Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Перескоков, Асимптотика спектра и квантовых средних возмущенного резонансного осциллятора вблизи границ спектральных кластеров, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2013, том 77, выпуск 1, 165–210

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7805>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 13:18:59

УДК 517.984+517.958

А. В. Перескоков

Асимптотика спектра и квантовых средних возмущенного резонансного осциллятора вблизи границ спектральных кластеров

Рассматривается задача на собственные значения возмущенного двумерного осциллятора. Предложен метод построения асимптотических решений вблизи границ спектральных кластеров с помощью нового интегрального представления. Изучена задача вычисления средних значений дифференциальных операторов на решениях вблизи границ кластеров.

Библиография: 31 наименование.

Ключевые слова: операторный метод усреднения, когерентное преобразование, ВКБ-приближение, точка поворота, спектральный кластер.

DOI: 10.4213/im7805

§ 1. Введение

Рассмотрим задачу на собственные значения в $L^2(\mathbb{R}^2)$

$$(\mathbf{H}_0 + \varepsilon V(q_1, q_2))\psi = \lambda\psi, \quad (1.1)$$

$$\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1, \quad (1.2)$$

где

$$\mathbf{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_2^2} \right) + \frac{q_1^2 + q_2^2}{2} \quad (1.3)$$

– двумерный осциллятор, $V(q_1, q_2)$ – произвольный многочлен 4-й степени и $\hbar > 0$, $\varepsilon > 0$ – малые параметры, причем

$$\varepsilon \ll \hbar. \quad (1.4)$$

Условие (1.4) возникает при нахождении поправки порядка $\varepsilon\hbar$ в спектральной серии. При его выполнении погрешность квантового метода усреднения, равная $O(\varepsilon^2)$, оказывается малой. Для определенности рассмотрим случай, когда $\varepsilon = \hbar^2$.

Лучевой метод [1] и общая теория комплексного ростка Маслова [2], [3] позволяют строить асимптотические при $\hbar \rightarrow 0$ решения, локализованные вблизи точек, траекторий, торов и иных маломерных инвариантных подмногообразий

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-01-00627-а), Министерства образования и науки РФ (соглашение 14.В37.21.0864) и Программы Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ России” (грант НШ-3439.2010.1).

в фазовом пространстве. Однако указанные методы неприменимы в случае резонанса орбитальных частот [4]. Задача (1.1), (1.2) как раз относится к классу резонансных: обе частоты двумерного осциллятора $\mathbf{H}_0$ равны 1.

Метод построения квазиклассических асимптотик для уравнений с частотными резонансами был разработан в серии работ М. В. Карасева [5]–[7]. Он основан на операторном усреднении возмущения [4], [8], [9], последующем переходе на алгебру симметрий и когерентном преобразовании от исходного представления этой алгебры к ее неприводимому представлению в пространстве функций над лагранжевым подмногообразием в симплектическом листе [5]–[7]. Данный метод был успешно применен при изучении ряда физических моделей [10]–[13].

Особый интерес представляют решения уравнений типа (1.1), отвечающие границам спектральных кластеров вблизи собственных значений невозмущенного уравнения (при $\varepsilon = 0$), где упомянутые лагранжевы подмногообразия почти схлопываются и интегральное представление решения над ними становится невозможным.

Подход к построению асимптотики около границ кластеров с помощью “деформированных” когерентных состояний был намечен в [10], но его обоснование в высших приближениях пока не осуществлено.

В настоящей работе на примере задачи (1.1), (1.2) с возмущающим потенциалом

$$V(q_1, q_2) = q_1^2 q_2^2 + B q_1 q_2, \quad (1.5)$$

где B – вещественный параметр, подробно, с доказательствами изложен общий метод нахождения серий асимптотических собственных значений вблизи верхней и нижней границ спектральных кластеров. Найдено новое интегральное представление для соответствующих асимптотических собственных функций (см. формулу (4.9)). Кроме того, изучена задача вычисления средних значений дифференциальных операторов на решениях (1.1), (1.2) вблизи границ спектральных кластеров. Оказалось, что асимптотика квантовых средних в члене порядка $\hbar$ имеет нетривиальный вид (см. теорему 12.2).

Результаты работы докладывались на международной конференции “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”, посвященной 110-летию И. Г. Петровского [14].

План дальнейшего изложения следующий. В § 2, 3 приведены описание квантового метода усреднения и определение когерентного преобразования в случае алгебры вращений. В § 4 найдено интегральное представление для асимптотических собственных функций, являющихся антиголоморфными многочленами степени l . В § 5–7 рассмотрена многоточечная спектральная задача, построено ее асимптотическое решение, а также вычислена поправка в спектральной серии. В § 8, 9 изучается поведение асимптотических собственных функций, произведено сравнение их асимптотики с ВКБ-приближением. В § 10, 11 приведено доказательство итоговой теоремы. Наконец, в § 12 получены формулы для квантовых средних.

Автор благодарен М. В. Карасеву за привлечение внимания к данной задаче, а также за ценные вопросы и замечания.

§ 2. Квантовое усреднение

Применим к уравнению (1.1) квантовую версию метода усреднения [4], [8], [10]. Исходная идея метода состоит в том, чтобы найти такой обратимый оператор $\mathbf{U}$ и такой оператор $\underline{\mathbf{V}}_0$, что

$$\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{H}_0 + \hbar^2 V)\mathbf{U} = \mathbf{H}_0 + \hbar^2 \underline{\mathbf{V}}_0 + O(\hbar^4), \quad (2.1)$$

$$[\underline{\mathbf{V}}_0, \mathbf{H}_0] = 0. \quad (2.2)$$

Новый возмущающий оператор $\underline{\mathbf{V}}_0$ уже коммутирует со старшей частью $\mathbf{H}_0$. Поэтому решение спектральной задачи для оператора $\mathbf{H}_0 + \hbar^2 V$ сводится к решению такой задачи для оператора $\underline{\mathbf{V}}_0$ на собственном подпространстве оператора $\mathbf{H}_0$. Отметим, что реализовать эту идею удастся лишь при достаточно жестких ограничениях, налагаемых на оператор $\mathbf{H}_0$. А именно, должно быть выполнено условие

$$\exp\left\{\frac{2\pi i}{\hbar}\mathbf{H}_0\right\} = I,$$

где I – единичный оператор.

Определим

$$\underline{\mathbf{V}}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left\{-\frac{i\tau}{\hbar}\mathbf{H}_0\right\} V(q_1, q_2) \exp\left\{\frac{i\tau}{\hbar}\mathbf{H}_0\right\} d\tau, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{V}^\# = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - \tau) \exp\left\{-\frac{i\tau}{\hbar}\mathbf{H}_0\right\} V(q_1, q_2) \exp\left\{\frac{i\tau}{\hbar}\mathbf{H}_0\right\} d\tau, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{U} = \exp\{-i\hbar\mathbf{V}^\#\}.$$

Справедлива следующая

ЛЕММА 2.1 [10]. Операторы (2.3), (2.4) удовлетворяют равенствам (2.1), (2.2).

Отметим, что в [10] указаны также формулы и для следующего (порядка $\hbar^4$) члена разложения в правой части (2.1).

Вычислим $\underline{\mathbf{V}}_0$ в случае двумерного осциллятора (1.3). Поскольку

$$\exp\left\{-\frac{i\tau}{\hbar}\mathbf{H}_0\right\} V(q_1, q_2) \exp\left\{\frac{i\tau}{\hbar}\mathbf{H}_0\right\} = \gamma_{\mathbf{H}_0}^{-\tau} V,$$

где $\gamma_{\mathbf{H}_0}^{-\tau}$ – сдвиг по траекториям системы Гамильтона $\mathbf{H}_0$ на время $-\tau$, получаем оператор

$$\underline{\mathbf{V}}_0 = \underline{V}_0\left(q_1, q_2, -i\hbar\frac{\partial}{\partial q_1}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial q_2}\right), \quad (2.5)$$

символом которого является

$$\underline{V}_0(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(q_1 \cos \tau - p_1 \sin \tau, q_2 \cos \tau - p_2 \sin \tau) d\tau. \quad (2.6)$$

Операторы $q_j, p_j = -i\hbar\partial/\partial q_j$, $j = 1, 2$, в (2.5) упорядочены по Вейлю.

Поскольку выполнено равенство (2.2), оператор $\underline{\mathbf{V}}_0$ может быть представлен в виде

$$\underline{\mathbf{V}}_0 = f(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3), \quad (2.7)$$

где $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3$ – симметризованные по Вейлю швингеровские образующие алгебры вращений [15], удовлетворяющие циклическим коммутационным соотношениям

$$[\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2] = i\hbar\mathbf{S}_3, \quad [\mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3] = i\hbar\mathbf{S}_1, \quad [\mathbf{S}_3, \mathbf{S}_1] = i\hbar\mathbf{S}_2.$$

В представлении Швингера $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3$ реализуются в виде следующих операторов в $L^2(\mathbb{R}^2)$:

$$\mathbf{S}_1 = \frac{1}{2}(q_1q_2 + p_1p_2), \quad \mathbf{S}_2 = \frac{1}{2}(q_1p_2 - q_2p_1), \quad \mathbf{S}_3 = \frac{1}{4}(q_1^2 + p_1^2) - \frac{1}{4}(q_2^2 + p_2^2). \quad (2.8)$$

Чтобы найти символ оператора $f(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3)$, разрешим систему (2.8) относительно $q_j, p_j, j = 1, 2$, и подставим получившиеся выражения в (2.6). В результате получаем, что

$$f(S_1, S_2, S_3) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V \left(\sqrt{2} \sqrt{S_3 + \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}} \cos \tau, \right. \\ \left. \sqrt{2} \sqrt{-S_3 + \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}} \left(\frac{S_1}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}} \cos \tau - \frac{S_2}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}} \sin \tau \right) \right) d\tau.$$

В случае, если $V(q_1, q_2)$ – многочлен 4-й степени, $f(S_1, S_2, S_3)$ является многочленом 2-й степени. В частности, если $V(q_1, q_2)$ имеет вид (1.5), то

$$f(S_1, S_2) = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (4(\cos^2 \tau)(S_1 \cos \tau - S_2 \sin \tau)^2 + 2B(\cos \tau)(S_1 \cos \tau - S_2 \sin \tau)) d\tau \\ = \frac{3}{2}S_1^2 + \frac{1}{2}S_2^2 + BS_1. \quad (2.9)$$

Далее рассмотрим гильбертово подпространство $\mathcal{H}_l \subset L^2(\mathbb{R}^2)$, состоящее из собственных функций $\mathbf{H}_0$, отвечающих собственному значению $\hbar(l+1)$, $l = 0, 1, 2, \dots$. Ортонормированный базис в $\mathcal{H}_l$ образуют функции

$$\chi_k = \frac{1}{\sqrt{\pi\hbar^2 l! (l-k)!}} H_{l-k} \left(\frac{q_1}{\sqrt{\hbar}} \right) H_k \left(\frac{q_2}{\sqrt{\hbar}} \right) \exp \left\{ -\frac{q_1^2 + q_2^2}{\hbar} \right\}, \quad k = 0, \dots, l,$$

где $H_k(z)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, – полиномы Эрмита. Воспользуемся равенствами (2.1), (2.7). В результате на гильбертовом подпространстве $\mathcal{H}_l$ получаем спектральную задачу

$$f(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3)\varphi = \xi\varphi, \quad (2.10)$$

$$\|\varphi\|_{\mathcal{H}_l} = 1, \quad (2.11)$$

к которой сводится исходная задача (1.1), (1.2). Собственные значения (2.10) и (2.11) обозначим $\xi = \xi_{k,l}$, $k = 0, 1, \dots$, и упорядочим их по убыванию. Спектр исходной задачи (1.1), (1.2) имеет тогда для l порядка $\hbar^{-1}$ асимптотику

$$\lambda = \hbar(l+1) + \hbar^2 \xi_{k,l} + O(\hbar^4).$$

Асимптотика соответствующих собственных функций дается формулой

$$\psi = \mathbf{U}\varphi_{k,l} + O(\hbar^3),$$

где $\varphi_{k,l}$ – собственная функция задачи (2.10), (2.11), отвечающая собственному значению $\xi_{k,l}$. Оператор $\mathbf{U}$ имеет вид (2.4).

§ 3. Когерентное преобразование

Чтобы решить задачу (2.10), (2.11) воспользуемся когерентным преобразованием [16], [17]

$$I_l(g) = \frac{l+1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} g(\bar{z})|z\rangle \frac{d\bar{z} dz}{(1+|z|^2)^{l+2}}, \quad (3.1)$$

где $|z\rangle$ – когерентные состояния для алгебры вращений. Оно отображает гильбертово пространство $\mathcal{P}_l$ антиголоморфных многочленов степени не выше l на гильбертово пространство $\mathcal{H}_l$. Скалярное произведение в $\mathcal{P}_l$ задается формулой [17]

$$(g_1, g_2)_{\mathcal{P}_l} = \frac{l+1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} g_1(\bar{z}) \overline{g_2(\bar{z})} \frac{d\bar{z} dz}{(1+|z|^2)^{l+2}}. \quad (3.2)$$

Преобразование I_l унитарное, обратное преобразование $I_l^{-1}: \mathcal{H}_l \rightarrow \mathcal{P}_l$ вычисляется по формуле $I_l^{-1}(\varphi) = (\varphi, |z\rangle)_{\mathcal{H}_l}$. Когерентные состояния $|z\rangle$ определяются равенством

$$|z\rangle = e^{z(\mathbf{S}_1 - i\mathbf{S}_2)/\hbar} |0\rangle,$$

где $|0\rangle$ – вакуумный вектор в гильбертовом пространстве такой, что

$$\mathbf{S}_3|0\rangle = a|0\rangle, \quad (\mathbf{S}_1 + i\mathbf{S}_2)|0\rangle = 0, \quad \| |0\rangle \| = 1.$$

Для алгебры вращений собственное значение имеет вид

$$a = \frac{l\hbar}{2}, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Справедлива следующая

ЛЕММА 3.1. *В представлении Швингера когерентные состояния имеют вид*

$$|z\rangle = \frac{(1+z^2)^{l/2}}{\sqrt{\pi 2^l l! \hbar}} H_l\left(\frac{q_1 + z q_2}{\sqrt{\hbar} \sqrt{1+z^2}}\right) \exp\left\{-\frac{q_1^2 + q_2^2}{2\hbar}\right\}.$$

Будем искать решение задачи (2.10), (2.11) в виде $\varphi_{k,l} = I_l(\Phi_{k,l}(\bar{z}))$. Поскольку в результате когерентного преобразования (3.1) операторы $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3$ преобразуются в дифференциальные операторы 1-го порядка [17]

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= \frac{\hbar}{2} \left(\bar{z}l + (1 - \bar{z}^2) \frac{d}{d\bar{z}} \right), & \dot{S}_2 &= \frac{i\hbar}{2} \left(\bar{z}l - (1 + \bar{z}^2) \frac{d}{d\bar{z}} \right), \\ \dot{S}_3 &= \hbar \left(\frac{l}{2} - \bar{z} \frac{d}{d\bar{z}} \right), \end{aligned} \quad (3.4)$$

получаем следующее уравнение для $\Phi_{k,l}(\bar{z})$:

$$f(\dot{S}_1, \dot{S}_2, \dot{S}_3) \Phi_{k,l}(\bar{z}) = \xi_{k,l} \Phi_{k,l}(\bar{z}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

Здесь операторы $\dot{S}_1, \dot{S}_2, \dot{S}_3$ упорядочены по Вейлю. Собственными числами уравнения (3.5) назовем такие значения параметра $\xi_{k,l}$, при которых это уравнение имеет полиномиальное решение в пространстве $\mathcal{P}_l$. В силу унитарности когерентного преобразования имеем

$$\| \Phi_{k,l} \|_{\mathcal{P}_l} = 1. \quad (3.6)$$

В настоящей работе асимптотическое решение в пространстве $\mathcal{P}_l$ будет построено на примере уравнения (1.1) с возмущающим потенциалом (1.5) в случае, когда параметр имеет вид

$$B = b\sqrt{a(a + \hbar)}.$$

Здесь $b > \sqrt{6}$, a задано формулой (3.3). Отметим, что число $a > 0$ имеет порядок 1, так как далее будут рассматриваться l порядка $\hbar^{-1}$. Для такого потенциала символ $f(S_1, S_2)$ имеет вид (2.9). Аналогично может быть изучен случай, когда $V(q_1, q_2)$ – произвольный многочлен 4-й степени. Однако в этом случае требуются более громоздкие выкладки.

Покажем, как связана точка $\bar{z} = 1$ со спектром оператора. Рассмотрим сужение функции (2.9) на сферу Ω_l :

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = a(a + \hbar), \quad (3.7)$$

которая является симплектическим листом для алгебры вращений. Введем на Ω_l кэлерову структуру с помощью комплексной координаты

$$z = \frac{S_1 + iS_2}{\sqrt{a(a + \hbar)} + S_3}. \quad (3.8)$$

Пусть $\bar{z}$ – комплексно-сопряженная к (3.8) функция. Тогда в силу соотношений (3.7), (3.8) имеем [17]

$$\begin{aligned} S_1 &= \sqrt{a(a + \hbar)} \frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2}, & S_2 &= i\sqrt{a(a + \hbar)} \frac{\bar{z} - z}{1 + |z|^2}, \\ S_3 &= \sqrt{a(a + \hbar)} \frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Далее перейдем в f от координат S_1, S_2 к новым координатам $z, \bar{z}$. В результате сужение функции (2.9) на сферу Ω_l примет вид

$$f_{\Omega_l}(z, \bar{z}) = a(a + \hbar) \left(\frac{z^2 + 4z\bar{z} + \bar{z}^2}{(1 + z\bar{z})^2} + \frac{b(z + \bar{z})}{1 + z\bar{z}} \right).$$

ЛЕММА 3.2. *Глобальный максимум функции $f_{\Omega_l}(z, \bar{z})$ при $b > \sqrt{6}$ достигается в точке $z = \bar{z} = 1$. В этой точке*

$$f_{\Omega_l}(1, 1) = a(a + \hbar) \left(b + \frac{3}{2} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $P = f_{\Omega_l}/(a(a + \hbar))$ и перейдем к полярным координатам $z = \rho e^{i\varphi}$. Тогда

$$P(\rho, \varphi) = 2[\rho^2(2\cos^2\varphi + 1) + b\rho(1 + \rho^2)\cos\varphi](1 + \rho^2)^{-2}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial P}{\partial \varphi}(\rho, \varphi) = -2[4\rho^2\cos\varphi + b\rho(1 + \rho^2)](1 + \rho^2)^{-2}\sin\varphi = 0$$

либо при $\sin\varphi = 0$, либо при $\cos\varphi = -\frac{b}{4}(\rho + \frac{1}{\rho})$. Однако при $b > \sqrt{6}$

$$-\frac{b}{4}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) < -\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Поэтому точки экстремума функции P могут лежать лишь на вещественной оси.

Положим $z = x + iy$. Тогда

$$P(x, y) = 2 \left(\frac{3x^2 + y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} + \frac{bx}{1 + x^2 + y^2} \right). \quad (3.10)$$

Дифференцируя (3.10), находим

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, 0) = 2(1 - x^2)(bx^2 + 6x + b)(1 + x^2)^{-3}, \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x, 0) = 0.$$

Стационарными являются точки $x_1^{(0)} = 1$, $x_2^{(0)} = -1$, $x_{3,4}^{(0)} = (-3 \pm \sqrt{9 - b^2})/b$ (при $\sqrt{6} < b < 3$). Так как при $b > \sqrt{6}$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(1, 0) = -b - 3 < 0, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(1, 0) \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(1, 0) = (b + 3)(b + 2) > 0,$$

точка $\bar{z} = 1$ является точкой максимума функции P . Поскольку значения $P(-1, 0) = 3/2 - b$, $P(x_{3,4}^{(0)}, 0) = -b^2/6$, $\lim_{|z| \rightarrow \infty} P(x, y) = 0$ меньше $P(1, 0) = 3/2 + b$, в точке $\bar{z} = 1$ достигается глобальный максимум f_{Ω_l} . Лемма доказана.

Таким образом, число $f_{\Omega_l}(1, 1)$ определяет верхнюю границу спектрального кластера. Далее в статье будет вычислена поправка к этому числу (см. формулу (11.1)).

Наряду с задачей о нахождении спектра рассмотрим задачу о вычислении средних значений дифференциальных операторов на решениях (1.1), (1.2) вблизи границ спектральных кластеров. Квантовые средние играют важную роль в приложениях и могут быть найдены экспериментально. Заметим, что при

$$\xi_{k,l} \sim a(a + \hbar) \left(b + \frac{3}{2} \right) \quad (3.11)$$

для уравнения

$$f_{\Omega_l}(z, \bar{z})\varphi_{k,l} = \xi_{k,l}\varphi_{k,l},$$

к которому сводится (1.1) на собственном подпространстве $\mathcal{H}_l$, собственные функции $\varphi_{k,l}$ будут локализованы в малой окрестности точки $z = \bar{z} = 1$. Поэтому формула для квантовых средних принимает вид

$$(F(S_1, S_2, S_3)\varphi_{k,l}, \varphi_{k,l}) \sim F(a, 0, 0)(\varphi_{k,l}, \varphi_{k,l}). \quad (3.12)$$

Здесь функции S_1, S_2, S_3 были приближенно заменены их значениями в точке $z = \bar{z} = 1$, вычисленными по формулам (3.9). Кроме того, $F(a, 0, 0) \neq 0$.

Приведенные выше формальные рассуждения будут далее строго обоснованы (см. теорему 12.1). Аналогично рассматриваются и произвольные многочлены 4-й степени $V(q_1, q_2)$, для которых сужение символа $f(S_1, S_2, S_3)$ на сферу Ω_l достигает глобального максимума или минимума в единственной точке.

