Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Танкеев, О стандартной гипотезе для комплексных 4-мерных эллиптических многообразий, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2012, том 76, выпуск 5, 119–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7826>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 13:37:34

УДК 512.6

С. Г. Танкеев

О стандартной гипотезе для комплексных 4-мерных эллиптических многообразий

Доказано, что стандартная гипотеза Гротендика $B(X)$ типа Лефшеца об алгебраичности операторов $*$ и Λ теории Ходжа верна для любой гладкой комплексной проективной модели X расслоенного произведения $X_1 \times_C X_2$, где $X_1 \rightarrow C$ – эллиптическая поверхность над гладкой проективной кривой C и $X_2 \rightarrow C$ – такой морфизм гладкого проективного трехмерного многообразия на кривую, что выполнено одно из следующих условий: общий геометрический слой X_{2s} является поверхностью Энриквеса; все слои морфизма $X_2 \rightarrow C$ являются гладкими КЗ-поверхностями и группа Ходжа $Hg(X_{2s})$ общего геометрического слоя X_{2s} не имеет геометрических простых факторов типа A_1 (предположение о группе Ходжа выполняется, если число $22 - \text{rank NS}(X_{2s})$ не делится на 4).

Библиография: 23 наименования.

Ключевые слова: эллиптическое многообразие, стандартная гипотеза типа Лефшеца, поверхность Энриквеса, КЗ-поверхность, группа Ходжа, алгебраический цикл.

Введение

Известно, что стандартная гипотеза Гротендика $B(X)$ типа Лефшеца [1] об алгебраичности операторов $*$ и Λ теории Ходжа верна для всех гладких комплексных проективных кривых, поверхностей, абелевых многообразий [2] и трехмерных многообразий размерности Кодаиры $\kappa(X) < 3$ [3] (в частности, она верна для всех эллиптических трехмерных многообразий).

В настоящей работе мы докажем следующую основную теорему.

ТЕОРЕМА. *Стандартная гипотеза Гротендика $B(X)$ типа Лефшеца об алгебраичности операторов $*$ и Λ теории Ходжа верна для любой гладкой комплексной проективной модели X расслоенного произведения $X_1 \times_C X_2$, где $X_1 \rightarrow C$ – эллиптическая поверхность над гладкой проективной кривой C и $X_2 \rightarrow C$ – такой морфизм гладкого проективного трехмерного многообразия на кривую, что выполнено одно из следующих условий:*

- (i) *общий геометрический слой X_{2s} является поверхностью Энриквеса;*
- (ii) *все слои морфизма $X_2 \rightarrow C$ являются гладкими КЗ-поверхностями и группа Ходжа $Hg(X_{2s})$ общего геометрического слоя X_{2s} не имеет геометрических простых факторов типа A_1 (предположение о группе Ходжа выполняется, если число $22 - \text{rank NS}(X_{2s})$ не делится на 4).*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-01-00132).

В рассматриваемых случаях численная и гомологическая эквивалентности алгебраических циклов совпадают на $X \times X$ в силу [4, следствие 4.4], компоненты Кюннета класса когомологий диагонали алгебраические [5, лемма 2.4]; $\mathbb{Q}$ -алгебра $\mathcal{A}(X) \hookrightarrow H^*(X \times X, \mathbb{Q})$ алгебраических соответствий с билинейным законом композиции

$$\mathcal{A}(X) \times \mathcal{A}(X) \xrightarrow{(f \times g) \mapsto g \circ f = \text{pr}_{13*}(\text{pr}_{13}^* f \cup \text{pr}_{23}^* g)} \mathcal{A}(X)$$

полупростая [6, теореме 3.2]; если модель X определена над числовым полем $k \hookrightarrow \mathbb{C}$, $[k : \mathbb{Q}] < \infty$, и X имеет хорошую редукцию в неархимедовой точке $\wp$ поля k , то гипотеза $B(X_\wp)$ верна для специального слоя $X_\wp$ над (конечным) полем вычетов.

§ 1. О когомологиях гладких моделей расслоенных произведений

1.1. ЛЕММА [3, лемма 1.1]. Пусть X, Y – гладкие комплексные проективные многообразия размерности не выше 4 и $f: X \dashrightarrow Y$ – доминантное рациональное отображение. Тогда $B(X) \Rightarrow B(Y)$.

1.2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Положим

$$\begin{aligned} \Delta_i &= \{\delta \in C \mid \text{Sing}(X_{i\delta}) \neq \emptyset\}, \quad i = 1, 2, \\ \Delta &= \Delta_1 \cup \Delta_2, \quad C' = C \setminus \Delta. \end{aligned}$$

Прежде всего заметим, что в силу леммы из п. 1.1 и теоремы Мамфорда о полустабильных редукциях [7, с. 53, 54] мы можем (и будем) предполагать, что $\pi_1: X_1 \rightarrow C$ – такая эллиптическая поверхность (с сечением), что любой особый слой является объединением гладких рациональных кривых кратности 1 с нормальными пересечениями, $\pi_2: X_2 \rightarrow C$ – такой проективный морфизм гладкого трехмерного многообразия на кривую, что общий геометрический слой X_{2s} морфизма π_2 удовлетворяет условию

$$H^1(X_{2s}, \mathbb{Q}) = 0$$

и любой особый слой является объединением гладких поверхностей кратности 1 с нормальными пересечениями.

Если $\pi_1: X_1 \rightarrow C$ – изотривиальное (потенциально постоянное) эллиптическое расслоение, то модель X рационально доминируется произведением эллиптической кривой и расслоения над проективной кривой, общий слой которого является поверхностью Энриквеса или КЗ-поверхностью. Поскольку стандартная гипотеза типа Лефшеца стабильна относительно произведений [5, следствие 2.5] и верна [8, теорема 3.1] для кривых и трехмерных многообразий со структурой расслоения над кривой с общим слоем, являющимся поверхностью Энриквеса или КЗ-поверхностью, то мы видим, что гипотеза $B(X)$ верна в силу леммы из п. 1.1. Если $\pi_2: X_2 \rightarrow C$ – потенциально постоянное расслоение, то X рационально доминируется произведением двух поверхностей и $B(X)$ верна.

Поэтому мы можем (и будем) считать, что $\pi_1: X_1 \rightarrow C$ и $\pi_2: X_2 \rightarrow C$ – потенциально непостоянные расслоения с сечениями и полустабильными слоями. В этом случае хорошо известно, что $\Delta_1 \neq \emptyset$.

Пусть $j: C' \hookrightarrow C$ – каноническое открытое вложение, $X'_i = X_i \setminus \pi_i^{-1}(\Delta)$.

В силу леммы из п. 1.1 и теоремы Мамфорда о полустабильных редукциях мы можем считать, что существует такая гладкая проективная компактификация X многообразия $X' \stackrel{\text{def}}{=} X'_1 \times_{C'} X'_2$, для которой рациональное структурное отображение $\pi: X \rightarrow C$ является морфизмом и все слои π являются объединениями гладких многообразий кратности 1 с нормальными пересечениями. Более того, можно считать, что $\text{rank NS}(X) \geq 3$.

Если $\pi_2: X_2 \rightarrow C$ – гладкое семейство КЗ-поверхностей, то легко видеть, что расслоенное произведение $X_1 \times_C X_2$ гладкое, так что в силу леммы из п. 1.1 мы можем (и будем) считать, что в этом случае $X = X_1 \times_C X_2$.

Пусть $\pi' = \pi|_{X'}: X' \rightarrow C'$, $\pi'_i = \pi_i|_{X'_i}: X'_i \rightarrow C'$ – канонические гладкие морфизмы, $p_i: X \times_C X \rightarrow X$ и $p'_i: X' \times_{C'} X' \rightarrow X'$ – канонические проекции, $\tau: X \times_C X \rightarrow C$ и $\tau': X' \times_{C'} X' \rightarrow C'$ – структурные морфизмы.

Очевидно, что $\pi: X \rightarrow C$ имеет сечение. В силу теоремы о монодромии [9, теорема (6.1)] можно считать, что все локальные преобразования монодромии (преобразования Пикара–Лефшеца), ассоциированные с $\pi': X' \rightarrow C'$, унипотентны.

1.3. Фиксируем точку $s \in C'$, и пусть G_i – замыкание в топологии Зариского образа канонического представления монодромии

$$\rho_i: \pi_1(C', s) \rightarrow \text{GL}(H^i(X_{is}, \mathbb{Q})), \quad i = 1, 2.$$

Известно, что G_1, G_2 – полупростые $\mathbb{Q}$ -группы [10, следствие 4.2.9].

Используя замену базы (индуцированную некоторым разветвленным накрытием $\tilde{C} \rightarrow C$) и лемму из п. 1.1, мы можем (и будем) считать, что G_i связна, $i = 1, 2$. Это предположение совместимо с теоремой Мамфорда о существовании полустабильных редукций [7, с. 53, 54].

По теореме Делиня для любой точки $s \in C'$ вне некоторого счетного подмножества геометрический слой X_{2s} является гладким и G_2 – нормальная подгруппа в группе Ходжа $\text{Hg}(X_{2s})$ поверхности X_{2s} [11, теорема 7.3]. Мы фиксируем такую точку s и будем называть ее *общей в смысле Ходжа*.

