Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. И. Шарапудинов, Приближение функций в $L_{2\pi}^{p(x)}$ тригонометрическими полиномами, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2013, том 77, выпуск 2, 197–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7808>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 14:23:04

УДК 517.587

И. И. Шарапудинов

Приближение функций в $L_{2\pi}^{p(x)}$ тригонометрическими полиномами

Рассматривается пространство Лебега $L_{2\pi}^{p(x)}$ с переменным показателем $p(x)$, состоящее из измеримых функций $f(x)$, для которых существует интеграл $\int_0^{2\pi} |f(x)|^{p(x)} dx$. В случае, когда 2π -периодический переменный показатель $p(x) \geq 1$ удовлетворяет условию

$$|p(x') - p(x'')| \ln \frac{2\pi}{|x' - x''|} = O(1), \quad x', x'' \in [-\pi, \pi],$$

установлен аналог первой теоремы Джексона. При дополнительном условии $p_- = \min_x p(x) > 1$ получен также аналог второй теоремы Джексона. В пространстве $L_{2\pi}^{p(x)}$ установлен аналог неравенства Бернштейна об оценке производной тригонометрического полинома и на его основе доказана обратная теорема для аналогов классов Липшица $\text{Lip}(\alpha, M)_{p(\cdot)} \subset L_{2\pi}^{p(x)}$ при $0 < \alpha < 1$. Тем самым, для классов $\text{Lip}(\alpha, M)_{p(\cdot)}$ установлены прямые и обратные теоремы теории приближений тригонометрическими полиномами. При определении модуля непрерывности функции $f(x) \in L_{2\pi}^{p(x)}$ вместо обычного сдвига $f^h(x) = f(x+h)$ используется усредненный сдвиг, определяемый функцией В. А. Стеклова $s_h(f)(x) = \frac{1}{h} \int_0^h f(x+t) dt$.

Библиография: 34 наименования.

Ключевые слова: пространства Лебега и Соболева с переменным показателем, приближение тригонометрическими полиномами, прямые и обратные теоремы, модуль непрерывности.

DOI: 10.4213/im7808

§ 1. Введение

Пространства функций, интегрируемых с переменным показателем, перестали играть роль экзотических примеров [1]–[6], так называемых модулярных пространств, и вышли в самостоятельный путь своего развития с того момента, когда было показано, что топология этих пространств нормируема и одна из эквивалентных норм определяется с помощью хорошо известной теоремы А. Н. Колмогорова о нормируемости линейных топологических пространств, в которых существует ограниченная уравновешенная выпуклая окрестность нуля. Для таких пространств А. Н. Колмогоровым [7] была введена норма с помощью функционала Минковского упомянутой выше окрестности. Именно на этом пути автором было показано в 1976 г. (хотя публикация [8] вышла в 1979 г.), что пространство Лебега $L_\mu^{p(x)}(E)$ с переменным показателем $p(x)$,

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-01-00191-а).

состоящее из измеримых на E функций $f(x)$, для которых степень $|f(x)|^{p(x)}$ интегрируема на E , при $p(x) \geq 1$ представляет собой нормированное пространство с нормой для $f \in L_\mu^{p(x)}(E)$

$$\|f\|_{p(\cdot)}(E) = \inf \left\{ \alpha > 0: \int_E \left| \frac{f(x)}{\alpha} \right|^{p(x)} \mu(dx) \leq 1 \right\}.$$

Такие нормы многие авторы почему-то называют нормами Люксембурга, вместо того, чтобы их называть *нормами Колмогорова*.

Следующий этап развития теории пространств $L_\mu^{p(x)}(E)$ был связан с ужесточением условий, налагаемых на переменный показатель $p(x)$, и получением для $L_\mu^{p(x)}(E)$ аналогов классических результатов, хорошо известных в том случае, когда $p(x)$ совпадает с некоторой константой. Первый шаг в этом направлении был сделан в работе автора [9], где было показано, что если μ – обычная мера Лебега на прямой, то система Хаара является базисом пространства $L_\mu^{p(x)}([0, 1])$ в том и только в том случае, когда переменный показатель $p(x) \geq 1$ удовлетворяет на $[0, 1]$ условию Дини–Липшица

$$|p(x) - p(y)| \log \frac{1}{|x - y|} \leq C, \quad |x - y| \leq \frac{1}{2}.$$

При тех же предположениях в работе автора [10] было показано, что некоторые семейства операторов свертки равномерно ограничены в $L_\mu^{p(x)}([0, 2\pi])$. К ним, в частности, относятся широкий класс классических операторов таких, как операторы Фейера, Валье Пуссена, Абеля, Стеклова, и многие другие.

Значительный вклад в развитие теории пространств $L_\mu^{p(x)}(E)$ был внесен в работах [11]–[13]. Наиболее яркий результат, полученный в этих работах, состоит в следующем. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, μ – обычная мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, $p(x)$ определен на Ω и удовлетворяет условиям $1 < p_-(\Omega) \leq p(x) \leq p^+(\Omega) < \infty$, $|p(x) - p(y)| \log \frac{1}{|x - y|} \leq C$, $|x - y| \leq \frac{1}{2}$, $x, y \in \Omega$. Тогда оператор максимальной функции Харди–Литтлвуда $M(f)$ ограниченно действует в пространстве $L_\mu^{p(x)}(\Omega)$. Как следствие этого результата, в [12] было показано, что при тех же ограничениях для переменного показателя $p(x)$ и некотором дополнительном условии для $p(x)$ вне некоторого шара хорошо известные операторы Калдерона–Зигмунда ограниченно действуют в пространстве $L_\mu^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$. В частности, при $n = 1$ отсюда следует ограниченность в $L_\mu^{p(x)}(\mathbb{R})$ преобразования Гильберта, если только $1 < p_1 \leq p(x) \leq p_2 < \infty$, $|p(x) - p(y)| \log \frac{1}{|x - y|} \leq C$, $|x - y| \leq \frac{1}{2}$, $x, y \in \mathbb{R}$, и для $p(x)$ найдется интервал, вне которого он совпадает с некоторой константой. Таким образом, обнаруженная впервые в работах автора [9], [10] связь между условием Дини–Липшица для переменного показателя $p(x)$ и равномерной ограниченностью в $L_\mu^{p(x)}(E)$ семейств классических операторов оказалась характерной для построения содержательной теории интегральных операторов в пространствах $L_\mu^{p(x)}(E)$. Как показали многочисленные результаты, полученные в последние годы специалистами в области теории дифференциальных уравнений, аналогичная картина наблюдается и при построении содержательной теории дифференциальных операторов в пространствах Соболева с переменным показателем. Обширный список литературы по

этой теме можно найти, например, в опубликованной недавно монографии [14]. В этом списке особое место занимают работы [15]–[17], в которых пространства $L_{\mu}^{p(x)}(E)$ были впервые использованы при решении задач, возникающих в многомерном вариационном исчислении. В работах [18]–[25] при том же логарифмическом условии Дини–Липшица для переменного показателя $p(x)$ исследованы свойства сингулярных интегралов в пространствах $L_{\mu}^{p(x)}(E)$.

В настоящей работе рассматривается задача о приближении функций тригонометрическими полиномами в метрике пространства $L_{\mu}^{p(x)}([0, 2\pi])$. Пусть $p = p(x)$ – измеримая 2π -периодическая функция, $p_- = \inf\{p(x) : x \in \mathbb{R}\}$, $p^+ = \sup\{p(x) : x \in \mathbb{R}\}$, $1 \leq p_- \leq p^+ < \infty$, $L_{2\pi}^{p(x)}$ – пространство измеримых 2π -периодических функций, для которых $\int_0^{2\pi} |f(x)|^{p(x)} dx < \infty$. Полагая

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \inf \left\{ \alpha > 0 : \int_0^{2\pi} \left| \frac{f(x)}{\alpha} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}, \quad (1.1)$$

мы превратим $L_{2\pi}^{p(x)}$ в банахово пространство. Через $\mathcal{P}_{2\pi}$ обозначим множество всех 2π -периодических переменных показателей $p = p(x) \geq 1$, удовлетворяющих на периоде условию

$$|p(x) - p(y)| \ln \frac{2\pi}{|x - y|} \leq d, \quad x, y \in [0, 2\pi]. \quad (1.2)$$

Подкласс переменных показателей $p = p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$, удовлетворяющих дополнительному условию $p_- > 1$, мы обозначим $\widehat{\mathcal{P}}_{2\pi}$.

В работе автора [26] доказано, что если $p(x) \in \widehat{\mathcal{P}}_{2\pi}$, то тригонометрическая система $\{e^{ikx}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ является базисом пространства $L_{2\pi}^{p(x)}$. Другими словами, если мы положим

$$\begin{aligned} \widehat{f}_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ S_n(f) &= S_n(f, x) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}_k e^{ikx}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

то имеет место оценка

$$\|S_n(f)\|_{p(\cdot)} \leq c(p) \|f\|_{p(\cdot)}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.4)$$

Отсюда следует, что ряд Фурье функции $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$ сходится к ней по норме (1.1), т. е.

$$\|f - S_n(f)\|_{p(\cdot)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

более того, если $p(x) \in \widehat{\mathcal{P}}_{2\pi}$, то частичные суммы (1.3) доставляют функции $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$ приближение по норме (1.1), порядок которого при $n \rightarrow \infty$ совпадает с порядком наилучшего приближения

$$E_n(f)_{p(\cdot)} = \inf_{T_n} \|f - T_n\|_{p(\cdot)}, \quad (1.5)$$

где нижняя грань берется по всем тригонометрическим полиномам

$$T_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}. \quad (1.6)$$

Теперь возникает вопрос о том, с какой скоростью величина $E_n(f)_{p(\cdot)}$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ в зависимости от структурных свойств самой функции $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$. Другими словами, требуется ввести модуль непрерывности функции $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$ и через него оценить величину $E_n(f)_{p(\cdot)}$. Как отмечалось еще в работе [27], величина

$$\omega(f, \delta)_{p(\cdot)} = \sup_{0 < h \leq \delta} \|f - f(\cdot + h)\|_{p(\cdot)}$$

в случае переменного показателя $p = p(x)$ не может рассматриваться в качестве модуля непрерывности функции $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$, так как, вообще говоря, не для всякой такой функции выполнено соотношение $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f, \delta)_{p(\cdot)} = 0$. Если $p(x)$ не совпадает почти всюду на $[0, 2\pi]$ с некоторой константой, то из принадлежности функции $f(x)$ пространству $L_{2\pi}^{p(x)}$ не обязательно следует, что ее сдвиг $f^h(x) = f(x + h)$ также будет принадлежать $L_{2\pi}^{p(x)}$. Скорее, наоборот, интеграл $\int_0^{2\pi} |f(x + h)|^{p(x)} dx$, как правило, расходится при $h \neq 0$. Это обстоятельство являлось основным препятствием на пути переноса на пространства $L_{2\pi}^{p(x)}$ основных теорем теории приближения функций тригонометрическими полиномами. Чтобы получить один из вариантов ответа на поставленный выше вопрос, нам понадобятся некоторые типы функций В. А. Стеклова. Положим

$$f_h(x) = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(x+t) dt, \quad s_h(f)(x) = f_h\left(x + \frac{h}{2}\right) = \frac{1}{h} \int_0^h f(x+t) dt \quad (1.7)$$

и рассмотрим величину

$$\Omega(f, \delta)_{p(\cdot)} = \sup_{0 < h \leq \delta} \left\| f - f_h\left(\cdot + \frac{h}{2}\right) \right\|_{p(\cdot)} = \sup_{0 < h \leq \delta} \|f - s_h(f)\|_{p(\cdot)}. \quad (1.8)$$

