаря весовым множителям $h^2 \varrho_h^{-4}$ при $|\mathbf{u}_3|^2$ и ϱ_h^{-2} при $|\mathbf{u}_i|^2$, $i = 1, 2$, в интеграле из левой части (3.13), а $|\ln h|$ – в силу общего множителя $|\ln h|^{-2}$. Обозначив многоточием сумму асимптотических членов при коммутаторах, принимаем во внимание соотношение (3.23) и обнаруживаем, что

$$\left| ([L, X_h](\dots), v^h)_{\Omega_h} + \sum_{\pm} ([N^{\pm}, X_h](\dots), v^h)_{\Sigma_h^{\pm}} \right| \leq c |\ln h| \|v^h; \Omega(h)\|_h. \quad (4.25)$$

Итак, приведенные вычисления показывают, что величина (4.11) не превосходит

$$c_m h^{1/2} h^{-2} |\ln h| = c_m h^{-3/2} |\ln h|. \quad (4.26)$$

При этом было учтено, что $\|W_{(p)}^h; \mathcal{H}^h\|^{-1} t_m^h = O(h^{1/2} h^{-2})$ в силу соотношений (4.18) и (4.9), а наихудшая мажоранта $c |\ln h|$ в оценках слагаемых под знаком сур в левой части (4.11) возникла в неравенстве (4.25) для коммутаторов (ср. соотношения (4.22)–(4.24)). По лемме 4.1 существует собственное число τ_j^h оператора T^h , удовлетворяющее оценке

$$|\tau_j^h - h^{-2} \lambda_m^{-1}| \leq c_m h^{-3/2} |\ln h|.$$

Отсюда вытекают, во-первых, неравенство $\tau_j^h \leq (\lambda_m^{-1} + h^{1/2} |\ln h|) h^{-2} \leq c'_m h^{-2}$ и, во-вторых, при малом h соотношение

$$|\Lambda_j^h - h^2 \lambda_m| \leq 2c_m \lambda_m^2 h^{5/2} |\ln h| \quad (4.27)$$

для собственного числа $\Lambda_j^h = (\tau_j^h)^{-1}$ задачи (1.6)–(1.8).

Убедимся в том, что при малом h в $(C_m h^{5/2} |\ln h|)$ -окрестности точки $h^2 \lambda_m$ имеются не менее $\varkappa_m$ собственных чисел $\Lambda_j^h, \dots, \Lambda_{j+\varkappa_m-1}^h$. Тогда будет установлено уже использованное, но не проверенное в § 3 соотношение (3.14), так как, перебирая первые $m + \varkappa_m - 1$ членов последовательности (1.12), приходим к формуле $j \geq m$, т. е. $\Lambda_m^h \leq \Lambda_j^h \leq h^2 \lambda_m + c_m h^{5/2} |\ln h|$.

Воспользуемся второй частью леммы 4.1, взяв в ней $\delta_{(m)*}^h = C_m h^{5/2} |\ln h|$ и заметив, что по доказанному $\delta_{(m)}^h = \max\{\delta_m^h, \dots, \delta_{m+\varkappa_m-1}^h\} \leq c_m h^{5/2} |\ln h|$. Найдутся такие столбцы коэффициентов $a_{(p)}^h = (a_{(p)j}^h, \dots, a_{(p)j+K_j^h-1}^h)^\top$, при которых вектор-функции $V_{(m)}^h, \dots, V_{(m+\varkappa_j-1)}^h$ подчинены неравенству (4.6), принимающему вид

$$\left\| V_{(p)}^h - \sum_{k=j}^{j+K_j^h-1} a_{(p)k}^h \mathcal{U}_k^h; \mathcal{H}^h \right\| \leq 2 \frac{c_m h^{-3/2} |\ln h|}{C_m h^{-3/2} |\ln h|} = 2 \frac{c_m}{C_m}; \quad (4.28)$$

здесь $p = m, \dots, m + \varkappa_j - 1$, а K_j^h – полная кратность спектра оператора T^h на сегменте

$$[h^2 \lambda_m - C_m h^{5/2} |\ln h|, h^2 \lambda_m + C_m h^{5/2} |\ln h|].$$

Поскольку собственные векторы $\mathcal{U}_{(k)}^h$ оператора ортонормированы, выводим из соотношения (4.28) формулу

$$\begin{aligned} (a_{(q)}^h)^\top a_{(p)j}^h - \delta_{p,q} &= \left\langle \sum_{s=j}^{j+K_j^h-1} a_{(p)s}^h \mathcal{U}_{(p)s}^h, \sum_{l=j}^{j+K_j^h-1} a_{(q)l}^h \mathcal{U}_{(q)l}^h \right\rangle_h - \delta_{p,q} \\ &= \left\langle V_{(p)}^h - \sum_{k=s}^{j+K_j^h-1} a_{(p)s}^h \mathcal{U}_{(p)s}^h, V_{(q)}^h \right\rangle_h - \left\langle \sum_{l=s}^{j+K_j^h-1} a_{(p)s}^h \mathcal{U}_{(p)s}^h, V_{(q)}^h - \sum_{k=l}^{j+K_j^h-1} a_{(q)l}^h \mathcal{U}_{(q)l}^h \right\rangle_h \\ &\quad + \|W_{(p)}^h; \mathcal{H}^h\|^{-1} \|W_{(q)}^h; \mathcal{H}^h\|^{-1} \langle W_{(p)}^h, W_{(q)}^h \rangle_h - \delta_{p,q}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Модули первых двух скалярных произведений в правой части (4.29) не превосходят величины $2\delta_{(m)}^h (\delta_{(m)*}^h)^{-1} = 2c_m C_m^{-1}$, а третье в силу соотношений (4.17) и (4.18) отличается от символа Кронекера $\delta_{p,q}$ на величину $O(h^{1/2})$. Таким образом, столбцы $a_{(m)}^h, \dots, a_{(m+\varkappa_m-1)}^h \in \mathbb{R}^{K_j^h}$ “почти ортонормированы”, т. е.

$$|(a_{(q)}^h)^\top a_{(p)}^h - \delta_{p,q}| \leq \varepsilon_m, \quad (4.30)$$

где $\varepsilon_m \rightarrow +0$ при $h \rightarrow +0$ и $C_m \rightarrow +\infty$. Если $K_j^h < \varkappa_m$, то рассматриваемые столбцы линейно зависимы. В результате имеем $0 = \sum_{p=m}^{m+\varkappa_m-1} \alpha_p^h a_{(p)}^h$ при некоторых α_p^h , причем $\sum_{p=m}^{m+\varkappa_m-1} |\alpha_p^h|^2 = 1$, но

$$0 = \sum_{p,l=m}^{m+\varkappa_m-1} \alpha_p^h \overline{\alpha_l^h} (a_{(l)}^h)^\top a_{(p)}^h \geq \sum_{p=m}^{m+\varkappa_m-1} |\alpha_p^h|^2 - \varepsilon_m \sum_{p,l=m}^{m+\varkappa_m-1} |\alpha_p^h| |\alpha_l^h| \geq 1 - \varepsilon_m \varkappa_m.$$

Последнее невозможно при $\varepsilon_m < 1/\varkappa_m$, т. е. при большом C_m и малом h .

Если же $\varkappa_m < K_j^h$, то собственное число $\Lambda_{m+\varkappa_m}^h$ оказывается меньше $h^2 \lambda_m + C_m h^{5/2} |\ln h|$, а значит, согласно результатам из § 3 предел $\lambda_{m+\varkappa_m}^0 = \lim h^{-2} \Lambda_{m+\varkappa_m}^h \leq \lambda_m$ является собственным числом задачи (2.18), (2.22). Помимо этого, вычисленный по формулам (3.17), (3.18) и (3.26) предел $w_{m+\varkappa_m}^0$ – собственная вектор-функция, которая удовлетворяет условиям нормировки и ортогональности (2.23) (благодаря сильной сходимости в $L_2(\omega)$)³ и несколько измененным выкладкам (3.28) соотношения (2.23) вытекают из аналогичных условий (1.19) для собственных векторов исходной задачи на сочленении $\Xi(h)$. Сделанный вывод противоречит определению последовательности (1.12) и формуле (4.8). В итоге получаем, что $\varkappa_m = K_j^h$ и, более того, при малом h в соотношении (4.27) фигурируют индексы $j = m, \dots, m + \varkappa_m - 1$. В итоге это соотношение принимает вид неравенства (1.22), указанного в п. 1.4.

ТЕОРЕМА 4.1. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ существуют положительные величины h_m и c_m, C_m , при которых в случае $h \in (0, h_m)$ собственные числа Λ_m^h и λ_m задач (1.6)–(1.8) и (2.18), (2.22) связаны неравенством (1.22). Кроме того, если число λ_m имеет кратность $\varkappa_m$ (см. соотношение (4.8)), то найдутся такие (составляющие ортогональную матрицу) ортонормированные столбцы $b_{(q)}^h = (b_{(q)m}^h, \dots, b_{(q)m+\varkappa_m-1}^h)^\top \in \mathbb{R}^{\varkappa_m}$, $q = m, \dots, m + \varkappa_m - 1$, что собственные вектор-функции $u_{(m)}^h, \dots, u_{(m+\varkappa_m-1)}^h$, подчиненные требованиям (1.19), удовлетворяют оценке

$$\|u_{(q)}^h - b_{(q)m}^h W_{(m)}^h - \dots - b_{(q)m+\varkappa_m-1}^h W_{(m+\varkappa_m-1)}^h; \Xi(h)\| \leq C_m |\ln h|, \quad (4.31)$$

где $q = m, \dots, m + \varkappa_m - 1$ и $W_{(p)}^h$ – асимптотические конструкции (4.10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Осталось вывести формулу (4.31) для собственных вектор-функций. С этой целью опять применим вторую часть леммы 4.1, в которой

$$\delta_{(m)*}^h = \frac{1}{3}h^{-2}d_m, \quad d_m = \min \left\{ \frac{1}{\lambda_{m-1}} - \frac{1}{\lambda_m}, \frac{1}{\lambda_m} - \frac{1}{\lambda_{m+\varkappa_m}} \right\}. \quad (4.32)$$

По проверенному ранее соответствующий сегмент $\Psi_m^h = [h^{-2}\lambda_m^{-1} - \delta_{(m)*}^h, h^{-2}\lambda_{m+1}^{-1} + \delta_{(m)*}^h]$ при малом h содержит лишь собственные числа $\tau_m^h, \dots, \tau_{m+\varkappa_m-1}^h$ (отметим, что $\Psi_m^h \cap \Psi_{m-1}^h = \emptyset$ и $\Psi_m^h \cap \Psi_{m+\varkappa_m}^h = \emptyset$ согласно формулам (4.8) и (4.32)). Лемма 4.1 предоставляет столбцы $a_{(m)}^h, \dots, a_{(m+\varkappa_m-1)}^h \in \mathbb{R}^{\varkappa_m}$, для которых

$$\left\| V_{(p)}^h - \sum_{k=m}^{m+\varkappa_m-1} a_{(p)k}^h \mathcal{U}_{(k)}^h; \mathcal{H}^h \right\| \leq 2 \frac{\delta_{(m)*}^h}{\delta_{(m)*}^h} = \frac{2}{3} \frac{c_m}{d_m} h^{1/2} |\ln h|. \quad (4.33)$$

Умножив соотношение (4.33) на норму $\|W_{(p)}^h; \mathcal{H}^h\|$, оцененную в (4.18) и имеющую порядок $h^{-1/2}$, обнаруживаем, что левая часть полученного неравенства

$$\left\| W_{(p)}^h - \|W_{(p)}^h; \mathcal{H}^h\| \sum_{k=m}^{m+\varkappa_m-1} a_{(p)k}^h \mathcal{U}_{(k)}^h; \mathcal{H}^h \right\| \leq c'_m |\ln h| \quad (4.34)$$

отличается от $\mathcal{H}^h$ -нормы разности $W_{(p)}^h - \sum a_{(p)k}^h u_{(k)}^h$ величиной $O(|\ln h|)$, этот вывод опирается на асимптотические формулы (4.18) для норм $\|W_{(p)}^h; \mathcal{H}^h\|$ и (1.22) для собственного числа Λ_k^h . Кроме того, согласно тождеству (1.16) и формуле (4.1) собственные векторы $\mathcal{U}_{(k)}^h$ и $u_{(k)}^h$, нормированные равенствами (4.7) и (1.19) соответственно, находятся в отношении $u_{(k)}^h = (\Lambda_k^h)^{1/2} \mathcal{U}_{(k)}^h$. В итоге оценка (4.34) имеет вид

$$\left\| W_{(p)}^h - \sum_{k=m}^{m+\varkappa_m-1} a_{(p)k}^h u_{(k)}^h; \mathcal{H}^h \right\| \leq C'_m |\ln h|. \quad (4.35)$$

Теперь необходимо переделать “почти ортогональную” матрицу коэффициентов $\mathbf{a}^h = (a_{(m)}^h, \dots, a_{(m+\varkappa_m-1)}^h)$ размером $\varkappa_m \times \varkappa_m$ в ортогональную матрицу $\mathbf{b}^h = (b_{(m)}^h, \dots, b_{(m+\varkappa_m-1)}^h)$ того же размера (названное свойство матрицы $\mathbf{a}^h$ обеспечено формулой (4.30), означающей, что матрица $(\mathbf{a}^h)^\top \mathbf{a}^h$ мало отличается от единичной матрицы $\mathbb{I}_{\varkappa_m}$). Для этого можно воспользоваться простой алгебраической леммой [1, лемма 7.1.7], краткое доказательство которой воспроизведем для удобства читателя.

Пусть $\varepsilon_m^h = \|(\mathbf{a}^h)^\top \mathbf{a}^h - \mathbb{I}_{\varkappa_m}; \mathbb{R}^{\varkappa_m} \rightarrow \mathbb{R}^{\varkappa_m}\| \in [0, 1)$, а $\mathbf{s}^h$ — ортогональная $(\varkappa_m \times \varkappa_m)$ -матрица, приводящая симметрическую положительную матрицу $(\mathbf{a}^h)^\top \mathbf{a}^h$ к диагональному виду, т. е.

$$(\mathbf{s}^h)^\top (\mathbf{a}^h)^\top \mathbf{a}^h \mathbf{s}^h = \text{diag}(1 + t_m^h, \dots, 1 + t_{m+\varkappa_m-1}^h) =: \mathbf{t}^h, \quad |t_p^h| \leq \varepsilon_m^h < 1.$$

Положим $\mathbf{b}^h = \mathbf{s}^h (\mathbf{t}^h)^{-1/2} (\mathbf{s}^h)^\top (\mathbf{a}^h)^\top$ и получим

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^h (\mathbf{b}^h)^\top &= \mathbf{s}^h (\mathbf{t}^h)^{-1/2} (\mathbf{s}^h)^\top (\mathbf{a}^h)^\top \mathbf{a}^h \mathbf{s}^h (\mathbf{t}^h)^{-1/2} (\mathbf{s}^h)^\top \\ &= \mathbf{s}^h (\mathbf{t}^h)^{-1/2} \mathbf{t}^h (\mathbf{t}^h)^{-1/2} (\mathbf{s}^h)^\top = \mathbb{I}_{\varkappa_m}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned}
& \| \mathbf{a}^h \mathbf{b}^h - \mathbb{I}_{\mathcal{X}_m}; \mathbb{R}^{\mathcal{X}_m} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{X}_m} \| = \| (\mathbf{a}^h - (\mathbf{b}^h)^\top) \mathbf{b}^h; \mathbb{R}^{\mathcal{X}_m} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{X}_m} \| \\
& = \| (\mathbf{s}^h)^\top \mathbf{b}^h (\mathbf{a}^h - (\mathbf{b}^h)^\top) \mathbf{b}^h (\mathbf{b}^h)^\top \mathbf{s}^h; \mathbb{R}^{\mathcal{X}_m} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{X}_m} \| \\
& = \| (\mathbf{s}^h)^\top \mathbf{b}^h \mathbf{a}^h \mathbf{s}^h - \mathbb{I}_{\mathcal{X}_m}; \mathbb{R}^{\mathcal{X}_m} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{X}_m} \| = \| (\mathbf{t}^h)^{-1/2} \mathbf{t}^h - \mathbb{I}_{\mathcal{X}_m}; \mathbb{R}^{\mathcal{X}_m} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{X}_m} \| \\
& = \max_{p=m, \dots, m+\mathcal{X}_m-1} |(1 + t_p^h)^{1/2} - 1| \leq \frac{1}{2} \max_{p=m, \dots, m+\mathcal{X}_m-1} |t_p^h| = \frac{1}{2} \varepsilon_m^h. \quad (4.37)
\end{aligned}$$

Формула (4.36) показывает, что $\mathbf{b}^h$ – ортогональная матрица, а (4.37) устанавливает близость матриц $\mathbf{b}^h$ и $(\mathbf{a}^h)^{-1}$. Теперь благодаря анизотропному весовому неравенству Корна (3.10) превращение оценки (4.35) в искомое соотношение (4.31) не составляет труда. Теорема доказана.