Если X_{2s} является поверхностью Энриквеса, то ее группа Ходжа $\text{Hg}(X_{2s}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hg}(H^2(X_{2s}, \mathbb{Q}))$ тривиальна, потому что $H^2(X_{2s}, \mathbb{Q})$ имеет тип Ходжа $(1, 1)$ в силу равенства $H^2(X_{2s}, \mathcal{O}_{X_{2s}}) = 0$. Значит, в этом случае $G_2 = 1$.

1.4. Фиксируем целое число $n \geq 2$. Пусть U_δ – маленький открытый диск с центром $\delta \in \Delta$, U_δ^* – проколотый диск, γ – локальное преобразование монодромии пространства $H^{n-1}(X_s, \mathbb{Q})$ (точка $s \in U_\delta^* \subset C'$ произвольная, но фиксированная).

Семейство $X \rightarrow C$ индуцирует предельную смешанную структуру Ходжа на $H_{\mathbb{Q}} \stackrel{\text{def}}{=} H^{n-1}(X_s, \mathbb{Q})$. Ее весовая фильтрация

$$0 \subset W_0 \subset W_1 \subset \dots \subset W_{2n-2} = H^{n-1}(X_s, \mathbb{Q}) \quad (1.1)$$

характеризуется следующими условиями [9, лемма (6.4)]:

$$\begin{aligned} N: W_k &\rightarrow W_{k-2}, \\ N^k: W_{k+n-1}/W_{k+n-2} &\xrightarrow{\sim} W_{-k+n-1}/W_{-k+n-2} \quad \forall k \geq 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

С другой стороны, согласно результатам Шмида [9, с. 254, 255] фильтрации Ходжа когомологий гладких слоев X_t , $t \in U_\delta^*$, определяют предельную фильтрацию F^* на $H_\mathbb{C}$, причем тройка $(H_\mathbb{Q}, W_*, F^*)$ дает поляризованную смешанную структуру Ходжа, относительно которой N является морфизмом типа $(-1, -1)$ [9, теорема (6.16)]. По определению морфизм типа (r, r) смешанных структур Ходжа $(H_\mathbb{Q}, W_*, F^*)$ и $(H'_\mathbb{Q}, W'_*, (F')^*)$ задается линейным отображением $L: H_\mathbb{Q} \rightarrow H'_\mathbb{Q}$, удовлетворяющим условиям

$$L(W_m) \subset W'_{m+2r}, \quad L(F^p) \subset (F')^{p+r}.$$

Любой такой морфизм *строгий* в том смысле, что $L(F^p) = (F')^{p+r} \cap \text{Im } L$, и аналогично определяется строгость для весовой фильтрации, в силу чего ядра и коядра морфизмов наследуют смешанные структуры Ходжа. Кроме того, категория смешанных структур Ходжа с морфизмами типа $(0, 0)$ абелева [10, теорема 2.3.5].

Известно, что W_k является смешанной подструктурой Ходжа в $(H_\mathbb{Q}, W_*, F^*)$ и W_k/W_{k-1} — чистая структура Ходжа веса k [10, пп. 2.3.6, 2.3.2].

1.5. Рассмотрим локальную систему $V = R^{n-1}\pi'_*\mathbb{C}$. Известно, что V_s , $s \in U_\delta^*$, и, следовательно, V расщепляются в обобщенные собственные подпространства [12, § 6]:

$$V = \bigoplus_{a=0}^{\nu-1} V_{a/\nu}^{(\delta)},$$

где по определению

$$[V_{a/\nu}^{(\delta)}]_s = \{v \in V_s \mid (\gamma - e^{2\pi ia/\nu})^n v = 0\}.$$

Записывая $\gamma|_{V_{a/\nu}^{(\delta)}} = e^{2\pi ia/\nu} \gamma_a$ с унитарным γ_a и полагая $N_a^{(\delta)} = \log \gamma_a$, мы имеем точную последовательность смешанных структур Ходжа [12, замечание (14.5)]

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(C, j_* R^{n-1}\pi'_*\mathbb{C}) &\rightarrow H^1(C', R^{n-1}\pi'_*\mathbb{C}) \\ &\rightarrow \bigoplus_{\delta \in \Delta} V_0^{(\delta)} / N_0^{(\delta)} V_0^{(\delta)} \rightarrow H^2(C, j_* R^{n-1}\pi'_*\mathbb{C}). \end{aligned} \quad (1.3)$$

По теореме о локально инвариантных циклах каноническое отображение $R^{n-1}\pi_*\mathbb{C} \rightarrow j_* R^{n-1}\pi'_*\mathbb{C}$ сюръективно (с ядром, сконцентрированным на Δ) [12, предложение (15.12)]; более ранняя версия этого результата содержится в работе [13, комментарии к п. (3.7)]. Следовательно, имеются канонические изоморфизмы

$$\begin{aligned} H^1(C, R^{n-1}\pi_*\mathbb{C}) &\xrightarrow{\sim} H^1(C, j_* R^{n-1}\pi'_*\mathbb{C}), \\ H^2(C, R^{n-1}\pi_*\mathbb{C}) &\xrightarrow{\sim} H^2(C, j_* R^{n-1}\pi'_*\mathbb{C}). \end{aligned}$$

Поэтому (1.3) принимает вид

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(C, R^{n-1}\pi_*\mathbb{C}) &\rightarrow H^1(C', R^{n-1}\pi'_*\mathbb{C}) \\ &\rightarrow \bigoplus_{\delta \in \Delta} V_0^{(\delta)} / N_0^{(\delta)} V_0^{(\delta)} \rightarrow H^2(C, R^{n-1}\pi_*\mathbb{C}). \end{aligned} \quad (1.4)$$

1.6. Пусть $f: Z \rightarrow \pi^{-1}(\Delta)$ – нормализация схемы $\pi^{-1}(\Delta)$. Тогда Z – несвязное объединение гладких неприводимых компонент дивизора $\pi^{-1}(\Delta)$. Поскольку $f: Z \rightarrow \pi^{-1}(\Delta)$ – разрешение особенностей замкнутой подсхемы $i_\Delta: \pi^{-1}(\Delta) \hookrightarrow X$, имеется точная последовательность смешанных $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа [14, следствие (8.2.8)]

$$H^{n-2}(Z, \mathbb{Q}) \xrightarrow{(i_\Delta f)_*} H^n(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^n(X', \mathbb{Q}),$$

где $(i_\Delta f)_*$ – морфизм типа $(1, 1)$ рациональных структур Ходжа. Поэтому

$$(i_\Delta f)_* H^{n-2}(Z, \mathbb{Q}) = \text{Ker}[H^n(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^n(X', \mathbb{Q})]. \quad (1.5)$$

Известно, что имеется канонический сюръективный морфизм $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа $H^n(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^n \pi_* \mathbb{Q})$ [12, следствие (15.14)], включенный в коммутативную диаграмму с точными строками [12, диаграмма (15.1) для случая $m = n - 1$]

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L_n & \longrightarrow & H^n(X, \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H^0(C, R^n \pi_* \mathbb{Q}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha_n & & \downarrow & & \downarrow \\ & & H^1(C, R^{n-1} \pi_* \mathbb{Q}) & & \downarrow \varphi_n & & \downarrow \psi_n \\ & & \simeq \downarrow \gamma_n & & \downarrow & & \downarrow \\ & & H^1(C, j_* R^{n-1} \pi'_* \mathbb{Q}) & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \cap & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^1(C', R^{n-1} \pi'_* \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\beta_n} & H^n(X', \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H^0(C', R^n \pi'_* \mathbb{Q}) \longrightarrow 0 \end{array} \quad (1.6)$$

где $\gamma_n \circ \alpha_n$ – морфизм $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа и β_n – морфизм смешанных структур Ходжа [12, теоремы (15.3), (15.4)].

По теореме Делиня каноническое отображение $H^n(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C', R^n \pi'_* \mathbb{Q})$ является сюръективным морфизмом рациональных структур Ходжа [10, пп. 4.1.1, 4.1.2]. Поэтому диаграмма (1.6) дает коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L_n & \longrightarrow & H^n(X, \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H^0(C, R^n \pi_* \mathbb{Q}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha_n & & \downarrow & & \downarrow \\ & & H^1(C, R^{n-1} \pi_* \mathbb{Q}) & & \downarrow \varphi_n & & \downarrow \psi_n \\ & & \cap & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^1(C', R^{n-1} \pi'_* \mathbb{Q}) \cap \text{Im}(\varphi_n) & \longrightarrow & \text{Im}(\varphi_n) & \longrightarrow & H^0(C', R^n \pi'_* \mathbb{Q}) \longrightarrow 0 \end{array} \quad (1.7)$$

Спектральная последовательность Лере $E_2^{p,q} = H^p(C, R^q \pi_* \mathbb{Q})$ вырождается и дает точную последовательность $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа [12, теорема (15.11), предложение (15.12), следствие (15.15), теорема (15.16)]

$$\begin{aligned} 0 & \rightarrow H^2(C, R^{n-2} \pi_* \mathbb{Q}) \rightarrow \text{Ker}[H^n(X, \mathbb{Q}) \\ & \rightarrow H^0(C, R^n \pi_* \mathbb{Q})] \xrightarrow{\alpha_n} H^1(C, R^{n-1} \pi_* \mathbb{Q}) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Поэтому, учитывая (1.5) и присоединяя канонические отображения ядер и коядер к диаграмме (1.7), мы получим коммутативную диаграмму с точными строками и столбцами