Как будет показано далее, из результатов, полученных в уже упомянутой работе [26], следует, что если $p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$, то функция $\Omega(f, \delta)_{p(\cdot)}$ непрерывна на $[0, \infty)$ и при этом $\lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega(f, \delta)_{p(\cdot)} = 0$. Из определения (1.8) следует также, что $\Omega(f, \delta)_{p(\cdot)}$ не убывает вместе с δ . Будем называть $\Omega(f, \delta)_{p(\cdot)}$ *модулем непрерывности* функции $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$. В настоящей работе, в частности, мы покажем, что если $p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$ и $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$, то справедливо неравенство типа Джексона

$$E_n(f)_{p(\cdot)} \leq c(p) \Omega\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p(\cdot)}, \quad (1.9)$$

более того, если $\Omega(f, \delta)_{p(\cdot)} \leq c\delta^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, то справедливо и обратное утверждение. А именно, если $E_n(f)_{p(\cdot)} \leq c/n^\alpha$, $n = 1, 2, \dots$, то $\Omega(f, \delta)_{p(\cdot)} = O(\delta^\alpha)$. Вернувшись еще раз к работе [26], отметим, что в ней рассмотрена величина

$$\Omega^\gamma(f, 0)_{p(\cdot)} = 0, \quad \Omega^\gamma(f, \delta)_{p(\cdot)} = \sup_{\substack{h, \tau \\ |\tau|^{1/\gamma} \leq h \leq \delta}} \|f - f_h(\cdot + \tau)\|_{p(\cdot)}, \quad (1.10)$$

где $\gamma > 0$, которую назовем γ -модулем непрерывности функции $f(x) \in L_{2\pi}^{p(x)}$. Из соотношений (1.8) и (1.10) имеем

$$\Omega(f, \delta)_{p(\cdot)} = \sup_{0 < h \leq \delta} \left\| f - f_h\left(\cdot + \frac{h}{2}\right) \right\|_{p(\cdot)} \leq \Omega^1(f, \delta)_{p(\cdot)}. \quad (1.11)$$

С другой стороны, в [26] доказана

ТЕОРЕМА А. Если $p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $f(x) \in L_{2\pi}^{p(x)}$, то функция $g(\delta) = \Omega^\gamma(f, \delta)_{p(\cdot)}$ не убывает на $[0, \infty]$ и непрерывна в точке $\delta = 0$.

Из теоремы А и оценки (1.11) вытекает, в частности, соотношение

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega(f, \delta)_{p(\cdot)} = 0, \quad (1.12)$$

которое уже отмечалось выше.

Доказательство теоремы А опирается на равномерную ограниченность в $L_{2\pi}^{p(x)}$ при $0 < h \leq 1$, $|\tau| \leq \pi h^\gamma$ семейства сдвигов функций В. А. Стеклова

$$\mathcal{S}_{h,\tau}(f) = \mathcal{S}_{h,\tau}(f)(x) = f_{h,\tau}(x) = f_h(x + \tau) = \frac{1}{h} \int_{x+\tau-\frac{h}{2}}^{x+\tau+\frac{h}{2}} f(t) dt,$$

а именно в [26] доказано, что если $p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$, то имеет место оценка

$$\|\mathcal{S}_{h,\tau}(f)\|_{p(\cdot)} \leq c(d)(2\pi + 1)^{p_-} \|f\|_{p(\cdot)}, \quad 0 < h \leq 1, \quad |\tau| \leq \pi h^\gamma, \quad (1.13)$$

где d – константа из неравенства (1.2).

В связи с рассматриваемой проблемой мы отметим работы [28]–[33], в которых рассмотрены задачи о получении прямых и обратных теорем теории приближений в пространствах $L_{2\pi}^{p(x)}$ при условии, когда $p(x) \in \widehat{\mathcal{P}}_{2\pi}$. Принципиальное отличие результатов, полученных в настоящей работе, от результатов, полученных в работах [28]–[33], состоит в том, что при доказательстве прямой и обратной теорем теории приближений в пространствах $L_{2\pi}^{p(x)}$ нам удалось избавиться от ограничения $p_- > 1$ и заменить его естественным ограничением $p_- \geq 1$, где, как уже было определено выше, $p_- = \inf\{p(x) : x \in \mathbb{R}\}$. Отметим, что результаты из работ [28]–[33] получены при условии $p_- > 1$. Следует особо отметить, что это не случайно. Методы, с помощью которых в указанных работах исследованы прямые и обратные задачи теории приближений в пространствах $L_{2\pi}^{p(x)}$ или даже в более общих весовых пространствах с переменным показателем $L_{2\pi,\rho}^{p(x)}$, непосредственно или опосредованно используют ограниченность в $L_{2\pi}^{p(x)}$ максимальной функции Харди–Литтлвуда $M(f)$ или ограниченность его аналогов и обобщений в весовых пространствах $L_{2\pi,\rho}^{p(x)}$, а это, как хорошо известно, возможно только при условии $p_- > 1$. Например, в работе [28] при условии $p(x) \in \widehat{\mathcal{P}}_{2\pi}$ доказательство прямой теоремы типа Джексона в $L_{2\pi}^{p(x)}$ опирается на ограниченность в $L_{2\pi}^{p(x)}$ оператора сопряженной функции и базисность в $L_{2\pi}^{p(x)}$ тригонометрической системы, установленных в работе автора [26], где использовалась ограниченность в $L_{2\pi}^{p(x)}$ преобразования Гильберта при условии $p(x) \in \widehat{\mathcal{P}}_{2\pi}$, выведенная в работе [12] из теоремы об ограниченности максимальной функции, доказанной в [11].

Для получения прямых и обратных теорем теории приближений в пространствах $L_{2\pi}^{p(x)}$, когда переменный показатель $p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$, удовлетворяющий условию Дини–Липшица (1.2), в некоторых точках может быть равен 1 (т. е. $p_- = 1$), потребовалось разработать принципиально новые подходы, не опирающиеся на свойства максимальной функции $M(f)$. В настоящей статье предпринята

попытка решить эту задачу в части, касающейся первой теоремы Джексона. Удалось установить, что одним из инструментов доказательства в $L_{2\pi}^{p(x)}$ первой теоремы Джексона является известный оператор Джексона (тригонометрический полином порядка $2n - 2$)

$$\mathcal{D}_n(f) = \mathcal{D}_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) J_n(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где

$$J_n(x) = \frac{3}{2n(2n^2 + 1)} \left(\frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^4.$$

Доказано, что $\mathcal{D}_n(f)(x)$ доставляет функции $f(x) \in L_{2\pi}^{p(x)}$ приближение порядка $O(\Omega(f, \frac{1}{n})_{p(\cdot)})$, другими словами, при $p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$ для $f(x) \in L_{2\pi}^{p(x)}$ установлена оценка

$$\|f - \mathcal{D}_n(f)\|_{p(\cdot)} \leq c(p) \Omega\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p(\cdot)},$$

из которой вновь вытекает неравенство (1.9).

При доказательстве неравенства (аналога второй теоремы Джексона)

$$E_n(f)_{p(\cdot)} \leq c(p) \frac{1}{n^r} \Omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right)_{p(\cdot)}$$

возникли дополнительные трудности, которых в общем случае, при $p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$, не удалось преодолеть. Поэтому мы ограничились его доказательством при условии $p(x) \in \widehat{\mathcal{P}}_{2\pi}$ (см. теорему 6.2).

§ 2. Некоторые результаты общего характера

Пусть E – измеримое множество, $p(x)$ – измеримая функция, заданная на E , $p^-(E) = \sup\{p(x) : x \in E\}$, $p_-(E) = \inf\{p(x) : x \in E\}$, $1 \leq p_-(E) \leq p^-(E) < \infty$, $L^{p(x)}(E)$ – пространство измеримых функций $f = f(x)$, заданных на E и таких, что

$$\int_E |f(x)|^{p(x)} \mu(dx) < \infty.$$

Для $f(x) \in L^{p(x)}(E)$ определим норму

$$\|f\|_{p(\cdot)}(E) = \inf \left\{ \alpha > 0 : \int_E \left| \frac{f(x)}{\alpha} \right|^{p(x)} \mu(dx) \leq 1 \right\}. \quad (2.1)$$

Нам понадобится ряд утверждений, связанных с нормой (2.1).

ЛЕММА 2.1. Пусть $p_n(x) \geq 1$, $n = 1, 2, \dots$, – последовательность равномерно ограниченных функций, которая почти всюду на E , $\mu(E) < \infty$, сходится к ограниченной функции $p(x) \geq 1$. Если суммируемые на E функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ таковы, что

$$|f(x)|^{p_n(x)} \leq \varphi(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.2)$$

почти всюду на E , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f\|_{p_n(\cdot)}(E) = \|f\|_{p(\cdot)}(E). \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что (2.3) не верно. Для определенности можно считать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \|f\|_{p_n(\cdot)}(E) < \|f\|_{p(\cdot)}(E). \quad (2.4)$$

Из (2.2) и равномерной ограниченности $p_n(x)$ почти всюду на E следует, что

$$\left| \frac{f(x)}{\|f\|_{p(\cdot)}(E)} \right|^{p_n(x)} \leq \frac{\varphi(x)}{(\|f\|_{p(\cdot)}(E))^{p_n(x)}} \leq M\varphi(x) \quad (2.5)$$

почти всюду на E , где M не зависит от n . Поскольку по условию леммы

$$\left| \frac{f(x)}{\|f\|_{p(\cdot)}(E)} \right|^{p_n(x)} \rightarrow \left| \frac{f(x)}{\|f\|_{p(\cdot)}(E)} \right|^{p(x)}, \quad n \rightarrow \infty,$$

почти всюду на E , то в силу (2.5) и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла имеем при $n \rightarrow \infty$

$$\int_E \left| \frac{f(x)}{\|f\|_{p(\cdot)}(E)} \right|^{p_n(x)} \mu(dx) \rightarrow \int_E \left| \frac{f(x)}{\|f\|_{p(\cdot)}(E)} \right|^{p(x)} \mu(dx) = 1. \quad (2.6)$$

С другой стороны, из неравенства (2.4) следует, что существуют сколь угодно большое n и число $\nu > 1$, не зависящее от n , для которых

$$\left| \frac{f(x)}{\|f\|_{p(\cdot)}(E)} \right|^{p_n(x)} \leq \left| \frac{f(x)}{\|f\|_{p_n(\cdot)}(E)} \right|^{p_n(x)} \frac{1}{\nu^{p_n(x)}} \quad (2.7)$$

почти всюду на E . Из (2.7) видно, что

$$\int_E \left| \frac{f(x)}{\|f\|_{p(\cdot)}(E)} \right|^{p_n(x)} \mu(dx) \leq \nu^{-\beta} \int_E \left| \frac{f(x)}{\|f\|_{p_n(\cdot)}(E)} \right|^{p_n(x)} \mu(dx) = \nu^{-\beta} < 1, \quad (2.8)$$

где $\beta = \inf_n (p_n)_-(E) \geq 1$. Соотношения (2.6) и (2.8) противоречат друг другу. Аналогично доказывается, что не может иметь места и неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \|f\|_{p_n(\cdot)}(E) > \|f\|_{p(\cdot)}(E).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2. Пусть $p(x)$ и $q(x)$ – функции, заданные на E и такие, что $1 \leq p(x) \leq q(x) \leq q^-(E) < \infty$. Тогда для любой функции $f \in L^{q(x)}(E)$ имеет место неравенство

$$\|f\|_{p(\cdot)}(E) \leq r_{p,q} \|f\|_{q(\cdot)}(E),$$

где

$$r_{p,q}(E) = \max \left\{ \frac{1}{\alpha_-(E)} + \frac{\mu(E)}{\alpha'_-(E)}, 1 \right\}, \quad \alpha(x) = \frac{q(x)}{p(x)}, \quad \alpha'(x) = \frac{\alpha(x)}{\alpha(x) - 1},$$

$\mu(E)$ – мера множества E . В частности, если $\mu(E) \leq 1$, то $r_{p,q} \leq 2$.