Отметим, что ввиду соотношений (4.18) норма $\|\mathbf{W}_{(m)}^h; \Omega(h)\|$ глобального асимптотического приближения (4.10) имеет порядок $h^{-1/2}$, т.е. полученная в теореме 4.1 оценка (4.31) в самом деле оправдывает асимптотический анзац (2.1) для собственных вектор-функций задачи (1.6)–(1.8) на массивном теле $\Xi(h)$ с тонкой перегородкой $\Omega(h)$ (см. определение (1.3)). Эти вектор-функции $u_{(m)}^h$, в основном, сконцентрированы на тонкой пластине (1.2) и порождают ее поперечные колебания. Для компонент полей смещений и вектора деформаций (1.4) имеем

$$\begin{aligned}
\|u_{(m)3}^h; L_2(\Omega(h))\| &= O(h^{-3/2}), \quad \|u_{(m)i}^h; L_2(\Omega(h))\| = O(h^{-1/2}), \quad i = 1, 2, \\
\|\varepsilon(u_{(m)}^h); L_2(\Omega(h))\| &= O(h^{-1/2}).
\end{aligned}$$

Таким образом, вытекающая из формул (4.31) и (3.10), (3.11), (3.8) оценка

$$\|u_{(m)}^h; L_2(\Xi)\| + \|\varepsilon(u_{(m)}^h); L_2(\Xi)\| \leq C_m |\ln h| \quad (4.38)$$

упругих полей на массивном теле Ξ имеет вполне определенный смысл. В п. 7.1 будет пояснено, что установленные оценки оказываются асимптотически точными.

Приведем упрощенные асимптотические представления для полей смещений, деформаций и напряжений, которые выводятся из теоремы 4.1 путем “вычищения” асимптотики – удаления частей анзацев, имеющих L_2 -нормы более высокого или того же порядка малости, что и мажоранта в (4.31). Обращаем внимание, что появление срезающих функций и последнего члена $U_{(p)}^1$ в асимптотической конструкции (4.10) вызвано исключительно техническими надобностями: гладким продолжением с перегородки на тело, упрощением преобразований при обработке невязок и пр.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. В обозначениях из теоремы 4.1 для упругих полей на перегородке верны асимптотические формулы

$$\begin{aligned}
& \left\| u_{(m)3}^h - h^{-2} \sum_{k=m}^{m+\mathcal{X}_m-1} b_k^h w_{(m)3}; L_2(\Omega(h)) \right\| \leq C_m h^{-1} |\ln h|, \\
& \left\| u_{(m)i}^h - h^{-1} \sum_{k=m}^{m+\mathcal{X}_m-1} b_k^h \left(w_{(m)i} - \frac{z}{h} \frac{\partial w_{(m)3}}{\partial y_i} \right); L_2(\Omega(h)) \right\| \leq C_m |\ln h|, \quad i = 1, 2, \\
& \left\| \varepsilon(u_{(m)}^h) - h^{-1} \sum_{k=m}^{m+\mathcal{X}_m-1} (\mathcal{Y} - \mathcal{D}(0, 0, \partial_\zeta) \mathcal{X}) \mathbf{D}(\nabla_y) w_{(m)}; L_2(\Omega(h)) \right\| \leq C_m |\ln h|.
\end{aligned}$$

Упругие поля на массивном теле подчинены неравенству (4.38).

4.3. Вторая серия собственных чисел (среднечастотный диапазон спектра). Объединим последовательности (2.33) и (2.37) в одну последовательность (1.13) и выберем в ней собственное число μ_j с кратностью κ_j , т. е.

$$\mu_{j-1} < \mu_j = \dots = \mu_{j+\kappa_j-1} < \mu_{j+\kappa_j}. \quad (4.39)$$

Для того чтобы применить лемму 4.1, построим κ_j приближенных решений абстрактного уравнения (4.2). В соответствии со связью (4.3) спектральных параметров положим $t^h = \mu_j^{-1}$. Кроме того, в случае $\mu_p^\omega = \mu_j$ аналогично формулам (2.28) и (4.10) определим вектор-функцию

$$V_{(p)}^h = \|W_{(p)}^h; \mathcal{H}^h\|^{-1} W_{(p)}^h, \quad (4.40)$$

где

$$W_{(p)}^h(x) = h^{-1} X_h(z) U_{(p)}^{-1}(\eta, z) + X_h(z) U_{(p)}^0(\eta, z), \quad (4.41)$$

а $U_{(p)}^{-1}$ и $U_{(p)}^0$ образованы согласно формулам (2.29) и (2.31) по собственной вектор-функции $w_{(p)}''$ предельной задачи (2.30), (2.32). Если $\mu_q^\Xi = \mu_j$, то в формуле (4.40) для $V_{(q)}^h$ положим

$$W_{(q)}^h(x) = \mathfrak{r}_h^\Xi(x) v_{(q)}(x), \quad (4.42)$$

где $v_{(q)}$ – собственная вектор-функция предельной задачи (2.35), бесконечно дифференцируемая в окрестности контура $\gamma \subset \partial\Xi$, а $\mathfrak{r}_h^\Xi$ – срезающая функция, равная единице на теле Ξ вне $(d\sqrt{h})$ -окрестности $\mathcal{V}_{d\sqrt{h}}$ контура, но равная нулю на объединении перегородки $\Omega(h)$ и более узкой окрестности $\mathcal{V}_{dh}$. Кроме того, используя обозначения из (3.3), положим

$$\mathfrak{r}_h^\Xi(x) = 1 - \chi^{1/2} \left(\frac{\ln(d^{-1}r)}{\ln h} \right), \quad x \in \mathcal{V}_d \setminus \Omega(h). \quad (4.43)$$

Как и в п. 4.2, очередной шаг в процедуре оправдания асимптотики – оценка величин δ_p^h и δ_q^h , возникающих в формуле (4.5). Неравенство

$$\delta_p^h \leq c_j h^{1/2} |\ln h| \quad (4.44)$$

выводится при помощи в значительной степени упрощенных выкладок из п. 4.2, которые здесь не воспроизводятся (подробности см., например, в статьях [14], [23] и книге [1, § 7.3]). Приведем окончательные формулы, из которых как раз и вытекает неравенство (4.44):

$$|a(W_{(p)}^h, W_{(l)}^h; \Xi(h)) - h^{-1} \mu_q^\omega \delta_{p,l}| \leq C_j |\ln h|, \quad \|W_{(q)}^h; \mathcal{H}^h\| \geq c_j h^{-1/2}, \quad c_j > 0, \quad (4.45)$$

$$\delta_p^h = \sup |\langle T^h V_{(p)}^h - t_p^h V_{(p)}^h, v^h \rangle_h| \leq c_j \|W_{(q)}^h; \mathcal{H}^h\|^{-1} (\mu_p^\omega)^{-1} |\ln h| \leq C_j h^{1/2} |\ln h|. \quad (4.46)$$

Здесь $W_{(p)}^h$ и $W_{(l)}^h$ – глобальные асимптотические приближения, найденные по (совпадающим в случае $p = l$) собственным вектор-функциям $w_{(p)}'$ и $w_{(l)}'$ задачи (2.30), (2.32) с собственным числом μ_j^ω . Отметим, что различие в показателях $1/2$ и $-3/2$ степеней малого параметра h в мажорантах из (4.46) и (4.26) вызваны формулой $t_p^h = (\mu_p^\omega)^{-1}$ в первом случае и формулой $t_m^h = h^{-2} \lambda_m^{-1}$ во втором. Подчеркнем, что носители вектор-функций (4.41) и (4.42) не пересекаются.

Остается проверить аналоги соотношений (4.17), (4.18) и (4.11), (4.26) для выражений (4.42), порожденных двумя (может быть, совпадающими) собственными вектор-функциями $v_{(q)}$ и $v_{(k)}$ задачи (2.35), подчиненными условиям ортогональности и нормировки (2.38). Поскольку по определению срезки (см., в частности, представление (4.43)) справедливо неравенство

$$|\nabla_x \mathfrak{r}_h^\Xi(x)| \leq cr^{-1} |\ln h|^{-1} \quad (4.47)$$

и $|\nabla_x \mathfrak{r}_h^\Xi| \neq 0$ только на множестве $(\mathcal{V}_{d\sqrt{h}} \setminus \mathcal{V}_{dh}) \cap \Xi$, находим, что

$$|a(W_{(q)}^h, W_{(k)}^h; \Xi(h)) - a(v_{(q)}, v_{(k)}; \Xi)| \leq \frac{c_j}{|\ln h|^2} \int_{dh}^{d\sqrt{h}} \frac{1}{r^2} r dr \leq \frac{c_j}{2} \frac{1}{|\ln h|}. \quad (4.48)$$

В результате, обращаясь к обобщенной постановке задачи (2.35), т.е. интегральному тождеству

$$(A\mathcal{D}(\nabla_x)v_{(q)}, \mathcal{D}(\nabla_x)v^h)_\Xi = \mu_q^\Xi(v_{(q)}, v^h)_\Xi, \quad v^h \in \dot{H}^1(\Xi; \Gamma_D)^3, \quad (4.49)$$

видим, что благодаря нормировке (2.38) вычитаемое под знаком модуля в левой части (4.48) равно $\mu_q^\Xi \delta_{q,k}$. Следовательно,

$$|a(W_{(q)}^h, W_{(k)}^h; \Xi(h)) - \mu_q^\Xi \delta_{q,k}| \leq C_j |\ln h|^{-1}, \quad (4.50)$$

$$\|W_{(q)}^h; \mathcal{H}^h\| = (\mu_q^\Xi)^{1/2} + O(|\ln h|^{-1}), \quad \|W_{(q)}^h; \mathcal{H}^h\| \geq c_j > 0. \quad (4.51)$$

Далее, повторив преобразования (4.11), получим формулу

$$\begin{aligned} \delta_q^h &= \sup |\langle T^h V_{(q)}^h - t_q^h V_{(q)}^h, v^h \rangle_h| \\ &= \|W_{(q)}^h; \mathcal{H}^h\|^{-1} (\mu_q^\Xi)^{-1} \sup |(A\mathcal{D}(\nabla_x)v_{(q)}, \mathcal{D}(\nabla_x)(\mathfrak{r}_h^\Xi v^h))_\Xi - \mu_q^\Xi(v_{(q)}, \mathfrak{r}_h^\Xi v^h)_\Xi \\ &\quad + (A[\mathcal{D}(\nabla_x), \mathfrak{r}_h^\Xi]v_{(q)}, \mathcal{D}(\nabla_x)v^h)_\Xi - (A\mathcal{D}(\nabla_x)v_{(q)}, [\mathcal{D}(\nabla_x), \mathfrak{r}_h^\Xi]v^h)_\Xi|, \end{aligned} \quad (4.52)$$

где, как обычно, супремум вычисляется по всем $v^h \in \mathcal{H}^h$, для которых $\|v^h; \mathcal{H}^h\| = 1$. Кроме того, $[\mathcal{D}(\nabla_x), \mathfrak{r}_h^\Xi]$ – коммутатор матричного дифференциального оператора со срезкой $\mathfrak{r}_h^\Xi$, т.е. матрица-функция, модули элементов которой удовлетворяют неравенству (4.47). В силу интегрального тождества (4.49) первые два скалярных произведения в правой части (4.52) взаимно уничтожаются. Оценим два других скалярных произведения I_3^h и I_4^h . Учитывая расположение носителей производных срезающей функции $\mathfrak{r}_h^\Xi$, аналогично формуле (4.48) находим, что

$$|I_3^h| \leq c_q |\ln h|^{-1} \|r^{-1}; L_2(\mathcal{V}_{d\sqrt{h}} \setminus \mathcal{V}_{dh})\| \|\mathcal{D}(\nabla_x)v^h; L_2(\Xi)\| \leq C_q |\ln h|^{-1/2}.$$

Кроме того, учитывая включение $v_{(q)} \in C^\infty(\bar{\Xi} \cap \mathcal{V}_d)^3$ и вариант (3.1) неравенства Харди, выводим оценку

$$\begin{aligned} |I_4^h| &\leq c_q (\text{mes}_3(\mathcal{V}_{d\sqrt{h}} \setminus \mathcal{V}_{dh}))^{1/2} |\ln h| \|r^{-1}(1 + |\ln r|)^{-1} v^h; L_2(\mathcal{V}_{d\sqrt{h}} \setminus \mathcal{V}_{dh})\| \\ &\leq C_q h^{1/4} |\ln h|. \end{aligned}$$

Итак,

$$\delta_q^h \leq c_j |\ln h|^{-1/2}. \quad (4.53)$$

Иными словами, по лемме 4.1 нашлось собственное число $\tau_{N^h(q)}^h$ оператора T^h , удовлетворяющее неравенству

$$|\tau_{N^h(q)}^h - \mu_j^{-1}| \leq c_j |\ln h|^{-1/2}.$$

В итоге соответствующее собственное число $\Lambda_{N^h(q)}^h = (\tau_{N^h(q)}^h)^{-1}$ попадает в $(C_j |\ln h|^{-1/2})$ -окрестность точки $\mu_q^\Xi = \mu_j$. Если кратность κ_j^ω собственного числа $\mu_q^\Xi = \mu_j$ задачи (2.30), (2.32) на ω положительна, то оценка (4.46)

устанавливает существование (другого) собственного числа $\Lambda_{N^h(p)}^h$ в более узкой $(c_j h |\ln h|^{1/2})$ -окрестности точки $\mu_p^\omega = \mu_j$. При учете соотношений (4.45) и (4.50), (4.51) по стандартной схеме (ср. текст перед формулировкой теоремы 4.1) проверяется, что в малой окрестности общего собственного числа μ_j предельных задач (2.30), (2.32) и (2.35) имеется не менее $\kappa_j = \kappa_j^\omega + \kappa_j^\Xi$ собственных чисел исходной задачи (1.6)–(1.8). Если μ_j не является собственным числом задачи (2.35) на теле Ξ и $\kappa_j^\Xi = 0$, то размер окрестности составляет $O(h^{1/2} |\ln h|)$, но в противном случае – только $O(|\ln h|^{-1/2})$ (по доказанному).