§ 4. Интегральное представление для асимптотических собственных функций

Рассмотрим уравнение (3.5), где функция f имеет вид (2.9). Учитывая формулы (3.4), приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \hbar^2 [\bar{z}^4 - 4\bar{z}^2 + 1] \frac{d^2 \Phi}{d\bar{z}^2} + 2\hbar [-(2a - \hbar)\bar{z}^3 - B\bar{z}^2 + 2(2a - \hbar)\bar{z} + B] \frac{d\Phi}{d\bar{z}} \\ + 2[a(2a - \hbar)\bar{z}^2 + 2Ba\bar{z} - 2\xi_{k,l} + 2a\hbar] \Phi = 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

(Для упрощения обозначений индексы k, l у функции $\Phi(\bar{z})$ выписывать не будем.) Оно имеет четыре особые точки

$$\bar{z}_1 = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}, \quad \bar{z}_2 = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}, \quad \bar{z}_3 = -\bar{z}_2, \quad \bar{z}_4 = -\bar{z}_1, \quad (4.2)$$

которые являются корнями уравнения $R(\bar{z}) = 0$, где

$$R(\bar{z}) = \bar{z}^4 - 4\bar{z}^2 + 1, \quad (4.3)$$

а также особую точку $\bar{z}_5 = \infty$. Поскольку все пять особых точек являются регулярными, то (4.1) есть уравнение класса Фукса [18], [19].

Рассмотрим фуксовы уравнения с точки зрения наличия полиномиальных решений. Фуксово уравнение с тремя особыми точками называется *уравнением Римана*. Каноническая естественная форма этого уравнения – гипергеометрическое уравнение. Уравнения гипергеометрического класса порождают хорошо известные системы классических ортогональных полиномов [20]. Для фуксовых уравнений с четырьмя (уравнения класса Гойна) и с большим числом особых точек подобной теории не существует. Как отмечено в [19], имеются лишь частные случаи, когда для уравнений класса Гойна можно построить решения, являющиеся полиномами. В настоящей работе будут найдены асимптотические собственные значения и соответствующие собственные функции (многочлены) для задачи (4.1), (3.6) с пятью особыми точками.

Нам потребуется ряд результатов из теории когерентных преобразований (см. [17]). Наряду с пространством $\mathcal{P}_l$ антиголоморфных многочленов степени не выше l рассмотрим дуальное ему гильбертово пространство $\widetilde{\mathcal{P}}_l$, состоящее из мероморфных распределений на $\mathbb{C}/\{0\}$ вида

$$\tilde{g}(z) = \sum_{n=0}^l \frac{\tilde{g}_n}{z^{n+1}}.$$

Норма в пространстве $\widetilde{\mathcal{P}}_l$ вычисляется по формуле

$$\|\tilde{g}\|_{\widetilde{\mathcal{P}}_l}^2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \oint_{\gamma} \oint_{\gamma} K(\bar{w}, z) \tilde{g}(z) \overline{\tilde{g}(\bar{w})} dz d\bar{w},$$

где контурные интегралы взяты по циклам γ вокруг точки $z = 0$, которые ориентированы в направлении против часовой стрелки, а

$$K(\bar{w}, z) = (1 + \bar{w}z)^l \quad (4.4)$$

– воспроизводящее ядро.

ЛЕММА 4.1 [17]. Двойственность между пространствами $\widetilde{\mathcal{P}}_l$ и $\mathcal{P}_l$ задается отображением

$$\mathcal{K}: \widetilde{\mathcal{P}}_l \rightarrow \mathcal{P}_l, \quad (\mathcal{K}\widetilde{g})(\overline{w}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} K(\overline{w}, z) \widetilde{g}(z) dz. \quad (4.5)$$

Обратное отображение имеет вид

$$(\mathcal{K}^{-1}g)(z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \tilde{L}(\overline{w}, z) g(\overline{w}) d\overline{w}, \quad (4.6)$$

где

$$\tilde{L}(\overline{w}, z) = \sum_{n=0}^l \frac{n! (l-n)!}{l! (\overline{w}z)^{n+1}} \quad (4.7)$$

– мероморфное воспроизводящее ядро.

Отметим, что в случае коммутационных соотношений Гейзенберга версия мероморфных когерентных состояний, а также преобразования, подобные отображениям (4.5), (4.6), были введены в работе Дирака [21].

Обозначим через $G(\overline{u}, \overline{w})$ ядро суперпозиции операторов $\mathcal{K}^{-1}$ и $\mathcal{K}$. Из формул (4.4), (4.7) вытекает, что

$$\begin{aligned} G(\overline{u}, \overline{w}) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} K(\overline{w}, z) \tilde{L}(\overline{u}, z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left(\sum_{k=0}^l \frac{l!}{k! (l-k)!} (z\overline{w})^k \right) \left(\sum_{n=0}^l \frac{n! (l-n)!}{l! (\overline{u}z)^{n+1}} \right) dz \\ &= \frac{1}{\overline{u}} \sum_{n=0}^l \left(\frac{\overline{w}}{\overline{u}} \right)^n = \frac{\overline{u}^{l+1} - \overline{w}^{l+1}}{\overline{u}^{l+1}(\overline{u} - \overline{w})}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Ядро (4.8) в пространстве $\mathcal{P}_l$ определяет тождественный оператор, а на множестве J антиголоморфных в окрестности нуля функций является проектором на пространство $\mathcal{P}_l$. Действительно, если

$$g(\overline{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \overline{z}^n \in J,$$

то

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} G(\overline{u}, \overline{w}) g(\overline{u}) d\overline{u} = \sum_{n=0}^l g_n \overline{w}^n.$$

Будем искать решение уравнения (4.1) в виде

$$\Phi(\overline{z}) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} G(\overline{u}, \overline{z}) p(\overline{u}) d\overline{u}, \quad (4.9)$$

где $p \in J$, а G задается формулой (4.8). Рассмотрим действующие в $\mathcal{P}_l$ операторы

$$\mathring{A} = \hbar \left(\frac{l}{2} - \overline{z} \frac{d}{d\overline{z}} \right), \quad \mathring{B} = \hbar \overline{z} \left(l - \overline{z} \frac{d}{d\overline{z}} \right), \quad \mathring{C} = \hbar \frac{d}{d\overline{z}},$$

которые связаны с $\mathring{S}_1, \mathring{S}_2, \mathring{S}_3$ равенствами

$$\mathring{S}_1 = \frac{1}{2}(\mathring{B} + \mathring{C}), \quad \mathring{S}_2 = \frac{1}{2i}(\mathring{C} - \mathring{B}), \quad \mathring{S}_3 = \mathring{A}.$$

Под действием отображения (4.9) операторы $\mathring{A}, \mathring{B}, \mathring{C}$ преобразуются в операторы $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}: J \rightarrow J$.

ЛЕММА 4.2. Оператор $\hat{A}$ имеет вид

$$\hat{A} = \hbar \left(\frac{l}{2} - \bar{u} \frac{d}{d\bar{u}} \right). \quad (4.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$\begin{aligned} \bar{z} \frac{\partial G(\bar{u}, \bar{z})}{\partial \bar{z}} &= \frac{\bar{z}(-(l+1)\bar{z}^l \bar{u} + l\bar{z}^{l+1} + \bar{u}^{l+1})}{\bar{u}^{l+1}(\bar{u} - \bar{z})^2}, \\ -\bar{u} \frac{\partial G(\bar{u}, \bar{z})}{\partial \bar{u}} &= (l+1)G(\bar{u}, \bar{z}) - \frac{\bar{u}(l\bar{u}^{l+1} - (l+1)\bar{u}^l \bar{z} + \bar{z}^{l+1})}{\bar{u}^{l+1}(\bar{u} - \bar{z})^2}, \end{aligned}$$

то справедливо равенство

$$\bar{z} \frac{\partial G(\bar{u}, \bar{z})}{\partial \bar{z}} + \bar{u} \frac{\partial G(\bar{u}, \bar{z})}{\partial \bar{u}} = -G(\bar{u}, \bar{z}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathring{A}\Phi(\bar{z}) &= -\frac{\hbar}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left(\frac{l}{2} + 1 + \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{u}} \right) G(\bar{u}, \bar{z}) p(\bar{u}) d\bar{u} \\ &= -\frac{\hbar}{2\pi i} \oint_{\gamma} G(\bar{u}, \bar{z}) \left(\frac{l}{2} - \bar{u} \frac{d}{d\bar{u}} \right) p(\bar{u}) d\bar{u} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} G(\bar{u}, \bar{z}) \hat{A} p(\bar{u}) d\bar{u}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 4.3. Оператор $\hat{B}$ имеет вид

$$\hat{B} = \hbar \bar{u} \left(l - \bar{u} \frac{d}{d\bar{u}} \right). \quad (4.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$\begin{aligned} \left(\bar{z}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \bar{u}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{u}} \right) G(\bar{u}, \bar{z}) &= -(l+1)\bar{u}G(\bar{u}, \bar{z}) + \frac{\bar{u}^2(l\bar{u}^{l+1} - (l+1)\bar{u}^l \bar{z} + \bar{z}^{l+1})}{\bar{u}^{l+1}(\bar{u} - \bar{z})^2} \\ &\quad + \frac{\bar{z}^2(-(l+1)\bar{z}^l \bar{u} + l\bar{z}^{l+1} + \bar{u}^{l+1})}{\bar{u}^{l+1}(\bar{u} - \bar{z})^2} \\ &= -l(\bar{u} - \bar{z})G(\bar{u}, \bar{z}) - 2\bar{u}G(\bar{u}, \bar{z}) + l + 1, \end{aligned}$$

то выполняется равенство

$$\mathring{B}\Phi(\bar{z}) = -\frac{\hbar}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left(\bar{u}^2 \frac{\partial G(\bar{u}, \bar{z})}{\partial \bar{u}} + (l+2)\bar{u}G(\bar{u}, \bar{z}) \right) p(\bar{u}) d\bar{u} + \frac{\hbar(l+1)}{2\pi i} \oint_{\gamma} p(\bar{u}) d\bar{u}. \quad (4.12)$$

Так как $p(\bar{u}) \in J$, второй интеграл в (4.12) равен нулю. Следовательно,

$$\mathring{B}\Phi(\bar{z}) = -\frac{\hbar}{2\pi i} \oint_{\gamma} G(\bar{u}, \bar{z}) \bar{u} \left(l - \bar{u} \frac{d}{d\bar{u}} \right) p(\bar{u}) d\bar{u} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} G(\bar{u}, \bar{z}) \hat{B} p(\bar{u}) d\bar{u}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 4.4. Оператор $\hat{C}$ имеет вид

$$\hat{C} = \hbar \left(\frac{d}{d\bar{u}} - \frac{\bar{u}^l}{l!} \frac{d^{l+1}}{d\bar{u}^{l+1}} \right). \quad (4.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(\bar{u}, \bar{z})}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial G(\bar{u}, \bar{z})}{\partial \bar{u}} &= \frac{-(l+1)\bar{z}^l \bar{u} + l\bar{z}^{l+1} + \bar{u}^{l+1}}{\bar{u}^{l+1}(\bar{u} - \bar{z})^2} - \frac{(l+1)(\bar{u}^{l+1} - \bar{z}^{l+1})}{\bar{u}^{l+2}(\bar{u} - \bar{z})} \\ &\quad + \frac{l\bar{u}^{l+1} - (l+1)\bar{u}^l \bar{z} + \bar{z}^{l+1}}{\bar{u}^{l+1}(\bar{u} - \bar{z})^2} = -\frac{(l+1)\bar{z}^l}{\bar{u}^{l+2}}, \\ \frac{(-1)^{l+1}}{l!} \frac{\partial^{l+1}}{\partial \bar{u}^{l+1}} (\bar{u}^l G(\bar{u}, \bar{z})) &= \frac{(-1)^{l+1}}{l!} \frac{\partial^{l+1}}{\partial \bar{u}^{l+1}} \sum_{k=0}^l \bar{u}^{k-1} \bar{z}^{l-k} = \frac{(l+1)\bar{z}^l}{\bar{u}^{l+2}}, \end{aligned}$$

справедливо равенство

$$\frac{\partial G(\bar{u}, \bar{z})}{\partial \bar{z}} = -\frac{\partial G(\bar{u}, \bar{z})}{\partial \bar{u}} - \frac{(-1)^{l+1}}{l!} \frac{\partial^{l+1}}{\partial \bar{u}^{l+1}} (\bar{u}^l G(\bar{u}, \bar{z})).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \hat{C}\Phi(\bar{z}) &= -\frac{\hbar}{2\pi i} \oint_{\gamma} G(\bar{u}, \bar{z}) \frac{dp(\bar{u})}{d\bar{u}} d\bar{u} + \frac{\hbar}{2\pi i l!} \oint_{\gamma} \bar{u}^l G(\bar{u}, \bar{z}) \frac{d^{l+1}p(\bar{u})}{d\bar{u}^{l+1}} d\bar{u} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} G(\bar{u}, \bar{z}) \hat{C}p(\bar{u}) d\bar{u}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Таким образом, под действием отображения (4.9) изменился лишь оператор $\hat{C}$. В силу (4.10), (4.11), (4.13) образующие алгебры вращений принимают вид

$$\begin{aligned} \hat{S}_1 &= \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C}) = \frac{\hbar}{2} \left(\bar{u}l + (1 - \bar{u}^2) \frac{d}{d\bar{u}} - \frac{\bar{u}^l}{l!} \frac{d^{l+1}}{d\bar{u}^{l+1}} \right), \\ \hat{S}_2 &= \frac{1}{2i}(\hat{C} - \hat{B}) = \frac{i\hbar}{2} \left(\bar{u}l - (1 + \bar{u}^2) \frac{d}{d\bar{u}} + \frac{\bar{u}^l}{l!} \frac{d^{l+1}}{d\bar{u}^{l+1}} \right), \\ \hat{S}_3 &= \hat{A} = \hbar \left(\frac{l}{2} - \bar{u} \frac{d}{d\bar{u}} \right), \end{aligned}$$

а уравнение (4.1) преобразуется в уравнение

$$\left(\frac{3}{2} \hat{S}_1^2 + \frac{1}{2} \hat{S}_2^2 + B\hat{S}_1 - \xi_{k,l} \right) p = 0. \quad (4.14)$$

Рассмотрим окрестность нуля, задаваемую неравенством

$$|\bar{u}| < \bar{z}_2 - \delta, \quad (4.15)$$

где $\bar{z}_2 = (\sqrt{3}-1)/\sqrt{2}$, а $\delta > 0$ – константа. В этой окрестности асимптотическое решение уравнения (4.1) задается ВКБ-приближением [22], [23]

$$\Phi^{\text{WKB}}(\bar{z}) = t(\bar{z}) e^{ls(\bar{z})} (1 + O(l^{-1})), \quad l \rightarrow \infty. \quad (4.16)$$

Здесь $s(\bar{z})$, $t(\bar{z})$ – антиголоморфные функции, причем $t(\bar{z}) \neq 0$. При подстановке $\Phi^{\text{WKB}}(\bar{u})$ в (4.14) возникает невязка W , которая в области (4.15) имеет вид

$$W = O(l^{-2}\Phi^{\text{WKB}}) + \hat{n}\Phi^{\text{WKB}}, \quad (4.17)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{n} = & \left(\frac{a}{l}\right)^2 \frac{\bar{u}^l}{l!} \frac{d^{l+1}}{d\bar{u}^{l+1}} \frac{\bar{u}^l}{l!} \frac{d^{l+1}}{d\bar{u}^{l+1}} + \frac{a^2}{l} \left[\left(1 + \frac{2}{l}\right) \bar{u}^2 - \frac{B}{a} \bar{u} - 1 \right] \frac{\bar{u}^{l-1}}{l!} \frac{d^{l+1}}{d\bar{u}^{l+1}} \\ & + 2 \left(\frac{a}{l}\right)^2 (\bar{u}^2 - 1) \frac{\bar{u}^l}{l!} \frac{d^{l+2}}{d\bar{u}^{l+2}}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Выражение $O(l^{-2}\Phi^{\text{WKB}})$ в (4.17) представляет собой оценку невязки ВКБ-приближения, когда в уравнении (4.14) вместо $\hat{S}_1$, $\hat{S}_2$ фигурируют $\check{S}_1$, $\check{S}_2$, а $\hat{n}\Phi^{\text{WKB}}$ возникает в силу наличия в $\hat{S}_1$, $\hat{S}_2$ дополнительных слагаемых

$$-\frac{\hbar}{2} \frac{\bar{u}^l}{l!} \frac{d^{l+1}}{d\bar{u}^{l+1}}, \quad \frac{i\hbar}{2} \frac{\bar{u}^l}{l!} \frac{d^{l+1}}{d\bar{u}^{l+1}}.$$

Покажем, что слагаемое $\hat{n}\Phi^{\text{WKB}}$ дает экспоненциально малый вклад по сравнению с $l^{-2}\Phi^{\text{WKB}}$.

ЛЕММА 4.5. *В достаточно малой окрестности нуля справедлива оценка*

$$\hat{n}\Phi^{\text{WKB}} = O(l^{-\infty}\Phi^{\text{WKB}}), \quad l \rightarrow \infty. \quad (4.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Получим оценку (4.19) для первого слагаемого в равенстве (4.18), так как остальные слагаемые рассматриваются аналогично. Пусть γ_1 , γ_2 – окружности с центром в нуле радиусов R_0 и $3R_0/4$ соответственно, причем $R_0 < \bar{z}_2 - \delta$. Тогда при $|\bar{u}| \leq R_0/2$ в силу интегральной формулы Коши имеем

$$\frac{\bar{u}^l}{l!} \frac{d^{l+1}}{d\bar{u}^{l+1}} \frac{\bar{u}^l}{l!} \frac{d^{l+1}}{d\bar{u}^{l+1}} \Phi^{\text{WKB}}(\bar{u}) = -\frac{l+1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{\bar{u}^l}{l!} \frac{d^{l+1}}{d\bar{u}^{l+1}} \left(\frac{\bar{u}^l}{(\bar{v} - \bar{u})^{l+2}} \right) \Phi^{\text{WKB}}(\bar{v}) d\bar{v}, \quad (4.20)$$

где

$$\frac{\bar{u}^l}{l!} \frac{d^{l+1}}{d\bar{u}^{l+1}} \left(\frac{\bar{u}^l}{(\bar{v} - \bar{u})^{l+2}} \right) = -\frac{\bar{u}^l(l+1)}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{\bar{\eta}^l d\bar{\eta}}{(\bar{\eta} - \bar{u})^{l+2}(\bar{v} - \bar{\eta})^{l+2}}. \quad (4.21)$$

Применим к (4.21) неравенства Коши [24]. Из полученной оценки

$$\left| \frac{\bar{u}^l}{l!} \frac{d^{l+1}}{d\bar{u}^{l+1}} \left(\frac{\bar{u}^l}{(\bar{v} - \bar{u})^{l+2}} \right) \right| \leq \frac{(l+1)12^{l+1}16|\bar{u}|^l}{R_0^{l+3}},$$

а также из (4.20), (4.16) вытекает, что

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{a}{l}\right)^2 \frac{\bar{u}^l}{l!} \frac{d^{l+1}}{d\bar{u}^{l+1}} \frac{\bar{u}^l}{l!} \frac{d^{l+1}}{d\bar{u}^{l+1}} \Phi^{\text{WKB}}(\bar{u}) \right| \\ \leq \frac{a^2 12^{l+1} 4^3 |\bar{u}|^l}{R_0^{l+2}} \max_{\bar{u} \in \gamma_1} |t(\bar{u})| \exp \left\{ l \max_{\bar{u} \in \gamma_1} \operatorname{Re} s(\bar{u}) \right\}. \end{aligned}$$

Далее, поскольку $|t(\bar{u})| > 0$ в области (4.15), в силу принципа максимума при $|\bar{u}| \leq R_0$ имеем

$$|\Phi^{\text{WKB}}(\bar{u})| \geq \min_{\bar{u} \in \gamma_1} |t(\bar{u})| \exp \left\{ l \min_{\bar{u} \in \gamma_1} \operatorname{Re} s(\bar{u}) \right\} > 0.$$

Следовательно, если $|\bar{u}| \leq R_0/2$, то

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\Phi^{\text{WKB}}(\bar{u})} \left(\frac{a}{l} \right)^2 \frac{\bar{u}^l}{l!} \frac{d^{l+1}}{d\bar{u}^{l+1}} \frac{\bar{u}^l}{l!} \frac{d^{l+1}}{d\bar{u}^{l+1}} \Phi^{\text{WKB}}(\bar{u}) \right| &\leq \frac{4^4 3a^2}{R_0^2} \frac{\max_{\bar{u} \in \gamma_1} |t(\bar{u})|}{\min_{\bar{u} \in \gamma_1} |t(\bar{u})|} \\ &\times \exp \left\{ l \left(\ln |\bar{u}| - \ln R_0 + \ln 12 + \max_{\bar{u} \in \gamma_1} \operatorname{Re} s(\bar{u}) - \min_{\bar{u} \in \gamma_1} \operatorname{Re} s(\bar{u}) \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

а значит, при

$$|\bar{u}| < R_1, \quad (4.23)$$

где

$$0 < R_1 < \frac{R_0}{12} \exp \left\{ \min_{\bar{u} \in \gamma_1} \operatorname{Re} s(\bar{u}) - \max_{\bar{u} \in \gamma_1} \operatorname{Re} s(\bar{u}) \right\},$$

правая часть (4.22) экспоненциально мала. Лемма доказана.

Таким образом, если в формуле (4.9) цикл γ вокруг $\bar{u} = 0$ лежит в области (4.23), то вместо асимптотического решения уравнения (4.14) $(l+2)$ -го порядка в правую часть (4.9) можно подставить асимптотическое решение уравнения 2-го порядка (4.1).

§ 5. Многоточечная спектральная задача

Изучим поведение решений уравнения (4.1) вблизи особых точек. Разлагая дробь на простейшие, получаем равенство

$$\frac{2(-(2a-h)\bar{z}^3 - B\bar{z}^2 + 2(2a-h)\bar{z} + B)}{\hbar R(\bar{z})} = \sum_{j=1}^4 \frac{A_j}{\bar{z} - \bar{z}_j},$$

где

$$A_1 = A_2 = -\frac{a}{\hbar} + \frac{1}{2} - \frac{B}{\sqrt{6}\hbar}, \quad A_3 = A_4 = -\frac{a}{\hbar} + \frac{1}{2} + \frac{B}{\sqrt{6}\hbar}.$$

Решая затем определяющие (или характеристические) уравнения

$$\rho_j^{(m)}(\rho_j^{(m)} - 1) + A_j \rho_j^{(m)} = 0, \quad j = 1, \dots, 4, \quad m = 1, 2,$$

находим, что характеристические показатели в особых точках (4.2) имеют вид

$$\begin{aligned} \rho_j^{(1)} &= 0, \quad j = 1, \dots, 4; \\ \rho_j^{(2)} &= \frac{l+1}{2} + \frac{b\sqrt{l(l+2)}}{2\sqrt{6}}, \quad j = 1, 2; \quad \rho_j^{(2)} = \frac{l+1}{2} - \frac{b\sqrt{l(l+2)}}{2\sqrt{6}}, \quad j = 3, 4. \end{aligned}$$

При $\xi = \xi_{k,l}$ точными решениями спектральной задачи (4.1), (3.6) являются многочлены. Их характеристические показатели в особых точках (4.2) равны нулю. Отметим, что при $b > \sqrt{6}$ решения с характеристическими показателями $\rho_j^{(2)}$, $j = 1, \dots, 4$, не лежат в пространстве $\mathcal{P}_l$ (и не являются асимптотикой

полиномов из $\mathcal{P}_l$). Действительно, для достаточно больших l имеем $\rho_j^{(2)} > l$ при $j = 1, 2$ и $\rho_j^{(2)} < 0$ при $j = 3, 4$. Кроме того, эти решения могут иметь точки ветвления, которые отсутствуют у полиномов.