Это утверждение впервые было анонсировано в работе [27], а полное доказательство можно найти, например, в [26].

Если функция $p(x)$ не является существенно ограниченной на измеримом множестве E , то пространство $L^{p(x)}(E)$ не является линейным [8], следовательно, и нормированным, но линейная оболочка этого пространства, которая в [8] обозначена через $LL^{p(x)}(E)$, является линейным нормированным пространством с нормой (2.1). Пусть $1 < p(x) < \infty$, $p'(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1}$, $f(x) \in LL^{p(x)}$, $g(x) \in LL^{p'(x)}$. Тогда, используя неравенство

$$ab \leq \frac{a^{p(x)}}{p(x)} + \frac{b^{p'(x)}}{p'(x)},$$

находим

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_{p(\cdot)}(E)} \frac{|g(x)|}{\|g\|_{p'(\cdot)}(E)} \leq \frac{1}{p(x)} \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{p(\cdot)}(E)} \right)^{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_{p'(\cdot)}(E)} \right)^{p'(x)}.$$

Интегрируя обе части последнего неравенства, получим

$$\int_E |f(x)g(x)| \mu(dx) \leq r_p \|f\|_{p(\cdot)} \|g\|_{p'(\cdot)}, \quad (2.9)$$

где

$$r_p \leq \frac{1}{p_-(E)} + \frac{1}{p'_-(E)} \leq 2.$$

Следующий результат также впервые был анонсирован в работе [27].

ЛЕММА 2.3. Пусть E_1, E_2 – измеримые множества, $p(x)$ – измеримая функция, заданная на E_1 , $1 \leq p^-(E_1) < \infty$, $f(t, x)$ – измеримая функция, заданная на прямоугольнике $E_1 \times E_2$. Тогда имеет место неравенство

$$\left\| \int_{E_2} |f(\cdot, x)| \mu(dx) \right\|_{p(\cdot)}(E_1) \leq r_p \int_{E_2} \|f(\cdot, x)\|_{p(\cdot)}(E_1) \mu(dx), \quad r_p \leq 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай, когда $1 < p(x) \leq p^-(E_1) < \infty$. Из неравенства (2.9) имеем

$$\sup_{\substack{\|g\|_{p'(\cdot)}(E_1) \leq 1 \\ g \in LL^{p'(x)}(E_1)}} \int_{E_1} |f(x)g(x)| \mu(dx) \leq r_p \|f\|_{p(\cdot)}(E_1). \quad (2.10)$$

С другой стороны, полагая

$$g(x) = \left| \frac{f(x)}{\|f\|_{p(\cdot)}(E_1)} \right|^{p(x)-1}, \quad (2.11)$$

имеем

$$\int_{E_1} |f(x)g(x)| \mu(dx) = \int_{E_1} \left| \frac{f(x)}{\|f\|_{p(\cdot)}(E_1)} \right|^{p(x)} \|f\|_{p(\cdot)}(E_1) \mu(dx) = \|f\|_{p(\cdot)}(E_1). \quad (2.12)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \int_{E_1} |g(x)|^{p'(x)} \mu(dx) &= \int_{E_1} \left| \frac{f(x)}{\|f\|_{p(\cdot)}(E_1)} \right|^{(p(x)-1)p'(x)} \mu(dx) \\ &= \int_{E_1} \left| \frac{f(x)}{\|f\|_{p(\cdot)}(E_1)} \right|^{p(x)} \mu(dx) = 1, \end{aligned} \quad (2.13)$$

то $g(x) \in LL^{p'(x)}(E_1)$ и $\|g\|_{p'(\cdot)}(E_1) = 1$. Из (2.10)–(2.13) следует, что

$$\|f\|_{p(\cdot)}(E_1) \leq \sup_{\substack{\|g\|_{p'(\cdot)}(E_1) \leq 1 \\ g \in LL^{p'(x)}(E_1)}} \int_{E_1} |f(x)g(x)| \mu(dx) \leq r_p \|f\|_{p(\cdot)}(E_1). \quad (2.14)$$

Используя (2.14) и теорему Фубини, мы можем записать следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \left\| \int_{E_2} |f(\cdot, x)| \mu(dx) \right\|_{p(\cdot)}(E_1) &\leq \sup_{\substack{\|g\|_{p'(\cdot)}(E_1) \leq 1 \\ g \in LL^{p'(x)}(E_1)}} \int_{E_1} \left| g(t) \int_{E_2} |f(t, x)| \mu(dx) \right| \mu(dt) \\ &\leq \sup_{\substack{\|g\|_{p'(\cdot)}(E_1) \leq 1 \\ g \in LL^{p'(x)}(E_1)}} \int_{E_2} \left(\int_{E_1} |g(t)f(t, x)| \mu(dt) \right) \mu(dx) \\ &\leq r_p \int_{E_2} \|f(\cdot, x)\|_{p(\cdot)}(E_1) \mu(dx). \end{aligned}$$

Утверждение леммы, относящееся к случаю $1 < p(x) \leq p^-(E_1) < \infty$, доказано.

Пусть теперь $1 \leq p(t) \leq p^- < \infty$. Докажем справедливость утверждения леммы сначала для ограниченных функций $f(t, x)$. Положим

$$\begin{aligned} M_n &= \left\{ t, p(t) \geq 1 + \frac{1}{n}, t \in E_1 \right\}, \quad n = 1, 2, \dots, \\ p_n(t) &= \begin{cases} p(t), & \text{если } t \in M_n, \\ 1 + \frac{1}{n}, & \text{если } t \notin M_n. \end{cases} \end{aligned}$$

Поскольку $p_n(t) > 1$, $t \in E_1$, в силу уже доказанного случая имеем

$$\begin{aligned} \left\| \int_{E_2} |f(\cdot, x)| \mu_2(dx) \right\|_{p_n(\cdot)}(E_1) &\leq r_{p_n} \int_{E_2} \|f(\cdot, x)\|_{p_n(\cdot)}(E_1) \mu_2(dx), \\ r_{p_n} &\leq \frac{1}{(p_n)^-(E_1)} + \frac{1}{(p'_n)^-(E_1)}. \end{aligned}$$

Переходя здесь к пределу при $n \rightarrow \infty$, в силу леммы 2.1 получим для ограниченной функции $f(t, x)$ неравенство ($r_p \leq 2$)

$$\left\| \int_{E_2} |f(\cdot, x)| \mu_2(dx) \right\|_{p(\cdot)}(E_1) \leq r_p \int_{E_2} \|f(\cdot, x)\|_{p(\cdot)}(E_1) \mu_2(dx). \quad (2.15)$$

Пусть, наконец, $f(t, x)$ – произвольная функция, для которой имеет смысл правая часть доказываемого неравенства леммы. Без ограничения общности

можно считать, что $f(t, x) \geq 0$. Положим

$$f_N(t, x) = \begin{cases} f(t, x) & \text{при } f(t, x) \leq N, \\ N & \text{при } f(t, x) > N. \end{cases}$$

Ясно, что $f_N(t, x) \leq f(t, x)$ и $f_N(t, x) \rightarrow f(t, x)$ при $N \rightarrow \infty$ всюду в декартовом произведении $E_1 \times E_2$. Поэтому при любых $t_0 \in E_1$ и $x_0 \in E_2$

$$\begin{aligned} \int_{E_2} f_N(t_0, x) \mu_2(dx) &\leq \int_{E_2} f(t_0, x) \mu_2(dx), \\ \|f_N(\cdot, x_0)\|_{p(\cdot)}(E_1) &\leq \|f(\cdot, x_0)\|_{p(\cdot)}(E_1). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Отсюда в силу теоремы Фату имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{E_2} f_N(t_0, x) \mu_2(dx) = \int_{E_2} f(t_0, x) \mu_2(dx), \quad t_0 \in E_1, \quad (2.17)$$

$$\sup_N \int_{E_2} \|f_N(\cdot, x)\|_{p(\cdot)} \mu_2(dx) \leq \int_{E_2} \|f(\cdot, x)\|_{p(\cdot)}(E_1) \mu_2(dx). \quad (2.18)$$

Теперь нетрудно завершить доказательство следующим образом. Если допустить, что

$$\left\| \int_{E_2} f(\cdot, x) \mu_2(dx) \right\|_{p(\cdot)}(E_1) = \infty,$$

то получим

$$\int_{E_1} \left(\int_{E_2} f(t, x) \mu_2(dx) \right)^{p(t)} \mu_1(dt) = \infty. \quad (2.19)$$

Поскольку в силу (2.17)

$$\left(\int_{E_2} f_N(t, x) \mu_2(dx) \right)^{p(t)} \rightarrow \left(\int_{E_2} f(t, x) \mu_2(dx) \right)^{p(t)},$$

имеем

$$\sup_N \int_{E_1} \left(\int_{E_2} f_N(t, x) \mu_2(dx) \right)^{p(t)} \mu_1(dt) = \infty,$$

т. е.

$$\sup_N \left\| \int_{E_2} f_N(\cdot, x) \mu_2(dx) \right\|_{p(\cdot)}(E_1) = \infty. \quad (2.20)$$

С другой стороны, поскольку для произвольного N функция $f_N(t, x)$ ограничена на $E_1 \times E_2$, то в силу (2.15) имеем

$$\sup_N \left\| \int_{E_2} f_N(\cdot, x) \mu_2(dx) \right\|_{p(\cdot)}(E_1) \leq r_p \sup_N \int_{E_2} \|f_N(\cdot, x)\|_{p(\cdot)}(E_1) \mu_2(dx). \quad (2.21)$$

Из (2.18), (2.20) и (2.21) следует, что

$$\int_{E_2} \|f(\cdot, x)\|_{p(\cdot)}(E_1) \mu_2(dx) = \infty,$$

а это противоречит предположению о том, что для $f(t, x)$ правая часть доказываемого неравенства имеет смысл. Остается рассмотреть случай, когда

$$\left\| \int_{E_2} f(\cdot, x) \mu_2(dx) \right\|_{p(\cdot)}(E_1) < \infty$$

и, следовательно,

$$\int_{E_2} f(t, x) \mu_2(dx) \in L_{\mu_1}^{p(t)}(E_1).$$

Тогда в силу (2.16) имеем

$$\int_{E_2} f_N(t, x) \mu_2(dx) \in L_{\mu_1}^{p(t)}(E_1),$$

а также

$$\left[\int_{E_2} (f(t, x) - f_N(t, x)) \mu_2(dx) \right]^{p(t)} \leq \left[\int_{E_2} f(t, x) \mu_2(dx) \right]^{p(t)}. \quad (2.22)$$

Из (2.22) и (2.17) находим, что при $N \rightarrow \infty$

$$\int_{E_1} \left[\int_{E_2} (f(t, x) - f_N(t, x)) \mu_2(dx) \right]^{p(t)} \mu_1(dt) \rightarrow 0,$$

и так как норма $\|\cdot\|_{p(\cdot)}$ непрерывна в топологии пространства $L_{\mu_1}^{p(t)}(E_1)$, то при $N \rightarrow \infty$

$$\left\| \int_{E_2} f_N(\cdot, x) \mu_2(dx) \right\|_{p(\cdot)}(E_1) \rightarrow \left\| \int_{E_2} f(\cdot, x) \mu_2(dx) \right\|_{p(\cdot)}(E_1). \quad (2.23)$$

Сопоставляя (2.18), (2.21) и (2.23), приходим к окончательному утверждению леммы.