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть μ_j – удовлетворяющий условию (4.39) член объединения (1.13) последовательностей (2.33) и (2.37) собственных чисел предельных задач (2.30), (2.32) и (2.35). Тогда в последовательности (1.12) найдутся члены $\Lambda_{N^h(j)}^h, \dots, \Lambda_{N^h(j)+\kappa_j-1}^h$, подчиненные неравенству (1.23). Кроме того, в $(c_j h^{1/2} |\ln h|)$ -окрестности точки $\mu_j = \mu_p^\omega$ существуют не менее $\kappa_j^\omega \leq \kappa_j$ собственных чисел исходной задачи (1.6)–(1.8); здесь κ_j^ω – кратность собственного числа $\mu_p^\omega = \mu_j$ предельной задачи (2.35) на теле Ξ .

Поскольку порядковые номера собственных чисел, обнаруженных в теореме 4.2, не зафиксированы и, более того, $N^h(j) \rightarrow +\infty$ при $h \rightarrow +0$ в силу теоремы 4.1 и асимптотической формулы (1.22), получить асимптотику собственных вектор-функций $u_{(N^h(j))}^h, \dots, u_{(N^h(j)+\kappa_j-1)}^h$ не удастся. Причины значительного ухудшения оценки асимптотического остатка в представлении собственного числа $\Lambda_{N^h(q)}^h = \mu_q^\Xi + \dots$ выясняются в п. 6.3 при изучении явления пограничного слоя, а способы улучшения оценок намечены в п. 7.1.

§ 5. Скалярная задача

5.1. Понижение размерности на перегородке. Для того чтобы вывести предельную задачу (1.15), примем стандартные (см., например, [1, § 1.2 и § 7.1]) асимптотические анзацы (2.27) для собственного числа и (2.28) для соответствующей собственной функции (разумеется, в последнем $U^{-1}(y) = w(y)$ – скаляр). Подставим эти анзацы в уравнение (1.9) на перегородке $\Omega(h)$ и краевые условия (1.10) на ее поверхностях $\Sigma^\pm(h)$. Собирая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра h , получаем следующие одномерные задачи Неймана на отрезке $\Upsilon_1(y)$ с параметром $y = (y_1, y_2) \ni \omega$:

$$-\partial_\zeta^2 U^0(y, \zeta) = 0, \quad \zeta \in \Upsilon_1(y), \quad \pm \partial_\zeta U^0(y, \pm H_\pm(y)) = 0, \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} -\partial_\zeta^2 U^1(y, \zeta) &= \Delta_y w(y) + \mu^\omega w(y), \quad \zeta \in \Upsilon_1(y), \\ \pm \partial_\zeta U^1(y, \pm H_\pm(y)) &= (\nabla_y H_\pm(y))^\top \nabla_y w(y). \end{aligned} \quad (5.2)$$

В соответствии с формулами (5.1) можно положить $U^0 = 0$. Условием разрешимости задачи (5.2) служит равенство

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Upsilon_1(y)} (\Delta_y w(y) + \mu^\omega w(y)) dy + \sum_{\pm} (\nabla_y H_\pm(y))^\top \nabla_y w(y) \\ &= H(y) \Delta_y w(y) + H(y) \mu^\omega w(y) + (\nabla_y H(y))^\top \nabla_y w(y) \\ &= \nabla_y^\top H(y) \nabla_y w(y) + \mu^\omega H(y) w(y), \end{aligned}$$

которое превращается в дифференциальное уравнение на области $\omega \in \mathbb{R}^2$. Итак, поставив на границе $\partial\omega$ условия Дирихле, приходим к задаче (1.15) с последовательностью собственных чисел (2.33), первое из которых, как известно, простое.

Еще одна предельная задача (1.14) получается удалением перегородки из сочленения. Ее собственные числа образуют последовательность (2.37), а первое из них – также простое.

5.2. Сходимость. Для вывода результата понадобятся неравенства

$$\Lambda_m^h \leq c_m, \quad h \in (0, h_m], \quad m \in \mathbb{N}, \quad (5.3)$$

которые будут проверены в следующем пункте; здесь c_m и h_m – некоторые положительные постоянные. Пусть $u_{(m)}^h$ – собственная функции задачи (1.9)–(1.11), отвечающая ее собственному числу Λ_m^h и подчиненная условиям ортогональности и нормировки

$$(u_{(m)}^h, u_{(n)}^h)_{\Xi(h)} = \delta_{m,n}, \quad m, n \in \mathbb{N}. \quad (5.4)$$

При учете неравенства Харди (3.1) и неравенства Фридрихса

$$\|u_{(m)}^h; L_2(\Xi)\| \leq c_{\Xi} \|\nabla_x u_{(m)}^h; L_2(\Xi)\|, \quad u^h \in \dot{H}^1(\Xi; \Gamma_D),$$

аналогично выкладке (3.5) получаем соотношения

$$\|u_{(m)}^h; H^1(\Xi)\|^2 \leq c \|\nabla_x u_{(m)}^h; L_2(\Xi)\|^2 \leq c \Lambda_m^h, \quad (5.5)$$

$$\|\nabla_x (\mathfrak{x}_h^\alpha u_{(m)}^h); L_2(\Omega_h^\alpha \setminus \Omega_h)\| \leq c_{\Xi} \|\nabla_x u_{(m)}^h; L_2(\Xi)\|, \quad u^h \in \dot{H}^1(\Xi; \Gamma_D), \quad (5.6)$$

где $\mathfrak{x}_h^\alpha$ – срезающая функция (3.3), а Ω_h^α – расширенная пластина (3.4). Таким образом, для функций $u_{(m)}^h$ и $u_{(m)}^{h\alpha} = \mathfrak{x}_h^\alpha u_{(m)}^h$ справедливы формулы

$$\begin{aligned} \|u_{(m)}^h; L_2(\Omega_h)\|^2 + \|\nabla_x u_{(m)}^h; L_2(\Omega_h)\|^2 &\leq \|\varrho_{h\alpha}^{-1} u_{(m)}^{h\alpha}; L_2(\Omega_h^\alpha)\|^2 \\ &+ \|\nabla_x u_{(m)}^{h\alpha}; L_2(\Omega_h^\alpha)\|^2 \leq c \|\nabla_x u_{(m)}^h; L_2(\Xi)\|^2 = c \Lambda_m^h \|u_{(m)}^h; L_2(\Xi)\|^2 = c \Lambda_m^h. \end{aligned}$$

При этом, помимо соотношения (5.6), был учтен еще один вариант неравенства Харди

$$\|\varrho_{h\alpha}^{-1} u_{(m)}^{h\alpha}; L_2(\Omega_h^\alpha)\| \leq c_\omega \|\nabla_x u_{(m)}^{h\alpha}; L_2(\Omega_h^\alpha)\|^2, \quad u^{h\alpha} \in \dot{H}^1(\Omega_h^\alpha; \Sigma_h^{\alpha 0}),$$

с весовым множителем $\varrho_{h\alpha}(y) = h + \text{dist}(y, \partial\omega_h^\alpha)$, фигурирующим и в весовом неравенстве Корна (3.6), (3.7) (см., например, [1, п. 1.2.3]). Положив

$$w_{(m)}^h(y) = X_h(y) h^{1/2} \bar{u}_{(m)}^h(y), \quad \bar{u}_{(m)}^h(y) = h^{-1} H(y)^{-1} \int_{-hH_-(y)}^{hH_+(y)} u_{(m)}^h(y, z) dy, \quad (5.7)$$

повторяем преобразования (3.19) и (3.25) (без последних шагов) и приходим к оценке

$$\|w_{(m)}^h; L_2(\omega)\|^2 + \|w_{(m)}^h; V_{1-\alpha}^1(\omega)\|^2 \leq c \|\nabla_x u_{(m)}^h; L_2(\Xi(h))\|^2 = c \Lambda_m^h, \quad (5.8)$$

в которой $V_\beta^1(\omega)$ – пространство Кондратьева с нормой (3.20).

Благодаря оценкам (5.6), (5.5), (5.8) и лемме 3.1 имеют место сходимости

$$\begin{aligned} \Lambda_m^{h_p} &\rightarrow \mu_m^0, \\ v_{(m)}^{h_p} = u_{(m)}^{h_p}|_{\Xi} &\rightarrow v_{(m)}^0 \quad \text{слабо в } H^1(\Xi) \text{ и сильно в } L_2(\Xi), \\ w_{(m)}^{h_p} &\rightarrow w_{(m)}^0 \quad \text{слабо в } V_{1-\alpha}^1(\omega) \text{ и сильно в } L_2(\omega). \end{aligned} \quad (5.9)$$

В списке (3.28) несложно найти прототипы следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \|(1 - X_h^2)^{1/2} u_{(m)}^h; L_2(\Omega_h)\|^2 &\leq ch^{2\alpha} \|\varrho_{h\alpha}^{-1} u_{(m)}^h; L_2(\Omega_h)\|^2 \\ &\leq ch^{2\alpha} \|\nabla_x u_{(m)}^h; L_2(\Xi_h)\|^2 = ch^{2\alpha} \Lambda_m^h, \\ \|X_h u_{(m)}^h; L_2(\Omega(h))\|^2 - \|H^{1/2} w_{(m)}^h; L_2(\omega)\|^2 \\ &= \|X_h u_{(m)}^h; L_2(\Omega(h))\|^2 - \|X_h \bar{u}_{(m)}^h; L_2(\Omega(h))\|^2 \\ &= \|X_h (u_{(m)}^h - \bar{u}_{(m)}^h); L_2(\Omega(h))\|^2 \leq ch^2 \|X_h \partial_z u_{(m)}^h; L_2(\Xi)\|^2 \leq ch^2 \Lambda_m^h. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Они доказываются по прежней схеме. Далее понадобится еще одно неравенство

$$\|X_h u_{(m)}^h(\cdot, \pm h H_{\pm}(\cdot)) - \bar{u}_{(m)}^h; L_2(\omega)\|^2 \leq ch \|X_h \partial_z u_{(m)}^h; L_2(\Omega(h))\|^2 \leq ch \Lambda_m^h, \quad (5.11)$$

проверка которого имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} &\int_{\omega} X_h(y)^2 |u_{(m)}^h(y, \pm h H_{\pm}(y)) - \bar{u}_{(m)}^h(y)|^2 dy \\ &= \frac{1}{h^2} \int_{\omega} \left(\frac{X_h(y)}{H(y)} \right)^2 \left| \int_{-hH_-(y)}^{hH_+(y)} (u_{(m)}^h(y, \pm h H_{\pm}(y)) - u_{(m)}^h(y, z)) dz \right|^2 dy \\ &\leq \frac{c}{h^2} \int_{\omega} \left(\int_{-hH_-(y)}^{hH_+(y)} \left| \frac{\partial u_{(m)}^h}{\partial z}(y, z) \right| dz dz \right)^2 dy \\ &\leq ch \int_{\Omega_h} |\nabla_x u_{(m)}^h(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Итак, согласно оценкам (5.10) имеем

$$\left| \|u_{(m)}^h; L_2(\Xi(h))\|^2 - \|v_{(m)}^h; L_2(\Xi)\|^2 - \|H^{1/2} w_{(m)}^h; L_2(\omega)\|^2 \right| \leq c_m h^{2\alpha},$$

а значит, в силу нормировки (5.4) и указанных в (5.9) сильных сходимостей справедливо равенство

$$\|v_{(m)}^0; L_2(\Xi)\|^2 + \|H^{1/2} w_{(m)}^0; L_2(\omega)\|^2 = 1.$$

В формулу Грина

$$\Lambda_m^h(u_{(m)}^h, v^h)_{\Xi(h)} + (u_{(m)}^h, \Delta_x v^h)_{\Xi(h)} = (u_{(m)}^h, \partial_n v^h)_{\partial \Xi(h)}, \quad v^h \in \dot{H}^1(\Xi(h); \Gamma_D), \quad (5.12)$$

обслуживающую задачу (1.9)–(1.11), подставим пробную функцию

$$v^h(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{при } x \in \Xi, \\ h^{-1/2} \psi(y) & \text{при } x \in \Omega(h). \end{cases} \quad (5.13)$$

Здесь $\varphi \in C_c^\infty(\bar{\Xi} \setminus (\bar{\Gamma_D} \cup \gamma))$ и $\psi \in C_c^\infty(\omega)$ зафиксированы произвольно, но при $h \in (0, h_{\psi, \varphi})$ и достаточно малом $h_{\psi, \varphi} > 0$ (т.е. при таком, что $X_h \psi = \psi$ и $\varphi(x) = 0$ на $\partial \Xi \cap \Omega'_h$, причем верхняя грань $h_{\psi, \varphi} > 0$ зависит от пробной функции (5.13)) функция (5.13) оказывается гладкой на сочленении $\Xi(h)$,

обращаясь в нуль в зоне присоединения перегородки к телу. Для таких h тождество (5.12) принимает вид

$$0 = \Lambda_m^h(u_{(m)}^h, \varphi)_\Xi + (u_{(m)}^h, \Delta_x \varphi)_\Xi - (u_{(m)}^h, \partial_n \varphi)_{\partial \Xi} + h^{-1/2} \left(\Lambda_m^h(u_{(m)}^h, \psi)_{\Omega(h)} + (u_{(m)}^h, \Delta_y \psi)_{\Omega(h)} + \sum_{\pm} \int_{\omega} u_{(m)}^h(y, \pm h H(y)) \nabla_y H_{\pm}(y)^{\top} \nabla_y \psi(y) dy \right). \quad (5.14)$$

При вычислении последних интегралов учтены формула (2.8) для нормали и выражение (4.21) для элемента площади поверхностей пластины Ω_h .

Пусть сначала $\psi = 0$. Переходя к пределу при $h = h_p \rightarrow +0$ в согласии с первой и третьей сходимостями (5.9), получаем равенство

$$0 = \mu_m^0(v_{(m)}^0, \varphi)_\Xi + (v_{(m)}^0, \Delta_x \varphi)_\Xi - (v_{(m)}^0, \partial_n \varphi)_{\partial \Xi},$$

а затем, после дополнительного интегрирования по частям, интегральное тождество

$$(\nabla_x v_{(m)}^h, \nabla_x \varphi)_\Xi = \mu_m^0(v_{(m)}^0, \varphi)_\Xi, \quad \varphi \in \dot{H}^1(\Xi; \Gamma_D). \quad (5.15)$$

Пространство пробных функций удалось расширить потому, что линейное множество $C_c^\infty(\bar{\Xi} \setminus (\bar{\Gamma}_D \cup \gamma))$ плотно в пространстве Соболева $\dot{H}^1(\Xi; \Gamma_D)$ (следы на одномерном подмногообразии $\gamma \subset \partial \Xi$ функций из $H^1(\Xi)$ не определены корректно). В итоге получаем, что пара $\{\mu_m^0, v_{(m)}^0\}$ удовлетворяет задаче (1.14), причем $v_{(m)}^0 \in C^\infty(\bar{\Xi})$ согласно результатам из [20] (см. также [6], [25] и др.).