Из определяющего уравнения для особой точки $\bar{z}_5 = \infty$

$$\rho_\infty^{(m)}(\rho_\infty^{(m)} - 1) + 2l\rho_\infty^{(m)} + l(l-1) = 0, \quad m = 1, 2,$$

находятся характеристические показатели $\rho_\infty^{(1)} = -l$, $\rho_\infty^{(2)} = -l + 1$, а значит, оба линейно независимых решения уравнения (4.1)

$$\Phi^{(m)}(\bar{z}) = \bar{z}^{-\rho_\infty^{(m)}} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{n,\infty}^{(m)} \bar{z}^{-n}, \quad \varphi_{0,\infty}^{(m)} \neq 0, \quad m = 1, 2, \quad (5.1)$$

растут на ∞ не быстрее $\bar{z}^l$. Поэтому принадлежность решения пространству $\mathcal{P}_l$ не фиксирует его поведение при $\bar{z} \rightarrow \infty$. Отметим, что несмотря на то, что разность $\rho_\infty^{(2)} - \rho_\infty^{(1)} = 1$ является целым числом, ряды (5.1) не содержат $\ln \bar{z}$.

При построении асимптотических решений уравнения (4.1) существенную роль играет их поведение вблизи особых точек. Наряду со спектральной задачей (4.1), (3.6) рассмотрим многоточечную спектральную задачу. Она состоит в нахождении чисел $\xi_{k,l}$ (собственных значений), при которых уравнение (4.1) имеет ненулевые антиголоморфные решения, характеристические показатели которых в особых точках (4.2) равны нулю.

Если число $\xi_{k,l}$ и функция $p(\bar{z})$ – асимптотическое решение такой многоточечной спектральной задачи, то при подстановке $p(\bar{u})$ в правую часть формулы (4.9) получаем многочлен $\Phi(\bar{z})$ – асимптотическое решение уравнения (4.1) из пространства $\mathcal{P}_l$. Условие нормировки (3.6) для $\Phi(\bar{z})$ позволяет определить содержащийся в $p(\bar{u})$ произвольный множитель. Таким образом, число $\xi_{k,l}$ и многочлен $\Phi(\bar{z})$ являются асимптотическим решением исходной спектральной задачи (4.1), (3.6).

§ 6. ВКБ-приближение. Линии Стокса

Перейдем к построению асимптотических решений уравнения (4.1). С помощью подстановки [18]

$$\Phi(\bar{z}) = E(\bar{z})Y(\bar{z}), \quad (6.1)$$

где

$$\begin{aligned} E(\bar{z}) &= (\bar{z} - \bar{z}_1)^{(\rho_1^{(2)} - 1)/2} (\bar{z} - \bar{z}_2)^{(\rho_2^{(2)} - 1)/2} (\bar{z} - \bar{z}_3)^{(\rho_3^{(2)} - 1)/2} (\bar{z} - \bar{z}_4)^{(\rho_4^{(2)} - 1)/2} \\ &= [(\bar{z} - \bar{z}_1)(\bar{z} - \bar{z}_2)]^{(a+B/\sqrt{6}-\hbar/2)/(2\hbar)} [(\bar{z} - \bar{z}_3)(\bar{z} - \bar{z}_4)]^{(a-B/\sqrt{6}-\hbar/2)/(2\hbar)}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

уравнение (4.1) преобразуется к виду

$$\frac{d^2 Y}{d\bar{z}^2} - Q(\bar{z})Y = 0. \quad (6.3)$$

ЛЕММА 6.1. *Справедливо равенство*

$$\begin{aligned} Q(\bar{z}) &= \frac{1}{\hbar^2 R^2(\bar{z})} [B^2 \bar{z}^4 + B(4a + 2\hbar)\bar{z}^3 + (-2B^2 + 12a^2 + 12a\hbar - 9\hbar^2)\bar{z}^2 \\ &\quad + B(4a + 2\hbar)\bar{z} + B^2] + \frac{4\xi_{k,l} - 2\hbar^2}{\hbar^2 R(\bar{z})}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Поскольку

$$\sqrt{a(a+\hbar)} = a + \frac{\hbar}{2} + O(\hbar^2), \quad \hbar \rightarrow 0, \quad (6.5)$$

из (6.4) вытекает, что

$$Q(\bar{z}) = \frac{a(a+\hbar)P(\bar{z})}{\hbar^2 R^2(\bar{z})} + \frac{4\xi_{k,l}}{\hbar^2 R(\bar{z})} + O(1) + O\left(\frac{1}{R(\bar{z})}\right), \quad \hbar \rightarrow 0. \quad (6.6)$$

Здесь

$$P(\bar{z}) = b^2 \bar{z}^4 + 4b\bar{z}^3 + (-2b^2 + 12)\bar{z}^2 + 4b\bar{z} + b^2,$$

а $R(\bar{z})$ задается формулой (4.3).

Далее покажем, как условие существования в уравнении (6.3) кратной точки поворота $\bar{z}_0$ позволяет найти асимптотику (3.11) для $\xi_{k,l}$. Рассмотрим уравнения $Q(\bar{z}_0) = 0$, $Q'(\bar{z}_0) = 0$ с точностью $O(1)$. В силу (6.6) имеем

$$a(a+\hbar)P(\bar{z}_0) + 4\xi_{k,l}R(\bar{z}_0) = 0, \quad a(a+\hbar)P'(\bar{z}_0) + 4\xi_{k,l}R'(\bar{z}_0) = 0.$$

Из этих равенств вытекает уравнение для нахождения $\bar{z}_0$

$$\begin{aligned} & [b^2 \bar{z}_0^4 + 4b\bar{z}_0^3 + (-2b^2 + 12)\bar{z}_0^2 + 4b\bar{z}_0 + b^2][4\bar{z}_0^3 - 8\bar{z}_0] \\ & - [4b^2 \bar{z}_0^3 + 12b\bar{z}_0^2 + 2(-2b^2 + 12)\bar{z}_0 + 4b][\bar{z}_0^4 - 4\bar{z}_0^2 + 1] = 0, \end{aligned} \quad (6.7)$$

а также асимптотика

$$\xi_{k,l} \sim -\frac{a(a+\hbar)}{4} \frac{P(\bar{z}_0)}{R(\bar{z}_0)}. \quad (6.8)$$

Разлагая левую часть (6.7) на множители:

$$(\bar{z}_0^2 - 1)(b\bar{z}_0^2 + 6\bar{z}_0 + b)(\bar{z}_0^2 + b\bar{z}_0 + 1) = 0,$$

получаем, что уравнение (6.7) имеет шесть корней

$$\begin{aligned} \bar{z}_{0,1} &= 1, & \bar{z}_{0,2} &= -1, & \bar{z}_{0,3} &= \frac{-3 + \sqrt{9 - b^2}}{b}, & \bar{z}_{0,4} &= \frac{-3 - \sqrt{9 - b^2}}{b}, \\ \bar{z}_{0,5} &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4}}{2}, & \bar{z}_{0,6} &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4}}{2}, \end{aligned}$$

причем первые четыре из них являются точками экстремума $f_{\Omega_l}(z, \bar{z})$. Если в (6.8) положить $\bar{z}_0 = 1$, то формула (6.8) совпадает с (3.11).

Будем искать $\xi_{k,l}$ в виде

$$\xi_{k,l} = a(a+\hbar)\left(b + \frac{3}{2}\right) + \hbar\xi_{k,l}^{(1)} + O(\hbar^2). \quad (6.9)$$

Тогда уравнение (6.3) примет вид

$$\hbar^2 \frac{d^2 Y}{d\bar{z}^2} - \left(Q_0(\bar{z}) + \frac{4\xi_{k,l}^{(1)}\hbar}{R(\bar{z})} + O(\hbar^2) + O\left(\frac{\hbar^2}{R(\bar{z})}\right) \right) Y = 0, \quad (6.10)$$

где

$$Q_0(\bar{z}) = a(a+\hbar)(b^2 + 4b + 6)(\bar{z} - 1)^2 \Lambda(\bar{z}) R^{-2}(\bar{z}), \quad (6.11)$$

многочлен $R(\bar{z})$ задан формулой (4.3),

$$\Lambda(\bar{z}) = \bar{z}^2 + 2(1 + \gamma)\bar{z} + 1, \quad (6.12)$$

а параметр γ определен формулой

$$\gamma = \frac{2b}{b^2 + 4b + 6}. \quad (6.13)$$

Отметим, что $\gamma \in (0, 1/(\sqrt{6} + 2))$ при $b > \sqrt{6}$.

Приравнявая $Q_0(\bar{z})$ нулю, находим, что уравнение (6.10) помимо точки поворота $\bar{z} = 1$ кратности 2 имеет также простые точки поворота

$$\bar{z}_{\pm} = -1 - \gamma \pm \sqrt{\gamma(\gamma + 2)}.$$

Они, как и особые точки (4.2), лежат на вещественной оси и удовлетворяют неравенствам

$$\bar{z}_4 < \bar{z}_- < -1 < \bar{z}_+ < \bar{z}_3 < 0 < \bar{z}_2 < 1 < \bar{z}_1. \quad (6.14)$$

Построим ВКБ-приближения для решений уравнения (6.10). Они справедливы вне малых окрестностей точек поворота и имеют вид

$$\begin{aligned} Y_{\pm}^{\text{WKB}} &= \frac{\tilde{c}_{\pm}}{\sqrt[4]{Q_0(\bar{z})}} \exp \left\{ \pm \frac{1}{\hbar} \int \sqrt{Q_0(\bar{z})} d\bar{z} \pm 2\xi_{k,l}^{(1)} \int \frac{d\bar{z}}{R(\bar{z})\sqrt{Q_0(\bar{z})}} \right\} \\ &\times \left(1 + O(\hbar) + O\left(\frac{\hbar}{(\bar{z} - 1)^2}\right) + O\left(\frac{\hbar}{(\bar{z} - \bar{z}_+)^{3/2}}\right) + O\left(\frac{\hbar}{(\bar{z}_- - \bar{z})^{3/2}}\right) \right), \quad \hbar \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Здесь $\tilde{c}_{\pm}$ – константы, в степенных функциях берутся главные значения. Кроме того, вдоль отрезка $[\bar{z}_-, \bar{z}_+]$ проведен разрез.

Вычислим возникающие в (6.15) интегралы. Введем функции

$$r_0(\bar{z}) = 2\sqrt{\Lambda(\bar{z})} + \sqrt{4 + 2\gamma}(\bar{z} + 1), \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} r_1(\bar{z}) &= 2\sqrt{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} + \sqrt{2} + \gamma\sqrt{2})} \sqrt{\Lambda(\bar{z})} + (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} + \sqrt{2} + \gamma\sqrt{2} - 1) \\ &\quad + \sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2} + \gamma\sqrt{2} + 1)\bar{z}, \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} r_2(\bar{z}) &= 2\sqrt{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + \sqrt{2} + \gamma\sqrt{2})} \sqrt{\Lambda(\bar{z})} + (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + \sqrt{2} + \gamma\sqrt{2} + 1) \\ &\quad + \sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2} + \gamma\sqrt{2} - 1)\bar{z}, \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} r_3(\bar{z}) &= 2\sqrt{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2} - \gamma\sqrt{2})} \sqrt{\Lambda(\bar{z})} + (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2} + \gamma\sqrt{2} + 1) \\ &\quad + \sqrt{2}(-\sqrt{3} + \sqrt{2} + \gamma\sqrt{2} + 1)\bar{z}, \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned} r_4(\bar{z}) &= -2\sqrt{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2} - \gamma\sqrt{2})} \sqrt{\Lambda(\bar{z})} + (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2} - \gamma\sqrt{2} - 1) \\ &\quad + \sqrt{2}(-\sqrt{3} + \sqrt{2} + \gamma\sqrt{2} - 1)\bar{z}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

ЛЕММА 6.2. ВКБ-приближения $Y_{\pm}^{\text{WKB}}$ представимы в виде

$$\begin{aligned} Y_{\pm}^{\text{WKB}} &= \frac{c_{\pm} \sqrt{(\bar{z} - \bar{z}_1)(\bar{z} - \bar{z}_2)(\bar{z} - \bar{z}_3)(\bar{z} - \bar{z}_4)}}{\sqrt{(\bar{z} - 1)} \sqrt[4]{(\bar{z} - \bar{z}_-)(\bar{z} - \bar{z}_+)}} \left(\frac{r_0(\bar{z})}{\bar{z} - 1} \right)^{\mp \xi_{k,l}^{(1)}/(a\sqrt{b^2 + 5b + 6})} \\ &\quad \times \left(\frac{r_1(\bar{z})r_2(\bar{z})}{(\bar{z} - \bar{z}_1)(\bar{z} - \bar{z}_2)} \right)^{\mp (a + \hbar/2)(1 + b/\sqrt{6})/(2\hbar)} \end{aligned}$$

$$\times \left(\frac{r_3(\bar{z})r_4(\bar{z})}{(\bar{z}-\bar{z}_3)(\bar{z}-\bar{z}_4)} \right)^{\mp(a+\hbar/2)(1-b/\sqrt{6})/(2\hbar)} \left(1 + O(\hbar) + O\left(\frac{\hbar}{(\bar{z}-1)^2} \right) + O\left(\frac{\hbar}{(\bar{z}-\bar{z}_+)^{3/2}} \right) + O\left(\frac{\hbar}{(\bar{z}_--\bar{z})^{3/2}} \right) \right), \quad \hbar \rightarrow 0. \quad (6.21)$$

Здесь $c_{\pm}$ – константы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся следующими интегралами [25]:

$$\int \frac{d\bar{z}}{\bar{z}\sqrt{X(\bar{z})}} = -\frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left(\frac{2\sqrt{cX(\bar{z})}}{\bar{z}} + \frac{2c}{\bar{z}} + b \right) + C, \quad (6.22)$$

$$\int \frac{\sqrt{X(\bar{z})}}{\bar{z}} d\bar{z} = \sqrt{X(\bar{z})} + \frac{b}{2\sqrt{a}} \ln(2\sqrt{aX(\bar{z})} + 2a\bar{z} + b) + c \int \frac{d\bar{z}}{\bar{z}\sqrt{X(\bar{z})}}, \quad (6.23)$$

где $X(\bar{z}) = a\bar{z}^2 + b\bar{z} + c$, $a > 0$, $c > 0$; C – произвольная константа. Из равенства (6.22) вытекает, что

$$\int \frac{d\bar{z}}{(\bar{z}-1)\sqrt{\bar{z}^2 + 2(1+\gamma)\bar{z} + 1}} = -\frac{\sqrt{b^2 + 4b + 6}}{2\sqrt{b^2 + 5b + 6}} \ln \left(\frac{r_0(\bar{z})}{\bar{z}-1} \right) + C.$$

Поскольку

$$\frac{\bar{z}-1}{R(\bar{z})} = \frac{1}{4\sqrt{6}} \left(\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\bar{z}-\bar{z}_1} + \frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\bar{z}-\bar{z}_2} + \frac{-1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\bar{z}-\bar{z}_3} + \frac{-1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\bar{z}-\bar{z}_4} \right),$$

в силу (6.22), (6.23) имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{(\bar{z}-1)\sqrt{\bar{z}^2 + 2(1+\gamma)\bar{z} + 1}}{R(\bar{z})} d\bar{z} &= \frac{1}{4\sqrt{6}} \left\{ \sqrt{\Lambda(\bar{z})} [1 + \sqrt{2} - \sqrt{3} + 1 - \sqrt{2} \right. \\ &\quad + \sqrt{3} - 1 - \sqrt{2} - \sqrt{3} - 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}] + \ln(2(\sqrt{\Lambda(\bar{z})} + \bar{z} + 1 + \gamma)) \\ &\quad \times \left[(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) \left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} + 1 + \gamma \right) + (1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}) \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} + 1 + \gamma \right) \right. \\ &\quad + (-1 - \sqrt{2} - \sqrt{3}) \left(\frac{-\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} + 1 + \gamma \right) + (-1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) \\ &\quad \times \left. \left. \left(\frac{-\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} + 1 + \gamma \right) \right] \right. \\ &\quad - \left[(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})\sqrt{\sigma_1} \ln \left(\frac{2\sqrt{\sigma_1}\sqrt{\Lambda(\bar{z})} + 2\sigma_1 + b_1(\bar{z}-\bar{z}_1)}{\bar{z}-\bar{z}_1} \right) \right. \\ &\quad + (1 - \sqrt{2} + \sqrt{3})\sqrt{\sigma_2} \ln \left(\frac{2\sqrt{\sigma_2}\sqrt{\Lambda(\bar{z})} + 2\sigma_2 + b_2(\bar{z}-\bar{z}_2)}{\bar{z}-\bar{z}_2} \right) \\ &\quad + (-1 - \sqrt{2} - \sqrt{3})\sqrt{\sigma_3} \ln \left(\frac{2\sqrt{\sigma_3}\sqrt{\Lambda(\bar{z})} + 2\sigma_3 + b_3(\bar{z}-\bar{z}_3)}{\bar{z}-\bar{z}_3} \right) \\ &\quad + (-1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})\sqrt{\sigma_4} \ln \left(\frac{2\sqrt{\sigma_4}\sqrt{\Lambda(\bar{z})} + 2\sigma_4 + b_4(\bar{z}-\bar{z}_4)}{\bar{z}-\bar{z}_4} \right) \left. \right] \left. \right\} + C. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Здесь $\sigma_j = \Lambda(\bar{z}_j)$, $b_j = 2(\bar{z}_j + 1 + \gamma)$, $j = 1, \dots, 4$.

Множители при $\sqrt{\Lambda(\bar{z})}$ и $\ln(2(\sqrt{\Lambda(\bar{z})} + \bar{z} + 1 + \gamma))$ в (6.24) равны нулю. Вычисляя остальные коэффициенты, приходим к равенству (6.21). Лемма доказана.

Важную роль при построении асимптотических решений в комплексной плоскости играют линии Стокса [22], [26]. Для уравнения (6.10) линии Стокса изображены на рис. 1, где области I–IV являются областями типа круга.

Рис. 1

Изучим поведение линий Стокса. Определим функцию

$$W(\bar{z}) = \left| \frac{(\bar{z} - \bar{z}_1)(\bar{z} - \bar{z}_2)}{r_1(\bar{z})r_2(\bar{z})} \right|^{b/\sqrt{6}+1} \left| \frac{r_3(\bar{z})r_4(\bar{z})}{(\bar{z} - \bar{z}_3)(\bar{z} - \bar{z}_4)} \right|^{b/\sqrt{6}-1}.$$

Поскольку в силу (6.21)

$$W(\bar{z}) = W(\bar{z}_0) \exp \left\{ \operatorname{Re} \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} \sqrt{Q_0(\bar{z})} d\bar{z} \right\},$$

выходящие из точки поворота $\bar{z}_0$ линии Стокса задаются уравнением $W(\bar{z}) = W(\bar{z}_0)$.

Рассмотрим функцию W при вещественных x . На отрезке $[\bar{z}_-, \bar{z}_+]$ функция $\sqrt{Q_0(x)}$ принимает чисто мнимые значения. Следовательно, этот отрезок входит в граф Стокса, и на нем $W(x) = W(\bar{z}_{\pm})$. Из формулы (6.11) вытекает, что $\sqrt{Q_0(x)}$ меняет знак в точках $\bar{z}_j$, $j = 1, \dots, 4$, $\bar{z} = 1$, а также при переходе из $\bar{z}_-$ в $\bar{z}_+$. Кроме того, при $b > \sqrt{6}$ справедливы неравенства $0 < W(1) < W(\infty) < W(\bar{z}_{\pm})$. Поэтому график функции $W(x)$ имеет вид, представленный на рис. 2

Прямая $W = W(1)$ пересекает график $W(x)$ в двух точках. Именно в абсциссах этих точек выходящие из точки поворота $\bar{z} = 1$ линии Стокса пересекают вещественную ось (см. рис. 1). Такое поведение линий Стокса связано с тем, что функция

$$S(\bar{z}) = \operatorname{Re} \int_1^{\bar{z}} \sqrt{Q_0(\bar{z})} d\bar{z}$$

монотонно возрастает вдоль прямой $\bar{z} = 1 + iy$, $y \in \mathbb{R}^1$, при удалении y от нуля, и, следовательно, линии Стокса при $y \neq 0$ не могут пересекать эту прямую. Для доказательства данного утверждения рассмотрим соотношение

$$\frac{d}{dy} \operatorname{Re} S(1 + iy) = -\operatorname{Im} \sqrt{Q_0(1 + iy)} = 0. \quad (6.25)$$

Рис. 2

Вычисления показывают, что корни (6.25) удовлетворяют уравнению

$$y[(2 - \gamma)y^8 + (20 + 12\gamma)y^6 + (64 + 40\gamma)y^4 + (72 + 40\gamma)y^2 + 24 + 12\gamma] = 0, \quad (6.26)$$

левая часть которого равна нулю лишь при $y = 0$. Действительно, многочлен 8-й степени в (6.26) при $\gamma \in (0, 1/(2 + \sqrt{6}))$ имеет положительные коэффициенты, а значит, он не имеет вещественных корней.