§ 3. О неравенствах типа С. Н. Бернштейна в $L_{2\pi}^{p(x)}$

При доказательстве одной обратной теоремы теории приближений в $L_{2\pi}^{p(x)}$ тригонометрическими полиномами нам понадобятся некоторые результаты, аналогичные неравенству С. Н. Бернштейна об оценке производной тригонометрического полинома.

ЛЕММА 3.1. Пусть $p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$,

$$T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \quad (3.1)$$

– тригонометрический полином порядка n . Тогда имеет место неравенство

$$\|T'_n\|_{p(\cdot)} \leq c(p)n \|T_n\|_{p(\cdot)}.$$

ЛЕММА 3.2. Если $p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$, то для произвольного тригонометрического полинома $T_n(x)$ вида (3.1) имеют место оценки

$$\|s_h(T_n')\|_{p(\cdot)} \leq c(p)n\|T_n\|_{p(\cdot)}, \quad (3.2)$$

$$\|(s_h(T_n))'\|_{p(\cdot)} \leq c(p)n\|T_n\|_{p(\cdot)}, \quad (3.3)$$

где через $s_h(T_n)$ обозначена функция В. А. Стеклова вида

$$s_h(T_n) = s_h(T_n)(x) = \frac{1}{h} \int_0^h T_n(x+t) dt.$$

Сначала мы покажем, что утверждение леммы 3.2 является следствием леммы 3.1. В самом деле, заметим, что $s_h(T_n)(x)$ представляет собой тригонометрический полином порядка n , поэтому из леммы 3.1 следует, что

$$\|(s_h(T_n))'\|_{p(\cdot)} \leq c(p)n\|s_h(T_n)\|_{p(\cdot)}. \quad (3.4)$$

С другой стороны, из (1.13) следует, что если $p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$, то

$$\|s_h(T_n)\|_{p(\cdot)} \leq c(p)\|T_n\|_{p(\cdot)}. \quad (3.5)$$

Из (3.4) и (3.5) вытекает оценка (3.3). Оценка (3.2) доказывается аналогично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.1. Мы можем [34, т. 2, с. 19] записать

$$T_n(\theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} T_n(t) D_n^*(t - \theta) d\varphi_{2n}(t), \quad (3.6)$$

где

$$D_n^*(u) = \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n-1} \cos(\nu u) + \frac{1}{2} \cos(nu) = \frac{\sin(nu)}{2 \operatorname{tg} \frac{u}{2}}, \quad (3.7)$$

$\varphi_{2n}(t)$ – ступенчатая функция, имеющая скачки, равные $\frac{\pi}{n}$ в точках $u_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}$, $k = 1, \dots, 2n$, постоянная в каждом интервале (u_k, u_{k+1}) и непрерывная слева в точках u_k , $k = 1, \dots, 2n$. Дифференцируя равенство (3.6), получим

$$T_n'(\theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} T_n(t) \left\{ \frac{n \cos(n(\theta - t))}{2 \operatorname{tg} \frac{\theta - t}{2}} - \frac{\sin(n(\theta - t))}{4 \sin^2 \frac{\theta - t}{2}} \right\} d\varphi_{2n}(t).$$

Положим $\theta = 0$ и учтем, что u_k , $k = 1, \dots, 2n$, являются нулями $\cos(nt)$. Тогда из предыдущего равенства находим

$$T_n'(0) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} T_n(u_k) \frac{(-1)^{k+1}}{(2 \sin \frac{u_k}{2})^2}. \quad (3.8)$$

Применяя этот результат к полиному $T_n(\theta + x)$, получим

$$T_n'(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} T_n(\theta + u_k) \frac{(-1)^{k+1}}{(2 \sin \frac{u_k}{2})^2}. \quad (3.9)$$

Положим

$$K_n(u) = \begin{cases} \frac{1}{n(2 \sin \frac{\pi}{2n})^2}, & \text{если } |u| \leq \frac{\pi}{2n}, \\ n^{-1} \left(2 \sin \frac{u}{2}\right)^{-2} \sin(nu), & \text{если } \frac{\pi}{2n} \leq u \leq 2\pi - \frac{\pi}{2n}, \end{cases} \quad (3.10)$$

и продолжим $K_n(u)$ 2π -периодически на всю числовую ось. Тогда (3.9) принимает следующий вид:

$$T'_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} K_n(u_k) T_n(x + u_k), \quad (3.11)$$

при этом из (3.8), полагая $T_n(x) = \sin(nx)$, находим

$$\sum_{k=1}^{2n} |K_n(u_k)| = n. \quad (3.12)$$

Равенство (3.11) можно переписать также следующим образом:

$$T'_n(x) = \frac{n}{\pi} \int_0^{2\pi} T_n(x+t) K_n(t) d\varphi_{2n}(t) = \frac{n}{\pi} \int_0^{2\pi} T_n(t) K_n(t-x) d\varphi_{2n}(t-x).$$

Это равенство для полинома $\tilde{T}_n(x) = \frac{T_n(x)}{n\|T_n\|_{p(\cdot)}}$ дает

$$\tilde{T}'_n(x) = \frac{n}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{T}_n(t) K_n(t-x) d\varphi_{2n}(t-x). \quad (3.13)$$

Для доказательства леммы достаточно показать, что найдется постоянная $c(p)$, зависящая только от переменного показателя $p = p(x)$, для которой

$$\|T'_n\|_{p(\cdot)} \leq c(p), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.14)$$

С этой целью заметим сначала, что ядро $K_n(u)$ обладает следующими свойствами:

- А) $\int_0^{2\pi} |K_n(u)| d\varphi_{2n}(u) \leq \pi$;
- В) $|K_n(u)| \leq c, \quad n^{-\frac{1}{2}} \leq u \leq 2\pi - n^{-\frac{1}{2}}$;
- С) $\max_u |K_n(u)| \leq \frac{1}{n} (2 \sin \frac{\pi}{2n})^{-2} \leq cn$.

Пусть $N = [n^{\frac{1}{2}}]$ – целая часть числа $n^{\frac{1}{2}}$, $h = \frac{1}{N}$,

$$x_k = k\pi h, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (3.15)$$

$$m_k = \min\{p(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_{k+2}\}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (3.16)$$

$$p_t(x) = m_k, \quad x_k - t \leq x < x_{k+1} - t, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.17)$$

Поскольку $p_t(x) = p_0(x+t)$, из (3.15)–(3.17) следует, что $p_t(x)$ при фиксированном t представляет собой 2π -периодическую ступенчатую функцию по переменной x , причем если $|t| \leq \pi h$, то

$$p_t(x) \leq p(x). \quad (3.18)$$

Определим для $x \in [0, 2\pi]$ множество E_x следующим образом:

$$E_x = \begin{cases} (0, 2\pi) \setminus (x - \pi h, x + \pi h), & (x - \pi h, x + \pi h) \subset (0, 2\pi), \\ (0, 2\pi) \setminus \{(0, x + \pi h) \cup (x - \pi h + 2\pi, 2\pi)\}, & x - \pi h < 0, \\ (0, 2\pi) \setminus \{(x - \pi h, 2\pi) \cup (0, x - \pi h - 2\pi)\}, & 2\pi < x + \pi h. \end{cases}$$

Полагая $p^- = \max\{p(x) : 0 \leq x \leq 2\pi\}$, из (3.13) имеем

$$\begin{aligned}
 \left(\int_0^{2\pi} |\tilde{T}'_n(x)|^{p(x)} dx \right)^{\frac{1}{p^-}} &= \left(\int_0^{2\pi} \left| \frac{n}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{T}_n(t) K_n(t-x) d\varphi_{2n}(t-x) \right|^{p(x)} dx \right)^{\frac{1}{p^-}} \\
 &\leq \left(\int_0^{2\pi} \left| \frac{n}{\pi} \int_{x-\pi h}^{x+\pi h} \tilde{T}_n(t) K_n(t-x) d\varphi_{2n}(t-x) \right|^{p(x)} dx \right)^{\frac{1}{p^-}} \\
 &\quad + \left(\int_0^{2\pi} \left| \frac{n}{\pi} \int_{E_x} \tilde{T}_n(t) K_n(t-x) d\varphi_{2n}(t-x) \right|^{p(x)} dx \right)^{\frac{1}{p^-}} \\
 &= J_1^{\frac{1}{p^-}} + J_2^{\frac{1}{p^-}}.
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

(Здесь мы воспользовались тем фактом [8], что отображение $(f, g) \rightarrow \rho(f, g)$, где

$$\rho(f, g) = \left(\int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^{p(x)} dx \right)^{\frac{1}{p^-}},$$

является метрикой в $L_{2\pi}^{p(x)}$.) Далее заметим, что в силу свойства В) при $0 \leq x \leq 2\pi$, $t \in E_x$, справедлива оценка $|K_n(t-x)| = O(1)$. Поэтому имеем

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{n}{\pi} \int_{E_x} \tilde{T}_n(t) K_n(t-x) d\varphi_{2n}(t-x) \right| &\leq \frac{cn}{\pi n \|T\|_{p(\cdot)}} \int_{E_x} |T_n(t)| d\varphi_{2n}(t-x) \\
 &\leq \frac{c}{\|T\|_{p(\cdot)}} \int_0^{2\pi} |T_n(t)| d\varphi_{2n}(t-x) = \frac{c}{\|T\|_{p(\cdot)}} \int_0^{2\pi} |T_n(t+x)| d\varphi_{2n}(t).
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Теперь воспользуемся следующей оценкой (см. [5, т. 2, с. 46–48]):

$$\left(\int_0^{2\pi} |Q_n(t)|^q d\varphi_N(t) \right)^{\frac{1}{q}} \leq A(\varepsilon) \left(\int_0^{2\pi} |Q_n(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}},$$

где $q \geq 1$, $Q_n(t)$ – произвольный тригонометрический полином порядка n , $\varphi_N(t)$ – ступенчатая функция со скачками $\frac{2\pi}{N}$ в точках равномерной сетки с шагом $\frac{2\pi}{N}$, причем $(1+\varepsilon)n \leq N$. В частности, полагая $\varepsilon = 1$, $q = 1$, мы можем записать

$$\int_0^{2\pi} |T_n(t+x)| d\varphi_{2n}(t) \leq A \int_0^{2\pi} |T_n(t+x)| dt = A \int_0^{2\pi} |T_n(t)| dt. \tag{3.21}$$