Пусть теперь $\varphi = 0$. Поскольку $X_h \psi = \psi$ при малом h , благодаря определениям (5.7) получаем

$$h^{-1/2}(u_{(m)}^h, \psi)_{\Omega(h)} = (H w_{(m)}^h, \psi)_\omega, \quad h^{-1/2}(u_{(m)}^h, \Delta_y \psi)_{\Omega(h)} = (w_{(m)}^h, H \Delta_y \psi)_\omega.$$

Кроме того, в последних интегралах из (5.14) след $u_{(m)}^h(y, \pm h H_{\pm}(y))$ функции $u_{(m)}^h$ можно заменить ее средним $\bar{u}_{(m)}^h(y)$ – согласно оценке (5.11) совершаемая ошибка оказывается бесконечно малой при $h \rightarrow +0$. В итоге предельный переход, основанный на первой паре сходимостей (5.9), и очевидное соотношение $H \Delta_y \psi + (\nabla_y H)^{\top} \nabla_y \psi = \nabla_y^{\top} H \nabla_y \psi$ приводят к равенству

$$-(w_{(m)}^0, \nabla_y^{\top} H \nabla_y \psi)_\omega = \mu_m^0(H w_{(m)}^0, \psi)_\omega,$$

а затем, опять-таки после интегрирования по частям, и к интегральному тождеству

$$(H \nabla_y w_{(m)}^0, \nabla_y \psi)_\omega = \mu_m^0(H w_{(m)}^0, \psi)_\omega, \quad (5.16)$$

в котором пробные функции ψ можно брать из пространства Кондратьева $V_{1-\alpha}^1(\omega)$. Из интегрального тождества (5.16) вытекает, что функция $w_{(m)}^0$ попадает в пространство $H_{\text{loc}}^2(\omega)$ и удовлетворяет уравнению

$$-\nabla_y^{\top} H(y) \nabla_y w_{(m)}^0(y) = \mu_m^0 H(y) w_{(m)}^0(y), \quad y \in \omega. \quad (5.17)$$

Лемма 3.2, относящаяся к системе уравнений деформации пластины, остается верной и для скалярного уравнения (5.17) (см. пояснения в замечании 3.2, в котором группы функций (3.49) и (3.50) содержат по одному элементу $\mathbf{y}$ и 1 соответственно). В результате обнаруживаем, что функция $w_{(m)}^0$ попадает в пространство $H^2(\omega) \cap \dot{H}^1(\omega)$, а пара $\{\mu_m^0, w_{(m)}^0\}$ удовлетворяет задаче (1.15).

Наконец, благодаря локальным оценкам решений эллиптических краевых задач в областях с гладкими границами (см. [20], [24], [25] и др.) получаем, что $w_{(m)}^0 \in C^\infty(\bar{\Xi})$.

В силу соотношений (5.10) и указанных формулами (5.9) сильных сходимостей в пространствах Лебега пределы $v_{(m)}^0 \in \dot{H}^1(\Xi; \Gamma_D)$ и $w_{(m)}^0 \in \dot{H}^1(\omega)$ подчинены нормировке

$$\|v_{(m)}^0; \dot{H}^1(\Xi; \Gamma_D)\|^2 + \|w_{(m)}^0; \dot{H}^1(\omega)\|^2 = 1.$$

Таким образом, число μ_m^0 оказывается собственным хотя бы для одной из предельных задач (1.14) и (1.15). Сформулируем утверждение, доказательство которого будет закончено в следующем пункте (необходимо, кроме того, убедиться в справедливости неравенства (5.1) и проверить, что предел μ_m^0 совпадает с элементом μ_m последовательности (1.13)).

ТЕОРЕМА 5.1. *При любом $m \in \mathbb{N}$ элемент Λ_m^h последовательности (1.12) собственных чисел задачи (1.9)–(1.11) стремится при $h \rightarrow +\infty$ к соответствующему члену μ_m последовательности (1.13), составленной при учете общих кратностей из собственных чисел предельной задачи (1.14) в трехмерной области Ξ и предельной задачи (1.15) в двумерной области ω .*

5.3. Оценка асимптотических остатков. Пусть μ_j – κ_j -кратный член (объединенной) последовательности (1.13), т.е. выполнено соотношение (4.39), и, кроме того, κ_p^Ξ и κ_q^ω – кратности собственных чисел $\mu_p^\Xi = \mu_j$ и $\mu_q^\omega = \mu_j$ задач (1.14) и (1.15) соответственно; $\kappa_j = \kappa_p^\Xi + \kappa_q^\omega$. Соответствующие собственные функции $v_p, \dots, v_{p+\mu_p^\Xi-1} \in H^1(\Omega; \Gamma_D) \cap C^\infty(\bar{\Xi} \setminus \partial\Gamma_D)$ и $w_q, \dots, w_{q+\mu_q^\omega-1} \in C^\infty(\bar{\omega})$ подчиним следующим условиям ортогональности и нормировки, вытекающим из интегральных тождеств (5.15) и (5.16):

$$(v_p, v_k)_\Xi = \delta_{p,k}, \quad (Hw_q, w_l)_\omega = \delta_{q,l}. \quad (5.18)$$

Интегральное тождество [6]

$$(\nabla_x u^h, \nabla_x v^h)_{\Xi(h)} = \Lambda^h(u^h, v^h)_{\Xi(h)}, \quad v^h \in \dot{H}^1(\Xi(h); \Gamma_D), \quad (5.19)$$

обслуживающее краевую задачу (1.9)–(1.11), перепишем как абстрактное уравнение (4.2) с новым спектральным параметром (4.3). При этом оператор T^h задан равенством (4.1), в котором $\mathcal{H}^h$ – пространство $\dot{H}^1(\Xi(h); \Gamma_D)$ со скалярным произведением

$$\langle u^h, v^h \rangle_h = (\nabla_x u^h, \nabla_x v^h)_{\Xi(h)}. \quad (5.20)$$

Для того чтобы воспользоваться леммой 4.1, определим приближенные решения уравнения (5.19):

$$t^h = \mu_j^{-1}, \quad V_m^h(x) = \|W_m^h; \mathcal{H}^h\|^{-1} W_m^h(x), \quad m = 0, \dots, \kappa_j - 1; \quad (5.21)$$

здесь

$$W_m^h(x) = \begin{cases} \mathbf{r}_h^\Xi(x) v_{p+m}(x), & m = 0, \dots, \kappa_p^\Xi, \\ h^{-1} X_h(x) w_{q+m}, & m = \kappa_p^\Xi, \dots, \kappa_j - 1, \end{cases} \quad (5.22)$$

а срезающие функции были введены в формулах (3.17) и (4.43).

Нетрудно увидеть схожесть определений (5.21), (5.22) и (4.40)–(4.42). Более того, все последующие рассуждения и выкладки (последние со значительными упрощениями), необходимые для обоснования асимптотики, повторяют материал из пп. 4.2, 4.3 соответственно. Тем не менее, все-таки нужны изменения,

так как аргументация несколько отличается от аргументации из § 4. Поэтому укажем аналоги ключевых соотношений и сформулируем окончательный результат, указав откуда он берется.

Функции из списка (5.22) распадаются на две группы: с носителями в теле $\bar{\Xi}$ и на перегородке $\bar{\Omega}(\bar{h})$. Как и в п. 4.3, эти группы можно рассматривать независимо. В согласии с условиями ортогональности и нормировки (5.18) аналоги соотношений (4.16), (4.50) и (4.45) для первой и второй группы имеют вид

$$\begin{aligned} |\langle W_m^h, W_k^h \rangle_h - \mu_p^\Xi \delta_{m,k}| &\leq c_j |\ln h|^{-1}, & m, k = 0, \dots, \kappa_p^\Xi - 1, \\ |\langle W_n^h, W_l^h \rangle_h - h^{-1} \mu_q^\omega \delta_{n,l}| &\leq c_j |\ln h|, & n, l = \kappa_p^\Xi, \dots, \kappa_j - 1. \end{aligned}$$

Кроме того, величины δ_m^h из формулы (4.5) в лемме 4.1 оцениваются следующим образом:

$$\delta_m^h \leq \begin{cases} C_j |\ln h|^{-1/2}, & m = 0, \dots, \kappa_p^\Xi - 1, \\ c_j h^{1/2} |\ln h|, & m = \kappa_p^\Xi, \dots, \kappa_j - 1. \end{cases} \quad (5.23)$$

Выкладки, обеспечивающие оценки (5.23), воспроизводятся на основе вычислений, сопутствовавших соотношениям (4.52), (4.53) и (4.11), (4.26), (4.46). При этом, в частности, проверяется использованная в п. 5.2 оценка (5.3).

Теперь при помощи первого утверждения леммы 4.1 получаем собственные числа Λ_k^h задачи (1.9)–(1.11) (или (5.19) в вариационной формулировке), подчиненные неравенствам

$$|\Lambda_k^h - \mu_j| \leq C_j |\ln h|^{-1/2}. \quad (5.24)$$

Наконец, их количество κ_j в некоторой окрестности точки μ_j и номера $k = j, \dots, j + \kappa_j - 1$ находятся при помощи рассуждений, приведенных в конце п. 4.2 (см. доказательство теоремы 4.1). Сформулируем установленный результат.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть μ_j – удовлетворяющий условию (4.39) член объединения (1.13) последовательностей (2.33) и (2.37) собственных чисел задач (1.14) и (1.15), причем μ_p^Ξ и μ_q^ω – кратности этого собственного числа в упомянутых предельных задачах. Найдутся такие положительные величины $h_0^{(j)}$ и c_j , C_j , что при $h \in (0, h_0^{(j)})$ собственные числа $\Lambda_j^h, \dots, \Lambda_{j+\kappa_j-1}^h$ сингулярно возмущенной задачи (1.9)–(1.11) и только они попадают на интервал $(\mu_j - c_j, \mu_j + c_j)$. Одновременно эти собственные числа удовлетворяют неравенству (5.24), однако для κ_p^ω экземпляров мажоранту в неравенстве можно уменьшить до $C_j h^{1/2} |\ln h|$. Кроме того, существуют ортонормированные столбцы $b_{(m)}^h = (b_{(m)j}^h, \dots, b_{(m)j+\kappa_j-1}^h)^\top \in \mathbb{R}^{\kappa_j}$, $m = j, \dots, j + \kappa_j - 1$, при которых для собственных вектор-функций $u_{(j)}^h, \dots, u_{(j+\kappa_j-1)}^h$ сингулярно возмущенной краевой задачи выполнены требования (5.4) и соотношения

$$\langle u_{(m)}^h - b_{(m)j}^h V_j^h - \dots - b_{(m)j+\kappa_j-1}^h V_{j+\kappa_j-1}^h \rangle_h^{1/2} \leq C_j |\ln h|^{-1/2}, \quad (5.25)$$

причем функции V_m^h определены формулой (5.21), где W_m^h – асимптотические конструкции (5.22), а $\langle \cdot, \cdot \rangle_h$ – скалярное произведение (5.20) в пространстве $\dot{H}^1(\Xi(h); \Gamma_D)$.

Как уже упоминалось в конце п. 4.3, оценки (5.24) и (5.25) нуждаются в исправлении (см. далее пп. 6.2, 7.1). В частности, мажоранте в (5.24) можно придать степенной порядок малости, однако, поскольку основное внимание в статье уделяется упругому сочленению, для которого погрешность в теореме 4.1 удовлетворительна, возможность построения более точных приближений к собственным функциям задачи (1.9)–(1.11) в данной статье не реализуется.

§ 6. Пограничные слои

6.1. Дополнительные геометрические ограничения и пограничный слой в скалярной задаче. Вблизи зоны присоединения перегородки к массивному телу возникает явление пограничного слоя, т. е. для описания поведения решений задач (1.6)–(1.8) и (1.9)–(1.11) приходится использовать “растянутые” координаты. С целью упростить изложение (см. далее замечание 6.1) предположим дополнительно, что вблизи контура γ поверхность $\partial\Xi$ имеет цилиндрическое строение, т. е. внутри некоторой трехмерной окрестности $\mathcal{V}_d$ этого контура справедлива формула

$$\partial\Xi \cap \mathcal{V}_d = (\partial\omega \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{V}_d. \quad (6.1)$$

Иными словами, перегородка $\Omega(h)$ совпадает с пластиной Ω_h (ср. определения (1.2) и (1.3)). Еще одно упрощающее условие состоит в том, что функции $H_{\pm}$ в формуле (1.2) являются постоянными (достаточно, чтобы вблизи контура $\partial\omega$, однако предполагаем, что всюду в ω).

В окрестности контура $\partial\omega$ введем локальные криволинейные координаты τ и ς , где τ – ориентированное расстояние до $\partial\omega$ ($\tau < 0$ внутри ω), а ς – длина дуги на $\partial\omega$. Упомянутые растянутые координаты имеют вид

$$\xi = (\xi_1, \xi_2) = (h^{-1}\tau, h^{-1}\varsigma). \quad (6.2)$$

Отметим, что для переменной ς сохраняем прежний масштаб.

В системе координат (τ, ς, z) оператор Лапласа Δ принимает вид

$$\frac{1}{1 + \tau\kappa(\varsigma)} \frac{\partial}{\partial\tau} (1 + \tau\kappa(\varsigma)) \frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{1}{1 + \tau\kappa(\varsigma)} \frac{\partial}{\partial\varsigma} \frac{1}{1 + \tau\kappa(\varsigma)} \frac{\partial}{\partial\varsigma} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (6.3)$$

где $k(\varsigma)$ – кривизна контура $\partial\omega$ в точке ς . После замены координат $x \mapsto (\xi, \varsigma)$ якобиан $1 + \tau\kappa(\varsigma) = 1 + h\xi_1\kappa(\varsigma)$ мало отличается от единицы, а производные $\partial/\partial\tau$ и $\partial/\partial z$ превращаются в производные $\partial/\partial\xi_1$ и $\partial/\partial\xi_2$, но приобретают большой множитель h^{-1} . Поэтому главной асимптотической частью оператора (6.3) служит двумерный оператор Лапласа с множителем h^{-2} , т. е.

$$\frac{1}{h^2} \Delta_{\xi} = \frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial\xi_2^2} \right). \quad (6.4)$$

Наконец, благодаря введенным предположениям о границе $\partial\Xi$ замена $x \mapsto (\xi, s)$ и последующий формальный переход к $h = 0$ превращает область Ξ в множество

$$\{(\xi, \varsigma): \xi \in \Theta, \varsigma \in \gamma\}, \quad (6.5)$$

где Θ – объединение полуплоскости $\mathbb{R}_+^2$ и полуполосы $\Pi = (-\infty, +0] \times (-H_-, H_+)$ (рис. 2, а). Кроме того, производная ∂_n оказывается равной $-h^{-1}\partial/\partial\xi_1$ на границе полуплоскости и $\pm h^{-1}\partial/\partial\xi_2$ на боковых сторонах полуполосы. Иными словами, пограничный слой в скалярной задаче (1.9)–(1.11) описывается при

Рис. 2. Области для построения пограничных слоев в однородном (a) и контрастном (b) сочленениях

помощи решений задачи Неймана

$$-\Delta_{\xi} v(\xi) = f(\xi), \quad \xi \in \Theta, \quad \partial_{n(\xi)} v(\xi) = 0, \quad \xi \in \partial\Theta \setminus \{\mathcal{P}^{\pm}\}, \quad (6.6)$$

где $\mathcal{P}^{\pm} = (0, \pm H_{\pm})$ – угловые точки.