Аналогично показывается, что в случае выполнения соотношения

$$\frac{d}{dy} \operatorname{Re} S(-1 + iy) = -\operatorname{Im} \sqrt{Q_0(-1 + iy)} = 0$$

его корни удовлетворяют уравнению

$$y[(2 + \gamma)y^{10} + (20 + 12\gamma)y^8 + (64 + 56\gamma)y^6 + (72 + 120\gamma)y^4 + (24 + 116\gamma)y^2 + 32\gamma] = 0. \quad (6.27)$$

Левая часть (6.27) при $\gamma > 0$ имеет лишь один вещественный корень $y = 0$. Поэтому выходящие из точек поворота $\bar{z}_{\pm}$ линии Стокса не могут пересекать расположенную между ними ($\bar{z}_{-} < -1 < \bar{z}_{+}$) прямую $\bar{z} = -1 + iy$, $y \in \mathbb{R}^1$, при $y \neq 0$. Следовательно, отличные от $[\bar{z}_{-}, \bar{z}_{+}]$ линии Стокса пересекают вещественную ось в абсциссах точек пересечения прямой $W = W(\bar{z}_{\pm})$ с графиком функции $W(x)$ (см. рис. 2).

Изучим поведение ВКБ-приближений $Y_{\pm}^{\text{WKB}}$ вблизи точек поворота. Разлагая входящие в (6.15) функции по формуле Тейлора, получаем следующую лемму.

ЛЕММА 6.3. *Справедливы асимптотические разложения*

$$Y_{\pm}^{\text{WKB}} = \frac{c_{\pm}^{(+)}}{\sqrt[4]{\bar{z} - \bar{z}_{+}}} \exp \left\{ \pm \frac{\tau_{+}}{\hbar} \frac{2}{3} (\bar{z} - \bar{z}_{+})^{3/2} \right\} \left(1 + O \left(\frac{(\bar{z} - \bar{z}_{+})^{5/2}}{\hbar} \right) + O(\sqrt{\bar{z} - \bar{z}_{+}}) + O \left(\frac{\hbar}{(\bar{z} - \bar{z}_{+})^{3/2}} \right) \right) \quad (6.28)$$

при $\bar{z} \rightarrow \bar{z}_{+}$, $|\arg(\bar{z} - \bar{z}_{+})| < \pi$;

$$Y_{\pm}^{\text{WKB}} = \frac{c_{\pm}^{(-)}}{\sqrt[4]{\bar{z}_{-} - \bar{z}}} \exp \left\{ \pm \frac{\tau_{-}}{\hbar} \frac{2}{3} (\bar{z}_{-} - \bar{z})^{3/2} \right\} \left(1 + O \left(\frac{(\bar{z}_{-} - \bar{z})^{5/2}}{\hbar} \right) + O(\sqrt{\bar{z}_{-} - \bar{z}}) + O \left(\frac{\hbar}{(\bar{z}_{-} - \bar{z})^{3/2}} \right) \right) \quad (6.29)$$

при $\bar{z} \rightarrow \bar{z}_-, |\arg(\bar{z}_- - \bar{z})| < \pi$;

$$Y_{\pm}^{\text{WKB}} = c_{\pm}^{(1)} (\bar{z} - 1)^{-1/2 \pm \xi_{k,l}^{(1)/(a\sqrt{b^2+5b+6})}} \exp \left\{ \mp \frac{a\sqrt{b^2+5b+6}}{2\hbar} [(\bar{z} - 1)^2 - (\bar{z} - 1)^3] \right\} \\ \times \left(1 + O(\bar{z} - 1) + O\left(\frac{(\bar{z} - 1)^4}{\hbar}\right) + O\left(\frac{\hbar}{(\bar{z} - 1)^2}\right) \right) \quad (6.30)$$

при $\bar{z} \rightarrow 1$. Здесь $c_{\pm}^{(+)}$, $c_{\pm}^{(-)}$, $c_{\pm}^{(1)}$ – константы,

$$\tau_+ = \frac{a\sqrt{b^2+4b+6}(\bar{z}_+ - 1)\sqrt{\bar{z}_+ - \bar{z}_-}}{R(\bar{z}_+)} \\ = \frac{a\sqrt{b^2+5b+6}(\sqrt{\gamma+2} - \sqrt{\gamma})\sqrt[4]{\gamma(\gamma+2)}}{[3 - 2(1+\gamma)^2]\bar{z}_+^2} > 0, \quad (6.31)$$

$$\tau_- = \frac{a\sqrt{b^2+4b+6}(\bar{z}_- - 1)\sqrt{\bar{z}_+ - \bar{z}_-}}{R(\bar{z}_-)} \\ = \frac{a\sqrt{b^2+5b+6}(\sqrt{\gamma+2} + \sqrt{\gamma})\sqrt[4]{\gamma(\gamma+2)}}{[3 - 2(1+\gamma)^2]\bar{z}_-^2} > 0. \quad (6.32)$$

Найдем, наконец, ВКБ-приближения для решений уравнения (4.1). В силу (6.1), (6.2), (6.5), (6.21) имеем

$$\Phi_-^{\text{WKB}}(\bar{z}) = \frac{c_-}{\sqrt[4]{(\bar{z}_+ - \bar{z}_-)(\bar{z} - \bar{z}_+)}} (\bar{z} - 1)^{-1/2 - \xi_{k,l}^{(1)/(a\sqrt{b^2+5b+6})}} (r_0(\bar{z}))^{\xi_{k,l}^{(1)/(a\sqrt{b^2+5b+6})}} \\ \times (r_1(\bar{z})r_2(\bar{z}))^{(a+\hbar/2)(1+b/\sqrt{6})/(2\hbar)} (r_3(\bar{z})r_4(\bar{z}))^{(a+\hbar/2)(1-b/\sqrt{6})/(2\hbar)} \\ \times \left(1 + O(\hbar) + O\left(\frac{\hbar}{(\bar{z} - 1)^2}\right) + O\left(\frac{\hbar}{(\bar{z} - \bar{z}_+)^{3/2}}\right) + O\left(\frac{\hbar}{(\bar{z}_- - \bar{z})^{3/2}}\right) \right), \quad (6.33)$$

$$\Phi_+^{\text{WKB}}(\bar{z}) = \frac{c_+}{\sqrt[4]{(\bar{z} - \bar{z}_-)(\bar{z} - \bar{z}_+)}} (\bar{z} - 1)^{-1/2 + \xi_{k,l}^{(1)/(a\sqrt{b^2+5b+6})}} \\ \times ((\bar{z} - \bar{z}_1)(\bar{z} - \bar{z}_2))^{(a+\hbar/2)(1+b/\sqrt{6})/\hbar} ((\bar{z} - \bar{z}_3)(\bar{z} - \bar{z}_4))^{(a+\hbar/2)(1-b/\sqrt{6})/\hbar} \\ \times (r_0(\bar{z}))^{-\xi_{k,l}^{(1)/(a\sqrt{b^2+5b+6})}} (r_1(\bar{z})r_2(\bar{z}))^{-(a+\hbar/2)(1+b/\sqrt{6})/(2\hbar)} \\ \times (r_3(\bar{z})r_4(\bar{z}))^{-(a+\hbar/2)(1-b/\sqrt{6})/(2\hbar)} \\ \times \left(1 + O(\hbar) + O\left(\frac{\hbar}{(\bar{z} - 1)^2}\right) + O\left(\frac{\hbar}{(\bar{z} - \bar{z}_+)^{3/2}}\right) + O\left(\frac{\hbar}{(\bar{z}_- - \bar{z})^{3/2}}\right) \right).$$

Здесь функции $r_j(\bar{z})$, $j = 0, 1, \dots, 4$, заданы формулами (6.16)–(6.20), а $c_{\pm}$ – константы.

§ 7. Асимптотическое решение многоточечной спектральной задачи. Вычисление поправки в спектральной серии

Построим здесь асимптотическое решение многоточечной спектральной задачи $p(\bar{z})$. Вблизи особых точек (4.2) выбираются решения с характеристическими показателями, равными нулю. Согласно формуле (6.33) нулевые показатели имеет ВКБ-приближение $\Phi_-^{\text{WKB}}(\bar{z})$. Именно оно задает асимптотическое решение многоточечной спектральной задачи в областях I–IV (см. рис. 1).

Найдем асимптотические решения около точек поворота. Из (6.10) вытекает, что вблизи $\bar{z}_+$

$$\hbar^2 \frac{d^2 Y}{d\bar{z}^2} - (\tau_+^2 (\bar{z} - \bar{z}_+) + O((\bar{z} - \bar{z}_+)^2) + O(\hbar)) Y = 0,$$

а вблизи $\bar{z}_-$

$$\hbar^2 \frac{d^2 Y}{d\bar{z}^2} - (\tau_-^2 (\bar{z}_- - \bar{z}) + O((\bar{z}_- - \bar{z})^2) + O(\hbar)) Y = 0.$$

Следовательно, главные члены асимптотических разложений выражаются через функции Эйри:

$$y_+^0 = \alpha_{1,+} \text{Ai}\left(\frac{\tau_+^{2/3}(\bar{z} - \bar{z}_+)}{\hbar^{2/3}}\right) + \alpha_{2,+} \text{Bi}\left(\frac{\tau_+^{2/3}(\bar{z} - \bar{z}_+)}{\hbar^{2/3}}\right)$$

вблизи $\bar{z}_+$ и

$$y_-^0 = \alpha_{1,-} \text{Ai}\left(\frac{\tau_-^{2/3}(\bar{z}_- - \bar{z})}{\hbar^{2/3}}\right) + \alpha_{2,-} \text{Bi}\left(\frac{\tau_-^{2/3}(\bar{z}_- - \bar{z})}{\hbar^{2/3}}\right)$$

вблизи $\bar{z}_-$. Здесь $\alpha_{1,\pm}$, $\alpha_{2,\pm}$ – константы, $\tau_{\pm}$ заданы формулами (6.31), (6.32).

В силу известных асимптотик для функций Эйри [27]

$$\text{Ai}(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt[4]{z}} \exp\left\{-\frac{2}{3}z^{3/2}\right\} \left(1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right), \quad |\arg z| < \pi, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (7.1)$$

$$\text{Bi}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{z}} \exp\left\{\frac{2}{3}z^{3/2}\right\} \left(1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right), \quad |\arg z| < \frac{\pi}{3}, \quad |z| \rightarrow \infty,$$

при $|\arg(\bar{z} - \bar{z}_+)| < \pi/3$, $(\bar{z} - \bar{z}_+)/\hbar^{2/3} \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} y_+^0 &= \frac{\alpha_{1,+}\hbar^{1/6}}{2\sqrt{\pi}\tau_+^{1/6}\sqrt[4]{\bar{z} - \bar{z}_+}} \exp\left\{-\frac{2}{3}\frac{\tau_+(\bar{z} - \bar{z}_+)^{3/2}}{\hbar}\right\} \left(1 + O\left(\frac{\hbar}{(\bar{z} - \bar{z}_+)^{3/2}}\right)\right) \\ &+ \frac{\alpha_{2,+}\hbar^{1/6}}{\sqrt{\pi}\tau_+^{1/6}\sqrt[4]{\bar{z} - \bar{z}_+}} \exp\left\{\frac{2}{3}\frac{\tau_+(\bar{z} - \bar{z}_+)^{3/2}}{\hbar}\right\} \left(1 + O\left(\frac{\hbar}{(\bar{z} - \bar{z}_+)^{3/2}}\right)\right). \end{aligned} \quad (7.2)$$

В формуле (7.2) первое слагаемое экспоненциально убывает, а второе – экспоненциально возрастает. Согласуем разложение (7.2) вблизи $\bar{z}_+$ (на расстоянии порядка $\hbar^{1/2}$) с ВКБ-приближением Y_-^{WKB} , которое справедливо в области III (см. рис. 1). Оно имеет экспоненциально убывающую асимптотику (6.28). Следовательно, $\alpha_{2,+} = 0$, а константа $\alpha_{1,+}$ выражается формулой

$$\alpha_{1,+} = c_-^{(+)} 2\sqrt{\pi}\tau_+^{1/6}\hbar^{-1/6}. \quad (7.3)$$

Пусть

$$\begin{aligned} \mu_{1,\pm} &= (3\bar{z}_{\mp} + 2(1 + \gamma) - b[\bar{z}_{\mp}(1 + \gamma) + 1])(3 - 2(1 + \gamma)^2)^{-1}, \\ \mu_{2,\pm} &= (8\bar{z}_{\mp}(1 + \gamma)^3 + 2(1 + \gamma)^2 + 3 - b[3\bar{z}_{\mp}(2(1 + \gamma)^2 + 1) + 2(1 + \gamma)]) \\ &\quad \times (3 - 2(1 + \gamma)^2)^{-2}. \end{aligned}$$

Разлагая в окрестности точки $\bar{z}_+$ функцию (6.2) по формуле Тейлора, получаем следующую лемму.

ЛЕММА 7.1. Асимптотическое решение многоточечной спектральной задачи вблизи $\bar{z}_+$ имеет вид

$$p(\bar{z}) = E(\bar{z}_+) \exp \left\{ \mu_{1,+} \frac{a(\bar{z} - \bar{z}_+)}{\hbar} + \mu_{2,+} \frac{a(\bar{z} - \bar{z}_+)^2}{2\hbar} \right\} \left(y_+^0 + O((\bar{z} - \bar{z}_+) y_+^0) \right. \\ \left. + O\left(\frac{(\bar{z} - \bar{z}_+)^3}{\hbar} y_+^0 \right) + O\left(\hbar \frac{dy_+^0}{d\bar{z}} \right) + O\left((\bar{z} - \bar{z}_+)^2 \frac{dy_+^0}{d\bar{z}} \right) \right), \quad (7.4)$$

где

$$y_+^0 = \alpha_{1,+} \operatorname{Ai} \left(\frac{\tau_+^{2/3} (\bar{z} - \bar{z}_+)}{\hbar^{2/3}} \right), \quad (7.5)$$

а константа $\alpha_{1,+}$ задана формулой (7.3).

Аналогично показывается, что y_-^0 согласуется с ВКБ-приближением Y_-^{WKB} , которое является асимптотическим решением уравнения (6.10) в области IV (см. рис. 1) и экспоненциально убывает вблизи $\bar{z}_-$. Справедлива

ЛЕММА 7.2. Асимптотическое решение многоточечной спектральной задачи вблизи $\bar{z}_-$ имеет вид

$$p(\bar{z}) = E(\bar{z}_-) \exp \left\{ \mu_{1,-} \frac{a(\bar{z} - \bar{z}_-)}{\hbar} + \mu_{2,-} \frac{a(\bar{z} - \bar{z}_-)^2}{2\hbar} \right\} \left(y_-^0 + O((\bar{z}_- - \bar{z}) y_-^0) \right. \\ \left. + O\left(\frac{(\bar{z}_- - \bar{z})^3}{\hbar} y_-^0 \right) + O\left(\hbar \frac{dy_-^0}{d\bar{z}} \right) + O\left((\bar{z}_- - \bar{z})^2 \frac{dy_-^0}{d\bar{z}} \right) \right), \quad (7.6)$$

где

$$y_-^0 = \alpha_{1,-} \operatorname{Ai} \left(\frac{\tau_-^{2/3} (\bar{z}_- - \bar{z})}{\hbar^{2/3}} \right), \quad (7.7)$$

а константа $\alpha_{1,-}$ выражается формулой $\alpha_{1,-} = c_-^{(-)} 2\sqrt{\pi} \tau_-^{1/6} \hbar^{-1/6}$.

Далее найдем асимптотическое решение многоточечной спектральной задачи в области V (см. рис. 1). Рассмотрим определенные формулами (7.5), (7.7) функции y_+^0 и y_-^0 . В силу (7.1), (6.28), (6.29) вблизи точек $\bar{z}_+$ и $\bar{z}_-$ они согласуются с Y_-^{WKB} . Следовательно, Φ_-^{WKB} является асимптотическим решением многоточечной спектральной задачи также и в области V.

Построим, наконец, решение многоточечной спектральной задачи вблизи точки поворота $\bar{z} = 1$, а также определим числа $\xi_{k,l}^{(1)}$. Разложим в уравнении (6.10) функции $Q_0(\bar{z})$ и $R(\bar{z})$ по формуле Тейлора в окрестности $\bar{z} = 1$. В результате после замены

$$\bar{u} = \frac{\bar{z} - 1}{\sqrt{\hbar}\beta}, \quad (7.8)$$

где

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2a} \sqrt[4]{b^2 + 5b + 6}},$$

получаем, что

$$\frac{d^2 Y}{d\bar{u}^2} + \left\{ -\frac{\bar{u}^2}{4} + \nu + \frac{1}{2} + \sqrt{\hbar} \left(\frac{3}{4} \beta \bar{u}^3 - 4 \xi_{k,l}^{(1)} \beta^3 \bar{u} \right) + O(\hbar) + O(\hbar \bar{u}^4) \right\} Y = 0. \quad (7.9)$$

Здесь

$$\nu = 2\xi_{k,l}^{(1)}\beta^2 - \frac{1}{2}. \quad (7.10)$$

Будем искать асимптотическое решение уравнения (7.9) в виде

$$Y = y_0(\bar{u}) + \sqrt{\hbar}y_1(\bar{u}) + O(\hbar y_0) + O(\hbar\bar{u}^6 y_0) + O\left(\hbar\bar{u}\frac{dy_0}{d\bar{u}}\right) + O\left(\hbar\bar{u}^3\frac{dy_0}{d\bar{u}}\right). \quad (7.11)$$

Тогда главный член асимптотики удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 y_0}{d\bar{u}^2} + \left(-\frac{\bar{u}^2}{4} + \nu + \frac{1}{2}\right)y_0 = 0,$$

общее решение которого представимо в виде линейной комбинации функций параболического цилиндра

$$y_0 = \alpha_1 D_{-\nu-1}(i\bar{u}) + \alpha_2 D_\nu(\bar{u}). \quad (7.12)$$

Здесь α_1, α_2 – константы.

Воспользуемся асимптотическими разложениями для функций параболического цилиндра [20]. При $|z| \rightarrow \infty$ имеем

$$D_\nu(z) = z^\nu e^{-z^2/4}(1 + O(z^{-2})), \quad |\arg z| < \frac{3\pi}{4}, \quad (7.13)$$

$$D_\nu(z) = z^\nu e^{-z^2/4}(1 + O(z^{-2})) - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{\nu\pi i} z^{-\nu-1} e^{z^2/4}(1 + O(z^{-2})), \quad (7.14)$$

$$\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{5\pi}{4},$$

где $\Gamma(\nu)$ – гамма-функция. Следовательно, при $|\bar{u}| \rightarrow \infty$, $-3\pi/4 < \arg \bar{u} < -\pi/4$

$$y_0 = \alpha_1 \left(\frac{i(\bar{z}-1)}{\sqrt{\hbar}\beta}\right)^{-\nu-1} \exp\left\{\frac{a\sqrt{b^2+5b+6}(\bar{z}-1)^2}{2\hbar}\right\} \left(1 + O\left(\frac{\hbar}{(\bar{z}-1)^2}\right)\right) + \alpha_2 \left(\frac{\bar{z}-1}{\sqrt{\hbar}\beta}\right)^\nu \exp\left\{-\frac{a\sqrt{b^2+5b+6}(\bar{z}-1)^2}{2\hbar}\right\} \left(1 + O\left(\frac{\hbar}{(\bar{z}-1)^2}\right)\right). \quad (7.15)$$

Первое слагаемое в (7.15) экспоненциально убывает, а второе – экспоненциально растет. В области V вблизи $\bar{z} = 1$ (на расстоянии порядка $\hbar^{3/8}$) при $-3\pi/4 < \arg \bar{u} < -\pi/4$ функция y_0 должна согласовываться с Y_-^{WKB} , имеющим разложение (6.30). Поскольку члены этого разложения экспоненциально убывают при $-3\pi/4 < \arg \bar{u} < -\pi/4$, то

$$\alpha_2 = 0. \quad (7.16)$$

Далее, в силу (7.14) при $|\bar{u}| \rightarrow \infty$, $\pi/4 < \arg \bar{u} < 3\pi/4$ имеем

$$y_0 = \alpha_1 \left[\left(\frac{i(\bar{z}-1)}{\sqrt{\hbar}\beta}\right)^{-\nu-1} \exp\left\{\frac{a\sqrt{b^2+5b+6}(\bar{z}-1)^2}{2\hbar}\right\} \left(1 + O\left(\frac{\hbar}{(\bar{z}-1)^2}\right)\right) - \frac{\sqrt{2\pi} \exp\{-(\nu+1)\pi i\}}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{i(\bar{z}-1)}{\sqrt{\hbar}\beta}\right)^\nu \times \exp\left\{-\frac{a\sqrt{b^2+5b+6}(\bar{z}-1)^2}{2\hbar}\right\} \left(1 + O\left(\frac{\hbar}{(\bar{z}-1)^2}\right)\right) \right].$$

Здесь первое слагаемое экспоненциально убывает, а второе – экспоненциально растет. В области V вблизи $\bar{z} = 1$ при $\pi/4 < \arg \bar{u} < 3\pi/4$ функция y_0 также должна согласовываться с Y_-^{WKB} , имеющим разложение (6.30). Поскольку члены этого разложения экспоненциально убывают при $\pi/4 < \arg \bar{u} < 3\pi/4$, то приходим к условию

$$\frac{1}{\Gamma(\nu + 1)} = 0.$$

Как известно [27], гамма-функция $\Gamma(\nu + 1)$ имеет полюсы лишь при

$$\nu = -k - 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7.17)$$

Поскольку ν и $\xi_{k,l}^{(1)}$ связаны равенством (7.10), поправка в спектральной серии найдена. Доказана

ЛЕММА 7.3. Числа $\xi_{k,l}^{(1)}$ в формуле (6.9) имеют вид

$$\xi_{k,l}^{(1)} = -a\sqrt{b^2 + 5b + 6}\left(k + \frac{1}{2}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7.18)$$

Из равенств (7.12), (7.16)–(7.18) вытекает, что

$$y_0 = \alpha_1 D_k(i\bar{u}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.19)$$

где $\alpha_1 = c_-^{(1)} \hbar^{k/2} (-i\beta)^k$. Функции из правой части (7.19) выражаются через полиномы Эрмита:

$$y_0 = \frac{\alpha_1}{2^{k/2}} H_k\left(\frac{i\bar{u}}{\sqrt{2}}\right) e^{\bar{u}^2/4}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7.20)$$

В силу (6.30), (7.13) функция y_0 согласуется в областях I, II (см. рис. 1) вблизи точки $\bar{z} = 1$ с ВКБ-приближением Y_-^{WKB} .