Теперь обратимся к лемме 2.2, согласно которой

$$\int_0^{2\pi} |T_n(t)| dt \leq (2\pi + 1) \|T_n\|_{p(\cdot)}. \tag{3.22}$$

Сопоставляя (3.19)–(3.21), мы заключаем, что

$$J_2^{\frac{1}{p^-}} \leq c(p). \tag{3.23}$$

Оценим

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^{2\pi} \left| \frac{n}{\pi} \int_{x-\pi h}^{x+\pi h} \tilde{T}_n(t) K_n(t-x) d\varphi_{2n}(t-x) \right|^{p(x)} dx \\ &= \sum_{k=0}^{2N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left| \frac{n}{\pi} \int_{x-\pi h}^{x+\pi h} \tilde{T}_n(t) K_n(t-x) d\varphi_{2n}(t-x) \right|^{m_k+p(x)-m_k} dx. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Из условия (1.2) и из (3.15), (3.16) следует, что при $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ имеет место оценка $p(x) - m_k \leq \frac{c_2(p)}{\ln(2n)}$, поэтому в силу условия С) и оценок (3.21) и (3.22)

$$\begin{aligned} &\left| \frac{n}{\pi} \int_{x-\pi h}^{x+\pi h} \tilde{T}_n(t) K_n(t-x) d\varphi_{2n}(t-x) \right|^{p(x)-m_k} \\ &\leq c_1(p) n^{\frac{c_2(p)}{\ln(2n)}} \left(\int_{x-\pi h}^{x+\pi h} \frac{|T_n(t)|}{\|T_n\|_{p(\cdot)}} d\varphi_{2n}(t-x) \right)^{\frac{c_2(p)}{\ln(2n)}} \\ &\leq c_1(p) n^{\frac{c_2(p)}{\ln(2n)}} \left(\int_0^{2\pi} \frac{|T_n(t)|}{\|T_n\|_{p(\cdot)}} d\varphi_{2n}(t-x) \right)^{\frac{c_2(p)}{\ln(2n)}} \\ &\leq c_1(p) n^{\frac{c_2(p)}{\ln(2n)}} \left(\int_0^{2\pi} \frac{|T_n(t)|}{\|T_n\|_{p(\cdot)}} dt \right)^{\frac{c_2(p)}{\ln(2n)}} \leq c(p) \left\| \frac{T_n}{\|T_n\|_{p(\cdot)}} \right\|_{p(\cdot)}^{\frac{c_2(p)}{\ln(2n)}} \leq c(p). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Из соотношений (3.24) и (3.25) получаем

$$J_1 \leq c(p) \sum_{k=0}^{2N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left| \frac{n}{\pi} \int_{x-\pi h}^{x+\pi h} \tilde{T}_n(t) K_n(t-x) d\varphi_{2n}(t-x) \right|^{m_k} dx. \quad (3.26)$$

Величина

$$\mu_n = \int_{x-\pi h}^{x+\pi h} |K_n(t-x)| d\varphi_{2n}(t-x) = \int_{-\pi h}^{\pi h} |K_n(t)| d\varphi_{2n}(t)$$

в силу свойства А) имеет порядок $\mu_n = O(1)$, поэтому из (3.26), используя неравенство Иенсена, находим

$$\begin{aligned} J_1 &\leq c(p) \sum_{k=0}^{2N-1} \mu_n^{m_k} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left| \frac{n}{\mu_n \pi} \int_{x-\pi h}^{x+\pi h} \tilde{T}_n(t) K_n(t-x) d\varphi_{2n}(t-x) \right|^{m_k} dx \\ &\leq c(p) \sum_{k=0}^{2N-1} \mu_n^{m_k} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dx}{\mu_n} \int_{x-\pi h}^{x+\pi h} |n \tilde{T}_n(t)|^{m_k} |K_n(t-x)| d\varphi_{2n}(t-x) \\ &\leq c(p) \sum_{k=0}^{2N-1} \mu_n^{m_k-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} dx \int_{-\pi h}^{\pi h} \left(\frac{|T_n(t+x)|}{\|T_n\|_{p(\cdot)}} \right)^{m_k} |K_n(t)| d\varphi_{2n}(t) \\ &\leq c(p) \int_{-\pi h}^{\pi h} |K_n(t)| d\varphi_{2n}(t) \sum_{k=0}^{2N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(\frac{|T_n(t+x)|}{\|T_n\|_{p(\cdot)}} \right)^{m_k} dx \\ &\leq c(p) \int_{-\pi h}^{\pi h} |K_n(t)| d\varphi_{2n}(t) \sum_{k=0}^{2N-1} \int_{x_k-t}^{x_{k+1}-t} \left(\frac{|T_n(x)|}{\|T_n\|_{p(\cdot)}} \right)^{m_k} dx. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (3.15)–(3.17), имеем

$$\begin{aligned}
 J_1 &\leq c(p) \int_{-\pi h}^{\pi h} |K_n(t)| d\varphi_{2n}(t) \sum_{k=0}^{2N-1} \int_{x_k-t}^{x_{k+1}-t} \left(\frac{|T_n(x)|}{\|T_n\|_{p(\cdot)}} \right)^{p_t(x)} dx \\
 &= c(p) \int_{-\pi h}^{\pi h} |K_n(t)| d\varphi_{2n}(t) \int_{-t}^{2\pi-t} \left(\frac{|T_n(x)|}{\|T_n\|_{p(\cdot)}} \right)^{p_t(x)} dx \\
 &= c(p) \int_{-\pi h}^{\pi h} |K_n(t)| d\varphi_{2n}(t) \int_0^{2\pi} \left(\frac{|T_n(x)|}{\|T_n\|_{p(\cdot)}} \right)^{p_t(x)} dx.
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Далее, из (3.18) и леммы 3.1 следует, что

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \left(\frac{|T_n(x)|}{\|T_n\|_{p(\cdot)}} \right)^{p_t(x)} dx &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\|T_n\|_{p_t(\cdot)}}{\|T_n\|_{p(\cdot)}} \right)^{p_t(x)} \left(\frac{|T_n(x)|}{\|T_n\|_{p_t(\cdot)}} \right)^{p_t(x)} dx \\
 &\leq \int_0^{2\pi} \left(\frac{(2\pi+1)\|T_n\|_{p(\cdot)}}{\|T_n\|_{p(\cdot)}} \right)^{p_t(x)} \left(\frac{|T_n(x)|}{\|T_n\|_{p_t(\cdot)}} \right)^{p_t(x)} dx, \\
 (2\pi+1)^{p^-} \int_0^{2\pi} \left(\frac{|T_n(x)|}{\|T_n\|_{p_t(\cdot)}} \right)^{p_t(x)} dx &= (2\pi+1)^{p^-}.
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Сопоставляя (3.27), (3.28) со свойством А), выводим

$$J_1 \leq c(p). \tag{3.29}$$

Оценки (3.19), (3.23) и (3.29), установленные при условии $p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$, приводят нас к справедливости леммы.

§ 4. Некоторые свойства операторов Джексона в $L_{2\pi}^{p(x)}$

При доказательстве прямой теоремы теории приближений в $L_{2\pi}^{p(x)}$ нам понадобятся некоторые свойства хорошо известных ядер и операторов Джексона. Ядро Джексона имеет вид

$$J_n(x) = \frac{3}{2n(2n^2+1)} \left(\frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^4, \quad n = 1, 2, \dots \tag{4.1}$$

Из (4.1) нетрудно вывести следующие свойства:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) dt = 1, \tag{4.2}$$

$$|J_n(u)| \leq c, \quad n^{-\frac{3}{4}} \leq u \leq 2\pi - n^{-\frac{3}{4}}, \tag{4.3}$$

$$\max_t |J_n(t)| \leq cn, \tag{4.4}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t J_n(t) dt \leq \frac{c}{n}. \tag{4.5}$$

Далее введем операторы Джексона

$$\mathcal{D}_n(f) = \mathcal{D}_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) J_n(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{4.6}$$

и заметим, что в силу (4.2)

$$\begin{aligned} f(x) - \mathcal{D}_n(f)(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x-t)] J_n(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x-t)] \frac{1}{t} J_n(t) dt. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Пусть $p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $f(x)$ абсолютно непрерывна на $[0, 2\pi]$ и $f'(x) \in L_{2\pi}^{p(x)}$. Тогда

$$f(x) - f(x-t) = \int_{x-t}^x f'(\tau) d\tau.$$

Поэтому равенство (4.7) принимает вид

$$f(x) - \mathcal{D}_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t J_n(t) \frac{1}{t} \int_{x-t}^x f'(\tau) d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t J_n(t) \mathcal{S}_{t, -\frac{t}{2}}(f')(x) dt, \quad (4.8)$$

где $\mathcal{S}_{t, -\frac{t}{2}}(f')(x)$ — сдвиг функции В. А. Стеклова для $f'(x)$. При этом в силу (1.13) имеем

$$\|\mathcal{S}_{t, -\frac{t}{2}}(f')\|_{p(\cdot)} \leq c(p) \|f'\|_{p(\cdot)}. \quad (4.9)$$

Из (4.8) и (4.9), леммы 2.2 и свойства (4.5) убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

ЛЕММА 4.1. Пусть $p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $f(x)$ абсолютно непрерывна на $[0, 2\pi]$ и $f'(x) \in L_{2\pi}^{p(x)}$. Тогда имеет место неравенство

$$\|f - \mathcal{D}_n(f)\|_{p(\cdot)} \leq c(p) \|f'\|_{p(\cdot)} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t J_n(t) dt \leq c(p) \frac{1}{n} \|f'\|_{p(\cdot)}.$$

ЛЕММА 4.2. Пусть $p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $f(x) \in L_{2\pi}^{p(x)}$. Тогда имеет место оценка

$$\|\mathcal{D}_n(f)\|_{p(\cdot)} \leq c(p) \|f\|_{p(\cdot)},$$

в которой $c(p)$ зависит только от переменного показателя $p = p(x)$, другими словами, последовательность операторов Джексона $\mathcal{D}_n = \mathcal{D}_n(f)$, $n = 1, 2, \dots$, равномерно ограничена в $L_{2\pi}^{p(x)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы с учетом свойств (4.2)–(4.4) непосредственно вытекает из следующего результата, установленного в работе автора [10]. Пусть для каждого вещественного $\lambda \geq 1$ задана измеримая 2π -периодическая и существенно ограниченная функция (ядро) $k_\lambda = k_\lambda(x)$ и выполнены следующие условия:

- А) $\int_{-\pi}^{\pi} |k_\lambda(x)| dx \leq c_1$,
- В) $\sup_x |k_\lambda(x)| \leq c_2 \lambda^v$,
- С) $|k_\lambda(x)| \leq c_3$ при $\lambda^{-\gamma} \leq |x| \leq \pi$,

где $v, \gamma, c_j > 0$ и не зависят от λ . Тогда семейство линейных операторов

$$\mathcal{K}_\lambda(f) = \mathcal{K}_\lambda(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) k_\lambda(t-x) dt, \quad \lambda \geq 1,$$

действующих в пространстве $L_{2\pi}^{p(x)}$, равномерно ограничено в нем.