В следующем пункте будут востребованы два решения однородной задачи (6.6), а именно постоянное $\mathfrak{W}_0(\xi) = 1$, а также решение $\mathfrak{W}_1(\xi)$, растущее в выходах области Θ на бесконечность и подчиненное требованиям

$$\begin{aligned} \mathfrak{W}_1(\xi) &= -\frac{1}{H}\xi_1 + O(e^{\pi\xi_1/H}), \quad \xi_1 \rightarrow -\infty, \quad \xi \in \Pi, \\ \mathfrak{W}_1(\xi) &= \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{\rho} + \mathfrak{B}_H + O(\rho^{-1}), \quad \rho = |\xi| \rightarrow \infty, \quad \xi \in \mathbb{R}_+^2. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Последнее решение, а также постоянное слагаемое $\mathfrak{B}_H$ в его асимптотике могут быть найдены при помощи подходящего конформного преобразования, однако явные формулы далее не понадобятся. Отметим, что коэффициенты при растущих членах в правых частях (6.7) связаны условием равенства нулю суммарного потока, т. е. интегралов по сечениям выходов области Θ на бесконечность

$$\{\xi \in \mathbb{R}_+^2 : \rho = R\}, \quad \{\xi \in \Pi : \xi_1 = -R\}. \quad (6.8)$$

При введенных геометрических ограничениях аналогичная задача в области Θ возникает и при исследовании явления пограничного слоя в упругом теле с перегородкой. Ее обсуждаем далее, в п. 6.3.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Если нарушены условия цилиндрического строения перегородки $\Omega(h)$, но ось $z = x_3$ параллельна всем касательным плоскостям к границе $\partial\Xi$ в точках контура γ , то в результате перехода к растянутым переменным (6.2) и к значению $h = 0$ малого параметра возникают прежние множества (6.5) и предельная задача (6.6). Вместе с тем приведенная процедура требует предварительного спрямления границ в окрестности зоны присоединения перегородки к массивному телу. Это обстоятельство усложняет структуру оператора (6.3), сохраняя его главную асимптотическую часть (6.4), но искажая младшие члены разложения, которые в настоящей статье не востребованы. Если же какие-то касательные плоскости не параллельны оси x_3 , то в качестве предельной области $\Theta(\varsigma)$ возникает сочленение “скошенной” полуполосы и полуплоскости, изображенное на рис. 2, b, причем угол наклона зависит от переменной ς . Вместе с тем, однородная задача Неймана (6.6) по-прежнему имеет постоянное решение $\mathfrak{W}_0$ и неограниченное решение $\mathfrak{W}_1(\xi, \varsigma)$ с асимптотикой (6.7), но, разумеется, новой постоянной $\mathfrak{B}_H(\varsigma)$. Таким образом, все последующие рассмотрения, касающиеся основных поправок типа пограничного слоя, сохраняют силу и при произвольной границе $\partial\Xi$, а дополнительные геометрические ограничения введены исключительно для упрощения изложения.

6.2. Асимптотические анзацы в скалярной задаче. Согласуем анзацы, обслуживающие массивное тело Ξ и перегородку Ω_h , следующим образом:

$$u(h, x) = v^0(x) + \dots, \quad (6.9)$$

$$u(h, x) = h^{-1/2}U^{-1}(y) + \dots. \quad (6.10)$$

По сравнению с прежним анзацем (2.28) теперь нормы $\|\nabla_x v^0; L_2(\Xi)\|$ и $\|\nabla_x(h^{-1/2}U^{-1}; L_2(\Omega_h))\|$ слагаемых из правых частей (6.9) и (6.10) имеют единичный порядок относительно малого параметра (множитель $h^{-1/2}$ при U^{-1} учитывает малую толщину $O(h)$ перегородки).

Предположим, что число $\mu_j = \mu_q^\omega$ является собственным для второй предельной задачи (1.14), но не для первой предельной задачи (1.15). Кроме того, для сокращения формул считаем, что μ_q^ω – простое собственное число. В этом случае U^{-1} – собственная функция $w_{(q)}$ второй задачи, но $v^0 = 0$. Применим метод сращиваемых асимптотических разложений (см., например, [36]) и сравним *внешние* разложения (6.9) и (6.10), справедливые соответственно на теле Ξ и перегородке Ω_h , но на удалении от зоны их сочленения, с *внутренним* разложением, приемлемым в непосредственной близости от зоны сочленения. При этом уточним разложения младшими асимптотическими членами

$$u(h, x) = h^{1/2}v^{1/2}(x) + \dots, \quad (6.11)$$

$$u(h, x) = h^{-1/2}U^{-1}(y) + h^{1/2}U^0(y) + \dots. \quad (6.12)$$

Поскольку в силу краевого условия Дирихле в задаче (1.15) около границы $\partial\omega$ и в предположении о гладкости поправочного члена U^0 выполнены представления

$$U^{-1}(y) = a_{-1}(\varsigma)\tau + O(\tau^2), \quad U^0(y) = a_0(\varsigma) + O(|\tau|),$$

где $a_{-1} = \partial_\tau w_{(q)}|_{\tau=0}$ и $a_0 = U^0|_{\tau=0}$ – функции из класса $C^\infty(\partial\omega)$, имеем

$$h^{-1/2}U^{-1}(y) + h^{1/2}U^0(y) = h^{1/2}(a_{-1}(\varsigma)\xi_1 + a_0(\varsigma)) + \dots. \quad (6.13)$$

Теперь введем упомянутое выше внутреннее разложение

$$u(h, x) = h^{1/2}\mathfrak{v}^{1/2}(\xi, \varsigma) + \dots \quad (6.14)$$

и в соответствии с первой формулой (6.7) положим

$$\mathfrak{v}^{1/2}(\xi, \varsigma) = -Ha_{-1}(\varsigma)\mathfrak{W}_1(\xi) + a_0(\varsigma)\mathfrak{W}_0. \quad (6.15)$$

При этом соотношение

$$h^{1/2}\mathfrak{v}^{1/2}(\xi, \varsigma) = h^{1/2}\left(Ha_{-1}(\varsigma)\frac{\xi_1}{H} + a_0(\varsigma)\right) + \dots = h^{-1/2}a_{-1}(\varsigma)\tau + h^{1/2}a_0(\varsigma) + \dots$$

согласовано с соотношением (6.13) для внешнего разложения (6.12) на перегородке.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. В этом параграфе применяется метод сращиваемых асимптотических разложений (см. [36], [37] и др.), в рамках которого именно внутреннее разложение (6.14), использующее растянутые координаты (6.2), служит для описания быстрой изменяемости решения в зоне присоединения перегородки $\Omega(h)$ к массивному телу Ξ . Главная составляющая этого разложения

растет на бесконечности, и ее вид (6.15) определяется сравнением поведения при $\xi_1 \rightarrow -\infty$ и $\tau \rightarrow -0$ функций $h^{1/2}\mathbf{v}^{1/2}(\xi, \varsigma)$ и $h^{-1/2}U^{-1}(y) + h^{1/2}U^0(y)$. В методе составных асимптотических разложений (см. [35], [38] и др.) те же эффекты описываются при помощи затухающих решений неоднородной задачи (6.6), интерпретируемых как составляющие *пограничного слоя*. В [38, гл. 2] установлена равносильность методов и указаны способы пересчета одного разложения в другое. Далее, несколько вольно, называем внутреннее разложение пограничным слоем.

Учитывая вторую формулу из (6.7), выводим следующее представление функции (6.15) в полуплоскости $\mathbb{R}_-^2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{1/2}(\xi, \varsigma) &= -Ha_{-1}(\varsigma) \left(\frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{\rho} + \mathfrak{B}_H \right) + a_0(\varsigma) + \dots \\ &= -Ha_{-1}(\varsigma) \left(\frac{1}{\pi} \ln \frac{h}{r} + \mathbf{B}_H \right) + a_0(\varsigma) + \dots; \end{aligned} \quad (6.16)$$

здесь $r = r(x)$ – расстояние от точки $x \in \Xi$ до контура γ . Сравнивая формулы (6.16) и (6.11), видим, что функция $v^{1/2}$ должна быть решением следующей задачи с асимптотическим условием на контуре $\gamma = \partial\omega$:

$$\begin{aligned} -\Delta_x v^{1/2}(x) &= \mu_q^\omega v^{1/2}(x), \quad x \in \Xi, \quad v^{1/2}(x) = 0, \quad x \in \Gamma_D, \\ \partial_n v^{1/2}(x) &= 0, \quad x \in \Xi \setminus (\Gamma_D \cup \gamma), \\ v^{1/2}(x) &= -\frac{H}{\pi} a_{-1}(\varsigma) \ln \frac{1}{r} + O(1), \quad r \rightarrow +0. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Эта задача отвечает распределению δ -функции Дирака вдоль контура γ с плотностью $Ha_{-1}(\varsigma)$ (см., например, [39]–[41]).

Поскольку число μ_q^ω не является собственным для задачи (1.14), согласно общим результатам из [42], [33] (см. также [34, гл. 10]) поставленная задача (6.17) имеет решение, гладкое всюду в Ξ , кроме контуров $\partial\Gamma_D$ и γ , на которых соответственно происходит смена типа краевого условия и назначены асимптотические условия. Это решение допускает представление

$$v^{1/2}(x) = -\frac{H}{\pi} a_{-1}(\varsigma) \ln \frac{1}{r} + c_{-1}(\varsigma) + O(r(1 + |\ln r|)), \quad r \rightarrow +0, \quad (6.18)$$

где $c_{-1}(\varsigma) = HK(a_{-1}; \varsigma)$ – гладкая функция на $\gamma = \partial\omega$, вычисленная по плотности $a_{-1}(\varsigma)$ при помощи некоторого интегрального (псевдодифференциального) оператора K на контуре (подробности см. в [33], [39], [41], [42] и др.).

Сравнивая представления (6.16) и (6.18), видим, что

$$c_{-1}(\varsigma) = -H \left(\frac{1}{\pi} \ln h + \mathfrak{B}_H \right) a_{-1}(\varsigma) + a_0(\varsigma),$$

т.е. благодаря первой формуле (6.7) получаем следующее разложение функции (6.15) в полуполосе Π :

$$\begin{aligned} h^{1/2}\mathbf{v}^{1/2}(\xi, \varsigma) &= h^{1/2}a_{-1}(\varsigma)\xi_1 + h^{1/2} \left(H \left(\frac{1}{\pi} \ln h + \mathfrak{B}_H \right) a_{-1}(\varsigma) + HK(a_{-1}; \varsigma) \right) \\ &\quad + O(e^{-\pi\xi_1/H}) \\ &= h^{-1/2}a_{-1}(\varsigma)\tau + h^{1/2} \left(H \left(\frac{1}{\pi} \ln h + \mathfrak{B}_H \right) a_{-1}(\varsigma) + HK(a_{-1}; \varsigma) \right) \\ &\quad + O(e^{-\pi\tau/(hH)}). \end{aligned}$$

Учитывая соотношение (6.13), уточняя анзац (2.27) для собственного числа задачи (1.9)–(1.11)

$$\Lambda^h = \mu + h\mu' + \dots \quad (6.19)$$

и используя равенства $\mu = \mu_q^\omega$ и $U^{-1} = w_{(q)}$ в формулах (6.12) и (6.19) соответственно, приходим к следующей краевой задаче для поправочных членов $U^0(y; \ln h)$ и $\mu'(\ln h)$:

$$\begin{aligned} -\Delta_y U^0(y; \ln h) - \mu_q^\omega U^0(y; \ln h) &= \mu'(\ln h) w_{(q)}(y), \quad y \in \omega, \\ U^0(y; \ln h) &= H \left(\frac{1}{\pi} \ln h + \mathfrak{B}_H \right) \partial_\tau w_{(q)}(0, \varsigma) + HK(\partial_\tau w_{(q)}(0, \cdot); \varsigma), \quad y \in \partial\omega. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Здесь $\partial_\tau w_{(q)}(\tau, \varsigma)$ – запись функции $\partial_\tau w_{(q)}$ около контура $\partial\omega$ в локальных координатах τ и ς . Поскольку μ_q^ω – простое собственное число, единственное условие разрешимости задачи (6.20), т. е. ортогональность правых частей собственной функции $w_{(q)}$, согласно формуле Грина принимает вид

$$\begin{aligned} \mu'(\ln h) \|w_{(q)}; L_2(\omega)\|^2 &= H \left(\frac{1}{\pi} \ln h + \mathfrak{B}_H \right) \|\partial_\tau w_{(q)}; L_2(\partial\omega)\|^2 \\ &\quad + H(K(\partial_\tau w_{(q)}), \partial_\tau w_{(q)})_{\partial\omega}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Ввиду условий нормировки (5.18) множитель при $\mu'(\ln h)$ в левой части соотношения (6.21) равен H^{-1} . Таким образом, поправочный член в разложении (6.19) вычислен.

Пусть теперь $\mu_j = \mu_p^\Xi$ – собственное число задачи (1.14), опять-таки простое, причем оно не является собственным в задаче (1.15). Соответствующая собственная функция $v_{(p)}$ является гладкой в окрестности контура $\gamma \subset \partial\Xi$, т. е. справедливо представление

$$v_{(p)}(x) = v_{(p)}^\gamma(\varsigma) + O(r), \quad r \rightarrow +0,$$

где $v_{(p)}^\gamma \in C^\infty(\gamma)$ – след функции на упомянутом контуре. Находя внутреннее разложение в виде

$$u(h, x) = \mathfrak{v}^0(\xi, \varsigma) + h\mathfrak{v}^1(\xi, \varsigma) + \dots, \quad (6.22)$$

положим

$$\mathfrak{v}^0(\xi, \varsigma) = v_{(p)}^\gamma(\varsigma) \mathfrak{W}_0.$$

В результате главный член внешнего разложения на перегородке

$$u(h, x) = U^{1/2}(y) + \dots$$

(ср. представления (6.10) и (6.12)) следует искать как решение двумерной задачи

$$-\Delta_y U^{1/2}(y) - \mu_p^\Xi U^{1/2}(y) = 0, \quad y \in \omega, \quad U^{1/2}(y) = v_{(p)}^\gamma(\varsigma), \quad y \in \partial\omega. \quad (6.23)$$

Поскольку число μ_p^Ξ не является собственным, существует единственное решение задачи (6.23), причем около границы $\partial\omega$ верна формула

$$U^{1/2}(y) = v_{(p)}^\gamma(\varsigma) + \tau a_{1/2}(\varsigma) + O(\tau^2) = v_{(p)}^\gamma(\varsigma) + h\xi_1 a_{1/2}(\varsigma) + O(h^2 |\xi_1|^2), \quad (6.24)$$

где $a_{1/2} = \partial_\tau U^{1/2}|_{\tau=0} \in C^\infty(\partial\omega)$. Сравнивая разложения (6.24) и (6.22), при учете первого соотношения (6.7) находим, что

$$\mathfrak{v}^1(\xi, \varsigma) = -Ha_{1/2}(\varsigma)\mathfrak{W}_1(\xi),$$

а значит, внутри тела Ξ имеем

$$\mathfrak{v}^0(\xi, \varsigma) + h\mathfrak{v}^1(\xi, \varsigma) = v_{(p)}^\gamma(\varsigma) - a_{1/2}(\varsigma)H\left(\frac{1}{\pi}\ln\frac{h}{r} + \mathfrak{B}_H\right) + \dots.$$