Найдем следующий член в разложении (7.11). Из (7.9), (7.17)–(7.19) вытекает, что y_1 удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 y_1}{d\bar{u}^2} + \left(-\frac{\bar{u}^2}{4} - k - \frac{1}{2}\right) y_1 = \left(-\frac{3}{4}\beta\bar{u}^3 - 2\left(k + \frac{1}{2}\right)\beta\bar{u}\right) \alpha_1 D_k(i\bar{u}). \quad (7.21)$$

Непосредственным дифференцированием доказываем, что общее решение уравнения (7.21) имеет вид

$$y_1 = \frac{i\beta\alpha_1}{2} [-\bar{u}^2 D'_k(i\bar{u}) - i\bar{u} D_k(i\bar{u})] + \alpha_{1,1} D_k(i\bar{u}) + \alpha_{1,2} D_{-k-1}(\bar{u}).$$

Здесь $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{1,2}$ – константы. Из условия согласования функции y_1 с ВКБ-приближением вытекает, что $\alpha_{1,2} = 0$. Положим, кроме того, $\alpha_{1,1} = 0$, считая при этом, что в α_1 содержится поправка порядка $\sqrt{\hbar}$. Функция y_1 также выражается через полиномы Эрмита:

$$y_1 = -\frac{i\beta\alpha_1}{2^{(k+1)/2}} \left\{ \left[\left(\frac{i\bar{u}}{\sqrt{2}}\right)^3 + \frac{i\bar{u}}{\sqrt{2}} \right] H_k\left(\frac{i\bar{u}}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{i\bar{u}}{\sqrt{2}}\right)^2 H'_k\left(\frac{i\bar{u}}{\sqrt{2}}\right) \right\} e^{\bar{u}^2/4}. \quad (7.22)$$

Поскольку справедливо равенство (6.1), для нахождения асимптотического решения многоточечной спектральной задачи вблизи $\bar{z} = 1$ остается разложить функцию $E(\bar{z})$ по степеням $\bar{z} - 1$. Делая замену (7.8), получаем

$$E(\bar{z}) = \mu 2^{k/2} \exp \left\{ \frac{a\beta\bar{u}}{\sqrt{\hbar}} - \frac{a(b+3)\beta^2\bar{u}^2}{2} \right\} \times \left(1 + \frac{i\sqrt{\hbar}\beta}{\sqrt{2}} \left[\frac{8+3b}{3\sqrt{b^2+5b+6}} \left(\frac{i\bar{u}}{\sqrt{2}} \right)^3 + \frac{i\bar{u}}{\sqrt{2}} \right] + O(\hbar) + O(\hbar\bar{u}^6) \right). \quad (7.23)$$

Здесь

$$\mu = (-1)^{a(1+b/\sqrt{6})/(2\hbar)+(b/\sqrt{6}-1)/4} (\sqrt{2} + \sqrt{3})^{-(a+\hbar/2)b/(\sqrt{6}\hbar)} 2^{a/(2\hbar)-1/4-k/2}. \quad (7.24)$$

Далее перемножим (7.23) и (7.11). Поскольку y_0, y_1 определены соотношениями (7.20), (7.22), приходим к разложению

$$p(\bar{z}) = p_0(\bar{u}) + \sqrt{\hbar} p_1(\bar{u}) + O(\hbar p_0) + O(\hbar\bar{u}^6 p_0) + \exp \left\{ \frac{a\beta\bar{u}}{\sqrt{\hbar}} - \frac{a(b+3)\beta^2\bar{u}^2}{2} \right\} \left(O \left(\hbar\bar{u} \frac{dy_0}{d\bar{u}} \right) + O \left(\hbar\bar{u}^5 \frac{dy_0}{d\bar{u}} \right) \right), \quad (7.25)$$

где

$$p_0 = \alpha_1 \mu \exp \left\{ \frac{a\beta\bar{u}}{\sqrt{\hbar}} + \left(1 - \sqrt{\frac{b+3}{b+2}} \right) \frac{\bar{u}^2}{4} \right\} H_k \left(\frac{i\bar{u}}{\sqrt{2}} \right), \quad (7.26)$$

$$p_1 = \frac{i\beta\alpha_1\mu}{\sqrt{2}} \exp \left\{ \frac{a\beta\bar{u}}{\sqrt{\hbar}} + \left(1 - \sqrt{\frac{b+3}{b+2}} \right) \frac{\bar{u}^2}{4} \right\} \times \left(\left(\frac{8+3b}{3\sqrt{b^2+5b+6}} - 1 \right) \left(\frac{i\bar{u}}{\sqrt{2}} \right)^3 H_k \left(\frac{i\bar{u}}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{i\bar{u}}{\sqrt{2}} \right)^2 H'_k \left(\frac{i\bar{u}}{\sqrt{2}} \right) \right).$$

ЛЕММА 7.4. *Асимптотическое решение многоточечной спектральной задачи вблизи точки поворота $\bar{z} = 1$ имеет вид (7.25).*

Формула (7.18) для $\xi_{k,l}^{(1)}$ позволяет записать в окончательной форме выражение (6.33) для $\Phi_-^{\text{WKB}}(\bar{z})$:

$$\Phi_-^{\text{WKB}}(\bar{z}) = \Phi_{-,0}^{\text{WKB}}(\bar{z}) \left(1 + O(\hbar) + O \left(\frac{\hbar}{(\bar{z}-1)^2} \right) + O \left(\frac{\hbar}{(\bar{z}-\bar{z}_+)^{3/2}} \right) + O \left(\frac{\hbar}{(\bar{z}_- - \bar{z})^{3/2}} \right) \right), \quad (7.27)$$

где

$$\Phi_{-,0}^{\text{WKB}}(\bar{z}) = \frac{c_- (\bar{z}-1)^k}{\sqrt[4]{(\bar{z}-\bar{z}_-)(\bar{z}-\bar{z}_+)}} (r_0(\bar{z}))^{-k-1/2} (r_1(\bar{z})r_2(\bar{z}))^{(a+\hbar/2)(1+b/\sqrt{6})/(2\hbar)} \times (r_3(\bar{z})r_4(\bar{z}))^{(a+\hbar/2)(1-b/\sqrt{6})/(2\hbar)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.28)$$

c_- – константа, $r_j(\bar{z})$, $j = 0, 1, \dots, 4$, определены формулами (6.16)–(6.20).

Таким образом, асимптотическое решение многоточечной спектральной задачи построено. Числа $\xi_{k,l}$ задаются формулами (6.9), (7.18), а антиголоморфная функция $p(\bar{z})$ получается в результате согласования асимптотик. А именно, $p(\bar{z}) = \Phi_-^{\text{WKB}}(\bar{z})$ является асимптотическим решением уравнения (4.1) на

всей комплексной плоскости, за исключением малых окрестностей точек поворота $\bar{z}_+$, $\bar{z}_-$, 1, а также отрезка $[\bar{z}_-, \bar{z}_+]$. Вблизи точек $\bar{z}_+$, $\bar{z}_-$, 1 функция $p(\bar{z})$ задается формулами (7.4), (7.6), (7.25) соответственно. Асимптотики согласуются между собой на расстояниях порядка $\hbar^{1/2}$ от точек $\bar{z}_\pm$ и порядка $\hbar^{3/8}$ от точки 1.

Наконец, вблизи отрезка $[\bar{z}_-, \bar{z}_+]$, который является линией Стокса, искомая асимптотика представима в виде суммы двух функций $\Phi_-^{\text{WKB}}(\bar{z})$, причем в первой функции берется ветвь, отвечающая обходу точки $\bar{z}_+$ по верхней полуплоскости, а во второй – по нижней. Такое представление для $p(\bar{z})$ вытекает из известного разложения функции Эйри [23]

$$\text{Ai}(-z) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt[4]{z}} \sin\left(\frac{2}{3}z^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{z^{7/4}}\right), \quad |\arg z| < \frac{2\pi}{3}, \quad |z| \rightarrow \infty.$$

Изучим поведение асимптотического решения многоточечной спектральной задачи при $\bar{z} \rightarrow \infty$.

ЛЕММА 7.5. *При $|\bar{z}| \gg l$, $l \rightarrow \infty$ справедлива асимптотика*

$$\Phi_-^{\text{WKB}}(\bar{z}) = c_-(2 + \sqrt{4 + 2\gamma})^{-k-1/2} c_\infty^{(l+1)/4} \bar{z}^l \left(1 + O\left(\frac{1}{\hbar \bar{z}}\right) + O(\hbar)\right), \quad (7.29)$$

где

$$c_\infty = 8(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{\sqrt{2}b/\sqrt{3}} (\gamma + 2)^2 \left(1 + \sqrt{1 + \gamma(\sqrt{6} - 2)}\right)^{2+\sqrt{2}b/\sqrt{3}} \times \left(1 + \sqrt{1 - \gamma(\sqrt{6} + 2)}\right)^{2-\sqrt{2}b/\sqrt{3}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$\sqrt{2} \sqrt{\sqrt{3} + 1} \sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2} + 1, \quad \sqrt{2} \sqrt{\sqrt{3} - 1} \sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1,$$

в силу (6.17), (6.18) имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\bar{z} \rightarrow \infty} \frac{r_1(\bar{z})r_2(\bar{z})}{\bar{z}^2} &= 4\sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \left(\sqrt{1 + \gamma(\sqrt{6} - 2)} + 1 + \gamma \frac{1 - \sqrt{3} + \sqrt{2}}{2} \right) \\ &\quad \times \left(\sqrt{1 + \gamma(\sqrt{6} - 2)} + 1 + \gamma \frac{1 + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} \right) \\ &= 4(\sqrt{6} + 2) \left[2 + \gamma + \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right) \gamma(\sqrt{6} - 2) + 2 \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right) \sqrt{1 + \gamma(\sqrt{6} - 2)} \right] \\ &= 2(\sqrt{6} + 2)(2 + \gamma) \left(1 + \sqrt{1 + \gamma(\sqrt{6} - 2)}\right)^2. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Аналогично показывается, что

$$\lim_{\bar{z} \rightarrow \infty} \frac{r_3(\bar{z})r_4(\bar{z})}{\bar{z}^2} = 2(\sqrt{6} - 2)(2 + \gamma) \left(1 + \sqrt{1 - \gamma(\sqrt{6} + 2)}\right)^2. \quad (7.31)$$

Из формул (7.28), (6.16), (7.30), (7.31) вытекает, что

$$\begin{aligned}\Phi_-^{\text{WKB}}(\bar{z}) &= c_- (2 + \sqrt{4 + 2\gamma})^{-k-1/2} \\ &\quad \times \left[2(\sqrt{6} + 2)(2 + \gamma) \left(1 + \sqrt{1 + \gamma(\sqrt{6} - 2)} \right)^2 \right]^{(l+1)(1+b/\sqrt{6})/4} \\ &\quad \times \left[2(\sqrt{6} - 2)(2 + \gamma) \left(1 + \sqrt{1 - \gamma(\sqrt{6} + 2)} \right)^2 \right]^{(l+1)(1-b/\sqrt{6})/4} \\ &\quad \times \bar{z}^{k-1/2-k-1/2+(l+1)(1+b/\sqrt{6})/4+(l+1)(1-b/\sqrt{6})/4} \left(1 + O\left(\frac{1}{\hbar\bar{z}}\right) + O(\hbar) \right) \\ &= c_- (2 + \sqrt{4 + 2\gamma})^{-k-1/2} c_\infty^{(l+1)/4} \bar{z}^l \left(1 + O\left(\frac{1}{\hbar\bar{z}}\right) + O(\hbar) \right).\end{aligned}$$

Лемма доказана.

§ 8. Асимптотика многочленов $\Phi(\bar{z})$

Подставим асимптотическое решение многоточечной спектральной задачи $p(\bar{z})$ в правую часть формулы (4.9) и вычислим асимптотику возникающего интеграла. Подынтегральная функция в (4.9) не имеет точек перевала. Поэтому воспользуемся интегральной теоремой Коши.

ЛЕММА 8.1. *При $\bar{z} \notin [\bar{z}_-, \bar{z}_+]$ таких, что*

$$|\bar{z} - 1| \gtrsim \hbar^{3/8}, \quad |\bar{z} - \bar{z}_\pm| \gtrsim \hbar^{1/2}, \quad (8.1)$$

определенный формулой (4.9) многочлен $\Phi(\bar{z})$ представим в виде

$$\Phi(\bar{z}) = \Phi_-^{\text{WKB}}(\bar{z}) + N(\bar{z}), \quad (8.2)$$

где

$$N(\bar{z}) = -\frac{\bar{z}^{l+1}}{2\pi i} \oint_{\gamma_{+,-}} \frac{\Phi_-^{\text{WKB}}(\bar{u}) d\bar{u}}{\bar{u}^{l+1}(\bar{u} - \bar{z})}. \quad (8.3)$$

Здесь замкнутый контур $\gamma_{+,-}$ является отрезком $[\bar{z}_-, \bar{z}_+]$, проходимым дважды соответственно по верхнему и нижнему берегу разреза, соединяющего точки $\bar{z}_-, \bar{z}_+$, который ориентирован против часовой стрелки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{z}$ лежит вне цикла γ , $\bar{z} \notin [\bar{z}_-, \bar{z}_+]$ и выполнены условия (8.1). Рассмотрим контуры, изображенные на рис. 3. Окружность с центром в точке $\bar{z} = 1$ имеет радиус порядка $\hbar^{3/8}$, а окружности с центром в $\bar{z}_\pm$ — порядка $\hbar^{1/2}$. Воспользовавшись интегральной теоремой Коши и интегральной формулой Коши, представим интеграл по γ в следующем виде:

$$\begin{aligned}\Phi(\bar{z}) &= \frac{\bar{z}^{l+1}}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\Phi_-^{\text{WKB}}(\bar{u}) d\bar{u}}{\bar{u}^{l+1}(\bar{u} - \bar{z})} \\ &= -\frac{\bar{z}^{l+1}}{2\pi i} \oint_{\gamma_{\bar{z}}} \frac{\Phi_-^{\text{WKB}}(\bar{u}) d\bar{u}}{\bar{u}^{l+1}(\bar{u} - \bar{z})} - \frac{\bar{z}^{l+1}}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{\Phi_-^{\text{WKB}}(\bar{u}) d\bar{u}}{\bar{u}^{l+1}(\bar{u} - \bar{z})} \\ &\quad - \frac{\bar{z}^{l+1}}{2\pi i} \oint_{\tilde{\gamma}} \frac{\Phi_-^{\text{WKB}}(\bar{u}) d\bar{u}}{\bar{u}^{l+1}(\bar{u} - \bar{z})} - \frac{\bar{z}^{l+1}}{2\pi i} \oint_{\gamma_\infty} \frac{\Phi_-^{\text{WKB}}(\bar{u}) d\bar{u}}{\bar{u}^{l+1}(\bar{u} - \bar{z})}. \quad (8.4)\end{aligned}$$

Рис. 3

Изучим входящие в (8.4) слагаемые. Из интегральной формулы Коши вытекает, что

$$-\frac{\bar{z}^{l+1}}{2\pi i} \oint_{\gamma_{\bar{z}}} \frac{\Phi_-^{\text{WKB}}(\bar{u}) d\bar{u}}{\bar{u}^{l+1}(\bar{u} - \bar{z})} = \Phi_-^{\text{WKB}}(\bar{z}).$$

Далее, в силу антиголоморфности подынтегральной функции имеем

$$\oint_{\gamma_1} \frac{\Phi_-^{\text{WKB}}(\bar{u}) d\bar{u}}{\bar{u}^{l+1}(\bar{u} - \bar{z})} = 0.$$

Кроме того,

$$\oint_{\gamma_\infty} \frac{\Phi_-^{\text{WKB}}(\bar{u}) d\bar{u}}{\bar{u}^{l+1}(\bar{u} - \bar{z})} = 0$$

согласно теореме о вычетах и (7.29). Наконец, учитывая (6.28), (6.29), преобразуем контур γ в контур $\gamma_{+,-}$. В результате равенство (8.4) принимает вид (8.2).

Пусть теперь $\bar{z}$ лежит внутри γ . Тогда

$$\Phi(\bar{z}) = \Phi_-^{\text{WKB}}(\bar{z}) + \frac{\bar{z}^{l+1}}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\Phi_-^{\text{WKB}}(\bar{u}) d\bar{u}}{\bar{u}^{l+1}(\bar{u} - \bar{z})}. \quad (8.5)$$

Интеграл в (8.5) преобразуется аналогично случаю, когда $\bar{z}$ лежит вне γ . В результате снова приходим к формуле (8.2). Лемма доказана.

Перейдем к рассмотрению $\bar{z}$, расположенных внутри γ_1 . Аналогично соотношению (8.4) находим, что

$$\Phi(\bar{z}) = -\frac{\bar{z}^{l+1}}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{p(\bar{u}) d\bar{u}}{\bar{u}^{l+1}(\bar{u} - \bar{z})} - \frac{\bar{z}^{l+1}}{2\pi i} \oint_{\gamma_\infty} \frac{\Phi_-^{\text{WKB}}(\bar{u}) d\bar{u}}{\bar{u}^{l+1}(\bar{u} - \bar{z})} - \frac{\bar{z}^{l+1}}{2\pi i} \oint_{\tilde{\gamma}} \frac{\Phi_-^{\text{WKB}}(\bar{u}) d\bar{u}}{\bar{u}^{l+1}(\bar{u} - \bar{z})}. \quad (8.6)$$

Интегралы по контурам γ_∞ и $\tilde{\gamma}$ в (8.6) были изучены выше, при доказательстве леммы 8.1, а интеграл по контуру γ_1 вычисляется с помощью интегральной формулы Коши. Таким образом, справедливо равенство

$$\Phi(\bar{z}) = p(\bar{z}) + N(\bar{z}), \quad (8.7)$$

где $p(\bar{z})$, $N(\bar{z})$ определены формулами (7.25), (8.3).

Как следует из (8.2), (8.7), функция $N(\bar{z})$ равна разности между полиномом $\Phi(\bar{z})$ и асимптотическим решением многоточечной спектральной задачи. Вычислим значения входящей в (8.3) функции $\Phi_{-,0}^{\text{WKB}}(\bar{z})$ на контуре $\gamma_{+,-}$, которые потребуются далее при изучении асимптотики $N(\bar{z})$. Главный член ВКБ-приближения $\Phi_{-,0}^{\text{WKB}}(\bar{z})$ задается формулой (7.28). Непосредственным дифференцированием доказывается

ЛЕММА 8.2. *Справедливо равенство*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Phi_{-,0}^{\text{WKB}}(\bar{z})} \frac{d}{d\bar{z}} \Phi_{-,0}^{\text{WKB}}(\bar{z}) = \\ = \left(\frac{a}{\hbar} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{2\bar{z}^3 + b\bar{z}^2 - 4\bar{z} - b}{R(\bar{z})} - \frac{\sqrt{b^2 + 4b + 6(\bar{z} - 1)\sqrt{\Lambda(\bar{z})}}}{R(\bar{z})} \right) \\ - \frac{\bar{z}^2 + (1 + 3\gamma/2)\bar{z} - \gamma/2}{(\bar{z} - 1)\Lambda(\bar{z})} + \frac{2(k + 1/2)\sqrt{1 + \gamma/2}}{(\bar{z} - 1)\sqrt{\Lambda(\bar{z})}}, \end{aligned} \quad (8.8)$$

где $R(\bar{z})$, $\Lambda(\bar{z})$ определены формулами (4.3), (6.12).

Равенство (8.8) будет использовано при доказательстве следующей леммы.

ЛЕММА 8.3. *Функция $N(\bar{z})$ при $\bar{z} \notin [\bar{z}_-, \bar{z}_+]$, $\hbar \rightarrow 0$ представима в виде*

$$N(\bar{z}) = \frac{\bar{z}^{l+1}}{\pi} \int_{\bar{z}_-}^{\bar{z}_+} \frac{c_* \Pi(x, \hbar)}{x^{l+1}(x - \bar{z})} \sin(\Theta(x, \hbar) + \varphi_*) dx (1 + O(\sqrt{\hbar})), \quad (8.9)$$

где

$$\Pi(x, \hbar) = \frac{|x^2 - \sqrt{6}x + 1|^{(a+\hbar/2)(1+b/\sqrt{6})/(2\hbar)} |x^2 + \sqrt{6}x + 1|^{(a+\hbar/2)(1-b/\sqrt{6})/(2\hbar)}}{\sqrt{1-x} \sqrt[4]{(x - \bar{z}_-)(\bar{z}_+ - x)}},$$

$$\begin{aligned} \Theta(x, \hbar) = - \left(\frac{a}{\hbar} + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{b}{\sqrt{6}} \right) \right. \\ \times \left[\sum_{j=0}^1 \arcsin \frac{(\bar{z}_{1+j} + 1 + \gamma)x + \bar{z}_{1+j}(\bar{z}_{2-j} + 1 + \gamma)}{(x - \bar{z}_{1+j})\sqrt{\gamma(\gamma + 2)}} \right] \\ + \left(1 - \frac{b}{\sqrt{6}} \right) \left[\sum_{j=0}^1 \arcsin \frac{(\bar{z}_{3+j} + 1 + \gamma)x + \bar{z}_{3+j}(\bar{z}_{4-j} + 1 + \gamma)}{(x - \bar{z}_{3+j})\sqrt{\gamma(\gamma + 2)}} \right] \Big\} \\ + \left(k + \frac{1}{2} \right) \arcsin \left(\sqrt{\frac{2 + \gamma}{\gamma}} \frac{x + 1}{x - 1} \right), \\ c_* = c_- (4\gamma(\gamma + 2))^{(l-k)/2+1/4} (4 + 2\gamma)^{k/2+1/4}, \end{aligned} \quad (8.10)$$

$$\varphi_* = - \frac{\pi(l+1)}{4} \left(1 + \frac{b}{\sqrt{6}} \right) - \frac{\pi k}{2}. \quad (8.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\Phi_{-,0}^{\text{WKB}}(x + i0)$ и $\Phi_{-,0}^{\text{WKB}}(x - i0)$ значения функции (7.28) на верхнем и нижнем берегах разреза, $x \in [\bar{z}_-, \bar{z}_+]$. Пусть

$$\Phi_{-,0}^{\text{WKB}}(x + i0) = t(x) e^{s_1(x)/\hbar} e^{i(s_2(x)/\hbar + \varphi(x))}. \quad (8.12)$$

Поскольку $\Phi_{-,0}^{\text{WKB}}(x - i0) = \overline{\Phi_{-,0}^{\text{WKB}}(x + i0)}$, справедливо равенство

$$- \frac{\bar{z}^{l+1}}{2\pi i} \oint_{\gamma_{+,-}} \frac{\Phi_{-,0}^{\text{WKB}}(\bar{u}) d\bar{u}}{\bar{u}^{l+1}(\bar{u} - \bar{z})} = \frac{\bar{z}^{l+1}}{\pi} \int_{\bar{z}_-}^{\bar{z}_+} \frac{t(x) e^{s_1(x)/\hbar} \sin(s_2(x)/\hbar + \varphi(x))}{x^{l+1}(x - \bar{z})} dx.$$

Из (8.8) вытекает, что при $x \in (\bar{z}_-, \bar{z}_+)$

$$\frac{s'_1(x)}{\hbar} + \frac{t'(x)}{t(x)} = \left(\frac{a}{\hbar} + \frac{1}{2} \right) \frac{2x^3 + bx^2 - 4x - b}{R(x)} - \frac{x^2 + (1 + 3\gamma/2)x - \gamma/2}{(x-1)\Lambda(x)}. \quad (8.13)$$

Разлагая (8.13) на простейшие дроби и затем интегрируя их, находим, что $t(x)e^{s_1(x)/\hbar} = c_* \Pi(x, \hbar)$. Здесь c_* – константа.