§ 5. Сопряженная функция в $L_{2\pi}^{p(x)}$

Для $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$ мы можем определить сопряженную функцию следующим образом:

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}(t-x)} dt, \quad (5.1)$$

где интеграл (5.1) понимается в смысле главного значения Коши. Хорошо известно [29], что $\tilde{f}(x)$ конечна почти всюду на $\mathbb{R}$. Более того, если $1 < p$ – постоянное число, то известная теорема Рисса [29] утверждает, что

$$\|\tilde{f}\|_p \leq c(p) \|f\|_p.$$

Этот результат допускает обобщение на пространство $L_{2\pi}^{p(x)}$ для $p(x) \in \widehat{\mathcal{P}}_{2\pi}$. А именно, в работе [26] доказана

ТЕОРЕМА В. Пусть $p = p(x) \in \widehat{\mathcal{P}}_{2\pi}$. Тогда найдется такая постоянная $c(p)$, что для произвольной функции $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$ имеет место оценка

$$\|\tilde{f}\|_{p(\cdot)} \leq c(p) \|f\|_{p(\cdot)}. \quad (5.2)$$

Доказательство аналога второй теоремы Джексона в $L_{2\pi}^{p(x)}$, предложенное в настоящей работе при условии, что $p(x) \in \widehat{\mathcal{P}}_{2\pi}$, непосредственно опирается на теорему В. Отметим также, что если ряд Фурье функции $g \in L_{2\pi}^{p(x)}$ имеет вид

$$g \sim \sum_{k=0}^{\infty} A_k(g)(x),$$

где

$$A_0(g)(x) = \frac{a_0}{2}, \quad A_k(g)(x) = a_k(g) \cos(kx) + b_k(g) \sin(kx), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.3)$$

$$a_k(g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos(kt) dt, \quad b_k(g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin(kt) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.4)$$

то ряд Фурье сопряженной функции $\tilde{g}(x)$ имеет вид

$$\tilde{g}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k(g) \sin(kx) - b_k(g) \cos(kx). \quad (5.5)$$

§ 6. Некоторые прямые теоремы приближения функций $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$

Пусть $p = p(x)$ – измеримая и существенно ограниченная функция, заданная на $[a, b]$. Построим классы функций $W_{p(\cdot)}^r(M, a, b)$ по типу хорошо известных классов Соболева, а именно класс $W_{p(\cdot)}^r(M, a, b)$ состоит из r раз непрерывно дифференцируемых $(b-a)$ -периодических функций $f(x)$, производная $f^{(r-1)}(x)$ которых абсолютно непрерывна и

$$\|f^{(r)}\|_{p(\cdot)}([a, b]) \leq M. \quad (6.1)$$

В частности, положим $W_{p(\cdot)}^r(M) = W_{p(\cdot)}^r(M, 0, 2\pi)$. Через $W_{p(\cdot)}^r$ обозначим объединение всех классов $W_{p(\cdot)}^r(M)$, т. е.

$$W_{p(\cdot)}^r = \bigcup_{M>0} W_{p(\cdot)}^r(M),$$

где M из (6.1); $W_{p(\cdot)}^r(M, a, b)$ и $W_{p(\cdot)}^r(a, b) = \bigcup_{M>0} W_{p(\cdot)}^r(M, a, b)$ принято называть классами и пространствами Соболева с переменным показателем $p(x)$.

В этом параграфе мы установим аналоги хорошо известных теорем Джексона о скорости приближения функций из пространств $L_{2\pi}^p$ и W_p^r тригонометрическими полиномами. Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 6.1. Если $p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$ и $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$, то

$$E_n(f)_{p(\cdot)} \leq c(p) \Omega\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p(\cdot)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующий оператор:

$$\Theta_\nu(f) = \Theta_\nu(f)(x) = \frac{2}{\nu} \int_{\frac{\nu}{2}}^\nu \left(\frac{1}{h} \int_0^h f(x+t) dt \right) dh, \quad \nu > 0. \quad (6.3)$$

Нетрудно показать, что $\Theta_\nu(f)(x) \in W_{p(\cdot)}^1$. В самом деле, если $f(x)$ — суммируемая 2π -периодическая функция, то при $\frac{\nu}{2} \leq h \leq \nu$ интегралы $g_h(x) = \int_0^h f(x+t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt$ образуют систему равностепенно абсолютно непрерывных функций на $[0, 2\pi]$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется не зависящее от h число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что какова бы ни была система сегментов $[a_k, b_k] \subset [0, 2\pi]$, $k = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяющая условию $\sum_{k=1}^n b_k - a_k < \delta$, будет выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^n |g_h(b_k) - g_h(a_k)| = \sum_{k=1}^n \left| \int_{b_k}^{b_k+h} f(t) dt - \int_{a_k}^{a_k+h} f(t) dt \right| < \varepsilon \frac{\nu}{2}.$$

Тогда из (6.3) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |\Theta_\nu(f)(b_k) - \Theta_\nu(f)(a_k)| &\leq \frac{2}{\nu} \int_{\frac{\nu}{2}}^\nu \frac{1}{h} \sum_{k=1}^n \left| \int_{b_k}^{b_k+h} f(t) dt - \int_{a_k}^{a_k+h} f(t) dt \right| dh \\ &\leq \varepsilon \int_{\frac{\nu}{2}}^\nu \frac{dh}{h} < \varepsilon \int_{\frac{\nu}{2}}^\nu \frac{dh}{\frac{\nu}{2}} = \varepsilon \nu. \end{aligned}$$

Тем самым, функция $\Theta_\nu(f)(x)$ абсолютно непрерывна на периоде $[0, 2\pi]$, стало быть, $\Theta_\nu(f)(x) \in L_{2\pi}^{p(x)}$. Заметим, что для почти всех $x \in [0, 2\pi]$

$$(\Theta_\nu(f))'(x) = \frac{2}{\nu} \int_{\frac{\nu}{2}}^\nu \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x)) dh. \quad (6.4)$$

В самом деле, из того, что $f(x) \in L_{2\pi}^{p(x)}$, $p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$, следует, что $f(x) \in L_{2\pi}^{p_-}$, где $p_- = \min_x p(x) \geq 1$. Тогда $f(x+h) \in L_{2\pi}^{p_-}$ вместе с $f(x)$, поэтому выражения

$$\frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt, \quad \frac{1}{\Delta x} \int_{x+h}^{x+h+\Delta x} f(t) dt$$

при $\Delta x \rightarrow 0$ стремятся соответственно к $f(x)$ и $f(x+h)$ в метрике пространства $L_{2\pi}^p$ и, как следствие, в силу неравенства Гёльдера из (6.3) выводим (6.4). Тем самым, мы имеем

$$|(\Theta_\nu(f))'(x)| = \frac{2}{\nu} \left| \int_{\frac{\nu}{2}}^\nu \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x)) dh \right|. \quad (6.5)$$

С другой стороны, методом интегрирования по частям находим

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{\nu}{2}}^\nu \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x)) dh \\ &= \frac{1}{h} \int_{\frac{\nu}{2}}^h (f(x+t) - f(x)) dt \Big|_{h=\frac{\nu}{2}}^{h=\nu} + \int_{\frac{\nu}{2}}^\nu \frac{dh}{h^2} \int_{\frac{\nu}{2}}^h (f(x+t) - f(x)) dt \\ &= \frac{1}{\nu} \int_{\frac{\nu}{2}}^\nu (f(x+t) - f(x)) dt + \int_{\frac{\nu}{2}}^\nu \frac{dh}{h^2} \int_{\frac{\nu}{2}}^h (f(x+t) - f(x)) dt = I_1(x) + I_2(x). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Сначала рассмотрим $I_1(x)$. Имеем

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \frac{1}{\nu} \int_0^\nu (f(x+t) - f(x)) dt - \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{\nu}{2}} \int_0^{\frac{\nu}{2}} (f(x+t) - f(x)) dt \\ &= s_\nu(f)(x) - f(x) - \frac{1}{2} (s_{\frac{\nu}{2}}(f)(x) - f(x)), \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} \|I_1\|_{p(\cdot)} &\leq \|s_\nu(f) - f\|_{p(\cdot)} + \frac{1}{2} \|s_{\frac{\nu}{2}}(f) - f\|_{p(\cdot)} \\ &\leq \Omega(f, \nu)_{p(\cdot)} + \frac{1}{2} \Omega\left(f, \frac{\nu}{2}\right)_{p(\cdot)} \leq \frac{3}{2} \Omega(f, \nu)_{p(\cdot)}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Для $I_2(x)$ из (6.6) имеем

$$\begin{aligned} |I_2(x)| &= \left| \int_{\frac{\nu}{2}}^\nu \frac{dh}{h^2} \left[\int_0^h (f(x+t) - f(x)) dt - \int_0^{\frac{\nu}{2}} (f(x+t) - f(x)) dt \right] \right| \\ &= \left| \int_{\frac{\nu}{2}}^\nu \frac{dh}{h} \left[(s_h(f)(x) - f(x)) - \frac{\frac{\nu}{2}}{h} (s_{\frac{\nu}{2}}(f)(x) - f(x)) \right] \right| \\ &\leq \int_{\frac{\nu}{2}}^\nu \frac{dh}{h} (|s_h(f)(x) - f(x)| + |s_{\frac{\nu}{2}}(f)(x) - f(x)|). \end{aligned}$$

Отсюда и из леммы 2.2 находим

$$\begin{aligned} \|I_2\|_{p(\cdot)} &\leq \left\| \int_{\frac{\nu}{2}}^\nu \frac{dh}{h} |s_h(f) - f| \right\|_{p(\cdot)} + \|s_{\frac{\nu}{2}}(f) - f\|_{p(\cdot)} \\ &\leq r_p([0, 2\pi]) \int_{\frac{\nu}{2}}^\nu \frac{dh}{h} \|s_h(f) - f\|_{p(\cdot)} + \|s_{\frac{\nu}{2}}(f) - f\|_{p(\cdot)} \\ &\leq r_p([0, 2\pi]) \Omega(f, \nu)_{p(\cdot)} + \Omega\left(f, \frac{\nu}{2}\right)_{p(\cdot)} \leq (1 + r_p([0, 2\pi])) \Omega(f, \nu)_{p(\cdot)}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Сопоставляя (6.6)–(6.8), получаем при $0 < \nu \leq 1$

$$\|(\Theta_\nu(f))'\|_{p(\cdot)} \leq c(p) \frac{1}{\nu} \Omega(f, \nu)_{p(\cdot)}. \quad (6.9)$$

С другой стороны,

$$|\Theta_\delta(f)(x) - f(x)| = \left| \frac{2}{\delta} \int_{\frac{\delta}{2}}^{\delta} \frac{dh}{h} \int_0^h (f(x+t) - f(x)) dt \right| \leq \frac{2}{\delta} \int_{\frac{\delta}{2}}^{\delta} |s_h(f)(x) - f(x)| dh,$$

поэтому

$$\begin{aligned} \|\Theta_\delta(f) - f\|_{p(\cdot)} &\leq r_p([0, 2\pi]) \frac{2}{\delta} \int_{\frac{\delta}{2}}^{\delta} \|s_h(f) - f\|_{p(\cdot)} dh \\ &\leq r_p([0, 2\pi]) \frac{2}{\delta} \int_{\frac{\delta}{2}}^{\delta} \Omega(f, h)_{p(\cdot)} dh \leq r_p([0, 2\pi]) \Omega(f, \delta)_{p(\cdot)}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} E_n(f)_{p(\cdot)} &\leq E_n(f - \Theta_{\frac{1}{n}}(f))_{p(\cdot)} + E_n(\Theta_{\frac{1}{n}}(f)) \\ &\leq \|f - \Theta_{\frac{1}{n}}(f)\|_{p(\cdot)} + E_n(\Theta_{\frac{1}{n}}(f))_{p(\cdot)}, \end{aligned} \quad (6.11)$$

причем в силу (6.10)

$$\|f - \Theta_{\frac{1}{n}}(f)\|_{p(\cdot)} \leq r_p([0, 2\pi]) \Omega\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p(\cdot)}. \quad (6.12)$$

Осталось оценить $E_n(\Theta_{\frac{1}{n}}(f))_{p(\cdot)}$. С этой целью мы обратимся к лемме 4.1, согласно которой для $f \in W_{p(\cdot)}^1$, где $p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$, справедлива оценка

$$E_n(f)_{p(\cdot)} \leq c(p) \frac{1}{n} \|f'\|_{p(\cdot)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.13)$$