В результате для поправочных членов удлинённых анзацев (6.19) и

$$v^0(x) + hv^1(x) + \dots,$$

где $\mu = \mu_p^\Xi$ и $v^0 = v_{(p)}$ – (простое) собственное число и соответствующая собственная функция задачи (1.14), получаем краевую задачу с асимптотическим условием на контуре γ

$$\begin{aligned} -\Delta_x v^1(x) - \mu_p^\Xi v^1(x) &= \mu' v_{(p)}(x), & x \in \Xi, \\ v^1(x) &= 0, & x \in \Gamma_D, \quad \partial_n v^1(x) = 0, & x \in \Xi \setminus (\Gamma_D \cup \gamma), \\ v^1(x) &= -\frac{H}{\pi} a_{1/2}(\varsigma) \ln \frac{1}{r} + O(1), & r \rightarrow +0. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Как и в случае задачи (6.17), на основе общих результатов из [42], [33] (см. также [34, гл. 10]) новая задача (6.25) имеет решение, гладкое в $\Xi \setminus (\partial\Gamma_D \cup \gamma)$, однако теперь только при дополнительном условии ортогональности. Согласно упомянутым результатам это условие можно получить предельным переходом $\delta \rightarrow +0$ после подстановки в формулу Грина на области $\Xi^\delta = \{x \in \Xi: r > \delta\}$ решения v^1 и собственной функции $v_{(p)}$. Имеем

$$\begin{aligned} \mu'(v_{(p)}, v_{(p)})_\Xi &= -\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Xi^\delta} v_{(p)}(x) (\Delta_x v^1(x) + \mu_p^\Xi v^1(x)) dx \\ &= \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\partial\Xi^\delta \setminus \partial\Xi} (v_{(p)}(x) \partial_r v^1(x) - v^1(x) \partial_r v_{(p)}(x)) ds_x \\ &= \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_\gamma \delta \int_0^\pi v_{(p)}^\gamma(\varsigma) \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{H}{\pi} a_{1/2}(\varsigma) \ln \frac{1}{r} \right) d\varphi d\varsigma \\ &= H \int_{\partial\omega} v_{(p)}^\gamma(\varsigma) a_{1/2}(\varsigma) d\varsigma = \int_{\partial\omega} U^{1/2}(y) \partial_\tau U^{1/2}(y) d\varsigma \\ &= \int_\omega (|\nabla_y U^{1/2}(y)|^2 - \mu_p^\Xi |U^{1/2}(y)|^2) dy. \end{aligned} \quad (6.26)$$

При этом $-\partial_r = \partial_n$ – производная вдоль внешней нормали на поверхности $\partial\Xi^\delta \setminus \partial\Xi$ узкого тороидального выреза, а $\varphi \in (0, \pi)$ – угловая переменная, т. е. r, φ – полярные координаты в плоскостях, перпендикулярных контуру $\gamma = \partial\omega$ на цилиндрической поверхности. Кроме того, в выкладке были учтены краевые условия во вспомогательной краевой задаче (6.23), а также определение коэффициента $a_{1/2} = \partial_\tau U^{1/2}|_{\tau=0}$. Ввиду первого условия нормировки из формулы (5.18) коэффициент при μ' в левой части (6.26) равен единице, а значит, поправка μ' в асимптотическом анзаце (6.19) вычислена.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.3. В настоящем пункте были рассмотрены только частные ситуации: собственное число из объединенной последовательности (1.13) простое. Если μ_j – собственное число только одной из двух предельных задач, (1.14) или (1.15), то алгоритм построения асимптотики меняется незначительно (см., например, описание общей процедуры в книге [38, гл. 11, 12] или статьях [40], [41]). Более того, следуя той же процедуре, можно соорудить полные асимптотические ряды по целым положительным степеням параметра h (с полиномиальной зависимостью коэффициентов от $\ln h$).

Если μ_j – собственное число обеих предельных задач, то благодаря удачному (механически обоснованному) рассогласованию показателей степеней малого параметра в асимптотических анзацах (6.9) и (6.10) (решение одной предельной задачи через пограничный слой вносит возмущение $O(h^{1/2})$ в другую задачу) алгоритм построения асимптотики остается неизменным, однако возникают асимптотические ряды по полуцелым степеням параметра h . Упомянутые ряды и даже найденные в настоящем пункте основные асимптотические поправки не составляют основной предмет исследования в настоящей статье, посвященной исследованию задачи теории упругости, в которой существует лишь одна основная предельная задача (2.18), (2.22), и поэтому на рассмотрении всевозможных случаев мы не останавливаемся.

6.3. Пограничные слои в задаче теории упругости. Пограничный слой для решения векторной задачи (1.6)–(1.8) строится по той же схеме, что и для решения скалярной задачи (1.9)–(1.11). Переход к растянутым координатам (6.2) и удаление из дифференциальных операторов касательной производной ∂_ς приводят к двумерной системе уравнений теории упругости для столбца

$$\mathbf{u} = (u_\tau, u_z, u_\varsigma)^\top,$$

где u_τ , u_z и u_ς – проекции вектора смещений u соответственно на оси τ , z и ς криволинейной системы координат. Эта система

$$\mathcal{D}(\nabla_\xi, 0)^\top \mathbf{A}(\varsigma) \mathcal{D}(\nabla_\xi, 0) \mathbf{u}(\xi, \varsigma) = 0, \quad \xi \in \Theta, \quad (6.27)$$

имеет аналогичный системе (1.6) вид, однако матрица жесткости $\mathbf{A}(\varsigma)$ оказывается зависящей от касательной переменной $\varsigma \in \gamma$, поскольку преобразование $x - x^\sharp \mapsto (\tau, z, \varsigma - \varsigma^\sharp)$ сопровождается поворотом системы координат и соответствующим окаймлением матрицы A некоторой ортогональной (6×6) -матрицей $\vartheta(\varsigma^\sharp)$, зависящей, разумеется, от положения точки $x^\sharp \in \gamma$ с координатой $\varsigma^\sharp$. Иными словами, $\mathbf{A}(\varsigma) = \vartheta(\varsigma)^\top A \vartheta(\varsigma)$ (подробности см., например, в [1, гл. 2]).

Матрица $\mathbf{A}$ остается неизменной в случае *изотропного* материала², для которого

$$A = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix}, \quad (6.28)$$

где $\lambda \geq 0$ и $\mu > 0$ – постоянные Ламе (не следует путать со спектральными параметрами в задачах (2.18) и (2.30)). В изотропном случае двумерная

²Также для трансверсально-изотропного материала.

задача теории упругости расщепляется на две независимые: плоскую для вектора $(u_\tau, u_z)^\top$ и антиплоскую для скаляра u_ς , но в общем анизотропном случае такого расщепления не происходит. Вместе с тем, зависимость матрицы $\mathbf{A}$ от дополнительного параметра ς и размер 3×3 системы (6.27) не привносят каких-либо существенных осложнений.

Краевые условия на границе $\partial\Theta$ сочленения полуполосы Π и полуплоскости $\mathbb{R}_+^2$ (с выколотыми угловыми точками $\mathcal{P}^\pm$) имеют вид

$$\mathcal{D}(n(\xi), 0)^\top \mathbf{A}(\varsigma) \mathcal{D}(\nabla_\xi, 0) \mathbf{u}(\xi, \varsigma) = 0, \quad \xi \in \partial\Theta \setminus \{\mathcal{P}^\pm\}. \quad (6.29)$$

Ближайшая цель – описать всевозможные решения задачи (6.27), (6.29) с полиномиальным поведением в полуполосе и возможным логарифмическим ростом в полуплоскости. Три нужных решения очевидны: жесткие поступательные смещения

$$\mathfrak{W}_{(\tau)}^0(\xi) = \mathbf{e}_\tau = (1, 0, 0)^\top, \quad \mathfrak{W}_{(z)}^0(\xi) = \mathbf{e}_z = (0, 1, 0)^\top, \quad \mathfrak{W}_{(\varsigma)}^j(\xi) = \mathbf{e}_\varsigma = (0, 0, 1)^\top, \quad (6.30)$$

но общие результаты из [21] устанавливают, что таких решений (линейно независимых) в точности семь. С целью найти остальные четыре опишем их возможное поведение на бесконечности.

В полуплоскости $\mathbb{R}_+^2$ потребуются линейно зависящие от логарифма $\ln \rho = \ln |\xi|$ вектор-функции, удовлетворяющие системе уравнений (6.27) в полуплоскости $\mathbb{R}_+^2$ и крайевым условиям (6.29) на ее проколотой границе:

$$\Phi_{(\beta)}(\xi, \varsigma) = \mathbf{C}_\beta(\varsigma) \ln \rho + \Phi_{(\beta)}(\varphi, \varsigma), \quad \beta = \tau, z, \varsigma. \quad (6.31)$$

При этом $\mathbf{C}_\beta(\varsigma)$ – некоторая (3×3) -матрица, определяемая по матрице жесткости $\mathbf{A}(\varsigma)$. Поля (6.31) отвечают приложению сосредоточенной в точке $\xi = 0$ единичной силы, действующей в направлении орта $\mathbf{e}_\beta$ оси β . В изотропном случае вектор-функции (6.31) с индексами $\beta = \tau$ и $\beta = z$ называются решениями Фламана и Буссинеска (явные формулы для них можно найти, например, в книге [43, § 36]) и, кроме того,

$$\Phi_{(\varsigma)}(\xi) = \frac{1}{\pi} \mathbf{e}_\varsigma \ln \frac{1}{\rho}$$

(ср. сингулярное решение, введенное в (6.7)). Матрицу-функцию, составленную из столбцов (6.31), следует интерпретировать как ядро Пуассона в задаче Неймана для системы дифференциальных уравнений теории упругости в полуплоскости.

В полуполосе Π поля смещений, появляющиеся в асимптотике на бесконечности, имеют вид

$$\Psi_{(\beta)}^j(\xi, \varsigma) = \sum_{k=-2}^1 \mathfrak{U}^k \left(\xi_2, \varsigma, \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right) \mathfrak{w}_{(\beta)}^j(\xi_1, \varsigma), \quad j = 0, \dots, 2\mathbf{t}_\beta - 1, \quad \beta = \tau, z, \varsigma. \quad (6.32)$$

Поясним формулу (6.32). Во-первых, $\mathbf{t}_\tau = \mathbf{t}_\varsigma = 1$ и $\mathbf{t}_z = 2$ (ср. оснащение $\{\vec{\mathbf{t}}, -\vec{\mathbf{t}}\}$ системы (2.18), описанное перед формулой (2.22)). Во-вторых, матрицы $\mathfrak{U}^k$ дифференциальных операторов с порядками

$$\begin{pmatrix} q+1 & q+2 & q+1 \\ q+1 & q+2 & q+1 \\ q+1 & q+2 & q+1 \end{pmatrix}$$

получены из матричных дифференциальных операторов $\mathcal{U}^k$ в представлениях (2.26) при помощи перехода к криволинейным координатам, замораживания коэффициентов в точке $x^\varsigma \in \gamma$ с координатой ς и удаления касательных производных ∂_ς . Наконец, $\mathfrak{w}_{(\beta)}^j(\xi_1)$ – векторные полиномы степени j , уже упоминавшиеся в замечании 3.2 (см. формулы (3.50) и (3.49)), причем они определяются равенствами (6.30) и

$$\begin{aligned} \mathfrak{w}_{(\beta)}^{\mathbf{t}_\beta}(\xi_1, \varsigma) &= (\mathbf{a}_{(\beta\tau)}^{\mathbf{t}_\beta}(\varsigma)\xi_1, \mathbf{a}_{(\beta z)}^{\mathbf{t}_\beta}(\varsigma)\xi_1^2, \mathbf{a}_{(\beta\varsigma)}^{\mathbf{t}_\beta}(\varsigma)\xi_1)^T, \quad \beta = \tau, z, \varsigma, \\ \mathfrak{w}_{(z)}^1(\xi_1) &= \xi_1 \mathbf{e}_z, \quad \mathfrak{w}_{(z)}^3(\xi_1, \varsigma) = (\mathbf{a}_{(z\tau)}^3(\varsigma)\xi_1^2, \mathbf{a}_{(z\varsigma)}^3(\varsigma)\xi_1^3, \mathbf{a}_{(z\varsigma)}^3(\varsigma)\xi_2)^T, \end{aligned} \quad (6.33)$$

а коэффициенты $\mathbf{a}_{(\dots)}^{\dots}$ зависят от переменной ς и матрицы $\mathbf{A}(\varsigma)$. Восемь полиномов (6.30) и (6.33) служат полным набором решений матричного оператора

$$\mathbf{D}\left(-\frac{\partial}{\partial \xi_1}, 0, 0\right)^T \mathbf{A}(\varsigma) \mathbf{D}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, 0, 0\right),$$

полученного из оператора $\mathbf{L}(y, \nabla_y)$ системы (2.18) переходом к криволинейным координатам τ, ς , замораживанием коэффициентов и удалением касательной производной ∂_ς .

Тот факт, что вектор-функции (6.32) удовлетворяют системе уравнений (6.27) в полуполосе Π и краевым условиям (6.29) на ее боковых сторонах, вытекает из вычислений, проведенных в п. 2.1 (подробности см., например, в [34, гл. 6] и [21]). Механическая интерпретация упругих полей (6.32) такова: $\Psi_{(\beta)}^0$ – жесткие поступательные смещения в направлении осей $\beta = \tau, z, \varsigma$, $\Psi_{(z)}^1$ – поворот вокруг оси ς , $\Psi_{(\beta)}^{2\mathbf{t}_\beta-1}$ – сила в направлении оси β и, наконец, $\Psi_{(z)}^2$ – изгибающий момент (см., например, [43] и [34, гл. 6]).

Теперь можно описать упомянутые решения задачи (6.27), (6.29). Помимо жестких смещений (6.30) имеются четыре решения, снабженные индексами $\beta = \tau, z, \varsigma$, $j = \mathbf{t}_\beta, 2\mathbf{t}_\beta - 1$ и допускающее представления

$$\begin{aligned} \mathfrak{W}_{(\beta)}^j(\xi, \varsigma) &= \Psi_{(\beta)}^j(\xi, \varsigma) + \sum_{\theta=\tau, z, \varsigma} \sum_{k=0}^{\mathbf{t}_\theta-1} \mathfrak{B}_{(\beta, \theta)}^{j, k}(\varsigma) \Psi_{(\theta)}^{\mathbf{t}_\theta}(\xi) + O(e^{\delta \xi_1}), \\ \xi_1 &\rightarrow -\infty, \quad \xi \in \Pi, \end{aligned} \quad (6.34)$$

$$\mathfrak{W}_{(\beta)}^j(\xi, \varsigma) = \sum_{\theta=\tau, z, \varsigma} \mathbf{b}_{(\beta, \theta)}^j(\varsigma) \Phi_{(\theta)}(\xi, \varsigma) + O(\rho^{-1}), \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (6.35)$$

Здесь δ – некоторое положительное число, а $\mathfrak{B}_{(\beta, \theta)}^{j, k}(\varsigma)$ и $\mathbf{b}_{(\beta, \theta)}^j(\varsigma)$ – коэффициенты, причем последние можно вычислить сравнением интегралов по сечениям (6.8) выходов на бесконечность, возникающих в формуле Грина для системы (6.27).