Далее, в силу (8.8) на верхнем берегу разреза

$$\frac{s'_2(x)}{\hbar} + \varphi'(x) = - \left(\frac{a}{\hbar} + \frac{1}{2} \right) \frac{\sqrt{b^2 + 4b + 6(x-1)}\sqrt{-\Lambda(x)}}{R(x)} - \frac{2(k+1/2)\sqrt{1+\gamma/2}}{(x-1)\sqrt{-\Lambda(x)}}. \quad (8.14)$$

Вычислим интеграл от правой части (8.14). При $x \in (\bar{z}_-, \bar{z}_+)$ справедливо равенство

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-\Lambda(x)}} = -\frac{1}{\sqrt{4+2\gamma}} \arcsin \left(\sqrt{\frac{2+\gamma}{\gamma}} \frac{x+1}{x-1} \right) + C,$$

где C – произвольная константа. Интеграл

$$\int \frac{(x-1)\sqrt{-\Lambda(x)}}{R(x)} dx$$

находится аналогично (6.24). При этом используется следующая формула [25]:

$$\int \frac{\sqrt{X(x)}}{x} dx = \sqrt{X(x)} - \frac{b}{2\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} - \sqrt{-c} \arcsin \frac{bx+2c}{x\sqrt{-\Delta}} + C.$$

Здесь $X(x) = ax^2 + bx + c$, причем $c < 0$, $a < 0$, $\Delta = 4ac - b^2 < 0$. В итоге получаем, что $s_2(x)/\hbar + \varphi(x) = \Theta(x, \hbar) + \varphi_*$, где φ_* – константа.

Значения констант c_* , φ_* определяются в результате сравнения асимптотик функций (7.28), (8.12) вблизи $\bar{z}_+$. В силу равенств

$$\frac{(\bar{z}_{i+j} + 1 + \gamma)\bar{z}_{\pm} + \bar{z}_{i+j}(\bar{z}_{i-j+1} + 1 + \gamma)}{(\bar{z}_{\pm} - \bar{z}_{i+j})\sqrt{\gamma(\gamma+2)}} = \mp 1, \quad i = 1, 3, \quad j = 0, 1,$$

$$\sqrt{\frac{2+\gamma}{\gamma}} \frac{\bar{z}_{\pm} + 1}{\bar{z}_{\pm} - 1} = \mp 1$$

приходим к формулам (8.10), (8.11). Лемма доказана.

Отметим, что если $\bar{z} \in (\bar{z}_-, \bar{z}_+)$, то при разложении $\Phi(\bar{z})$ также возникает интеграл (8.9), который берется уже в смысле главного значения.

Изучим поведение подынтегральной функции в (8.9). Она содержит экспоненту $e^{aS_*(x)/\hbar}$, где

$$S_*(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b}{\sqrt{6}} \right) \ln |x^2 - \sqrt{6}x + 1| + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b}{\sqrt{6}} \right) \ln |x^2 + \sqrt{6}x + 1| - 2 \ln |x|. \quad (8.15)$$

ЛЕММА 8.4. *Функция $S_*(x)$ достигает наибольшего значения на отрезке $[\bar{z}_-, \bar{z}_+]$ в точке $\bar{z}_+$. В этой точке*

$$S_*(\bar{z}_+) = \ln \left(|\bar{z}_+|^{-1} \left[(6 - 4(1+\gamma)^2) \left(\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}(1+\gamma)}{\sqrt{3} - \sqrt{2}(1+\gamma)} \right)^{b/\sqrt{6}} \right]^{1/2} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем интервалы монотонности $S_*(x)$. Дифференцируя (8.15), имеем

$$S'_*(x) = \frac{M(x)}{xR(x)}, \quad (8.16)$$

где $M(x) = bx^3 + 4x^2 - bx - 2$.

Поскольку особые точки удовлетворяют неравенствам (6.14), при $x \in [\bar{z}_-, \bar{z}_+]$ знаменатель дроби в (8.16) больше нуля. Поэтому достаточно изучить расположение корней уравнения

$$M(x) = 0. \quad (8.17)$$

Вычисляя значения $M(1) = 2$, $M(0) = -2$, $M(-1) = 2$,

$$M(\bar{z}_3) = 4(b - \sqrt{6}) \left(\bar{z}_3 + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \right) > 0, \quad M(\bar{z}_4) = 4(b - \sqrt{6}) \left(\bar{z}_4 + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \right) < 0,$$

получаем, что корни x_1, x_2, x_3 уравнения (8.17) лежат на следующих интервалах: $x_1 \in (\bar{z}_4, -1)$, $x_2 \in (\bar{z}_3, 0)$, $x_3 \in (0, 1)$. Следовательно, функция $M(x)$ на отрезке $[\bar{z}_-, \bar{z}_+]$ может иметь лишь один нуль.

Вернемся к рассмотрению функции $S_*(x)$. Поскольку $S'_*(-1) > 0$, то $S_*(x)$ либо возрастает на всем отрезке $[\bar{z}_-, \bar{z}_+]$, либо сначала убывает, а затем возрастает. Поэтому ее максимум достигается на конце отрезка. Вычисляя значения функции в точках $\bar{z}_\pm$, получаем

$$S_*(\bar{z}_\pm) = \ln \left(|\bar{z}_\pm|^{-1} \left[(6 - 4(1 + \gamma)^2) \left(\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}(1 + \gamma)}{\sqrt{3} - \sqrt{2}(1 + \gamma)} \right)^{b/\sqrt{6}} \right]^{1/2} \right). \quad (8.18)$$

Поскольку $|\bar{z}_+| < |\bar{z}_-|$, наибольшее значение достигается в точке $\bar{z}_+$. Лемма доказана.

Найдем, наконец, асимптотику функции $N(\bar{z})$. Рассмотрим интеграл в правой части (8.9). Из леммы 8.4 вытекает, что основной вклад в асимптотику этого интеграла вносит малая окрестность точки поворота $\bar{z}_+$. Справедлива

ЛЕММА 8.5. При $l \rightarrow \infty$, $\bar{z} \notin [\bar{z}_-, \bar{z}_+]$, $\frac{l+1}{4} \left(\frac{b}{\sqrt{6}} - 1 \right) + \frac{1}{4} \notin \mathbb{Z}$ имеет место равенство

$$N(\bar{z}) = \frac{c_- T c_{\bar{z}_+}^{(l+1)/4} \bar{z}^{l+1}}{l^{3/4} (\bar{z} - \bar{z}_+)} \left(1 + O(\sqrt{\hbar}) + O\left(\frac{\hbar}{\bar{z} - \bar{z}_+} \right) \right). \quad (8.19)$$

Здесь

$$\begin{aligned} c_{\bar{z}_+} &= 32(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{\sqrt{2}b/\sqrt{3}} \gamma^2 (\gamma + 2)^2 (\sqrt{1 + \gamma/2} + \sqrt{\gamma/2})^4 (1 + \gamma(\sqrt{6} - 2))^{1+b/\sqrt{6}} \\ &\quad \times (1 - \gamma(\sqrt{6} + 2))^{1-b/\sqrt{6}}, \\ T &= \frac{(-1)^{l+k+1} \Gamma(3/4) \sin(\pi(l+1)(b/\sqrt{6} - 1)/4 + \pi/4) |\bar{z}_+|^2 (1 - 2\gamma(\gamma + 2))^{3/4}}{\pi(M(\bar{z}_+))^{3/4} \gamma^{k/2+3/8} (\gamma + 2)^{3/8} 2^{k/2-3/4}} \end{aligned}$$

и $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разлагая подынтегральную функцию в (8.9) по степеням $\bar{z} - \bar{z}_+$, находим, что

$$N(\bar{z}) = \frac{\bar{z}^{l+1} c_* (|\bar{z}_+^2 - \sqrt{6}\bar{z}_+ + 1|^{1+b/\sqrt{6}} |\bar{z}_+^2 + \sqrt{6}\bar{z}_+ + 1|^{1-b/\sqrt{6}})^{(l+1)/4}}{\pi \sqrt{1 - \bar{z}_+} \sqrt[4]{\bar{z}_+ - \bar{z}_-} (-1)^{l+1} |\bar{z}_+|^{l+1} (\bar{z}_+ - \bar{z}_-)} \times \sin\left((l+1)\frac{\pi}{2} - \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} + \varphi_*\right) \int_{-\infty}^{\bar{z}_+} \frac{1}{\sqrt[4]{\bar{z}_+ - x}} e^{aS'_*(\bar{z}_+)(x - \bar{z}_+)/\hbar} dx \times \left(1 + O(\sqrt{\hbar}) + O\left(\frac{\hbar}{\bar{z} - \bar{z}_+}\right)\right), \quad (8.20)$$

где

$$S'_*(\bar{z}_+) = \frac{M(\bar{z}_+)}{\bar{z}_+ R(\bar{z}_+)} > 0.$$

Интеграл в (8.20) вычисляется по формуле [28]

$$\int_0^\infty x^{\beta-1} e^{-\lambda x^\alpha} dx = \lambda^{-\beta/\alpha} \Gamma(\beta/\alpha), \quad \operatorname{Re} \lambda > 0,$$

в которой $\alpha = 1$, $\beta = 3/4$. Учитывая (8.10), (8.11), получаем (8.19). Лемма доказана.

§ 9. Сравнение ВКБ-приближения с асимптотикой $N(\bar{z})$

Многочлен $\Phi(\bar{z})$ может быть представлен в виде суммы (8.2). Оценим, какой вклад в эту сумму дает ВКБ-приближение (7.27), а какой – функция $N(\bar{z})$. Вначале рассмотрим случай, когда значение $|\bar{z}|$ велико.

Из формулы (8.19) вытекает, что при $\bar{z} \rightarrow \infty$, $l \rightarrow \infty$

$$N(\bar{z}) = \frac{c_- T}{l^{3/4}} (c_{\bar{z}_+})^{(l+1)/4} \bar{z}^l \left(1 + O\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) + O(\sqrt{\hbar})\right). \quad (9.1)$$

Сравнивая (9.1) с (7.29), получаем, что если $|\bar{z}| \gg l$, $l \rightarrow \infty$, то

$$\frac{N(\bar{z})}{\Phi_{-}^{\text{WKB}}(\bar{z})} = \frac{T}{l^{3/4}} (2 + \sqrt{4 + 2\gamma})^{k+1/2} \left(\frac{c_{\bar{z}_+}}{c_\infty}\right)^{(l+1)/4} \left(1 + O\left(\frac{1}{\hbar \bar{z}}\right) + O(\sqrt{\hbar})\right). \quad (9.2)$$

Поведение правой части в (9.2) при $l \rightarrow \infty$ определяется отношением

$$\frac{c_{\bar{z}_+}(\gamma)}{c_\infty} = 4\gamma^2 \left(\sqrt{1 + \frac{\gamma}{2}} + \sqrt{\frac{\gamma}{2}}\right)^4 \left(\frac{\sqrt{1 + \gamma(\sqrt{6} - 2)}}{1 + \sqrt{1 + \gamma(\sqrt{6} - 2)}}\right)^{\sqrt{2}(b + \sqrt{6})/\sqrt{3}} \times \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \gamma(\sqrt{6} + 2)}}{\sqrt{1 - \gamma(\sqrt{6} + 2)}}\right)^{\sqrt{2}(b - \sqrt{6})/\sqrt{3}}, \quad (9.3)$$

где в силу (6.13) число b выражается через γ : $b = -2 + 1/\gamma + \sqrt{(-2 + 1/\gamma)^2 - 6}$. Таким образом, отношение $c_{\bar{z}_+}/c_\infty$ представляет собой функцию от параметра γ на $(0, \gamma_0)$, где $\gamma_0 = 1/(\sqrt{6} + 2)$.

Упрощая выражение в правой части (9.3), получаем

ЛЕММА 9.1. При $\gamma \in (0, \gamma_0)$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \frac{c_{\bar{z}_+}}{c_\infty}(\gamma) = & 4\gamma^2 \left(\sqrt{1 + \frac{\gamma}{2}} + \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \right)^4 \left(\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma(\sqrt{6} - 2)}} \right)^{-\sqrt{1 + \gamma(\sqrt{6} - 2)}} \right. \\ & \left. \times \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma(\sqrt{6} + 2)}} \right)^{\sqrt{1 - \gamma(\sqrt{6} + 2)}} \right)^{\sqrt{2}(\sqrt{1 + \gamma(\sqrt{6} - 2)} + \sqrt{1 - \gamma(\sqrt{6} + 2)})/(\sqrt{3}\gamma)}. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Оценим отношение $c_{\bar{z}_+}/c_\infty$. Воспользуемся тем, что значение $\gamma_0 \approx 0.2247$ мало. Поэтому интервал $(0, \gamma_0)$ можно разбить на две части $(0, 0.18]$, $[0.18, \gamma_0)$ и далее с помощью формулы Тейлора оценить функцию (9.4) на каждой из этих частей. Поскольку на концах интервала

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{c_{\bar{z}_+}}{c_\infty}(\gamma) = 0, \quad \lim_{\gamma \rightarrow \gamma_0} \frac{c_{\bar{z}_+}}{c_\infty}(\gamma) = \left(\frac{(1 + \sqrt{2\sqrt{6} + 5})\sqrt[4]{3}}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{2\sqrt{3} + 1} + \sqrt{\sqrt{3} + 1})} \right)^4 \approx 0.0518,$$

справедлива

ЛЕММА 9.2. При $\gamma \in (0, \gamma_0)$ имеет место неравенство

$$\frac{c_{\bar{z}_+}}{c_\infty}(\gamma) < \frac{1}{2}. \quad (9.5)$$

Отметим, что численные расчеты приводят к зависимости $c_{\bar{z}_+}/c_\infty$ от γ , представленной на рис. 4.

Рис. 4

Таким образом, при $l \rightarrow \infty$ правая часть (9.2) экспоненциально мала, а следовательно, при достаточно больших $|\bar{z}|$ функция $N(\bar{z})$ является экспоненциально малой поправкой к $\Phi_-^{\text{WKB}}(\bar{z})$.

Рассмотрим теперь эти функции на вещественной оси. Представим $\Phi_-^{\text{WKB}}(x)$ в виде

$$\begin{aligned} \Phi_-^{\text{WKB}}(x) = & c_- t(x) e^{ls(x)} \left(1 + O(\hbar) + O\left(\frac{\hbar}{(x-1)^2} \right) \right. \\ & \left. + O\left(\frac{\hbar}{(x-\bar{z}_+)^{3/2}} \right) + O\left(\frac{\hbar}{(\bar{z}_- - x)^{3/2}} \right) \right). \end{aligned} \quad (9.6)$$

С другой стороны, из формулы (8.19) вытекает, что при $x \notin [\bar{z}_-, \bar{z}_+]$

$$N(x) = \frac{c_- t_1(x) |x|}{l^{3/4} (x - \bar{z}_+)} e^{l(\ln(|x|/|\bar{z}_+|) + s(\bar{z}_+))} \left(1 + O(\sqrt{\hbar}) + O\left(\frac{\hbar}{\bar{z}_+ - x}\right) \right). \quad (9.7)$$

Здесь функция $t_1(x)$ ограничена равномерно по l .

Показатели экспонент в (9.6) и (9.7) содержат функции $s(x)$ и $\ln(|x|/|\bar{z}_+|) + s(\bar{z}_+)$. Для их сравнения изучим поведение

$$\Psi(x) = s(x) - \ln|x|, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad x \notin (\bar{z}_-, \bar{z}_+), \quad x \neq 0. \quad (9.8)$$

ЛЕММА 9.3. *Функция $\Psi(x)$ возрастает при $x \in [\bar{z}_+, 0)$ и убывает при $x \in (-\infty, \bar{z}_-] \cup (0, +\infty)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (8.8) вытекает, что

$$\begin{aligned} \Psi'(x) &= \frac{2x^3 + bx^2 - 4x - b - \sqrt{b^2 + 4b + 6} (x - 1) \sqrt{\Lambda(x)}}{2R(x)} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{2x^2 + 2bx - 2b - 3}{2x^3 + bx^2 - 4x - b + \sqrt{b^2 + 4b + 6} (x - 1) \sqrt{\Lambda(x)}} - \frac{1}{x}, \end{aligned}$$

где $\Lambda(x)$ имеет вид (6.12). Следовательно,

$$\Psi'(x) = \frac{bx^2 + (1 - 2b)x + b - \sqrt{b^2 + 4b + 6} (x - 1) \sqrt{\Lambda(x)}}{x(2x^3 + bx^2 - 4x - b + \sqrt{b^2 + 4b + 6} (x - 1) \sqrt{\Lambda(x)})}. \quad (9.9)$$

Определим, в каких точках $\Psi'(x)$ меняет знак. Рассмотрим корни уравнения

$$2x^2 + 2bx - 2b - 3 = 0, \quad (9.10)$$

которые имеют вид

$$x_{4,5} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4b + 6}}{2}. \quad (9.11)$$

В них числитель и знаменатель дроби (9.9) одновременно обращаются в нуль. Далее, знаменатель дроби (9.9) меняет знак в нуле. Кроме того, при переходе из точки $\bar{z}_-$ в точку $\bar{z}_+$, которые лежат на границе области определения $\Psi(x)$, числитель дроби сохраняет знак, а знаменатель меняет его на противоположный. В результате получаем, что $\Psi'(x) < 0$ при $x \in (-\infty, \bar{z}_-] \cup (0, +\infty)$ и $\Psi'(x) > 0$ при $x \in [\bar{z}_+, 0)$. Лемма доказана.

В силу (8.18), (9.2), (9.5) справедливы неравенства

$$\Psi(\bar{z}_-) < \Psi(\bar{z}_+) < \Psi(\infty) < \Psi(1). \quad (9.12)$$

Следовательно, график функции $\Psi(x)$ имеет вид, представленный на рис. 5.

Определим точку $\tilde{x}$ из условия $\Psi(\tilde{x}) = \Psi(\bar{z}_+)$ (см. рис. 5). Из леммы 9.3 и неравенств (9.12) вытекает, что при вещественных

$$x \in (-\infty, \tilde{x}) \cup (\bar{z}_+, 0) \cup (0, 1 - \hbar^{3/8}) \cup (1 + \hbar^{3/8}, +\infty),$$

а также в некоторой области на комплексной плоскости, содержащей указанные интервалы, $N(\bar{z})$ является экспоненциально малой поправкой к ВКБ-приближению $\Phi_-^{\text{WKB}}(\bar{z})$. Экспоненциальная малость $N(\bar{z})$ имеет место и при достаточно больших $|\bar{z}|$. Кроме того, вблизи точки $\bar{z} = 1$ функция $N(\bar{z})$ также

Рис. 5

экспоненциально мала по сравнению с $p(\bar{z})$, задаваемым разложением (7.25). В указанных областях помимо функций экспоненциально малыми будут и производные от $N(\bar{z})$ ограниченного при $l \rightarrow \infty$ порядка.

Однако экспоненциальная малость $N(\bar{z})$ имеет место не при всех $\bar{z}$. Вблизи вещественной оси имеется область, содержащая $(\tilde{x}, \bar{z}_-)$, где, наоборот, ВКБ-приближение $\Phi_-^{\text{WKB}}(\bar{z})$ является экспоненциально малым по сравнению с $N(\bar{z})$.

§ 10. Асимптотика нормы $\Phi(\bar{z})$

Пусть многочлен $\Phi(\bar{z})$ задан формулой (4.9), где функция $p(\bar{u})$ является асимптотическим решением многочленной спектральной задачи. Вычислим асимптотику нормы $\Phi(\bar{z})$ в пространстве $\mathcal{P}_l$.

Запишем главный член ВКБ-приближения (7.28) в виде

$$\Phi_{-,0}^{\text{WKB}}(\bar{z}) = c_- t(\bar{z}) e^{ls(\bar{z})}. \quad (10.1)$$

Если подставить (10.1) в формулу (3.2) для скалярного произведения, то получим интеграл

$$\|\Phi_{-,0}^{\text{WKB}}\|_{\mathcal{P}_l}^2 = \frac{l+1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{|c_-|^2 |t(\bar{z})|^2 e^{l\Omega(\bar{z}, z)}}{(1 + |z|^2)^2} d\bar{z} dz, \quad (10.2)$$

где $\Omega(\bar{z}, z) = s(\bar{z}) + s(z) - \ln(1 + |z|^2)$.

Найдем точку, в которой достигается глобальный максимум функции $\Omega(\bar{z}, z)$. Тогда асимптотика интеграла (10.2) будет равна интегралу по малой окрестности этой точки.

Предварительно докажем две леммы.