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & H^2(C, R^{n-2}\pi_*\mathbb{Q}) & \longrightarrow & (i_{\Delta}f)_* H^{n-2}(Z, \mathbb{Q}) & \longrightarrow & \text{Ker}(\psi_n) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & L_n & \longrightarrow & H^n(X, \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H^0(C, R^n\pi_*\mathbb{Q}) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow \alpha_n & & \downarrow \varphi_n & & \downarrow \psi_n \\
 0 \rightarrow & H^1(C', R^{n-1}\pi'_*\mathbb{Q}) \cap \text{Im}(\varphi_n) & \longrightarrow & \text{Im}(\varphi_n) & \longrightarrow & H^0(C', R^n\pi'_*\mathbb{Q}) \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & \frac{H^1(C', R^{n-1}\pi'_*\mathbb{Q}) \cap \text{Im}(\varphi_n)}{H^1(C, R^{n-1}\pi_*\mathbb{Q})} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0
 \end{array} \quad (1.9)$$

и точную последовательность змеевидной диаграммы [15, § 1, предложение 2]

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow H^2(C, R^{n-2}\pi_*\mathbb{Q}) &\rightarrow (i_{\Delta}f)_* H^{n-2}(Z, \mathbb{Q}) \rightarrow \text{Ker}(\psi_n) \\
 &\rightarrow \frac{H^1(C', R^{n-1}\pi'_*\mathbb{Q}) \cap \text{Im}(\varphi_n)}{H^1(C, R^{n-1}\pi_*\mathbb{Q})} \rightarrow 0.
 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Легко проверить, что (1.10) является последовательностью морфизмов рациональных структур Ходжа [8, доказательство теоремы 2.3].

С другой стороны, из (1.4) следует существование канонического вложения смешанных структур Ходжа

$$\frac{H^1(C', R^{n-1}\pi'_*\mathbb{C}) \cap \text{Im}(\varphi_n \otimes \mathbb{C})}{H^1(C, R^{n-1}\pi_*\mathbb{C})} \hookrightarrow \bigoplus_{\delta \in \Delta} V_0^{(\delta)} / N_0^{(\delta)} V_0^{(\delta)}. \quad (1.11)$$

В нашем случае локальное преобразование монодромии γ унитарно, кроме того, выполнено $(\gamma - 1)^n = 0$ по теореме о монодромии [9, теорема (6.1)],

$$\begin{aligned}
 N &\stackrel{\text{def}}{=} N_0^{(\delta)} \stackrel{\text{def}}{=} \log \gamma = \gamma - 1 - \frac{(\gamma - 1)^2}{2} + \dots, \\
 N^n &= 0, \\
 V_0^{(\delta)} &= H^{n-1}(X_s, \mathbb{C}), \quad s \in C'.
 \end{aligned} \quad (1.12)$$

1.7. ЛЕММА. *Пространство $H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q})$ имеет каноническую рациональную структуру Ходжа типа $(1, 1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\pi'_2: X'_2 \rightarrow C'$ – потенциально непостоянное семейство КЗ-поверхностей, то по формуле Кюннета для когомологий слоев морфизма π' имеем

$$H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q}) = H^0(C', R^2\pi'_{1*}\mathbb{Q}) \oplus H^0(C', R^2\pi'_{2*}\mathbb{Q})$$

и оба слагаемые являются $\mathbb{Q}$ -структурами Ходжа типа $(1, 1)$ в силу [16, следствие 4.1.1]. Если $\pi'_2: X'_2 \rightarrow C'$ – семейство поверхностей Энриквеса, то $H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q})$ является структурой Ходжа типа $(1, 1)$, потому что $H^2(X_{2s}, \mathcal{O}_{X_{2s}}) = 0$ для всех точек $s \in C'$.

Поскольку

$$\frac{H^1(C', R^1\pi'_*\mathbb{Q}) \cap \text{Im}(\varphi_2)}{H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{Q})}$$

является чистой $\mathbb{Q}$ -структурой Ходжа типа $(2, 0) + (1, 1) + (0, 2)$, то в силу формул (1.9)–(1.11) для $n = 2$ достаточно проверить, что для любой точки $\delta \in \Delta$ смешанная структура Ходжа

$$V_0^{(\delta)}/N_0^{(\delta)}V_0^{(\delta)}$$

имеет тип $(1, 0) + (0, 1) + (1, 1)$.

В обозначениях (1.12), (1.1), (1.2) весовая фильтрация имеет вид

$$0 \subset W_0 \subset W_1 \subset W_2 = H^1(X_s, \mathbb{Q}),$$

причем

$$N: W_2/W_1 \xrightarrow{\sim} W_0$$

является изоморфизмом типа $(-1, -1)$. Поскольку W_0 – чистая рациональная структура Ходжа типа $(0, 0)$ и W_1/W_0 – чистая рациональная структура Ходжа типа $(1, 0) + (0, 1)$, то из существования точной последовательности морфизмов смешанных структур Ходжа

$$0 \rightarrow W_1/W_0 \rightarrow W_2/W_0 \rightarrow W_2/W_1 \rightarrow 0$$

следует, что

$$V_0^{(\delta)}/N_0^{(\delta)}V_0^{(\delta)} = [W_2/N(W_2)] \otimes \mathbb{C} = [W_2/W_0] \otimes \mathbb{C}$$

является смешанной структурой Ходжа типа $(1, 1) + (1, 0) + (0, 1)$. Лемма доказана.

1.8. ЛЕММА. *Имеем*

$$H^0(C', R^3\pi'_*\mathbb{Q}) = H^0(C', R^5\pi'_*\mathbb{Q}) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\pi'_1: X'_1 \rightarrow C'$ – неизотривиальное гладкое семейство эллиптических кривых, то хорошо известно, что

$$G_1 = \text{Sp}(H^1(X_{1s}, \mathbb{Q}), \Phi_{1s}), \quad (1.13)$$

где

$$\Phi_{1s}: H^1(X_{1s}, \mathbb{Q}) \times H^1(X_{1s}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{x \times y \mapsto x \cup y} H^2(X_{1s}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}(-1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}$$

– каноническое кососимметрическое спаривание. В частности, $H^1(X_{1s}, \mathbb{Q})$ – абсолютно неприводимый симплектический G_1 -модуль. С другой стороны, $H^1(X_{1s}, \mathbb{Q})$, $H^2(X_{2s}, \mathbb{Q})$ и $H^3(X_s, \mathbb{Q})$ – полупростые $\pi_1(C', s)$ -модули по теореме Делиня о полупростоте глобальной монодромии [10, теорема 4.2.6]. Более того,

из (1.13) следует, что $H^1(X_{1s}, \mathbb{Q})$ – абсолютно неприводимый $\pi_1(C', s)$ -модуль. Заметим, что

$$\begin{aligned} H^0(C', R^3\pi'_*\mathbb{Q}) &\simeq H^3(X_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C', s)} = [H^1(X_{1s}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{2s}, \mathbb{Q})]^{\pi_1(C', s)} \\ &\simeq \text{Hom}_{\pi_1(C', s)}(H^1(X_{1s}, \mathbb{Q}), H^2(X_{2s}, \mathbb{Q})). \end{aligned}$$

Если $H^0(C', R^3\pi'_*\mathbb{Q}) \neq 0$, то $H^1(X_{1s}, \mathbb{Q})$ – неприводимый $\pi_1(C', s)$ -подмодуль полупростого $\pi_1(C', s)$ -модуля $H^2(X_{2s}, \mathbb{Q})$; в частности, $\text{Lie } G_2 \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ (являясь идеалом редуктивной алгебры Ли $\text{Lie Hg}(X_{2s}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ для *общей* в смысле Ходжа точки $s \in C'$) имеет простой фактор типа A_1 . Следовательно, мы приходим к противоречию с условием (i) теоремы (потому что тогда $G_2 = 1$, как было замечено в конце п. 1.3) и условием (ii), согласно которому $\text{Lie Hg}(X_{2s}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ не имеет простых факторов типа A_1 .

С другой стороны, двойственность Пуанкаре на слоях гладкого морфизма $\pi': X' \rightarrow C'$ дает изоморфизм локальных систем $R^5\pi'_*\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} R^1\pi'_*\mathbb{Q} = R^1\pi'_{1*}\mathbb{Q}$, поэтому

$$H^0(C', R^5\pi'_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^0(C', R^1\pi'_{1*}\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^1(X_{1s}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C', s)} = H^1(X_{1s}, \mathbb{Q})^{G_1} = 0$$

в силу (1.13). Лемма доказана.