Указанные группы решений (6.30) и (6.34), (6.35) аналогичны решениям $\mathfrak{W}_0$ и $\mathfrak{W}_1$ скалярной задачи (6.6); более того, в изотропном случае (6.28) решение, определенное разложениями (6.7), получается умножением функции $\mathfrak{W}_{(z)}^1$ из (6.7) на постоянный столбец $\mathbf{c}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})\mathbf{e}_\varsigma$.

Наметим процедуру определения внутреннего разложения (пограничного слоя) и сращивания его с внешним разложением в массивном теле Ξ . Подставим собственную вектор-функцию w предельной задачи (2.18), (2.22) в асимптотический анзац (2.1) и при учете строения (2.2), (2.11) ее членов получим

следующее разложение около края перемычки:

$$\begin{aligned} & h^{-2}U^{-2}(y) + h^{-1}U^{-1}(y, \zeta) + U^0(y, \zeta) + h^1U^1(y, \zeta) \\ &= \alpha_{(\tau)}^0(\varsigma)\Psi_{(\tau)}^1\left(\frac{\tau}{h}, \frac{z}{h}, \varsigma\right) + \alpha_{(z)}^0(\varsigma)\Psi_{(z)}^2\left(\frac{\tau}{h}, \frac{z}{h}, \varsigma\right) \\ & \quad + \alpha_{(\varsigma)}^0(\varsigma)\Psi_{(\varsigma)}^1\left(\frac{\tau}{h}, \frac{z}{h}, \varsigma\right) + O(h + |\tau|^3). \end{aligned} \quad (6.36)$$

Отметим, что поля $\Psi_{(\beta)}^j$ сформировались в правой части (6.36) именно благодаря описанной ранее связи дифференциальных операторов $\mathfrak{U}^q$ и $\mathcal{U}^q$ из соотношений (6.32) и (2.26) соответственно, а также идентичности представлений (6.32) и (2.1). Отсутствие справа в (6.36) слагаемых $O(h^{-2})$ и $O(h^{-1})$ обусловлено краевыми условиями (2.22), означающими, что $U^{-2}(y) = 0$, $\nabla_y U^{-2}(y) = 0$ и $U^{-1}(y, \zeta) = 0$ при $y \in \partial\omega$.

Сравнивая разложения (6.36) и (6.34), видим, что главным членом внутреннего разложения³ (6.22) служит линейная комбинация

$$\mathfrak{v}^0(\xi, \varsigma) = \alpha_{(\tau)}^0\mathfrak{W}_{(\tau)}^1(\xi, \varsigma) + \alpha_{(z)}^0\mathfrak{W}_{(z)}^2(\xi, \varsigma) + \alpha_{(\varsigma)}^0\mathfrak{W}_{(\varsigma)}^1(\xi, \varsigma)$$

введенных ранее специальных решений задачи (6.27), (6.29). Наконец, учитывая представления (6.35) и соотношения

$$\Phi_{(\beta)}(\xi, \varsigma) = -\mathbf{C}_{\beta}(\varsigma) \ln h + \Phi_{(\beta)}(\tau, z, \varsigma), \quad \beta = \tau, z, \varsigma,$$

обеспеченные определениями (6.31), находим, что главный член внешнего разложения (6.9) на массивном теле Ξ оказывается решением задачи

$$\begin{aligned} & L(\nabla_x)v^0(x) = 0, \quad x \in \Xi, \\ & N(x, \nabla_x)v^0(x) = 0, \quad x \in \partial\Xi \setminus \overline{\Gamma_D}, \quad v^0(x) = 0, \quad x \in \Gamma_D, \end{aligned} \quad (6.37)$$

со следующими асимптотическими условиями на контуре γ :

$$v^0(x) = \sum_{\beta=\tau, z, \varsigma} \alpha_{(\beta)}^0(\varsigma) \sum_{\theta=\tau, z, \varsigma} \mathbf{b}_{(\beta, \theta)}^{\mathbf{t}_{\theta}}(\varsigma) \Phi_{(\theta)}(\xi, \varsigma) + O(1), \quad r \rightarrow +0 \quad (6.38)$$

(ср. скалярную задачу (6.25)).

Существование нужного решения задачи (6.37), (6.38) установлено в работах [42], [33] (см. также монографию [34, гл. 10]), тем не менее, детализация его свойств не проведена, а сколь-нибудь явные формулы для него в конкретных задачах теории упругости неизвестны.

Итак, определен вид главных членов всех трех, двух внешних и одного внутреннего, разложений собственных вектор-функций задачи (1.6)–(1.8). Процедуру построения асимптотики решений задачи (1.6)–(1.8) можно было бы продолжить и, в частности, найти полные асимптотические ряды для собственных чисел и собственных вектор-функций. Вместе с тем, общие алгоритмы не дают какой-либо полезной для прикладных целей информации о собственных модах и частотах колебаний упругого сочленения массивного тела и тонкой перегородки. Конечно же, внутреннее разложение (пограничный слой) позволяет уточнить результат теоремы 4.2 о погрешности аппроксимации собственных чисел во второй серии (2.27), однако это делается в точности так же, как и для скалярной задачи (см. п. 6.2), – обнаружить какие-либо специфические особенности задачи теории упругости автору не удалось.

³Для сокращения формул не делаем необходимую и физически оправданную перенормировку анзаца (2.1) на перегородке $\Omega(h)$ (ср. соотношение (6.10) для решения скалярной задачи).

ЗАМЕЧАНИЕ 6.4. В § 2 система (2.18) была замкнута условиями Дирихле (2.22) без объяснений их происхождения, и только оправдание асимптотики, проведенное в § 3, 4, показало, что этот набор краевых условий правилен. Эти условия можно вывести посредством анализа распределения весовых множителей в анизотропном весовом неравенстве Корна (теорема 3.1), однако наиболее простой путь – построение решений типа пограничного слоя (внутреннего разложения). Как уже отмечалось, отсутствие в правой части (6.36) слагаемых с множителями h^{-2} и h^{-1} вызвано именно соотношениями $w_3(y) = O(\tau^2)$ и $w_i(y) = O(|\tau|)$, $i = 1, 2$, при $\tau \rightarrow -0$. Эти соотношения, влекущие за собой набор условий Дирихле (2.22), оказываются необходимыми. Действительно, если, например, $w_3 \neq 0$ в точке $\varsigma \in \partial\omega$, то во внутреннем разложении обязан появиться член $v^{-2}(\xi, \varsigma) = \mathfrak{W}_{(z)}^0 w_3(0, \varsigma)$, который, в свою очередь, потребует введения члена $h^{-2}v^{-2}(x)$ во внешнее разложение на теле Ξ . Последний должен быть решением однородной задачи (6.37) и удовлетворять асимптотическому условию $v^{-2}(x) = w_3(0, \varsigma) + O(r(1 + |\ln r|))$ на контуре γ , т. е. оставаться ограниченным. Поскольку единственное ограниченное решение задачи (6.37) тривиально, приходится положить $w_3(0, \varsigma) = 0$. Остальные три условия в группе (2.22) выводятся при помощи аналогичных рассуждений.

§ 7. Варианты и обобщения

7.1. О точности оценок. Улучшение асимптотических формул при учете пограничного слоя, построенного в § 6, показывает, что оценки асимптотических остатков, полученные в теореме 4.1, точны. В самом деле, пограничный слой и решение гладкого типа приобретают вид

$$v^0(\xi, \varsigma), \quad v^0(x, \ln h) = v^{00}(x) + v^{01}(x) \ln h, \quad (7.1)$$

а значит, их $\mathcal{H}^h$ -норма имеет порядок $|\ln h|$, как уже указывалось в неравенстве (4.38). Именно такая мажоранта возникла и в оценке (4.31) погрешности приближения собственной вектор-функции. В силу леммы 4.1 о “почти собственных” числах и векторах именно эта погрешность предопределяет степень аккуратности аппроксимации собственного числа, т. е. для уменьшения порядка $O(h^{5/2}|\ln h|)$ мажоранты в правой части неравенства (1.22) (см. также неравенство (4.27)) требуется прежде всего изменить конструкцию (4.10) глобального асимптотического приближения $W_{(p)}^h$, что нельзя сделать без привлечения пограничного слоя, так как норма $\|W_{(p)}^h; \mathcal{H}^h\|$ равна $O(h^{-1/2})$ (см. первую формулу (4.18)), но следующим по порядку оказывается именно вклад слагаемых (7.1).

Оценки погрешностей, приведенные в теоремах 4.2, 5.2 и имеющие мажоранты $O(|\ln h|^{-1/2})$, конечно, не являются точными, но их можно улучшить путем построения пограничного слоя и младших асимптотических членов. Поскольку основная цель статьи – изучение низкочастотного диапазона спектра задачи (1.6)–(1.8) (теорема 4.1), такого уточнения результатов не проводится.

Еще одна упущенная возможность связана с применением метода прямого и обратного сведений [1, гл. 7] (см. также [44], [45] и др.), позволяющего установить явную зависимость множителей C_m , например, в оценках (1.22), (4.31) от собственного числа λ_m и других атрибутов предельного спектра (1.21) (в частности, от относительного расстояния $\lambda_m d_m$ между самим собственным числом

λ_m и соседними λ_{m-1} и $\lambda_{m+\kappa_m-1}$; см. (4.32)). Применение соответствующего аппарата требует вывода весовых оценок решений исходной и предельных задач, значительно усложняя выкладки и тем самым существенно увеличивая объем статьи.

7.2. Сочленения с контрастными жесткостями. Постоянные коэффициенты дифференциального оператора $L(\nabla_x)$ в системе (1.6) уравнений теории упругости соответствуют *однородному*, хотя и *анизотропному* сочленению. Переход к переменным коэффициентам, т. е. неоднородному упругому сочленению, не встречает сколь-нибудь заметных препятствий (ср. [1, гл. 4, 7], [14] и др.). Вместе с тем, переход к упругим сочленениям с *контрастными жесткостями*, для которых матрицу-функцию A следует определить формулой

$$A(h, x) = \begin{cases} A^\Xi(x) & \text{при } x \in \Xi \setminus \Omega'_h, \\ h^{-\alpha} A^\omega(y, \zeta) & \text{при } x \in \Omega'_h, \end{cases} \quad (7.2)$$

в принципе, может вызвать даже изменение предельных задач. Показатель α степени малого *безразмерного* параметра h во второй строке (7.2) характеризует относительную жесткость материала перегородки в сравнении с материалом массивного тела. Помимо случая $\alpha = 0$, отвечающего, например, однородному сочленению, физически осмысленными оказываются также случаи

$$\alpha = 1 \quad \text{и} \quad \alpha = 3. \quad (7.3)$$

В первом из них тот же порядок относительно параметра h , что и жесткость тела, приобретают⁴ *жесткость пластины на растяжение*, а во втором – *жесткость пластины на изгиб*. Изучение других значений показателя вряд ли оправдано в практических приложениях. Обращаем внимание на то, что во второй строке (7.2) фигурирует расширенная пластина Ω'_h , а не сама перегородка $\Omega(h)$. Иными словами, пластина Ω'_h вставлена в мелкий и узкий паз в теле Ξ . Крепление перегородки $\Omega(h)$ к телу Ξ “встык”, с точки зрения инженеров, неразумно.

Формальный асимптотический анализ контрастного упругого сочленения проводится по схеме, изложенной в § 2; в результате появляются прежние предельные системы (2.18) и (2.30) дифференциальных уравнений в области ω . Нововведения нужны только при постановке краевых условий на границе $\partial\omega$. В § 2 условия Дирихле (2.22) и (2.32) были “угаданы”, но строгий их вывод базируется на исследовании эффектов пограничного слоя (см. замечание 6.4).

В силу присутствия в нижней строке (7.2) множителя $h^{-\alpha}$ с показателем (7.3) задача для пограничного слоя распадается на две: задачу в полуполосе $\Pi' = (-\infty, l') \times (-H_-, H_+)$ и задачу в полуплоскости с прямоугольной выемкой $\mathbb{R}_+^2 \setminus \{\xi: \xi_1 \in [0, l'], \xi_2 \in [-H_-, H_+]\}$ (рис. 2, b); здесь $l' > 0$. Кроме того, упомянутые условия сопряжения на поверхности паза для пластины также расщепляются, причем условия Неймана (свободного края) отходят к предельной задаче для более жесткого материала, а условия Дирихле (жесткого защемления) – к предельной задаче для более мягкого материала (в рассматриваемом случае они ставятся соответственно около торца полуполосы и на границе выемки). В результате конструкции пограничного слоя претерпевают изменения

⁴Различия реакции пластины на продольное и поперечное нагружения легко обнаруживаются в асимптотическом анзаце (2.1) с начальными членами (2.2) (см. также, например, обсуждение в [1, § 4.2, 4.4]).

и не обеспечивают появления полных наборов условий Дирихле (2.22) и (2.32) на границе $\partial\omega$. Вместо них должны возникнуть смешанные краевые условия, зависящие от значений (7.3) параметра α . Несмотря на то, что само “предсказание” краевых условий на основе общих асимптотических процедур [38] является несложной алгебраической задачей (но ни в коем случае не сам асимптотический анализ и его обоснование), автор не приводит их для того, чтобы не уменьшить интерес к важной для технических дисциплин, но еще не исследованной задаче об упругих сочленениях с контрастными свойствами.

Для скалярных задач различные типы сочленений с контрастными свойствами рассматривались в [40], [41], [46], а упругое сочленение жесткого стержня и мягкого массивного тела изучено в [47].

7.3. Самосопряженные расширения дифференциальных операторов. Введение множителя $h^{-\alpha}$ в определение матрицы жесткости (7.3) – в значительной степени математический трюк, призванный формализовать асимптотический анализ задачи теории упругости. В практических вопросах никакой связи геометрического параметра h , относительной толщины пластины и некоторого физического параметра r , выражающего относительную жесткость перегородки, быть не может, и даже осмысленное обсуждение в п. 7.2 относительных жесткостей пластины на изгиб $O(hr)$ и растяжение $O(h^3r)$ вряд ли приемлемо для инженеров в полной мере. Вместе с тем, отсутствие априорной связи параметров h и r не мешает проведению асимптотического анализа и выводу оценок погрешностей – необходимо лишь изменить способ формулировки результатов. На помощь приходит техника самосопряженных расширений дифференциальных операторов. В физических дисциплинах эта техника связывается с “потенциалами нулевого радиуса” (см. ключевую работу [48], обзор [49] и, например, монографию [50]) и применяется для описания “дальнего поля” в средах с малыми и редко расположенными дефектами (полостями, инородными включениями, микротрещинами и т. п.). Иными словами, локализованные неоднородности среды заменяются точками, в которых задаются некоторые асимптотические условия, обеспечивающие реализацию соответствующей задачи как самосопряженного оператора в специально выстраиваемом гильбертовом пространстве, и разрешающие сингулярности решений, выводящие их из естественного энергетического класса H^1 . В статьях [51], [52] обнаружена связь моделей, использующих упомянутые потенциалы, с методом сращиваемых асимптотических разложений (см. [37], [36], [38] и др.), а также разработаны процедуры поиска параметров подходящих самосопряженных расширений и вывода асимптотически точных оценок погрешности моделирования.