ЛЕММА 10.1. *Экстремум функции $\Omega(\bar{z}, z)$ может достигаться лишь в точках, в которых $\bar{z} = z$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (8.8), находим, что стационарные точки удовлетворяют следующей системе:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \bar{z}} = \frac{2\bar{z}^2 + 2b\bar{z} - 2b - 3}{2\bar{z}^3 + b\bar{z}^2 - 4\bar{z} - b + (\bar{z} - 1)\sqrt{(b^2 + 4b + 6)\Lambda(\bar{z})}} - \frac{z}{1 + z\bar{z}} = 0, \quad (10.3)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} = \frac{2z^2 + 2bz - 2b - 3}{2z^3 + bz^2 - 4z - b + (z - 1)\sqrt{(b^2 + 4b + 6)\Lambda(z)}} - \frac{\bar{z}}{1 + z\bar{z}} = 0. \quad (10.4)$$

Здесь $\Lambda(\bar{z})$ задана формулой (6.12).

Преобразуем уравнение (10.3) к виду

$$b\bar{z}^2 z + (-2b + 1)z\bar{z} + 2\bar{z}^2 + 2b\bar{z} + bz - 2b - 3 = z(\bar{z} - 1)\sqrt{(b^2 + 4b + 6)\Lambda(\bar{z})} \quad (10.5)$$

и далее, после замены $\bar{u} = \bar{z} - 1$, $u = z - 1$, возведем правую и левую части соотношения (10.5) в квадрат. Получаем уравнение

$$\begin{aligned} & [b\bar{u}^2 u + (b + 2)\bar{u}^2 + u\bar{u} + (2b + 5)\bar{u} + u]^2 \\ &= [u^2 \bar{u}^2 + 2\bar{u}^2 u + \bar{u}^2] [(b^2 + 4b + 6)\bar{u}^2 + (4b^2 + 20b + 24)\bar{u} + 4b^2 + 20b + 24], \end{aligned}$$

упрощая которое, имеем

$$\begin{aligned} & (4b + 6)\bar{u}^4 u^2 + (4b + 12)\bar{u}^4 u + (4b^2 + 18b + 24)\bar{u}^3 u^2 + 2\bar{u}^4 \\ &+ (4b^2 + 18b + 23)\bar{u}^2 u^2 + (4b^2 + 28b + 44)\bar{u}^3 u + (2b + 4)\bar{u}^3 \\ &+ (8b^2 + 34b + 34)\bar{u}^2 u - 2u^2 \bar{u} - u^2 - (4b + 10)u\bar{u} = 0. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Умножим (10.6) на u . Переходя затем к полярным координатам $\bar{u} = \rho e^{i\varphi}$, $u = \rho e^{-i\varphi}$ и приравнявая нулю мнимую часть, приходим к уравнению

$$\begin{aligned} & (4b + 6)\rho^4 \sin \varphi + (4b + 12)\rho^3 \sin(2\varphi) + 2\rho^2 \sin(3\varphi) + (10b + 21)\rho^2 \sin \varphi \\ &+ (2b + 6)\rho \sin(2\varphi) + \sin(3\varphi) + (4b + 9) \sin \varphi = 0. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Выразим $\sin(3\varphi)$ и $\sin(2\varphi)$ через $\sin \varphi$, $\cos \varphi$. Тогда (10.7) распадется на два уравнения

$$\sin \varphi = 0, \quad (10.8)$$

$$4 \cos^2 \varphi + 4(b + 3)\rho \cos \varphi + (2b + 3)\rho^2 + 4b + 8 = 0. \quad (10.9)$$

Если φ – решение уравнения (10.8), то z лежит на вещественной оси. Уравнение (10.9) не имеет решений, так как оно является квадратным относительно ρ и его дискриминант

$$16[(b^2 + 4b + 6)(\cos^2 \varphi - 1) - (b^2 + 3b)]$$

меньше нуля при $b > \sqrt{6}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 10.2. Глобальный максимум функции $\Omega(\bar{z}, z)$ при $\bar{z} = z$ достигается в точке $\bar{z} = z = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим при $\bar{z} = z = x \in \mathbb{R}^1$ функцию $\Omega = \Omega(x)$. Из (8.8) вытекает, что если $x \notin (\bar{z}_-, \bar{z}_+)$, то

$$\Omega'(x) = \frac{2x^3 + bx^2 - 4x - b - (x - 1)\sqrt{(b^2 + 4b + 6)\Lambda(x)}}{R(x)} - \frac{2x}{1 + x^2}. \quad (10.10)$$

Преобразуем (10.10) к виду

$$\Omega'(x) = \frac{2(x-1)(bx^2 + (3-b)x + 2b + 3 - x\sqrt{(b^2 + 4b + 6)\Lambda(x)})}{(2x^3 + bx^2 - 4x - b + (x-1)\sqrt{(b^2 + 4b + 6)\Lambda(x)})(1+x^2)}. \quad (10.11)$$

Знаменатель дроби в (10.11) равен нулю в точках $x_{4,5}$, заданных в (9.11). Числитель дроби обращается в нуль при $x = 1$, а также в точках, в которых

$$bx^2 + (3-b)x + 2b + 3 = x\sqrt{(b^2 + 4b + 6)\Lambda(x)}. \quad (10.12)$$

Возводя правую и левую части (10.12) в квадрат, имеем

$$(2x^2 + 2bx - 2b - 3)((2b + 3)x^2 + 6x + 2b + 3) = 0. \quad (10.13)$$

Уравнение (10.13) распадается на уравнение (9.10), корнями которого являются $x_{4,5}$, а также на уравнение

$$(2b + 3)x^2 + 6x + 2b + 3 = 0, \quad (10.14)$$

не имеющее вещественных корней. Действительно, при $b > \sqrt{6}$ дискриминант (10.14) меньше нуля.

Поскольку при $x = x_{4,5}$ справедливо равенство

$$\frac{2x^3 + bx^2 - 4x - b}{x - 1} = \frac{bx^2 + (3-b)x + 2b + 3}{-x},$$

числитель дроби в (10.11) также обращается в нуль в точках $x_{4,5}$. В результате получаем, что $\Omega'(x) < 0$ при $x \in (-\infty, \bar{z}_-] \cup (1, +\infty)$ и $\Omega'(x) > 0$ при $x \in [\bar{z}_+, 1)$. Следовательно, максимум Ω при $x \notin (\bar{z}_-, \bar{z}_+)$ достигается в точке $x = 1$.

Далее рассмотрим $x \in (\bar{z}_-, \bar{z}_+)$. Тогда в силу (8.8)

$$\Omega'(x) = \frac{2x^3 + bx^2 - 4x - b}{R(x)} - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{(x+1)(x-1)(bx^2 + 6x + b)}{R(x)(1+x^2)}.$$

При $b \geq 3$ на интервале $(\bar{z}_-, \bar{z}_+)$ функция $\Omega(x)$ максимума не имеет, так как $\Omega'(x) < 0$ при $x \in (\bar{z}_-, -1)$ и $\Omega'(x) > 0$ при $x \in (-1, \bar{z}_+)$. При $\sqrt{6} < b < 3$ функция $\Omega(x)$ достигает локальных минимумов в точках $x_{6,7} = (-3 \pm \sqrt{9 - b^2})/b$, где $bx^2 + 6x + b = 0$. Кроме того, Ω имеет локальный максимум при $x = -1$. Однако, поскольку функции $\ln|x|$ и $\ln(1+x^2)$ являются четными, в силу лемм 8.4, 9.3 имеем $\Omega(-1) < \Omega(1)$. Таким образом, глобальный максимум функции $\Omega(x)$ достигается при $x = 1$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 10.1. *Функция $\Omega(\bar{z}, z)$ достигает максимального значения при $\bar{z} = z = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку справедливы леммы 10.1, 10.2, остается проверить, что в точке $\bar{z} = z = 1$ для $\Omega(\bar{z}, z)$ выполнены достаточные условия существования локального максимума функции двух переменных. Эти условия имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{z}} &= 0, & \frac{\partial \Omega}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \bar{z}^2} + 2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \bar{z} \partial z} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} < 0, & D &= \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \bar{z} \partial z} \right)^2 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \bar{z}^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} > 0. \end{aligned}$$

Из (10.3), (10.4) вытекает, что

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \bar{z}}(1, 1) = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial z}(1, 1) = 0.$$

Дифференцируя функции $\partial \Omega / \partial \bar{z}$, $\partial \Omega / \partial z$ еще раз, находим, что

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \bar{z}^2}(1, 1) = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2}(1, 1) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{b^2 + 5b + 6} - b - \frac{5}{2} \right), \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \bar{z} \partial z}(1, 1) = -\frac{1}{4}.$$

Следовательно, при $b > \sqrt{6}$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} = \sqrt{b^2 + 5b + 6} - b - 3 < 0, \quad D = 2\sqrt{b^2 + 5b + 6} \left(b + \frac{5}{2} - \sqrt{b^2 + 5b + 6} \right) > 0.$$

Теорема доказана.

В силу теоремы 10.1 основной вклад в норму асимптотического решения многоточечной спектральной задачи $p(\bar{z})$ вносит малая окрестность точки $\bar{z} = z = 1$. Поскольку $p(\bar{z})$ задается разложением (7.25) вблизи $\bar{z} = 1$, подставим его в формулу (3.2) для скалярного произведения и вычислим асимптотику возникающего интеграла.

Определим

$$\theta(t, r, b) = \exp \left\{ - \left(\sqrt{\frac{b+3}{b+2}} - 1 \right) t^2 - \left(1 - \sqrt{\frac{b+2}{b+3}} \right) r^2 \right\}. \quad (10.15)$$

ЛЕММА 10.3. *Справедливо равенство*

$$\|p(\bar{z})\|_{\mathcal{P}_l}^2 = \frac{\alpha_1^2 \mu^2 2^{-l-1}}{\pi \sqrt{b^2 + 5b + 6}} \Sigma_0(b) (1 + O(\hbar)), \quad \hbar \rightarrow 0, \quad (10.16)$$

где функция $\Sigma_0(b)$ имеет вид

$$\Sigma_0(b) = \int_{\mathbb{R}^2} \theta(t, r, b) |H_k(r + it)|^2 dt dr, \quad (10.17)$$

а константа μ задана формулой (7.24).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложим функцию $(l+1)/(2\pi(1+|z|^2)^{l+2})$ по степеням $\bar{u}$, u , где $\bar{u}$ и $\bar{z}$ связаны равенством (7.8). В результате получаем

$$\begin{aligned} \frac{l+1}{2\pi(1+|z|^2)^{l+2}} &= \frac{a}{\pi \hbar} 2^{-l-2} \exp \left\{ - \frac{\sqrt{a}(\bar{u} + u)}{\sqrt{2\hbar} \sqrt[4]{b^2 + 5b + 6}} - \frac{|\bar{u}|^2 - (\bar{u}^2 + u^2)/2}{4\sqrt{b^2 + 5b + 6}} \right\} \\ &\times \left[1 + \sqrt{\hbar} \left(- \frac{\bar{u} + u}{\sqrt{2a} \sqrt[4]{b^2 + 5b + 6}} - \frac{(\bar{u}^3 + u^3)/3 - |\bar{u}|^2(\bar{u} + u)}{8\sqrt{2a}(b^2 + 5b + 6)^{3/4}} \right) \right. \\ &\quad \left. + O(\hbar(|u|^6 + 1)) \right]. \end{aligned} \quad (10.18)$$

Подставляя затем (7.25), (10.18) в формулу (3.2), имеем

$$\begin{aligned} \|p(\bar{z})\|_{\mathcal{P}_l}^2 &= \frac{\alpha_1^2 \mu^2 a}{\pi \hbar} 2^{-l-2} \int_{\mathbb{C}} \exp \left\{ - \frac{|\bar{u}|^2 - (\bar{u}^2 + u^2)/2}{4\sqrt{b^2 + 5b + 6}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\bar{u}^2 + u^2}{4} \left(1 - \frac{3+b}{\sqrt{b^2 + 5b + 6}} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\left| H_k \left(\frac{i\bar{u}}{\sqrt{2}} \right) \right|^2 + \frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2a} \sqrt[4]{b^2 + 5b + 6}} \left(-\bar{u} - u - \frac{(\bar{u}^3 + u^3)/3 - |\bar{u}|^2(\bar{u} + u)}{8\sqrt{b^2 + 5b + 6}} \right) \right. \\
& \times \left| H_k \left(\frac{i\bar{u}}{\sqrt{2}} \right) \right|^2 + \frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2a} \sqrt[4]{b^2 + 5b + 6}} \left(\left(\frac{8 + 3b}{3\sqrt{b^2 + 5b + 6}} - 1 \right) \frac{\bar{u}^3 + u^3}{4} \right. \\
& \times \left| H_k \left(\frac{i\bar{u}}{\sqrt{2}} \right) \right|^2 + \frac{i}{2\sqrt{2}} \left(\bar{u}^2 H'_k \left(\frac{i\bar{u}}{\sqrt{2}} \right) H_k \left(-\frac{iu}{\sqrt{2}} \right) \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - u^2 H'_k \left(-\frac{iu}{\sqrt{2}} \right) H_k \left(\frac{i\bar{u}}{\sqrt{2}} \right) \right) \right) \right] d\bar{z} dz (1 + O(\hbar)). \quad (10.19)
\end{aligned}$$

Введем вещественные переменные t и r согласно формуле

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{2}} = t + ir. \quad (10.20)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
d\bar{z} dz &= \frac{2\hbar dt dr}{a\sqrt{b^2 + 5b + 6}}, \quad \bar{u} + u = 2\sqrt{2}t, \quad \bar{u}^3 + u^3 = 4\sqrt{2}(t^3 - 3tr^2), \\
|\bar{u}|^2 &= 2(t^2 + r^2), \\
i\bar{u}^2 H'_k(it - r) H_k(-it - r) - iu^2 H'_k(-it - r) H_k(it - r) \\
&= 2(t^2 - r^2) \frac{\partial}{\partial t} |H_k(r + it)|^2 + 4tr \frac{\partial}{\partial r} |H_k(r + it)|^2
\end{aligned}$$

и равенство (10.19) принимает вид

$$\begin{aligned}
\|p(\bar{z})\|_{\mathcal{P}_l}^2 &= \frac{\alpha_1^2 \mu^2 2^{-l-1}}{\pi \sqrt{b^2 + 5b + 6}} \int_{\mathbb{R}^2} \theta(t, r, b) \left\{ |H_k(r + it)|^2 + \frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2a} \sqrt[4]{b^2 + 5b + 6}} \right. \\
& \times \left[\left(-2\sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{b^2 + 5b + 6}} \left(-\frac{t^3 - 3tr^2}{3} + (r^2 + t^2)t \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(\frac{8 + 3b}{3\sqrt{b^2 + 5b + 6}} - 1 \right) \sqrt{2}(t^3 - 3r^2t) \right) |H_k(r + it)|^2 \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} \left((t^2 - r^2) \frac{\partial}{\partial t} |H_k(r + it)|^2 + 2tr \frac{\partial}{\partial r} |H_k(r + it)|^2 \right) \right] \right\} dt dr (1 + O(\hbar)). \quad (10.21)
\end{aligned}$$

В формуле (10.21) слагаемые порядка $\sqrt{\hbar}$ представляют собой интегралы от нечетных функций в симметричных пределах. Следовательно, они равны нулю. Лемма доказана.

Далее рассмотрим норму $N(\bar{z})$.

ЛЕММА 10.4. При $l \rightarrow \infty$ имеет место оценка

$$\|N(\bar{z})\|_{\mathcal{P}_l} = O(l^{-1/4} e^{l\Psi(\bar{z}+)}), \quad (10.22)$$

где функция Ψ определена формулой (9.8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенств (3.2), (8.3), (8.19) вытекает, что

$$\|N(\bar{z})\|_{\mathcal{P}_l}^2 = O\left(\frac{|c_-|^2 |c_{\bar{z}+}|^{(l+1)/2}}{\sqrt{l}} \int_{|\bar{z}-\bar{z}+|>\hbar} \frac{|\bar{z}|^{2l+2} d\bar{z} dz}{(\bar{z} - \bar{z}+)(z - \bar{z}+)(1 + |z|^2)^{l+2}} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + O\left(l^{3/2} e^{2ls(\bar{z}_+)} \int_{|\bar{z}-\bar{z}_+|<\hbar} \frac{d\bar{z} dz}{(1+|z|^2)^{l+2}}\right) = O\left(\frac{e^{2ls(\bar{z}_+)}}{\sqrt{l}|\bar{z}_+|^{2l}}\right) \\
& + O\left(\frac{|c_-|^2 |c_{\bar{z}_+}|^{(l+1)/2}}{\sqrt{l}} \int_0^{2\pi} \int_{|\rho+\bar{z}_+|>\hbar} \frac{\rho^{2l+2} \rho d\rho d\varphi}{(\rho^2 - 2\rho\bar{z}_+ \cos \varphi + \bar{z}_+^2)(1+\rho^2)^{l+2}}\right).
\end{aligned} \tag{10.23}$$

Поскольку

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\rho^2 - 2\rho\bar{z}_+ \cos \varphi + \bar{z}_+^2} = \frac{2\pi}{|\rho^2 - \bar{z}_+^2|},$$

соотношение (10.23) принимает вид

$$\begin{aligned}
\|N(\bar{z})\|_{\mathcal{P}_l}^2 = O\left(\frac{|c_-|^2 |c_{\bar{z}_+}|^{(l+1)/2}}{\sqrt{l}} \int_{|\rho+\bar{z}_+|>\hbar} \frac{\rho^3}{|\rho^2 - \bar{z}_+^2|(1+\rho^2)^2} \left(\frac{\rho^2}{1+\rho^2}\right)^l d\rho\right) \\
+ O\left(\frac{e^{2l\Psi(\bar{z}_+)}}{\sqrt{l}}\right).
\end{aligned} \tag{10.24}$$

Так как функция $\rho^2/(1+\rho^2)$ в (10.24) возрастает, наибольший вклад в интеграл дает окрестность ∞ . Следовательно, интеграл ограничен равномерно по l . Учитывая, что

$$|c_-|^2 |c_{\bar{z}_+}|^{(l+1)/2} = O(e^{2l\Psi(\bar{z}_+)}),$$

приходим к оценке (10.22). Лемма доказана.

Поскольку $\Psi(\bar{z}_+) < \Psi(1)$ в силу (9.12), из формул (10.16), (10.22) вытекает, что $\|N(\bar{z})\|_{\mathcal{P}_l}$ экспоненциально мала по сравнению с $\|p(\bar{z})\|_{\mathcal{P}_l}$. Далее из (8.2), (8.7), (10.16) и неравенства Коши–Буняковского получаем, что асимптотика нормы многочлена $\Phi(\bar{z})$ имеет вид

$$\begin{aligned}
\|\Phi(\bar{z})\|_{\mathcal{P}_l} &= (\|p(\bar{z})\|_{\mathcal{P}_l}^2 + O(\|p(\bar{z})\|_{\mathcal{P}_l} \|N(\bar{z})\|_{\mathcal{P}_l}) + O(\|N(\bar{z})\|_{\mathcal{P}_l}^2))^{1/2} \\
&= \frac{\alpha_1 |\mu| 2^{-(l+1)/2}}{\sqrt{\pi} \sqrt[4]{b^2 + 5b + 6}} (\Sigma_0(b))^{1/2} (1 + O(\hbar)), \quad \hbar \rightarrow 0.
\end{aligned} \tag{10.25}$$

Здесь μ , $\Sigma_0(b)$ заданы формулами (7.24), (10.17).

Таким образом, если входящая в (7.25) константа имеет вид

$$\alpha_1 = \sqrt{\pi} \sqrt[4]{b^2 + 5b + 6} (\sqrt{2} + \sqrt{3})^{(l+1)b/\sqrt{24}} 2^{(l+3+2k)/4} (\Sigma_0(b))^{-1/2} (1 + O(\hbar)), \tag{10.26}$$

то условие

$$\|\Phi(\bar{z})\|_{\mathcal{P}_l} = 1 + O(\hbar), \quad \hbar \rightarrow 0,$$

будет выполнено. Нахождение множителя α_1 в $p(\bar{z})$ завершает построение $\Phi(\bar{z})$.

§ 11. Итоговая теорема

ТЕОРЕМА 11.1. Пусть

$$\xi_{k,l} = a^2 \left(b + \frac{3}{2}\right) \left(1 + \frac{2}{l}\right) - \frac{2a^2}{l} \sqrt{b^2 + 5b + 6} \left(k + \frac{1}{2}\right) + O(l^{-2}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{11.1}$$

а многочлен $\Phi_{k,l}(\bar{z})$ определен формулой (4.9), где $p(\bar{u})$ – асимптотическое решение многоточечной спектральной задачи такое, что α_1 имеет вид (10.26). Тогда $\xi_{k,l}$ и $\Phi_{k,l}(\bar{z})$ являются асимптотическим собственным значением и асимптотической собственной функцией задачи (4.1), (3.6) при $b > \sqrt{6}$ и $l \rightarrow \infty$ в пространстве $\mathcal{P}_l$. Более точно, если $\xi_{k,l}$ имеет вид (11.1), то многочлен $\Phi_{k,l}(\bar{z})$ удовлетворяет уравнению (4.1) с точностью $O(l^{-2})$ с оценкой невязки в норме $\mathcal{P}_l$, а также условию нормировки (3.6) с точностью $O(l^{-1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка невязки производится аналогично вычислению асимптотики нормы. Основной вклад в асимптотику интеграла вносит малая окрестность точки $\bar{z} = z = 1$. Поэтому достаточно оценить невязку вблизи точки $\bar{z} = 1$, где она имеет вид

$$R = O((\bar{z} - 1)^4 p_0) + O(\hbar^2 p_0) = O(\hbar^2(1 + (t^2 + r^2)^2) p_0).$$

Здесь p_0 задается равенством (7.26), а t и r – равенством (10.20).

Асимптотика $\|R\|_{\mathcal{P}_l}$ содержит вместо функции $\Sigma_0(b)$, как было в соотношении (10.25), следующий интеграл:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \theta(t, r, b) (1 + (t^2 + r^2)^2)^2 |H_k(r + it)|^2 dt dr.$$

В результате получаем, что $\|R\|_{\mathcal{P}_l} = O(\hbar^2)$, $\hbar \rightarrow 0$.

Условие нормировки (3.6) выполнено в силу (10.25), (10.26). Теорема доказана.

Оператор $f(\mathring{S}_1, \mathring{S}_2): \mathcal{P}_l \rightarrow \mathcal{P}_l$, где $f(S_1, S_2)$ имеет вид (2.9), является самосопряженным. Поэтому, как известно [29], вблизи асимптотических собственных значений $\xi_{k,l}$ имеются точки спектра оператора $f(\mathring{S}_1, \mathring{S}_2)$.