1.9. ЛЕММА. Имеем

$$H^2(C, R^1\pi_*\mathbb{Q}) = H^2(C, R^3\pi_*\mathbb{Q}) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме о локально инвариантных циклах каноническое отображение $R^p\pi_*\mathbb{Q} \rightarrow j_*R^p\pi'_*\mathbb{Q}$ сюръективно с ядром, сконцентрированным на Δ [12, предложение (15.12)]. Следовательно, имеется канонический изоморфизм

$$H^2(C, R^p\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(C, j_*R^p\pi'_*\mathbb{Q}). \quad (1.14)$$

С другой стороны, естественные $\cup$ -произведения (вместе с поляризацией локальной системы $R^p\pi'_*\mathbb{Q}$) определяют невырожденное спаривание [12, предложение (10.5)]

$$H^0(C, j_*R^p\pi'_*\mathbb{Q}) \times H^2(C, j_*R^p\pi'_*\mathbb{Q}) \rightarrow H^2(C, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}.$$

Поэтому в силу формулы Кюннета $R^1\pi'_*\mathbb{Q} = R^1\pi'_{1*}\mathbb{Q} \oplus R^1\pi'_{2*}\mathbb{Q} = R^1\pi'_{1*}\mathbb{Q}$ и согласно (1.14) имеем

$$H^2(C, R^1\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^0(C, j_*R^1\pi'_*\mathbb{Q})^\vee = H^0(C', R^1\pi'_*\mathbb{Q})^\vee = H^0(C', R^1\pi'_{1*}\mathbb{Q})^\vee = 0,$$

так как $H^1(X_{1s}, \mathbb{Q})$ – неприводимый $\pi_1(C', s)$ -модуль степени 2, следовательно, $H^0(C', R^1\pi'_{1*}\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^1(X_{1s}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C', s)} = 0$; остается заметить, что

$$H^2(C, R^3\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^0(C, j_*R^3\pi'_*\mathbb{Q})^\vee = H^0(C', R^3\pi'_*\mathbb{Q})^\vee = 0$$

в силу леммы из п. 1.8.

1.10. ЛЕММА. Для $n \in \{3, 5\}$ существует канонический изоморфизм рациональных структур Ходжа

$$(i_{\Delta}f)_* H^{n-2}(Z, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^0(C, R^n \pi_* \mathbb{Q}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (1.9), (1.10) и леммам из п. 1.8, 1.9 имеется точная последовательность рациональных структур Ходжа

$$0 \rightarrow (i_{\Delta}f)_* H^{n-2}(Z, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^n \pi_* \mathbb{Q}) \rightarrow \frac{H^1(C', R^{n-1} \pi'_* \mathbb{Q}) \cap \text{Im}(\varphi_n)}{H^1(C, R^{n-1} \pi_* \mathbb{Q})} \rightarrow 0. \quad (1.15)$$

Поскольку

$$\frac{H^1(C', R^{n-1} \pi'_* \mathbb{Q}) \cap \text{Im}(\varphi_n)}{H^1(C, R^{n-1} \pi_* \mathbb{Q})}$$

– чистая рациональная структура Ходжа типа $(n, 0) + (n-1, 1) + \dots + (0, n)$, то в силу (1.11) достаточно проверить, что $V_0^{(\delta)}/N_0^{(\delta)}V_0^{(\delta)}$ имеет тип Ходжа $(n-1, 0) + (n-2, 1) + \dots + (0, n-1)$ для всех точек $\delta \in \Delta$.

Заметим прежде всего, что

$$N = 0 \quad (1.16)$$

в обозначениях (1.12).

Действительно, локальное преобразование монодромии γ действует тривиально на пространстве

$$H^{n-1}(X_s, \mathbb{Q}) = [H^2(X_{1s}, \mathbb{Q}) \otimes H^{n-3}(X_{2s}, \mathbb{Q})] \oplus [H^0(X_{1s}, \mathbb{Q}) \otimes H^{n-1}(X_{2s}, \mathbb{Q})],$$

потому что:

а) существуют канонические изоморфизмы рациональных структур Ходжа $H^2(X_{1s}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}(-1)$ (где $\mathbb{Q}(1)$ – постоянная структура Ходжа–Тэйта типа $(-1, -1)$ с решеткой целых $2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z}$) и $H^0(X_{1s}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}$;

б) группа G_2 тривиальна при выполнении условия (i) теоремы; с другой стороны, если выполнено условие (ii), то семейство $\pi_2: X_2 \rightarrow C$ не имеет вырождений и, следовательно, соответствующее локальное преобразование монодромии действует тривиально на $H^{n-3}(X_{2s}, \mathbb{Q})$ и $H^{n-1}(X_{2s}, \mathbb{Q})$.

Предположим сначала, что $n = 3$. Тогда в силу (1.1), (1.2) имеем

$$0 \subset W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset W_3 \subset W_4 = H^2(X_s, \mathbb{Q}), \quad (1.17)$$

$$N: W_3/W_2 \xrightarrow{\sim} W_1/W_0, \quad N^2: W_4/W_3 \xrightarrow{\sim} W_0. \quad (1.18)$$

Из (1.16)–(1.18) следует, что $W_0 = W_1 = 0$, $W_4 = W_3 = W_2$, поэтому

$$V_0^{(\delta)}/N_0^{(\delta)}V_0^{(\delta)} = W_2 \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} [W_2/W_1] \otimes \mathbb{C}$$

– чистая структура Ходжа типа $(2, 0) + (1, 1) + (0, 2)$, что и требовалось доказать.

Предположим теперь, что $n = 5$. Тогда в силу (1.1), (1.2) имеем

$$\begin{aligned} 0 \subset W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset \dots \subset W_8 = H^4(X_s, \mathbb{Q}), \\ N: W_5/W_4 \xrightarrow{\sim} W_3/W_2, \quad N^2: W_6/W_5 \xrightarrow{\sim} W_2/W_1, \\ N^3: W_7/W_6 \xrightarrow{\sim} W_1/W_0, \quad N^4: W_8/W_7 \xrightarrow{\sim} W_0. \end{aligned}$$

Поэтому из (1.16) следует, что $W_0 = W_1 = W_2 = W_3 = 0$, $W_8 = W_7 = W_6 = W_5 = W_4$; следовательно,

$$V_0^{(\delta)}/N_0^{(\delta)}V_0^{(\delta)} = W_4 \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} [W_4/W_3] \otimes \mathbb{C}$$

– чистая структура Ходжа типа $(4, 0) + (3, 1) + (2, 2) + (1, 3) + (0, 4)$. Лемма доказана.

1.11. ЛЕММА. *Для $n \in \{3, 5\}$ существует каноническое разложение рациональных структур Ходжа*

$$H^n(X, \mathbb{Q}) = H^0(C, R^n \pi_* \mathbb{Q}) \oplus H^1(C, R^{n-1} \pi_* \mathbb{Q}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (1.8) и леммы из п. 1.9 имеется канонический изоморфизм

$$\text{Ker}[H^n(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^n \pi_* \mathbb{Q})] \xrightarrow{\sim} H^1(C, R^{n-1} \pi_* \mathbb{Q}). \quad (1.19)$$

С другой стороны, согласно лемме из п. 1.8 и точности строки

$$0 \rightarrow H^1(C', R^{n-1} \pi'_* \mathbb{Q}) \cap \text{Im}(\varphi_n) \rightarrow \text{Im}(\varphi_n) \rightarrow H^0(C', R^n \pi'_* \mathbb{Q}) \rightarrow 0$$

диаграммы (1.9) следует, что $H^1(C', R^{n-1} \pi'_* \mathbb{Q}) \cap \text{Im}(\varphi_n) = \text{Im}(\varphi_n)$. Поэтому согласно (1.15) и лемме из п. 1.10 имеем изоморфизм

$$H^1(C, R^{n-1} \pi_* \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \text{Im}(\varphi_n).$$

Значит, (1.5) и лемма из п. 1.10 обеспечивают существование канонической точной последовательности рациональных структур Ходжа

$$0 \rightarrow H^0(C, R^n \pi_* \mathbb{Q}) \rightarrow H^n(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^1(C, R^{n-1} \pi_* \mathbb{Q}) \rightarrow 0. \quad (1.20)$$

Поскольку канонический краевой морфизм $H^n(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^n \pi_* \mathbb{Q})$ сюръективен [12, следствие (15.14)], то существование желаемого расщепления пространства $H^n(X, \mathbb{Q})$ следует из (1.19), (1.20). Лемма доказана.

1.12. СЛЕДСТВИЕ. *Для $n \in \{3, 5\}$ имеем*

$$H^n(X, \mathbb{Q}) = H^1(C, R^{n-1} \pi_* \mathbb{Q}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим спектральную последовательность Лере $E_2^{p,q} = H^p(C, R^q \pi_* \mathbb{Q})$. Имеется отображение $\cup$ -умножения $E_2^{p,q} \otimes E_2^{p',q'} \rightarrow E_2^{p+p',q+q'}$, определенное как композиция канонических отображений

$$\begin{aligned} H^p(C, R^q \pi_* \mathbb{Q}) \otimes H^{p'}(C, R^{q'} \pi_* \mathbb{Q}) &\xrightarrow{x \otimes y \mapsto (-1)^{p'q} x \cup y} H^{p+p'}(C, R^q \pi_* \mathbb{Q} \otimes R^{q'} \pi_* \mathbb{Q}) \\ &\rightarrow H^{p+p'}(C, R^{q+q'} \pi_* \mathbb{Q}); \end{aligned}$$

более того, хорошо известно [17, гл. 4, § 6, п. 6.5], что на E_∞ оно совместимо с $\cup$ -умножением

$$H^m(X, \mathbb{Q}) \otimes H^{m'}(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^{m+m'}(X, \mathbb{Q}).$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} H^0(C, R^3\pi_*\mathbb{Q}) \cup H^0(C, R^5\pi_*\mathbb{Q}) &\hookrightarrow H^0(C, R^8\pi_*\mathbb{Q}) = 0, \\ H^0(C, R^3\pi_*\mathbb{Q}) \cup H^1(C, R^4\pi_*\mathbb{Q}) &\hookrightarrow H^1(C, R^7\pi_*\mathbb{Q}) = 0, \end{aligned}$$

поэтому $H^0(C, R^3\pi_*\mathbb{Q}) = 0$ в силу леммы из п. 1.11 и теоремы двойственности Пуанкаре. Аналогично,

$$H^1(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) \cup H^0(C, R^5\pi_*\mathbb{Q}) \hookrightarrow H^1(C, R^7\pi_*\mathbb{Q}) = 0,$$

поэтому $H^0(C, R^5\pi_*\mathbb{Q}) = 0$. Следствие доказано.