Вопрос о возможности моделирования сочленений тел с различными предельными размерностями при помощи расширений дифференциальных операторов поднят в публикации [53]. Однако все известные результаты в этом направлении относятся к сочленениям типа $n : 1$ – к телу $\Xi \in \mathbb{R}^n$ присоединяются тонкие n -мерные стержни, стягивающиеся к одномерным отрезкам и порождающие в пределе *гибридную область*. Теория эллиптических краевых задач на гибридных областях типа $n : 1$ разработана в статье [15], а конкретные модели сочленений рассматривались в статьях [40], [41], [47], [46].

Сочленение $\Xi(h)$, введенное формулами (1.3), (1.2), относится к типу $3 : 2$, и какие-либо результаты по корректной постановке эллиптических задач на гибридных областях типа $n : (n - 1)$ при $n \geq 3$ автору неизвестны. Тем более, нет

публикаций по моделированию сочленений указанного типа. Ситуация осложнена тем, что в качестве решений на массивной части Ξ гибридной области приходится брать сингулярные решения задач вида (6.17) с особенностью, порожденной распределением δ -функции Дирака вдоль $(n-1)$ -мерного подмногообразия $\gamma \subset \partial\Xi$. Особенно сложным становится определение свойств гладкости плотности a_{-1} и порожденной ею регулярной части c_{-1} разложения (6.18). Частично ответы на эти вопросы даны в работах [42], [33] (см. также книгу [34, гл. 13]), однако полная теория, позволяющая изучать модели сочленений, до сих пор не построена.

Список литературы

1. С. А. Назаров, *Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки*, Научная книга, Новосибирск, 2002.
2. С. Г. Лехницкий, *Теория упругости анизотропного тела*, 2-е изд., Наука, М., 1977; англ. пер. 1-го изд.: S. G. Lekhnitskii, *Theory of elasticity of an anisotropic elastic body*, Holden-Day, San Francisco, 1963.
3. J. T. Beale, "Scattering frequencies of resonators", *Comm. Pure Appl. Math.*, **26**:4 (1973), 549–563.
4. А. А. Арсеньев, "О существовании резонансных полюсов и резонансов при рассеянии в случае краевых условий II и III рода", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **16**:3 (1976), 718–724; англ. пер.: A. A. Arsen'ev, "The existence of resonance poles and scattering resonances in the case of boundary conditions of the second and third kind", *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, **16**:3 (1976), 171–177.
5. Р. Р. Гадильшин, "О собственных значениях "гантели с тонкой ручкой", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:2 (2005), 45–110; англ. пер.: R. R. Gady'l'shin, "On the eigenvalues of a "dumb-bell with a thin handle"", *Izv. Math.*, **69**:2 (2005), 265–329.
6. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973; англ. пер.: O. A. Ladyzhenskaya, *The boundary value problems of mathematical physics*, Appl. Math. Sci., **49**, Springer-Verlag, New York, 1985.
7. J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris, 1967.
8. Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс, *Неравенства в механике и физике*, Наука, М., 1980; пер. с фр.: G. Duvaut, J.-L. Lions, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris, 1972.
9. В. А. Кондратьев, О. А. Олейник, "Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенства Корна", *УМН*, **43**:5 (1988), 55–98; англ. пер.: V. A. Kondrat'ev, O. A. Oleinik, "Boundary-value problems for the system of elasticity theory in unbounded domains. Korn's inequalities", *Russian Math. Surveys*, **43**:5 (1988), 65–119.
10. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Изд-во ЛГУ, Л., 1980; англ. пер.: M. S. Birman, M. Z. Solomyak, *Spectral theory of self-adjoint operators in Hilbert space*, Math. Appl. (Soviet Ser.), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1987.
11. С. А. Назаров, "Неравенства Корна для упругих сочленений массивных тел, тонких пластин и стержней", *УМН*, **63**:1 (2008), 37–110; англ. пер.: S. A. Nazarov, "Korn inequalities for elastic junctions of massive bodies, thin plates, and rods", *Russian Math. Surveys*, **63**:1 (2008), 35–107.
12. С. А. Назаров, "Неравенства Корна, асимптотически точные для тонких областей", *Вестн. СПбГУ. Сер. матем., мех., астрон.*, 1992, № 8, 19–24; англ.

- пер.: S. A. Nazarov, "The Korn inequalities which are asymptotically sharp for thin domains", *Vestnik St. Petersburg Univ. Math.*, **25**:2 (1992), 18–22.
13. Б. А. Шойхет, "Об асимптотически точных уравнениях тонких плит сложной структуры", *ПММ*, **37**:5 (1973), 913–924; англ. пер.: B. A. Shoikhet, "On asymptotically exact equations of thin plates of complex structure", *J. Appl. Math. Mech.*, **37**:5 (1973), 914–924.
 14. С. А. Назаров, "Асимптотический анализ произвольно анизотропной пластины переменной толщины (пологой оболочки)", *Матем. сб.*, **191**:7 (2000), 129–159; англ. пер.: S. A. Nazarov, "Asymptotic analysis of an arbitrary anisotropic plate of variable thickness (sloping shell)", *Sb. Math.*, **191**:7 (2000), 1075–1106.
 15. С. А. Назаров, "Эллиптические краевые задачи на гибридных областях", *Функц. анализ и его прил.*, **38**:4 (2004), 55–72; англ. пер.: S. A. Nazarov, "Elliptic boundary value problems in hybrid domains", *Funct. Anal. Appl.*, **38**:4 (2004), 283–297.
 16. P. G. Ciarlet, S. Kesavan, "Two-dimensional approximations of three-dimensional eigenvalue problems in plate theory", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **26**:2 (1980), 145–172.
 17. P. G. Ciarlet, P. Destuynder, "A justification of the two-dimensional linear plate model", *J. Mécanique*, **18** (1979), 315–344.
 18. P. G. Ciarlet, *Mathematical elasticity*, v. II: *Theory of plates*, Stud. Math. Appl., **37**, North-Holland, Amsterdam, 1997.
 19. J. Sanchez-Hubert, E. Sanchez-Palencia, *Coques élastiques minces. Propriétés asymptotiques*, Masson, Paris, 1997.
 20. S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, "Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I", *Comm. Pure Appl. Math.*, **12**:4 (1959), 623–727; "II", **17**:1 (1964), 35–92.
 21. С. А. Назаров, "Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов", *УМН*, **54**:5 (1999), 77–142; англ. пер.: S. A. Nazarov, "The polynomial property of self-adjoint elliptic boundary-value problems and an algebraic description of their attributes", *Russian Math. Surveys*, **54**:5 (1999), 947–1014.
 22. С. А. Назаров, "Самосопряженные эллиптические краевые задачи. Полиномиальное свойство и формально положительные операторы", *Проблемы мат. анализа*, **16** (1997), 167–192; англ. пер.: S. A. Nazarov, "Self-adjoint elliptic boundary-value problems. The polynomial property and formally positive operators", *J. Math. Sci. (New York)*, **92**:6 (1998), 4338–4353.
 23. С. А. Назаров, "Об асимптотике спектра задачи теории упругости для тонкой пластины", *Сиб. матем. журн.*, **41**:4 (2000), 895–912; англ. пер.: S. A. Nazarov, "On the asymptotics of the spectrum of a thin plate problem of elasticity", *Siberian Math. J.*, **41**:4 (2000), 744–759.
 24. Л. Хёрмандер, *Линейные дифференциальные операторы с частными производными*, Мир, М., 1965; пер. с англ.: L. Hörmander, *Linear partial differential operators*, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1963.
 25. Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, Мир, М., 1971; пер. с фр.: J.-L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, Paris, 1968.
 26. В. А. Кондратьев, "О гладкости решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка в окрестности ребра", *Дифференц. уравнения*, **6**:10 (1970), 1831–1843.
 27. В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, "Об эллиптичности краевых задач в областях с кусочно гладкой границей", *Тр. симпозиума по мех. сплошных сред и родственным пробл. анализа*, **1**, Мецниереба, Тбилиси, 1973, 171–181.

28. В. А. Кондратьев, “Особенности решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка в окрестности ребра”, *Дифференц. уравнения*, **13**:11 (1977), 2026–2032; англ. пер.: V. A. Kondrat’ev, “Singularities of a solution of Dirichlet’s problem for a second-order elliptic equation in the neighborhood of an edge”, *Differential Equations*, **13**:11 (1977), 1411–1415.
29. В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, “ L_p -оценки решений эллиптических краевых задач в областях с ребрами”, *Тр. ММО*, **37**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1978, 49–93.
30. В. А. Никишкин, “Особенности решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка в окрестности ребра”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, № 2, 51–62; англ. пер.: V. A. Nikishkin, “Singularities of the solution to the Dirichlet problem for a second-order equation in a neighborhood of an edge”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **34**:2 (1979), 53–64.
31. V. G. Maz’ya, J. Rossmann, “Über die Asymptotik der Lösungen elliptischer Randwertaufgaben in der Umgebung von Kanten”, *Math. Nachr.*, **138** (1988), 27–53.
32. С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, “Задача Неймана для самосопряженных эллиптических систем в области с кусочно гладкой границей”, *Тр. ЛМО*, **1** (1990), 174–211.
33. С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, “Эллиптические задачи с условиями излучения на ребрах границы”, *Матем. сб.*, **183**:10 (1992), 13–44; англ. пер.: S. A. Nazarov, B. A. Plamenevskii, “Elliptic problems with radiation conditions on edges of the boundary”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **77**:1 (1994), 149–176.
34. S. A. Nazarov, B. A. Plamenevsky, *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries*, de Gruyter Exp. Math., **13**, de Gruyter, Berlin, 1994.
35. М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, “Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром”, *УМН*, **12**:5 (1957), 3–122.
36. А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*, Наука, М., 1989; англ. пер.: А. М. Il’in, *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*, Transl. Math. Monogr., **102**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
37. М. Ван-Дайк, *Методы возмущений в механике жидкости*, Мир, М., 1967; пер. с англ.: M. van Dyke, *Perturbation methods in fluid mechanics*, Academic Press, New York–London, 1964.
38. V. Maz’ya, S. Nazarov, B. Plamenevskij, *Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains*, v. I, Oper. Theory Adv. Appl., **111**, Birkhäuser, Basel, 2000.
39. В. Г. Мазья, С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, “Асимптотика решений задачи Дирихле в области с вырезанной тонкой трубкой”, *Матем. сб.*, **116(158)**:2(10) (1981), 187–217; англ. пер.: V. G. Maz’ja, S. A. Nazarov, B. A. Plamenevskii, “Asymptotics of solutions of the Dirichlet problem in a domain with a truncated thin tube”, *Math. USSR-Sb.*, **44**:2 (1983), 167–194.
40. С. А. Назаров, “Соединения сингулярно вырождающихся областей различных предельных размерностей. I”, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **18**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1995, 3–78; англ. пер.: S. A. Nazarov, “Junctions of singularly degenerating domains with different limit dimensions I”, *J. Math. Sci.*, **80**:5 (1996), 1989–2034.
41. С. А. Назаров, “Соединения сингулярно вырождающихся областей различных предельных размерностей. II”, *Тр. семин. им. И. Г. Петровского*, **20**, Изд-во МГУ, М., 1997, 155–195; англ. пер.: S. A. Nazarov, “Junctions of singularly degenerating domains with different limit dimensions. II”, *J. Math. Sci.*, **97**:3 (1999), 4085–4108.
42. С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, “Самосопряженные эллиптические задачи с условиями излучения на ребрах границы”, *Алгебра и анализ*, **4**:3 (1992), 196–225; англ. пер.: S. A. Nazarov, B. A. Plamenevskii, “Selfadjoint elliptic problems with

- radiation conditions on the edges of the boundary", *St. Petersburg Math. J.*, **4**:3 (1993), 569–594.
43. С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер, *Теория упругости*, Наука, М., 1979; пер. с англ.: S. P. Timoshenko, J. N. Goodier, *Theory of elasticity*, McGraw-Hill, New York, 1970.
 44. С. А. Назаров, "Равномерные оценки остатков в асимптотических разложениях решений задачи о собственных колебаниях пьезоэлектрической пластины", *Проблемы мат. анализа*, **25** (2003), 99–188; англ. пер.: S. A. Nazarov, "Uniform estimates of remainders in asymptotic expansions of solutions to the problem on eigenoscillations of a piezoelectric plate", *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **114**:5 (2003), 1657–1725.
 45. M. Lobo, S. A. Nazarov, E. Perez, "Eigen-oscillations of contrasting non-homogeneous elastic bodies: asymptotic and uniform estimates for eigenvalues", *IMA J. Appl. Math.*, **70** (2005), 419–458.
 46. С. А. Назаров, "Оценки точности моделирования краевых задач на сочленении областей с различными предельными размерностями", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:6 (2004), 119–156; англ. пер.: S. A. Nazarov, "Estimates for the accuracy of modelling boundary-value problems at the junction of domains with different limit dimensions", *Izv. Math.*, **68**:6 (2004), 1179–1215.
 47. С. А. Назаров, "Асимптотический анализ и моделирование сочленения массивного тела с тонкими стержнями", Тр. сем. им. И. Г. Петровского, **24**, Изд-во Моск. ун-та, М., 2004, 95–214; англ. пер.: S. A. Nazarov, "Asymptotic analysis and modeling of the jointing of a massive body with thin rods", *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **127**:5 (2005), 2192–2262.
 48. Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев, "Замечание об уравнении Шрёдингера с сингулярным потенциалом", *Докл. АН СССР*, **137**:5 (1961), 1011–1014; англ. пер.: F. A. Berezin, L. D. Faddeev, "A remark on Schrödinger's equation with a singular potential", *Soviet Math. Dokl.*, **2** (1961), 372–375.
 49. Б. С. Павлов, "Теория расширений и явнорешаемые модели", *УМН*, **42**:6 (1987), 99–131; англ. пер.: B. S. Pavlov, "The theory of extensions and explicitly-solvable models", *Russian Math. Surveys*, **42**:6 (1987), 127–168.
 50. Ю. Н. Демков, В. Н. Островский, *Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике*, Изд-во ЛГУ, Л., 1975.
 51. С. А. Назаров, "Асимптотические условия в точках, самосопряженные расширения операторов и метод сращиваемых асимптотических разложений", Тр. СПб. МО, **5**, Научная книга, Новосибирск, 1998, 112–183; англ. пер.: S. A. Nazarov, "Asymptotic conditions at a point, selfadjoint extensions of operators, and the method of matched asymptotic expansions", *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **193** (1999), 77–125.
 52. И. В. Камоцкий, С. А. Назаров, "Спектральные задачи в сингулярно возмущенных областях и самосопряженные расширения дифференциальных операторов", Тр. СПб. МО, **6**, Научная книга, Новосибирск, 1998, 151–212; англ. пер.: I. V. Kamotskii, S. A. Nazarov, "Spectral problems in singularly perturbed domains and selfadjoint extensions of differential operators", *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **199** (2000), 127–181.
 53. J. L. Lions, "Some more remarks on boundary value problems and junctions", *Asymptotic methods for elastic structures* (Lisbon, 1993), Walter de Gruyter, Berlin–New York, 1995, 103–118.

С. А. НАЗАРОВ (С. А. НАЗАРОВ)

Санкт-Петербургский государственный университет;

Институт проблем машиноведения РАН,

г. Санкт-Петербург

E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Поступило в редакцию

28.06.2011

12.02.2012