Из (6.13) и (6.9) имеем

$$E_n(\Theta_{\frac{1}{n}}(f))_{p(\cdot)} \leq \frac{c(p)}{n} \|(\Theta_{\frac{1}{n}}(f))'\|_{p(\cdot)} \leq \frac{c(p)}{n} n \Omega\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p(\cdot)} = c(p) \Omega\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p(\cdot)}. \quad (6.14)$$

Сопоставляя оценки (6.11) и (6.12) с (6.14), приходим к неравенству (6.2). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 6.2. Если $p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $f(x) \in L_{2\pi}^{p(x)}$, то имеет место оценка

$$\|f - \mathcal{D}_n(f)\|_{p(\cdot)} \leq c(p) \Omega\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p(\cdot)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы можем записать следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \|f - \mathcal{D}_n(f)\|_{p(\cdot)} &= \|f - \Theta_{\frac{1}{n}}(f) + \Theta_{\frac{1}{n}}(f) - \mathcal{D}_n(\Theta_{\frac{1}{n}}(f)) + \mathcal{D}_n(\Theta_{\frac{1}{n}}(f) - f)\|_{p(\cdot)} \\ &\leq \|f - \Theta_{\frac{1}{n}}(f)\|_{p(\cdot)} + \|\Theta_{\frac{1}{n}}(f) - \mathcal{D}_n(\Theta_{\frac{1}{n}}(f))\|_{p(\cdot)} + \|\mathcal{D}_n(\Theta_{\frac{1}{n}}(f) - f)\|_{p(\cdot)}. \end{aligned}$$

Далее, из лемм 4.1, 4.2 и оценок (6.9), (6.12) имеем

$$\begin{aligned}\|\Theta_{\frac{1}{n}}(f) - \mathcal{D}_n(\Theta_{\frac{1}{n}}(f))\|_{p(\cdot)} &\leq c(p) \frac{1}{n} \|(\Theta_{\frac{1}{n}}(f))'\|_{p(\cdot)} \leq c(p) \frac{1}{n} n \Omega\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p(\cdot)}, \\ \|\mathcal{D}_n(\Theta_{\frac{1}{n}}(f) - f)\|_{p(\cdot)} &\leq c(p) \|f - \Theta_{\frac{1}{n}}(f)\|_{p(\cdot)} \leq c(p) \Omega\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p(\cdot)}.\end{aligned}$$

Сопоставляя эти оценки с предыдущим неравенством, убеждаемся в справедливости утверждения теоремы.

Теорема 6.1 (или теорема 6.2) представляет собой аналог для $L_{2\pi}^{p(x)}$ известной так называемой первой теоремы Джексона. Вторая теорема Джексона дает оценку величины наилучшего приближения дифференцируемой функции f через модуль непрерывности r -й производной $f^{(r)}(x)$ этой функции в соответствующем нормированном пространстве. Мы здесь рассмотрим этот вопрос для функций из класса $W_{p(\cdot)}^r$.

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть $p = p(x) \in \widehat{\mathcal{P}}_{2\pi}$, $f(x) \in W_{p(\cdot)}^r$. Тогда имеет место оценка

$$E_n(f)_{p(\cdot)} \leq c(p) \frac{1}{n^r} \Omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right)_{p(\cdot)},$$

в которой константа $c(p)$ зависит только от функции $p = p(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f(x) \in W_{p(\cdot)}^r$, то, пользуясь тем, что $S_n^{(r)}(f, t) = S_n(f^{(r)}, t)$, имеем

$$\begin{aligned}f(x) - S_n(f, x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} B_r(x-t)(f^{(r)}(t) - S_n(f^{(r)}, t)) dt \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^r} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f^{(r)}(t) - S_n(f^{(r)}, t)] \cos\left(k(x-t) - \frac{\pi r}{2}\right) dt,\end{aligned}\quad (6.15)$$

где

$$B_r(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(ku - \frac{\pi r}{2})}{k^r}, \quad r = 1, 2, \dots$$

Рассмотрим отдельно случаи четного и нечетного r . Если $r = 2l$, то из соотношения (6.15) имеем

$$\begin{aligned}f(x) - S_n(f, x) &= \\ &= (-1)^l \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^r} [a_k(f^{(r)} - S_n(f^{(r)})) \cos(kx) + b_k(f^{(r)} - S_n(f^{(r)})) \sin(kx)] \\ &= (-1)^l \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{A_k[f^{(r)} - S_n(f^{(r)})]}{k^r} \\ &= (-1)^l \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^r} - \frac{1}{(k+1)^r} \right) S_k[f^{(r)} - S_n(f^{(r)}, x)] \\ &\quad + \frac{(-1)^l}{n+1} S_n[f^{(r)} - S_n(f^{(r)}, x)]\end{aligned}$$

$$= (-1)^l \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^r} - \frac{1}{(k+1)^r} \right) S_k[f^{(r)} - S_n(f^{(r)}), x].$$

Отсюда, используя оценку (1.4), получаем

$$\begin{aligned} \|f - S_n(f)\|_{p(\cdot)} &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^r} - \frac{1}{(k+1)^r} \right) \|S_k[f^{(r)} - S_n(f^{(r)})]\|_{p(\cdot)} \\ &\leq c(p) \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^r} - \frac{1}{(k+1)^r} \right) \|f^{(r)} - S_n(f^{(r)})\|_{p(\cdot)} \\ &= c(p) \|f^{(r)} - S_n(f^{(r)})\|_{p(\cdot)} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^r} - \frac{1}{(k+1)^r} \right) = \frac{c(p)}{(n+1)^r} \Omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right)_{p(\cdot)}. \end{aligned}$$

Теорема для четного r доказана.

Рассмотрим случай, когда r нечетно, $r = 2l + 1$. Тогда $\cos(k(x-t) - \frac{\pi}{r}) = \sin(k(x-t)(-1)^l)$, поэтому из (6.15) следует, что

$$\begin{aligned} f(x) - S_n(f, x) &= \\ &= (-1)^l \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^r} a_k[f^{(r)} - S_n(f^{(r)})] \sin(kx) - b_k[f^{(r)} - S_n(f^{(r)})] \cos(kx) \\ &= (-1)^l \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{A_k[\widetilde{f^{(r)}} - S_n(\widetilde{f^{(r)}})]}{k^r} \\ &= (-1)^l \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^r} - \frac{1}{(k+1)^r} \right) S_k[\widetilde{f^{(r)}} - S_n(\widetilde{f^{(r)}}), x] \\ &\quad + \frac{(-1)^l}{(n+1)^r} S_n[\widetilde{f^{(r)}} - S_n(\widetilde{f^{(r)}}), x] \\ &= (-1)^l \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^r} - \frac{1}{(k+1)^r} \right) S_k[\widetilde{f^{(r)}} - S_n(\widetilde{f^{(r)}}), x], \end{aligned}$$

где $\widetilde{f^{(r)}}$ – функция, сопряженная для $f^{(r)}$ (см. (5.5)). Поэтому, пользуясь оценками (1.4) и (5.2), находим

$$\begin{aligned} \|f - S_n(f)\|_{p(\cdot)} &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^r} - \frac{1}{(k+1)^r} \right) \|S_k[\widetilde{f^{(r)}} - S_n(\widetilde{f^{(r)}})]\|_{p(\cdot)} \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^r} - \frac{1}{(k+1)^r} \right) C(p) \|\widetilde{f^{(r)}} - S_n(\widetilde{f^{(r)}})\|_{p(\cdot)} \\ &\leq c(p) \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^r} - \frac{1}{(k+1)^r} \right) \|f^{(r)} - S_n(f^{(r)})\|_{p(\cdot)} \\ &\leq c(p) \Omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right)_{p(\cdot)} \frac{1}{(n+1)^r}. \end{aligned}$$

Теорема полностью доказана.

СЛЕДСТВИЕ 6.1. Если $p(x) \in \widehat{\mathcal{P}}_{2\pi}$, $f(x) \in L_{2\pi}^{p(x)}$, то имеет место оценка

$$\|f - S_n(f)\|_{p(\cdot)} \leq c(p) \Omega\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p(\cdot)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, из базисности тригонометрической системы $\{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ в $L_{2\pi}^{p(x)}$ следует, что

$$\|f - S_n(f)\|_{p(\cdot)} \leq c(p) E_n(f)_{p(\cdot)},$$

поэтому утверждение следствия вытекает из теоремы 6.1.

СЛЕДСТВИЕ 6.2. Если $p(x) \in \widehat{\mathcal{P}}_{\pi}$, $f(x) \in W_{p(\cdot)}^r$, то

$$\|f^{(\nu)} - S_n^{(\nu)}(f)\|_{p(\cdot)} \leq \frac{c(p)}{n^{r-\nu}} \Omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right)_{p(\cdot)}, \quad 0 \leq \nu \leq r. \quad (6.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, если $f(x) \in W_{p(\cdot)}^r$, то $f^{(\nu)}(x) \in W_{p(\cdot)}^{r-\nu}$,

$$S_n^{(\nu)}(f, x) = S_n(f^{(\nu)}, x),$$

поэтому, используя теорему 6.3, мы можем записать для $0 \leq \nu \leq r$

$$\|f^{(\nu)} - S_n^{(\nu)}(f)\|_{p(\cdot)} = \|f^{(\nu)} - S_n(f^{(\nu)})\|_{p(\cdot)} \leq \frac{c(p)}{n^{r-\nu}} \Omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right)_{p(\cdot)},$$

отсюда и вытекает (6.16).

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Следствие 6.2 показывает, что суммы Фурье $S_n(f, x)$ осуществляют в пространстве $L_{2\pi}^{p(x)}$ одновременное приближение функции $f(x) \in W_{p(\cdot)}^{p(x)}$ и ее производных $f^{(\nu)}(x)$, $0 \leq \nu \leq r$, достигающее для $f^{(\nu)}(x)$ порядка $O\left(\frac{1}{n^{r-\nu}} \Omega\left(f^{(\nu)}, \frac{1}{n}\right)_{p(\cdot)}\right)$, $0 \leq \nu \leq r$.

§ 7. Обратная теорема

Обозначим через $\text{Lip}_{p(\cdot)}(\alpha, M)$ класс функций $f(x) \in L_{2\pi}^{p(x)}$, для которых

$$\Omega(f, \delta)_{p(\cdot)} \leq M \delta^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Из теоремы 6.1 непосредственно следует, что если $f \in \text{Lip}_{p(\cdot)}(\alpha, M)$, где $p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$, то

$$E_n(f)_{p(\cdot)} \leq c(p) M n^{-\alpha}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (7.1)$$

С другой стороны, предположим, что для $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$ справедливы неравенства

$$E_n(f)_{p(\cdot)} \leq c n^{-\alpha}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (7.2)$$

с константой c , не зависящей от n . Возникает вопрос: найдется ли такое число M , что $f \in \text{Lip}_{p(\cdot)}(\alpha, M)$? Мы получим далее утвердительный ответ на этот вопрос в том случае, когда $p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$ и $0 < \alpha < 1$.