§ 2. Конструкции алгебраических изоморфизмов

2.1. Фиксируем обильный дивизор H на X и точку $s \in C'$. Выбор $\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ определяет невырожденное кососимметрическое спаривание

$$\Phi_s: H^1(X_s, \mathbb{Q}) \times H^1(X_s, \mathbb{Q}) \xrightarrow{x \times y \mapsto \langle x \cup \text{cl}_{X_s}(H_s) \cup {}^2y \rangle} \mathbb{Q},$$

где $\text{cl}_{X_s}(H_s) \in H^2(X_s, \mathbb{Q})$ – ограничение обильного класса $\text{cl}_X(H) \in H^2(X, \mathbb{Q})$, и $\langle \cdot \rangle: H^6(X_s, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}$ – изоморфизм ориентации [5, п. 1.2.A(ii)].

Пусть $\text{Sp}(H^1(X_s, \mathbb{Q}), \Phi_s)$ – группа автоморфизмов пространства $H^1(X_s, \mathbb{Q})$, сохраняющих форму Φ_s . По определению класс Пуанкаре $\wp(H^1(X_s, \mathbb{Q}))$ является образующей пространства

$$[H^1(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_s, \mathbb{Q})]^{\text{Sp}(H^1(X_s, \mathbb{Q}), \Phi_s)}$$

инвариантов диагонального действия симплектической группы $\text{Sp}(H^1(X_s, \mathbb{Q}), \Phi_s)$ на тензорном произведении $H^1(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_s, \mathbb{Q})$ и принадлежит $H^2(X_s \times X_s, \mathbb{Q}) \cap H^{1,1}(X_s \times X_s, \mathbb{C})$ [8, п. 1.4], следовательно, он алгебраический по теореме Лефшеца о дивизорах. В частности, класс Пуанкаре представлен алгебраическим циклом Пуанкаре $[\Lambda_s]_{1,1}$ с коэффициентами в поле $\mathbb{Q}$.

Пусть $\eta \in C$ – общая схемная точка кривой C . Алгебраический класс $[\Lambda_{\bar{\eta}}]_{1,1}$ на общем геометрическом слое морфизма $\tau': X' \times_C X' \rightarrow C'$ представлен алгебраическим циклом Пуанкаре, который мы снова обозначим через $[\Lambda_{\bar{\eta}}]_{1,1}$. Он определен над некоторым конечным алгебраическим расширением поля $\kappa(\eta)$ рациональных функций кривой C .

Используя (если необходимо) замену базы, определенную некоторым конечным разветвленным накрытием $\tilde{C} \rightarrow C$, мы можем (и будем) считать, что $[\Lambda_{\bar{\eta}}]_{1,1}$ – дивизор (с коэффициентами из поля $\mathbb{Q}$), неприводимые компоненты которого определены над полем $\kappa(\eta)$. Тогда теория редукции алгебраических циклов по отношению к дискретному нормированию поля $\kappa(\eta)$ [18] позволяет считать, что $[\Lambda_s]_{1,1}$ является специализацией цикла $[\Lambda_{\bar{\eta}}]_{1,1}$. Следовательно, можно считать, что дивизор $[\Lambda_{\bar{\eta}}]_{1,1}$ определяет сечение $\Lambda'_{1,1} \in H^0(C', R^1\pi'_*\mathbb{Q} \otimes R^1\pi'_*\mathbb{Q})$, которое, в свою очередь, индуцирует класс Пуанкаре $\wp(H^1(X_s, \mathbb{Q})) \in H^1(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_s, \mathbb{Q})$ для любой точки $s \in C'$.

Рассмотрим каноническую диаграмму расслоенного произведения

$$\begin{array}{ccc} X' \times_{C'} X' & \xrightarrow{p'_1} & X' \\ \downarrow p'_2 & \searrow \tau' & \downarrow \pi' \\ X' & \xrightarrow{\pi'} & C' \end{array}$$

В силу [8, лемма 1.5] класс Пуанкаре $\wp(H^1(X_s, \mathbb{Q}))$ задает алгебраический изоморфизм $H^5(X_s, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^1(X_s, \mathbb{Q})$, определенный композицией

$$\begin{aligned} H^5(X_s, \mathbb{Q}) &\xrightarrow{\text{pr}_{1s}^*} H^5(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^0(X_s, \mathbb{Q}) \\ &\xrightarrow{\cup \wp(H^1(X_s, \mathbb{Q}))} H^6(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_s, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\text{pr}_{2s*}} H^1(X_s, \mathbb{Q}). \end{aligned}$$

Поэтому $\Lambda'_{1,1}$ дает изоморфизм локальных систем $R^5\pi'_*\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} R^1\pi'_*\mathbb{Q}$, определенный композицией

$$R^5\pi'_*\mathbb{Q} \xrightarrow{(p'_1)^*} R^5\pi'_*\mathbb{Q} \otimes \pi'_*\mathbb{Q} \xrightarrow{\cup \Lambda'_{1,1}} R^6\pi'_*\mathbb{Q} \otimes R^1\pi'_*\mathbb{Q} \xrightarrow{(p'_2)^*} R^1\pi'_*\mathbb{Q}. \quad (2.1)$$

2.2. Пусть

$$\begin{array}{ccc} X \times_C X & \xrightarrow{p_1} & X \\ \downarrow p_2 & \searrow \tau & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{\pi} & C \end{array}$$

– каноническая диаграмма расслоенного произведения, $\iota: X \times_C X \hookrightarrow X \times X$ – каноническое вложение, $\sigma: Y \rightarrow X \times_C X$ – разрешение особенностей многообразия $X \times_C X$. Можно считать, что σ индуцирует изоморфизм над C' . В частности, Y можно рассматривать как гладкую проективную компактификацию многообразия $X' \times_{C'} X'$. Более того, можно считать, что $(\tau\sigma)^{-1}(\Delta)$ – объединение гладких дивизоров (некоторых положительных кратностей) с нормальными пересечениями. По теореме Делиня канонический морфизм $H^2(Y, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C', R^2\tau'_*\mathbb{Q})$ является сюръективным морфизмом $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа [10, теорема 4.1.1, доказательство следствия 4.1.2].

Имеется коммутативная диаграмма канонических отображений

$$\begin{array}{ccc} H^2(Y, \mathbb{Q}) & & \\ \downarrow & \searrow & \\ H^0(C, R^2(\tau\sigma)_*\mathbb{Q}) & \longrightarrow & H^0(C', R^2\tau'_*\mathbb{Q}) \end{array} \quad (2.2)$$

Поскольку $\tau\sigma: Y \rightarrow C$ является 1-параметрическим семейством четырехмерных многообразий с гладким общим слоем, спектральная последовательность Лере для $\tau\sigma$ вырождается [12, следствие (15.15)]: $E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}$. В частности, существует каноническая точная последовательность рациональных структур Ходжа

$$0 \rightarrow H^2(C, \mathbb{Q}) \rightarrow \text{Ker}[H^2(Y, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^2(\tau\sigma)_*\mathbb{Q})] \rightarrow H^1(C, R^1(\tau\sigma)_*\mathbb{Q}) \rightarrow 0.$$

Более того, канонический краевой морфизм $H^2(Y, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^2(\tau\sigma)_*\mathbb{Q})$ является сюръективным морфизмом $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа [12, следствие (15.14)], следовательно, (2.2) – коммутативная диаграмма морфизмов $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа.

Поскольку $\Lambda'_{1,1} \in H^0(C', R^2\tau'_*\mathbb{Q})$ – элемент типа Ходжа (1, 1), то из теоремы Лефшеца о дивизорах следует, что существует алгебраический класс $\mathcal{D} \in H^2_{\text{alg}}(Y, \mathbb{Q}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{NS}(Y) \otimes \mathbb{Q}$, образ которого относительно канонического сюръективного морфизма $H^2(Y, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C', R^2\tau'_*\mathbb{Q})$ совпадает с $\Lambda'_{1,1}$. Обозначим через $\Lambda_{1,1} \in H^0(C, R^2(\tau\sigma)_*\mathbb{Q})$ образ алгебраического класса $\mathcal{D}$ относительно канонического краевого морфизма $H^2(Y, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^2(\tau\sigma)_*\mathbb{Q})$. Очевидно, что

$$\Lambda_{1,1}|_{C'} = \Lambda'_{1,1}. \quad (2.3)$$

Используя (2.3), совместимость $\cup$ -произведений со спектральной последовательностью Лере $E_2^{p,q} = H^p(C, R^q(\tau\sigma)_*\mathbb{Q})$ [17, гл. 4, § 6, п. 6.5] и алгоритм доказательства теоремы 2.3 в [8], можно расширить (2.1) до композиции

$$R^5\pi_*\mathbb{Q} \xrightarrow{(p_1\sigma)^*} R^5(\tau\sigma)_*\mathbb{Q} \xrightarrow{\cup \mathcal{D}} R^7(\tau\sigma)_*\mathbb{Q} \xrightarrow{(p_2\sigma)^*} R^1\pi_*\mathbb{Q},$$