Таким образом, при $l \rightarrow \infty$ формула

$$\begin{aligned} \lambda_{k,l} = & 2a \left(1 + \frac{1}{l}\right) + \frac{4a^4}{l^2} \left(b + \frac{3}{2}\right) \left(1 + \frac{2}{l}\right) \\ & - \frac{8a^4}{l^3} \sqrt{b^2 + 5b + 6} \left(k + \frac{1}{2}\right) + O(l^{-4}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (11.2)$$

задает асимптотику спектральной серии вблизи верхних границ спектральных кластеров. В (11.2) учтены поправки порядка $\hbar^2$ и $\hbar^3$.

§ 12. Формулы для квантовых средних

Найдем асимптотики средних значений дифференциальных операторов. Вычисление квантовых средних производится аналогично вычислению нормы.

Начнем с обоснования формулы (3.12). Пусть $\Phi_{k,l}(\bar{z})$ – асимптотическая собственная функция задачи (4.1), (3.6), а операторы $\mathring{S}_1, \mathring{S}_2, \mathring{S}_3$ заданы формулами (3.4).

ЛЕММА 12.1. При $\hbar \rightarrow 0$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} (\mathring{S}_1 \Phi_{k,l}, \Phi_{k,l})_{\mathcal{P}_l} &= a + O(\hbar), & (\mathring{S}_2 \Phi_{k,l}, \Phi_{k,l})_{\mathcal{P}_l} &= O(\hbar), \\ (\mathring{S}_3 \Phi_{k,l}, \Phi_{k,l})_{\mathcal{P}_l} &= O(\hbar). \end{aligned} \quad (12.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Основной вклад в асимптотику интегралов для средних также вносит малая окрестность точки $\bar{z} = z = 1$, где для $\Phi_{k,l}(\bar{z})$ справедливо разложение (7.25). Дифференцируя $p(\bar{z})$, находим, что

$$\begin{aligned} \hbar \frac{dp}{d\bar{z}} &= a(p_0 + \sqrt{\hbar} p_1) + a(\bar{z} - 1)(-3 - b + \sqrt{b^2 + 5b + 6})p_0 + \sqrt{\hbar} \sqrt{a} \\ &\times \sqrt[4]{b^2 + 5b + 6} i \alpha_1 \mu \exp \left\{ \frac{\sqrt{a\bar{u}}}{\sqrt{2\hbar} \sqrt[4]{b^2 + 5b + 6}} + \frac{\bar{u}^2}{4} \left(1 - \sqrt{\frac{b+3}{b+2}} \right) \right\} H'_k \left(\frac{i\bar{u}}{\sqrt{2}} \right) \\ &+ O(\hbar p_0) + O(\hbar \bar{u}^6 p_0) \\ &+ \exp \left\{ \frac{a\beta \bar{u}}{\sqrt{\hbar}} - \frac{a(b+3)\beta^2 \bar{u}^2}{2} \right\} \left(O \left(\hbar \bar{u} \frac{dy_0}{d\bar{u}} \right) + O \left(\hbar \bar{u}^5 \frac{dy_0}{d\bar{u}} \right) \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (\dot{S}_1 \Phi_{k,l}, \Phi_{k,l})_{\mathcal{P}_l} &= (\dot{S}_1(p_0 + \sqrt{\hbar} p_1), p_0 + \sqrt{\hbar} p_1)_{\mathcal{P}_l} + O(\hbar) \\ &= (a(p_0 + \sqrt{\hbar} p_1) + a(\bar{z} - 1)p_0 + a(1 - \bar{z})p_0, p_0 + \sqrt{\hbar} p_1)_{\mathcal{P}_l} + O(\hbar) \\ &= a + O(\hbar). \end{aligned}$$

Вычисляя среднее значение $\dot{S}_2$, имеем

$$\begin{aligned} (\dot{S}_2 \Phi_{k,l}, \Phi_{k,l})_{\mathcal{P}_l} &= (\dot{S}_2(p_0 + \sqrt{\hbar} p_1), p_0 + \sqrt{\hbar} p_1)_{\mathcal{P}_l} + O(\hbar) \\ &= \left(ia(p_0 + \sqrt{\hbar} p_1) + ia(\bar{z} - 1)p_0 - ia(p_0 + \sqrt{\hbar} p_1) - ia(\bar{z} - 1)p_0 \right. \\ &\quad \left. - ia(\bar{z} - 1)(-3 - b + \sqrt{b^2 + 5b + 6})p_0 - i\sqrt{\hbar} \sqrt{a} \sqrt[4]{b^2 + 5b + 6} i \alpha_1 \mu \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left\{ \frac{\sqrt{a\bar{u}}}{\sqrt{2\hbar} \sqrt[4]{b^2 + 5b + 6}} + \frac{\bar{u}^2}{4} \left(1 - \sqrt{\frac{b+3}{b+2}} \right) \right\} H'_k \left(\frac{i\bar{u}}{\sqrt{2}} \right), p_0 \right)_{\mathcal{P}_l} + O(\hbar) \\ &= O(\hbar). \end{aligned} \tag{12.2}$$

В формуле (12.2)

$$\int_{\mathbb{R}^2} \theta(t, r, b)(it - r)|H_k(r + it)|^2 dt dr = 0, \tag{12.3}$$

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} \theta(t, r, b) H'_k(r - it) H_k(r + it) dt dr \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \theta(t, r, b) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} |H_k(r + it)|^2 + i \frac{\partial}{\partial t} |H_k(r + it)|^2 \right) dt dr = 0, \end{aligned} \tag{12.4}$$

так как в (12.3), (12.4) интегрируются нечетные функции в симметричных пределах.

Наконец, учитывая (12.3), (12.4), получаем

$$\begin{aligned} (\dot{S}_3 \Phi_{k,l}, \Phi_{k,l})_{\mathcal{P}_l} &= (\dot{S}_3(p_0 + \sqrt{\hbar} p_1), p_0 + \sqrt{\hbar} p_1)_{\mathcal{P}_l} + O(\hbar) = \left(a(p_0 + \sqrt{\hbar} p_1) \right. \\ &\quad \left. - a(p_0 + \sqrt{\hbar} p_1) - a(\bar{z} - 1)p_0 - a(\bar{z} - 1)(-3 - b + \sqrt{b^2 + 5b + 6})p_0 \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\hbar} \sqrt{a} \sqrt[4]{b^2 + 5b + 6} i \alpha_1 \mu \exp \left\{ \frac{\sqrt{a\bar{u}}}{\sqrt{2\hbar} \sqrt[4]{b^2 + 5b + 6}} + \frac{\bar{u}^2}{4} \left(1 - \sqrt{\frac{b+3}{b+2}} \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. \times H'_k \left(\frac{i\bar{u}}{\sqrt{2}} \right), p_0 \right)_{\mathcal{P}_l} + O(\hbar) = O(\hbar). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Из равенств (12.1) и формулы Тейлора вытекает

ТЕОРЕМА 12.1. Пусть $F(S_1, S_2, S_3)$ – многочлен такой, что $F(a, 0, 0) \neq 0$. Тогда для оператора $F(\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3)$, где $\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3$ упорядочены по Вейлю, формула для квантовых средних с точностью $O(\hbar)$ при $\hbar \rightarrow 0$ имеет вид

$$(F(\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3)\Phi_{k,l}, \Phi_{k,l})_{\mathcal{P}_l} = F(a, 0, 0) + O(\hbar), \quad \hbar \rightarrow 0.$$

Таким образом, справедлива асимптотика (3.12).

Нетривиальные поправки в формуле для средних возникают в членах порядка $\hbar$. Для вывода этих поправок используется следующий член $\hbar p_2$ в разложении (7.25). Если в формуле (6.9) поправка порядка $\hbar^2$ имеет вид

$$\begin{aligned} \xi_{k,l}^{(2)} = & \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{5}{4} - \frac{3b}{16(b^2 + 5b + 6)}\right) \\ & - \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\sqrt{b^2 + 5b + 6}}{2} + \frac{5}{16} + \frac{b}{8} - \frac{3b}{64(b^2 + 5b + 6)}, \end{aligned}$$

то существует такая функция

$$\begin{aligned} p_2 = & \frac{\alpha_1 \mu \beta^2}{2} \exp \left\{ \frac{a \beta \bar{u}}{\sqrt{\hbar}} + \left(1 - \sqrt{\frac{b+3}{b+2}}\right) \frac{\bar{u}^2}{4} \right\} \left[\left[-\left(\frac{i\bar{u}}{\sqrt{2}}\right)^6 \left(1 + \frac{3b+10}{18(b^2 + 5b + 6)}\right) \right. \right. \\ & + \left(\frac{i\bar{u}}{\sqrt{2}}\right)^4 \left(k + \frac{1}{2} + 41 - \frac{2b}{b^2 + 5b + 6} - \frac{10+4b}{\sqrt{b^2 + 5b + 6}}\right) \\ & + \left(\frac{i\bar{u}}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(b - \sqrt{b^2 + 5b + 6} + \frac{5}{2}(k+1) - \frac{3(k+1)b}{8(b^2 + 5b + 6)}\right) + \alpha_2 \left] H_k \left(\frac{i\bar{u}}{\sqrt{2}}\right) \right. \\ & + \left[-\left(\frac{i\bar{u}}{\sqrt{2}}\right)^5 \frac{8+3b}{3\sqrt{b^2 + 5b + 6}} + \left(\frac{i\bar{u}}{\sqrt{2}}\right)^3 \left(-\frac{7}{2} + \frac{b}{8(b^2 + 5b + 6)}\right) \right. \\ & \left. \left. + \frac{i\bar{u}}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{b^2 + 5b + 6} + \frac{3(k+1/2)b}{8(b^2 + 5b + 6)} - \frac{5}{2}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right) \right] H'_k \left(\frac{i\bar{u}}{\sqrt{2}}\right) \right], \quad (12.5) \end{aligned}$$

что асимптотика вблизи $\bar{z} = 1$ согласуется с ВКБ-приближением $\Phi_-^{\text{WKB}}(\bar{z})$. Константа α_2 в (12.5) находится из условия нормировки (3.6).

Аналогично теореме 12.1 доказывается

ТЕОРЕМА 12.2. Пусть $F(\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3)$ – оператор, где $F(S_1, S_2, S_3)$ – многочлен такой, что $F(a, 0, 0) \neq 0$, а операторы $\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3$ упорядочены по Вейлю. Тогда формула для квантовых средних с точностью $O(\hbar^{3/2})$ при $\hbar \rightarrow 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} (F(\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3)\Phi_{k,l}, \Phi_{k,l})_{\mathcal{P}_l} = & F(a, 0, 0) + \frac{\partial F}{\partial S_1}(a, 0, 0)((\hat{S}_1\Phi_{k,l}, \Phi_{k,l})_{\mathcal{P}_l} - a) \\ & + \frac{\partial F}{\partial S_2}(a, 0, 0)(\hat{S}_2\Phi_{k,l}, \Phi_{k,l})_{\mathcal{P}_l} + \frac{\partial F}{\partial S_3}(a, 0, 0)(\hat{S}_3\Phi_{k,l}, \Phi_{k,l})_{\mathcal{P}_l} \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S_2^2}(a, 0, 0)((\hat{S}_2)^2\Phi_{k,l}, \Phi_{k,l})_{\mathcal{P}_l} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S_3^2}(a, 0, 0)((\hat{S}_3)^2\Phi_{k,l}, \Phi_{k,l})_{\mathcal{P}_l} \\ & + \frac{\partial^2 F}{\partial S_2 \partial S_3}(a, 0, 0) \left(\frac{\hat{S}_2 \hat{S}_3 + \hat{S}_3 \hat{S}_2}{2} \Phi_{k,l}, \Phi_{k,l} \right)_{\mathcal{P}_l} + O(\hbar^{3/2}). \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 (\dot{S}_1 \Phi_{k,l}, \Phi_{k,l})_{\mathcal{P}_l} &= a - \frac{\hbar}{2} \frac{\Sigma_1(b)}{\Sigma_0(b)} + \hbar + O(\hbar^{3/2}), \\
 (\dot{S}_2 \Phi_{k,l}, \Phi_{k,l})_{\mathcal{P}_l} &= i\hbar \frac{\Sigma_2(b)}{\Sigma_0(b)} - \frac{3}{2} i\hbar + O(\hbar^{3/2}), \\
 (\dot{S}_3 \Phi_{k,l}, \Phi_{k,l})_{\mathcal{P}_l} &= \hbar \frac{\Sigma_2(b)}{\Sigma_0(b)} - \frac{3}{2} \hbar + O(\hbar^{3/2}), \\
 ((\dot{S}_2)^2 \Phi_{k,l}, \Phi_{k,l})_{\mathcal{P}_l} &= \hbar a \left(-\sqrt{(b+2)(b+3)}(2k+1) \right. \\
 &\quad \left. - (b+3) + (b+3) \frac{\Sigma_1(b)}{\Sigma_0(b)} \right) + O(\hbar^{3/2}), \\
 ((\dot{S}_3)^2 \Phi_{k,l}, \Phi_{k,l})_{\mathcal{P}_l} &= -\hbar a \left(-\sqrt{(b+2)(b+3)}(2k+1) \right. \\
 &\quad \left. - (b+2) + (b+2) \frac{\Sigma_1(b)}{\Sigma_0(b)} \right) + O(\hbar^{3/2}), \\
 \left(\frac{\dot{S}_2 \dot{S}_3 + \dot{S}_3 \dot{S}_2}{2} \Phi_{k,l}, \Phi_{k,l} \right)_{\mathcal{P}_l} &= -i\hbar a \left(-\sqrt{(b+2)(b+3)}(2k+1) - \left(b + \frac{5}{2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{(b+2)(b+3)} \frac{\Sigma_3(b)}{\Sigma_0(b)} \right) + O(\hbar^{3/2}),
 \end{aligned}$$

функции $\Sigma_j(b)$ имеют вид

$$\Sigma_j(b) = \int_{\mathbb{R}^2} \theta(t, r, b) \sigma_j(t, r, b) |H_k(r + it)|^2 dt dr, \quad j = 1, 2, 3,$$

где θ задана формулой (10.15), а

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= t^2 + r^2, \\
 \sigma_2 &= -\frac{t^4}{b+2} + \frac{r^2 t^2}{(b+2)(b+3)} + \frac{r^4}{b+3} \\
 &\quad + t^2 \left(\frac{8b+23}{2\sqrt{b^2+5b+6}} + 2k+1 \right) - r^2 \left(\frac{8b+17}{2\sqrt{b^2+5b+6}} + 2k+1 \right), \\
 \sigma_3 &= \frac{t^2}{b+2} + \frac{r^2}{b+3}.
 \end{aligned}$$

Отметим, что задача о нахождении асимптотики средних значений дифференциальных операторов рассматривалась, например, в работах [30], [31].

Список литературы

1. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн*, т. 1: *Метод эталонных задач*, Наука, М., 1972; англ. пер.: V. M. Babič, V. S. Buldyrev, *Short-wavelength diffraction theory. Asymptotic methods*, Springer Ser. Wave Phenomena, 4, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
2. В. П. Маслов, *Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях*, Наука, М., 1977; англ. пер.: B. P. Maslov, *The complex WKB method for nonlinear equations*, Progr. Phys., 16, Birkhäuser, Basel, 1994.

3. С. Ю. Доброхотов, В. П. Маслов, “Некоторые приложения теории комплексного роста к уравнениям с малым параметром”, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат.*, **5**, ВИНТИ, М., 1975, 141–211; англ. пер.: S. Yu. Dobrokhотов, V. P. Maslov, “Applications of complex germ theory to equations with a small parameter”, *J. Soviet Math.*, **5**:4 (1976), 552–605.
4. М. В. Карасёв, В. П. Маслов, “Асимптотическое и геометрическое квантование”, *УМН*, **39**:6 (1984), 115–173; англ. пер.: M. V. Karasev, V. P. Maslov, “Asymptotic and geometric quantization”, *Russian Math. Surveys*, **39**:6 (1984), 133–205.
5. M. V. Karasev, “Birkhoff resonances and quantum ray method”, *Proc. Intern. Seminar “Days of Diffraction–2004”*, St. Petersburg University and Steklov Math. Institute, St. Petersburg, 2004, 114–126.
6. M. Karasev, “Noncommutative algebras, nanostructures, and quantum dynamics generated by resonances, I”, *Quantum algebras and Poisson geometry in mathematical physics*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **216**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, 1–18; “II”, *Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang)*, **11**:1 (2005), 33–56; “III”, *Russ. J. Math. Phys.*, **13**:2 (2006), 131–150.
7. M. Karasev, “Resonance gyrons and quantum geometry”, *From geometry to quantum mechanics*, Progr. Math., **252**, Birkhäuser, Boston, MA, 2007, 253–275.
8. A. Weinstein, “Asymptotics of eigenvalue clusters for the Laplacian plus a potential”, *Duke Math. J.*, **44**:4 (1977), 883–892.
9. A. Weinstein, “Eigenvalues of the Laplacian plus a potential”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Helsinki, 1978)*, Acad. Sci. Fennica, Helsinki, 1980, 803–805.
10. М. В. Карасёв, Е. М. Новикова, “Представление точных и квазиклассических собственных функций через когерентные состояния. Атом водорода в магнитном поле”, *ТМФ*, **108**:3 (1996), 339–387; англ. пер.: M. V. Karasev, E. M. Novikova, “Representation of exact and semiclassical eigenfunctions via coherent states. Hydrogen atom in a magnetic field”, *Theoret. and Math. Phys.*, **108**:3 (1996), 1119–1159.
11. М. В. Карасёв, Е. М. Новикова, “Алгебра с квадратичными коммутационными соотношениями для аксиально-возмущенного поля Кулона–Дирака”, *ТМФ*, **141**:3 (2004), 424–454; англ. пер.: M. V. Karasev, E. M. Novikova, “Algebra with quadratic commutation relations for an axially perturbed Coulomb–Dirac field”, *Theoret. and Math. Phys.*, **141**:3 (2004), 1698–1724.
12. М. В. Карасёв, Е. М. Новикова, “Алгебра с полиномиальными коммутационными соотношениями для эффекта Зеемана в поле Кулона–Дирака”, *ТМФ*, **142**:1 (2005), 127–147; англ. пер.: M. V. Karasev, E. M. Novikova, “Algebra with polynomial commutation relations for the Zeeman effect in the Coulomb–Dirac field”, *Theoret. and Math. Phys.*, **142**:1 (2005), 109–127.
13. М. В. Карасёв, Е. М. Новикова, “Алгебра с полиномиальными коммутационными соотношениями для эффекта Зеемана–Штарка в атоме водорода”, *ТМФ*, **142**:3 (2005), 530–555; англ. пер.: M. V. Karasev, E. M. Novikova, “Algebra with polynomial commutation relations for the Zeeman–Stark effect in the hydrogen atom”, *Theoret. and Math. Phys.*, **142**:3 (2005), 447–469.
14. А. В. Перескоков, “Асимптотика вблизи границ спектральных кластеров”, *Международ. конф., посвященная памяти И. Г. Петровского*, Тез. докладов (23-е совместное заседание ММО и семинара им. И. Г. Петровского), Изд-во МГУ, М., 2011, 260–261.
15. J. Schwinger, *On angular momentum*, U. S. Atomic Energy Commission, NYO-3071, 1952; *Quantum theory of angular momentum. A collection of reprints and original papers*, Academic Press, New York, 1965, 229–279.

16. А. М. Переломов, *Обобщенные когерентные состояния и их применения*, Наука, М., 1987; англ. пер.: A. Perelomov, *Generalized coherent states and their applications*, Texts Monogr. Phys., Springer-Verlag, Berlin, 1986.
17. M. V. Karasev, E. M. Novikova, "Non-Lie permutation relations, coherent states, and quantum embedding", *Coherent transform, quantization, and Poisson geometry*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **187**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, 1–202.
18. В. В. Голубев, *Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений*, Гостехиздат, М.–Л., 1950.
19. С. Ю. Славянов, В. Лай, *Специальные функции: Единая теория, основанная на анализе особенностей*, Невский Диалект, СПб., 2002.
20. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 2, Наука, М., 1974; пер. с англ.: A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions*, v. 2, McGraw-Hill, New York–Toronto–London, 1953.
21. P. A. M. Dirac, "Quantum electrodynamics", *Communications Dublin Inst. Advanced Studies. Ser. A.*, **1**, 1943, 1–36.
22. М. В. Федорюк, *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1983.
23. Ф. Олвер, *Асимптотики и специальные функции*, Наука, М., 1990; пер. с англ.: F. W. J. Olver, *Asymptotics and special functions*, Academic Press, New York–London, 1974.
24. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, Наука, М., 1987; испан. пер.: M. A. Lavréntiev, B. V. Shabat, *Métodos de la teoría de las funciones de una variable compleja*, Mir, Moscow, 1991.
25. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, 5-е изд., Наука, М., 1971; англ. пер. 4-го изд.: I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, Academic Press, New York–London–Toronto, ON, 1980.
26. Дж. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения*, ИЛ, М., 1962; пер. с англ.: J. A. Jenkins, *Univalent functions and conformal mapping*, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1958.
27. М. Абрамовиц, М. Стиган, *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, Наука, М., 1979; пер. с англ.: M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, U.S. Government Printing Office, Washington, 1964.
28. М. В. Федорюк, *Асимптотика: интегралы и ряды*, Наука, М., 1987.
29. В. П. Маслов, М. В. Федорюк, *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики*, Наука, М., 1976; англ. пер.: V. P. Maslov, M. V. Fedoryuk, *Semi-classical approximation in quantum mechanics*, Math. Phys. Appl. Math., **7**, Reidel, Dordrecht–Boston, 1981.
30. В. П. Маслов, *Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана*, Наука, М., 1976.
31. В. В. Белов, В. П. Маслов, "Квазиклассические траекторно-когерентные состояния в квантовой механике с калибровочными полями", *Докл. АН СССР*, **311**:4 (1990), 849–854; англ. пер.: V. V. Belov, V. P. Maslov, "Quasiclassical trajectory-coherent states in quantum mechanics with gauge fields", *Soviet Phys. Dokl.*, **35**:4 (1990), 330–332.

А. В. ПЕРЕСКОКОВ (A. V. PERESKOKOV)
 Московский энергетический институт
 (технический университет), МИЭМ НИУ ВШЭ
 E-mail: pereskokov62@mail.ru

Поступило в редакцию
 04.07.2011