Через $T_n(f) = T_n(f, x)$ мы обозначим тригонометрический полином наилучшего приближения для $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$ среди всех тригонометрических полиномов порядка n , и пусть

$$u_0(x) = T_0(f, x), \quad u_k(x) = T_{2^k}(f, x) - T_{2^{k-1}}(f, x). \quad (7.3)$$

Тогда можно записать

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} u_k, \quad (7.4)$$

причем ряд (7.4) сходится в метрике пространства $L_{2\pi}^{p(x)}$. Оценим норму $\|f - s_h(f)\|_{p(\cdot)}$. Имеем

$$\begin{aligned} \|f - s_h(f)\|_{p(\cdot)} &= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} u_k - s_h \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k \right) \right\|_{p(\cdot)} \\ &\leq \left\| \sum_{k=0}^n u_k - s_h \left(\sum_{k=0}^n u_k \right) \right\|_{p(\cdot)} + \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k - s_h \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right) \right\|_{p(\cdot)} \\ &\leq \left\| \sum_{k=0}^n u_k - s_h \left(\sum_{k=0}^n u_k \right) \right\|_{p(\cdot)} + \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right\|_{p(\cdot)} + \left\| s_h \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right) \right\|_{p(\cdot)}, \end{aligned} \quad (7.5)$$

где n выбрано из условия $2^n \leq \frac{1}{h} < 2^{n+1}$. Заметим, что из (7.2) и (7.3) имеем

$$\|u_k\|_{p(\cdot)} \leq \|f - T_{2^k}\|_{p(\cdot)} + \|f - T_{2^{k-1}}\|_{p(\cdot)} \leq \frac{c}{2^{\alpha k}} + \frac{c}{2^{\alpha(k-1)}} = \frac{(1 + 2^{\alpha})c}{2^{k\alpha}}. \quad (7.6)$$

Из равномерной ограниченности в $L_{2\pi}^{p(x)}$ семейства операторов В. А. Стеклова $\{s_h(f)\}_{h>0}$ (см. (1.13)) следует, что

$$s_h \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right) = \sum_{k=n+1}^{\infty} s_h(u_k), \quad \|s_h(u_k)\|_{p(\cdot)} \leq c(p) \|u_k\| \leq c(p) 2^{-k\alpha}. \quad (7.7)$$

Далее, из (7.6) и (7.7) находим

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right\|_{p(\cdot)} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|u_k\|_{p(\cdot)} \leq c(p) \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k\alpha} \leq c(p) 2^{-n\alpha}, \quad (7.8)$$

$$\left\| s_h \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right) \right\|_{p(\cdot)} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|s_h(u_k)\|_{p(\cdot)} \leq c(p) \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k\alpha} \leq c(p) 2^{-n\alpha}. \quad (7.9)$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} u_k(x) - s_h(u_k)(x) &= \frac{1}{h} \int_0^h [u_k(x) - u_k(x+t)] dt \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h \int_x^{x+t} u'_k(\tau) d\tau = \frac{1}{h} \int_0^h t \frac{1}{t} \int_0^t u'_k(\tau+x) d\tau. \end{aligned}$$

Поэтому в силу лемм 2.2, 3.2 с учетом (7.6) имеем

$$\begin{aligned} \|u_k - s_h(u_k)\|_{p(\cdot)} &\leq \frac{1}{h} \int_0^h t \|s_t(u'_k)\|_{p(\cdot)} dt \leq \frac{c(p)}{h} \int_0^h 2^{kt} \|u_k\|_{p(\cdot)} dt \\ &= c(p) 2^k \frac{2^{k\alpha}}{h} \int_0^h t dt = c(p) h 2^{k(1-\alpha)}. \end{aligned}$$

Отсюда выводим

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^n [u_k - s_h(u_k)] \right\|_{p(\cdot)} &\leq c(p)h \sum_{k=0}^n 2^{k(1-\alpha)} = c(p)h \frac{2^{(n+1)(1-\alpha)} - 1}{2^{1-\alpha}} \\ &\leq c(p)h 2^{n(1-\alpha)} < c(p)h \left(\frac{1}{h} \right)^{1-\alpha} = c(p)h^\alpha. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Сопоставляя (7.5), (7.8)–(7.10), мы заключаем, что

$$\|f - s_h(f)\|_{p(\cdot)} \leq c(p)h^\alpha,$$

а отсюда, в свою очередь, находим

$$\Omega(f, \delta)_{p(\cdot)} = \sup_{0 < h \leq \delta} \|f - s_h(f)\|_{p(\cdot)} \leq c(p)h^\alpha.$$

Это означает, что $f \in \text{Lip}_{p(\cdot)}(\alpha, M)$, где $M = c(p)$. Тем самым мы установили следующий результат.

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть $p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $0 < \alpha < 1$. Для того чтобы функция $f(x)$ принадлежала классу Липшица $\text{Lip}_{p(\cdot)}(\alpha, M)$ с некоторой константой $M > 0$, необходимо и достаточно, чтобы была справедлива оценка $E_n(f)_{p(\cdot)} = O(n^{-\alpha})$, $n = 1, 2, \dots$.

Список литературы

1. W. Orlicz, “Über konjugierte Exponentenfolgen”, *Studia Math.*, **3** (1931), 200–211.
2. H. Nakano, *Modulated semi-ordered linear spaces*, Maruzen, Tokyo, 1950.
3. H. Nakano, *Topology of linear topological spaces*, Maruzen, Tokyo, 1951.
4. J. Musielak, *Orlicz spaces and modular spaces*, Lecture Notes in Math., **1034**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
5. J. Musielak, W. Orlicz, “On modular spaces”, *Studia Math.*, **18** (1959), 49–65.
6. I. V. Tsenov, “Generalization of the problem of best approximation of a function in the space L^s ”, *Uch. Zap. Dagestan Gos. Univ.*, **7** (1961), 25–37.
7. A. N. Kolmogorov, “Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes”, *Studia Math.*, **5** (1934), 29–33.
8. И. И. Шарапудинов, “О топологии пространства $\mathcal{L}^{p(t)}([0, 1])$ ”, *Матем. заметки*, **26**:4 (1979), 613–632; англ. пер.: I. I. Sharapudinov, “Topology of the space $\mathcal{L}^{p(t)}([0, 1])$ ”, *Math. Notes*, **26**:4 (1979), 796–806.
9. И. И. Шарапудинов, “О базисности системы Хаара в пространстве $\mathcal{L}^{p(t)}([0, 1])$ и принципе локализации в среднем”, *Матем. сб.*, **130(172)**:2(6) (1986), 275–283; англ. пер.: I. I. Sharapudinov, “On the basis property of the Haar system in the space $\mathcal{L}^{p(t)}([0, 1])$ and the principle of localization in the mean”, *Math. USSR-Sb.*, **58**:1 (1987), 279–287.
10. И. И. Шарапудинов, “О равномерной ограниченности в L^p ($p = p(x)$) некоторых семейств операторов свертки”, *Матем. заметки*, **59**:2 (1996), 291–302; англ. пер.: I. I. Sharapudinov, “Uniform boundedness in L^p ($p = p(x)$) of some families of convolution operators”, *Math. Notes*, **59**:2 (1996), 205–212.
11. L. Diening, “Maximal function on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$ ”, *Math. Inequal. Appl.*, **7**:2 (2004), 245–253.

12. L. Diening, M. Ružička, “Calderón–Zygmund operators on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$ and problems related to fluid dynamics”, *J. Reine Angew. Math.*, **563** (2003), 197–220.
13. L. Diening, P. Hästö, A. Nekvinda, “Open problems in variable exponent Lebesgue and Sobolev spaces”, *Function spaces, differential operators and nonlinear analysis* (Milovy, Bohemian-Moravian Uplands, 2004), Math. Inst. Acad. Sci. Czech Republic, Praha, 2005.
14. L. Diening, P. Harjulehto, P. Hasto, M. Ružička, *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents*, Lecture Notes in Math., **2017**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 2011.
15. В. В. Жиков, “Усреднение функционалов вариационного исчисления и теории упругости”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **50**:4 (1986), 675–710; англ. пер.: V. V. Zhikov, “Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory”, *Math. USSR-Izv.*, **29**:1 (1987), 33–66.
16. В. В. Жиков, “Оценки типа Мейерса для решения нелинейных систем Стокса”, *Дифференц. уравнения*, **33**:1 (1997), 107–114; англ. пер.: V. V. Zhikov, “Meyers type estimates for the solution of a nonlinear Stokes system”, *Differential Equations*, **33**:1 (1997), 108–115.
17. V. V. Zhikov, “On some variational problems”, *Russian J. Math. Phys.*, **5**:1 (1997), 105–116.
18. V. Kokilashvili, N. Samko, S. Samko, “Singular operators in variable spaces $L^{p(\cdot)}(\Omega, \rho)$ with oscillating weights”, *Math. Nachr.*, **280**:9–10 (2007), 1145–1156.
19. V. Kokilashvili, S. Samko, “Singular integral equations in the Lebesgue spaces with variable exponent”, *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, **131** (2003), 61–78.
20. V. Kokilashvili, S. Samko, “Singular integrals in weighted Lebesgue spaces with variable exponent”, *Georgian Math. J.*, **10**:1 (2003), 145–156.
21. V. Kokilashvili, S. Samko, “Weighted boundedness in Lebesgue spaces with variable exponents of classical operators on Carleson curves”, *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, **138** (2005), 106–110.
22. V. Kokilashvili, S. Samko, “Singular integrals in weighted Lebesgue spaces with variable exponent”, *Georgian Math. J.*, **10**:1 (2003), 145–156.
23. S. G. Samko, “Convolution type operators in $L^{p(x)}$ ”, *Integral Transform. Spec. Funct.*, **7**:1–2 (1998), 123–144.
24. S. Samko, “Hardy inequality in the generalized Lebesgue spaces”, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **6**:4 (2003), 355–362.
25. S. Samko, “On a progress in the theory of Lebesgue spaces with variable exponent: maximal and singular operators”, *Integral Transforms Spec. Funct.*, **16**:5–6 (2005), 461–482.
26. И. И. Шарапудинов, “Некоторые вопросы теории приближения в пространствах $L^{p(x)}(E)$ ”, *Anal. Math.*, **33**:2 (2007), 135–153.
27. И. И. Шарапудинов, “Приближение функций в метрике пространства $L^{p(x)}([a, b])$ и квадратурные формулы”, *Constructive function theory*’81, Proceedings of the International Conference (Varna, 1981), Publ. House Bulgar. Acad. Sci., Sofia, 1983, 189–193.
28. A. Guven, D. M. Israfilov, “Trigonometric approximation in generalized Lebesgue spaces $L^{p(x)}$ ”, *J. Math. Inequal.*, **4**:2 (2010), 285–299.
29. R. Akgün, V. Kokilashvili, “On converse theorems of trigonometric approximation in weighted variable exponent Lebesgue spaces”, *Banach J. Math. Anal.*, **5**:1 (2011), 70–82.
30. R. Akgün, “Polynomial approximation of functions in weighted Lebesgue and Smirnov spaces with nonstandard growth”, *Georgian Math. J.*, **18**:2 (2011), 203–235.

31. A. Guven, “Trigonometric approximation by matrix transforms in $L^{p(x)}$ spaces”, *Anal. Appl. (Singap.)*, **10**:1 (2012), 47–65.
32. R. Akgün, V. Kokilashvili, “The refined direct and converse inequalities of trigonometric approximation in weighted variable exponent Lebesgue spaces”, *Georgian Math. J.*, **18**:3 (2011), 399–423.
33. R. Akgün, “Trigonometric approximation of functions in generalized Lebesgue spaces with variable exponent”, *Ukrainian Math. J.*, **63**:1 (2011), 1–26.
34. А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 1, 2, Мир, М., 1965; пер. с англ.: A. Zygmund, *Trigonometric series*, v. I, II, Cambridge Univ. Press, New York, 1959.

И. И. ШАРАПУДИНОВ (I. I. SHARAPUDINOV)

Южный математический институт

Владикавказского научного центра РАН

и Правительства Республики

Северная Осетия-Алания

E-mail: sharapud@mail.ru

Поступило в редакцию

29.07.2011