которая, в свою очередь, задает изоморфизм

$$H^1(C, R^5\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow[\sim]{x \mapsto (p_2\sigma)_*[(p_1\sigma)^*x \cup \mathcal{D}]} H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{Q}). \quad (2.4)$$

2.3. Пусть $\text{NS}(X)$ – группа Нерона–Севери многообразия X и $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \text{NS}(X) \otimes \mathbb{Q}$. Обозначим через $\text{Hg}(H^2(X, \mathbb{Q}))$ группу Ходжа, ассоциированную с $\mathbb{Q}$ -структурой Ходжа $H^2(X, \mathbb{Q})$ [8, п. 1.1]. Это связная редуктивная $\mathbb{Q}$ -группа, действующая в $H^2(X, \mathbb{Q})$. По теореме Лефшеца о дивизорах

$$\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X) = H^2(X, \mathbb{Q})^{\text{Hg}(H^2(X, \mathbb{Q}))}$$

и $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X)$ совпадает с суммой всех 1-мерных $\mathbb{Q}$ -подструктур Ходжа в $H^2(X, \mathbb{Q})$. Пусть $T_{\mathbb{Q}}^2(X)$ – сумма всех неприводимых $\mathbb{Q}$ -подструктур Ходжа размерности больше 1 в $H^2(X, \mathbb{Q})$. Тогда $T_{\mathbb{Q}}^2(X)$ является канонически определенной $\mathbb{Q}$ -подструктурой Ходжа в пространстве $H^2(X, \mathbb{Q})$, так что мы имеем каноническое разложение $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа (и $\text{Hg}(H^2(X, \mathbb{Q}))$ -модулей)

$$H^2(X, \mathbb{Q}) = T_{\mathbb{Q}}^2(X) \oplus \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X). \quad (2.5)$$

Согласно сильной теореме Лефшеца пространство $T_{\mathbb{Q}}^2(X) \cup \text{cl}_X(H)^{\cup 2}$ совпадает с суммой всех неприводимых $\mathbb{Q}$ -подструктур Ходжа размерности больше 1 в $H^6(X, \mathbb{Q})$ и $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \cup \text{cl}_X(H)^{\cup 2}$ совпадает с суммой всех 1-мерных $\mathbb{Q}$ -подструктур Ходжа, поэтому имеется каноническое разложение $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа

$$H^6(X, \mathbb{Q}) = [T_{\mathbb{Q}}^2(X) \cup \text{cl}_X(H)^{\cup 2}] \oplus [\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \cup \text{cl}_X(H)^{\cup 2}]. \quad (2.6)$$

В силу (1.8) имеются точные последовательности $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа

$$0 \rightarrow H^2(C, \mathbb{Q}) \rightarrow \text{Ker}[H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q})] \rightarrow H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{Q}) \rightarrow 0, \quad (2.7)$$

$$0 \rightarrow H^2(C, R^4\pi_*\mathbb{Q}) \rightarrow \text{Ker}[H^6(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^6\pi_*\mathbb{Q})] \rightarrow H^1(C, R^5\pi_*\mathbb{Q}) \rightarrow 0. \quad (2.8)$$

Заметим, что (2.4) – изоморфизм типа $(-2, -2)$ рациональных структур Ходжа. Поэтому он индуцирует изоморфизм соответствующих сумм всех неприводимых $\mathbb{Q}$ -подструктур Ходжа размерности больше 1. Поскольку $H^2(C, \mathbb{Q})$ является 1-мерной подструктурой Ходжа, порожденной классом слоя $\text{cl}_X(X_s)$, и $H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q})$ – рациональная структура Ходжа типа $(1, 1)$ в силу леммы из п. 1.7, то из точности последовательности (2.7) рациональных структур Ходжа следует, что сумма всех неприводимых $\mathbb{Q}$ -подструктур Ходжа размерности больше 1 в $H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{Q})$ канонически изоморфна $T_{\mathbb{Q}}^2(X)$. С другой стороны, из (2.6), (2.8) и (2.4) следует, что сумма всех неприводимых $\mathbb{Q}$ -подструктур Ходжа размерности больше 1 в $H^1(C, R^5\pi_*\mathbb{Q})$ канонически изоморфна $T_{\mathbb{Q}}^2(X) \cup \text{cl}_X(H)^{\cup 2}$. Поэтому из (2.4) следует, что имеется изоморфизм типа $(-2, -2)$ рациональных структур Ходжа

$$T_{\mathbb{Q}}^2(X) \cup \text{cl}_X(H)^{\cup 2} \xrightarrow[\sim]{x \mapsto (p_2\sigma)_*[(p_1\sigma)^*x \cup \mathcal{D}]} T_{\mathbb{Q}}^2(X). \quad (2.9)$$

Пусть $\text{pr}_k: X \times X \rightarrow X$ – каноническая проекция. Тогда

$$\text{pr}_k \iota \sigma = p_k \sigma.$$

Поскольку pr_k и $\iota \sigma$ – морфизмы гладких проективных многообразий, для всех $x \in T_{\mathbb{Q}}^2(X) \cup \text{cl}_X(H)^{\cup 2}$ в силу формулы проекции имеем

$$\begin{aligned} (p_2\sigma)_*[(p_1\sigma)^*x \cup \mathcal{D}] &= [\text{pr}_2 \iota \sigma]_*([\text{pr}_1 \iota \sigma]^*x \cup \mathcal{D}) \\ &= \text{pr}_{2*}(\iota \sigma)_*((\iota \sigma)^* \text{pr}_1^*x \cup \mathcal{D}) = \text{pr}_{2*}(\text{pr}_1^*x \cup (\iota \sigma)_*\mathcal{D}). \end{aligned}$$

Поэтому алгебраический класс $u \stackrel{\text{def}}{=} (\iota \sigma)_*\mathcal{D} \in H^4(X \times X, \mathbb{Q})$ определяет алгебраический изоморфизм типа $(-2, -2)$ рациональных структур Ходжа

$$T_{\mathbb{Q}}^2(X) \cup \text{cl}_X(H)^{\cup 2} \xrightarrow{\sim} T_{\mathbb{Q}}^2(X). \quad (2.10)$$

Очевидно, что

$$u = u_{0,4} + u_{1,3} + u_{2,2} + u_{3,1} + u_{4,0},$$

где $u_{i,4-i} \in [H^i(X, \mathbb{Q}) \otimes H^{4-i}(X, \mathbb{Q})] \cap H^{2,2}(X \times X, \mathbb{C})$. В силу теоремы Лефшеца о дивизорах имеем

$$\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X) = H^2(X, \mathbb{Q})^{\text{Hg}(H^2(X, \mathbb{Q}))}, \quad T_{\mathbb{Q}}^2(X)^{\text{Hg}(H^2(X, \mathbb{Q}))} = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u_{2,2} &\in [T_{\mathbb{Q}}^2(X) \oplus \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X)]^{\otimes 2} \cap H^{2,2}(X \times X, \mathbb{C}) \\ &= [T_{\mathbb{Q}}^2(X) \otimes T_{\mathbb{Q}}^2(X)]^{\text{Hg}(H^2(X, \mathbb{Q}))} \oplus [\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \otimes \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X)]^{\text{Hg}(H^2(X, \mathbb{Q}))} \\ &\quad \oplus [T_{\mathbb{Q}}^2(X) \otimes \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X)]^{\text{Hg}(H^2(X, \mathbb{Q}))} \oplus [\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \otimes T_{\mathbb{Q}}^2(X)]^{\text{Hg}(H^2(X, \mathbb{Q}))} \\ &= [T_{\mathbb{Q}}^2(X) \otimes T_{\mathbb{Q}}^2(X)]^{\text{Hg}(H^2(X, \mathbb{Q}))} \oplus [\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \otimes \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X)]. \end{aligned}$$

В частности, $u_{2,2} = t_{2,2} + n_{2,2}$, где $t_{2,2} \in T_{\mathbb{Q}}^2(X) \otimes T_{\mathbb{Q}}^2(X)$ и $n_{2,2} \in \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \otimes \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X)$.

По построению имеем $\dim \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \geq 3$. Следовательно, класс Пуанкаре $\wp(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X)) \in \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X)$ корректно определен [8, п. 1.4].

Соответствия $u_{0,4}$, $u_{1,3}$, $u_{3,1}$, $u_{4,0}$ аннулируют $H^6(X, \mathbb{Q})$ [8, формула (1.2)]. С другой стороны,

$$T_{\mathbb{Q}}^2(X) \cup \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \cup \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \cup \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X) = 0, \quad (2.11)$$

потому что иначе это пространство совпадало бы с суммой некоторых неприводимых $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа размерности больше 1, что противоречит равенству $\dim H^8(X, \mathbb{Q}) = 1$. Поэтому соответствие $-n_{2,2} + \wp(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X))$ аннулирует подпространство $T_{\mathbb{Q}}^2(X) \cup \mathrm{cl}_X(H)^{\cup 2} \subset H^6(X, \mathbb{Q})$ и алгебраический класс $u - n_{2,2} + \wp(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X))$ определяет изоморфизм (2.10). Наконец, соответствие $t_{2,2}$ аннулирует подпространство $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \cup \mathrm{cl}_X(H)^{\cup 2} \subset H^6(X, \mathbb{Q})$ в силу (2.11), и соответствие $\wp(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X)) \in \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X)$ определяет алгебраический изоморфизм $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \cup \mathrm{cl}_X(H)^{\cup 2} \xrightarrow{\sim} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X)$ (этот результат может быть доказан теми же рассуждениями, что и в [8, лемма 1.5]). Поэтому из (2.6) следует, что алгебраический класс

$$u - n_{2,2} + \wp(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X)) = u_{0,4} + u_{1,3} + t_{2,2} + u_{3,1} + u_{4,0} + \wp(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X))$$

определяет алгебраический изоморфизм $H^6(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(X, \mathbb{Q})$.

2.4. Хорошо известно, что класс Пуанкаре $\wp(H^1(X, \mathbb{Q}))$ является циклом Ходжа (другими словами, он принадлежит $H^2(X \times X, \mathbb{Q}) \cap H^{1,1}(X \times X, \mathbb{C})$) [8, п. 1.4], поэтому он алгебраический по теореме Лефшеца о дивизорах. Согласно [8, лемма 1.5] этот цикл определяет алгебраический изоморфизм $H^7(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^1(X, \mathbb{Q})$. Наконец, алгебраический класс $\mathrm{cl}_X(X) \otimes \mathrm{cl}_X(X)$ определяет алгебраический изоморфизм $H^8(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^0(X, \mathbb{Q})$. Поскольку характеристический полином любого эндоморфизма пространства $H^i(X, \mathbb{Q})$ имеет рациональные коэффициенты, то в силу [5, теорема 2.9] остается построить алгебраический изоморфизм $H^5(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^3(X, \mathbb{Q})$.

2.5. В силу следствия из п. 1.12 достаточно построить алгебраический изоморфизм $H^1(C, R^4\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^1(C, R^2\pi_*\mathbb{Q})$.

Прежде всего очевидно, что $\mathrm{cl}_{X_{1s} \times X_{1s}}(X_{1s} \times X_{1s}) \in H^0(X_{1s}, \mathbb{Q}) \otimes H^0(X_{1s}, \mathbb{Q})$, $s \in C'$, определяет алгебраический изоморфизм $H^2(X_{1s}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^0(X_{1s}, \mathbb{Q})$. Поэтому алгебраический класс $\mathrm{cl}_{X'_1 \times_{C'} X'_1}(X'_1 \times_{C'} X'_1) \in H^0(C', \mathbb{Q})$ [19, гл. VI, § 9] определяет изоморфизм локальных систем

$$R^2\pi'_{1*}\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} R^0\pi'_{1*}\mathbb{Q} = \mathbb{Q}. \quad (2.12)$$

С другой стороны, гипотеза $B(X_{2s})$ верна (потому что стандартная гипотеза типа Лефшеца справедлива для всех комплексных гладких проективных поверхностей), и из $B(X_{2s})$ следует гипотеза $C(X_{2s})$ об алгебраичности компонент Кюннета класса когомологий диагонали [5, лемма 2.4]. Поэтому $[H^2(X_{2s}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{2s}, \mathbb{Q})]$ -компонента Кюннета $\delta^{2,2}(X_{2s})$ класса диагонали $\Delta_{X_{2s}} \hookrightarrow X_{2s} \times X_{2s}$ алгебраическая [5, предложение 2.6]. Хорошо известно, что компонента $\delta^{2,2}(X_{2s})$ соответствует канонической проекции $H^*(X_{2s}, \mathbb{Q}) \rightarrow$

$H^2(X_{2s}, \mathbb{Q})$ [5, предложение 1.3.6], поэтому она определяет алгебраический (тождественный) изоморфизм

$$H^2(X_{2s}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(X_{2s}, \mathbb{Q}),$$

являющийся композицией

$$\begin{aligned} H^2(X_{2s}, \mathbb{Q}) &\xrightarrow[\sim]{\text{pr}_{1s}^*} H^2(X_{2s}, \mathbb{Q}) \otimes H^0(X_{2s}, \mathbb{Q}) \\ &\xrightarrow{x \mapsto x \cup \delta^{2,2}(X_{2s})} H^4(X_{2s}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{2s}, \mathbb{Q}) \xrightarrow[\sim]{\text{pr}_{2s**}} H^2(X_{2s}, \mathbb{Q}). \end{aligned}$$

В частности, имеется канонический изоморфизм

$$H^2(X_{2s}, \mathbb{Q}) \otimes H^0(X_{2s}, \mathbb{Q}) \xrightarrow[\sim]{x \mapsto x \cup \delta^{2,2}(X_{2s})} H^4(X_{2s}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{2s}, \mathbb{Q}). \quad (2.13)$$

В силу формулы Кюннета имеем

$$R^3(\pi'_2 \times_{C'} \pi'_2)_* \mathbb{Q} = 0,$$

поэтому точная последовательность [12, нижняя строка диаграммы (15.1) для случая $m = 3$]

$$0 \rightarrow H^1(C', R^3(\pi'_2 \times_{C'} \pi'_2)_* \mathbb{Q}) \rightarrow H^4(X'_2 \times_{C'} X'_2, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C', R^4(\pi'_2 \times_{C'} \pi'_2)_* \mathbb{Q}) \rightarrow 0$$

влечет равенство

$$H^4(X'_2 \times_{C'} X'_2, \mathbb{Q}) = H^0(C', R^4(\pi'_2 \times_{C'} \pi'_2)_* \mathbb{Q}).$$

Пусть $\delta_{X'_2}: \Delta_{X'_2} \hookrightarrow X'_2 \times_{C'} X'_2$ – диагональное вложение. Тогда

$$\begin{aligned} \text{cl}_{X'_2 \times_{C'} X'_2}(\Delta_{X'_2}) &\in H^4(X'_2 \times_{C'} X'_2, \mathbb{Q}) = H^0(C', R^4(\pi'_2 \times_{C'} \pi'_2)_* \mathbb{Q}) \\ &= H^0(C', R^4\pi'_{2*} \mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q}) \oplus H^0(C', \mathbb{Q} \otimes R^4\pi'_{2*} \mathbb{Q}) \oplus H^0(C', R^2\pi'_{2*} \mathbb{Q} \otimes R^2\pi'_{2*} \mathbb{Q}). \end{aligned}$$

Поскольку $H^0(C', R^4\pi'_{2*} \mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q})$ и $H^0(C', \mathbb{Q} \otimes R^4\pi'_{2*} \mathbb{Q})$ порождаются алгебраическими классами, мы видим, что $H^0(C', R^2\pi'_{2*} \mathbb{Q} \otimes R^2\pi'_{2*} \mathbb{Q})$ -компонента $\delta^{2,2}(X'_2)$ алгебраического класса $\text{cl}_{X'_2 \times_{C'} X'_2}(\Delta_{X'_2})$ является алгебраической. Она определяет (тождественный) изоморфизм локальных систем

$$R^2\pi'_{2*} \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} R^2\pi'_{2*} \mathbb{Q}. \quad (2.14)$$

С другой стороны, $\text{cl}_{X_{2s} \times X_{2s}}(X_{2s} \times X_{2s}) \in H^0(X_{2s}, \mathbb{Q}) \otimes H^0(X_{2s}, \mathbb{Q})$ определяет алгебраический изоморфизм

$$H^4(X_{2s}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^0(X_{2s}, \mathbb{Q}).$$

Поэтому алгебраический класс $\text{cl}_{X'_2 \times_{C'} X'_2}(X'_2 \times_{C'} X'_2) \in H^0(C', \mathbb{Q})$ [19, гл. VI, § 9] определяет изоморфизм локальных систем

$$R^4\pi'_{2*} \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} R^0\pi'_{2*} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}. \quad (2.15)$$

Пусть $e_1(s)$ – нуль эллиптической кривой X_{1s} . Тогда оператор

$$M_{\text{cl}_{X_{1s}}(e_1(s))}: H^0(X_{1s}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{x \mapsto x \cup \text{cl}_{X_{1s}}(e_1(s))} H^2(X_{1s}, \mathbb{Q})$$

соответствует нетривиальному алгебраическому классу

$$(\delta_{X_{1s}})_*(\text{cl}_{X_{1s}}(e_1(s))) \in H^4(X_{1s} \times X_{1s}, \mathbb{Q}) = H^2(X_{1s}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{1s}, \mathbb{Q}),$$

где $\delta_{X_{1s}}: \Delta_{X_{1s}} \hookrightarrow X_{1s} \times X_{1s}$ – диагональное вложение [5, предложение 1.3.5].

Существует канонический изоморфизм

$$\Psi': [X'_1 \times_{C'} X'_1] \times_{C'} [X'_2 \times_{C'} X'_2] \xrightarrow{\sim} [X'_1 \times_{C'} X'_2] \times_{C'} [X'_1 \times_{C'} X'_2] = X' \times_{C'} X',$$

индуцирующий изоморфизм

$$\Psi'_s: X_{1s} \times X_{1s} \times X_{2s} \times X_{2s} \xrightarrow[\sim]{x_{1s} \times x'_{1s} \times x_{2s} \times x'_{2s} \mapsto x_{1s} \times x_{2s} \times x'_{1s} \times x'_{2s}} X_{1s} \times X_{2s} \times X_{1s} \times X_{2s}$$

для любой точки $s \in C'$. Легко видеть, что алгебраический класс

$$\begin{aligned} (\Psi'_s)_*(\text{cl}_{X_{1s} \times X_{1s}}(X_{1s} \times X_{1s}) \otimes \delta^{2,2}(X_{2s}) \\ + [(\delta_{X_{1s}})_*(\text{cl}_{X_{1s}}(e_1(s)))] \otimes [\text{cl}_{X_{2s} \times X_{2s}}(X_{2s} \times X_{2s})]) \end{aligned}$$

определяет алгебраический изоморфизм

$$\begin{aligned} H^4(X_s, \mathbb{Q}) &= H^4(X_{1s} \times X_{2s}, \mathbb{Q}) \\ &= [H^2(X_{1s}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{2s}, \mathbb{Q})] \oplus [H^0(X_{1s}, \mathbb{Q}) \otimes H^4(X_{2s}, \mathbb{Q})] \\ &\xrightarrow{\sim} [H^0(X_{1s}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{2s}, \mathbb{Q})] \oplus [H^2(X_{1s}, \mathbb{Q}) \otimes H^0(X_{2s}, \mathbb{Q})] \\ &= H^2(X_{1s} \times X_{2s}, \mathbb{Q}) = H^2(X_s, \mathbb{Q}). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Действительно, в силу (2.13) и формулы проекции изоморфизм (2.16) является композицией канонических морфизмов

$$\begin{aligned} &[H^2(X_{1s}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{2s}, \mathbb{Q})] \oplus [H^0(X_{1s}, \mathbb{Q}) \otimes H^4(X_{2s}, \mathbb{Q})] \\ &\xrightarrow[\sim]{(p'_{1s})^*} [[H^2(X_{1s}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{2s}, \mathbb{Q})] \oplus [H^0(X_{1s}, \mathbb{Q}) \otimes H^4(X_{2s}, \mathbb{Q})]] \\ &\quad \otimes [H^0(X_{1s}, \mathbb{Q}) \otimes H^0(X_{2s}, \mathbb{Q})] \\ &\xrightarrow[\sim]{(\Psi'_s)^*} [[H^2(X_{1s}, \mathbb{Q}) \otimes H^0(X_{1s}, \mathbb{Q})] \otimes [H^2(X_{2s}, \mathbb{Q}) \otimes H^0(X_{2s}, \mathbb{Q})]] \\ &\quad \oplus [[H^0(X_{1s}, \mathbb{Q}) \otimes H^0(X_{1s}, \mathbb{Q})] \otimes [H^4(X_{2s}, \mathbb{Q}) \otimes H^0(X_{2s}, \mathbb{Q})]] \\ &\xrightarrow[\sim]{\cup[\text{cl}_{X_{1s} \times X_{1s}}(X_{1s} \times X_{1s}) \otimes \delta^{2,2}(X_{2s}) + [(\delta_{X_{1s}})_*(\text{cl}_{X_{1s}}(e_1(s)))] \otimes [\text{cl}_{X_{2s} \times X_{2s}}(X_{2s} \times X_{2s})]]} \\ &[[H^2(X_{1s}, \mathbb{Q}) \otimes H^0(X_{1s}, \mathbb{Q})] \otimes [H^4(X_{2s}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{2s}, \mathbb{Q})]] \\ &\quad \oplus [[H^2(X_{1s}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{1s}, \mathbb{Q})] \otimes [H^4(X_{2s}, \mathbb{Q}) \otimes H^0(X_{2s}, \mathbb{Q})]] \\ &\xrightarrow[\sim]{(\Psi'_s)^*} [[H^2(X_{1s}, \mathbb{Q}) \otimes H^4(X_{2s}, \mathbb{Q})] \otimes [H^0(X_{1s}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{2s}, \mathbb{Q})]] \\ &\quad \oplus [[H^2(X_{1s}, \mathbb{Q}) \otimes H^4(X_{2s}, \mathbb{Q})] \otimes [H^2(X_{1s}, \mathbb{Q}) \otimes H^0(X_{2s}, \mathbb{Q})]] \\ &\xrightarrow[\sim]{(p'_{2s})^*} [H^0(X_{1s}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{2s}, \mathbb{Q})] \oplus [H^2(X_{1s}, \mathbb{Q}) \otimes H^0(X_{2s}, \mathbb{Q})]. \end{aligned}$$

Из (2.12)–(2.16) следует существование такого алгебраического цикла D'_2 коразмерности 2 на $X' \times_{C'} X'$, что алгебраический класс

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'_2 \stackrel{\text{def}}{=} \text{cl}_{X' \times_{C'} X'}(D'_2) &= \Psi'_* (\text{cl}_{X'_1 \times_{C'} X'_1}(X'_1 \times_{C'} X'_1) \cup \delta^{2,2}(X'_2) \\ &\quad + [(\delta_{X'_1})_*(\text{cl}_{X'_1}(e_1(C')))] \cup [\text{cl}_{X'_2 \times_{C'} X'_2}(X'_2 \times_{C'} X'_2)]) \in H^0(C', R^4 \tau'_* \mathbb{Q}) \end{aligned}$$

определяет изоморфизм локальных систем

$$R^4 \pi'_* \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} R^2 \pi'_* \mathbb{Q}. \quad (2.17)$$

Пусть $\overline{D'_2}$ – алгебраический цикл коразмерности 2 на Y , полученный из D'_2 замыканием компонент цикла D'_2 в топологии Зариского многообразия Y . Обозначим через $\Lambda_{2,2} \in H^0(C, R^4(\tau\sigma)_* \mathbb{Q})$ образ алгебраического класса $\mathcal{D}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \text{cl}_Y(\overline{D'_2})$ относительно канонического сюръективного краевого морфизма $H^4(Y, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^4(\tau\sigma)_* \mathbb{Q})$ рациональных структур Ходжа [12, следствие (15.14)]. Очевидно, что

$$\Lambda_{2,2}|_{C'} = \mathcal{D}'_2. \quad (2.18)$$

Используя (2.18), совместимость $\cup$ -произведений со спектральной последовательностью Лере $E_2^{p,q} = H^p(C, R^q(\tau\sigma)_* \mathbb{Q})$ [17, гл. 4, §6, п. 6.5] и алгоритм доказательства теоремы 2.3 в [8], можно продолжить (2.17) до композиции

$$R^4 \pi_* \mathbb{Q} \xrightarrow{(p_1\sigma)^*} R^4(\tau\sigma)_* \mathbb{Q} \xrightarrow{\cup \mathcal{D}_2} R^8(\tau\sigma)_* \mathbb{Q} \xrightarrow{(p_2\sigma)_*} R^2 \pi_* \mathbb{Q},$$

которая, в свою очередь, дает точную последовательность

$$H^1(C, R^4 \pi_* \mathbb{Q}) \xrightarrow{x \mapsto (p_2\sigma)_*[(p_1\sigma)^* x \cup \mathcal{D}_2]} H^1(C, R^2 \pi_* \mathbb{Q}) \rightarrow 0. \quad (2.19)$$

В силу следствия из п. 1.12, двойственности Пуанкаре и (2.19) имеется изоморфизм

$$H^5(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{x \mapsto (p_2\sigma)_*[(p_1\sigma)^* x \cup \mathcal{D}_2]} H^3(X, \mathbb{Q}).$$

Формула проекции влечет

$$\begin{aligned} (p_2\sigma)_*[(p_1\sigma)^* x \cup \mathcal{D}_2] &= [\text{pr}_2 \iota\sigma]_*([\text{pr}_1 \iota\sigma]^* x \cup \mathcal{D}_2) \\ &= \text{pr}_{2*}(\iota\sigma)_*[(\iota\sigma)^* \text{pr}_1^* x \cup \mathcal{D}_2] = \text{pr}_{2*}(\text{pr}_1^* x \cup (\iota\sigma)_* \mathcal{D}_2). \end{aligned}$$

Поэтому алгебраический класс $(\iota\sigma)_* \mathcal{D}_2 \in H^6(X \times X, \mathbb{Q})$ определяет алгебраический изоморфизм

$$H^5(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^3(X, \mathbb{Q}).$$

Следовательно, гипотеза $B(X)$ верна.

§ 3. Замечания и следствия

3.1. ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $\pi_2: X_2 \rightarrow C$ – проективное семейство КЗ-поверхностей (возможно, с вырождениями) над гладкой проективной кривой C . Существует такое счетное подмножество $\Delta_{\text{countable}} \hookrightarrow C$, что функция $s \mapsto \text{rank NS}(X_{2,s})$ постоянна на множестве $C \setminus \Delta_{\text{countable}}$.

Действительно, используя замену базы (индуцированную некоторым разветвленным накрытием $\tilde{C} \rightarrow C$) и лемму из п. 1.1, мы можем (и будем) считать, что группа G_2 связна. По теореме Делиня для любой точки $s \in C$ вне некоторого счетного подмножества $\Delta_{\text{countable}}$ группа G_2 – нормальная подгруппа в группе Ходжа $\text{Hg}(X_{2s})$ поверхности X_{2s} [11, теорема 7.3]. Для таких точек s (называемых *общими в смысле Ходжа*) согласно [16, следствие 4.1.1] и теореме Лефшеца о дивизорах имеем

$$\begin{aligned} H^2(X_{2s}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C', s)} &= H^2(X_{2s}, \mathbb{Q})^{G_2} \hookrightarrow \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s}) \\ &= H^2(X_{2s}, \mathbb{Q})^{\text{Hg}(X_{2s})} \hookrightarrow H^2(X_{2s}, \mathbb{Q})^{G_2}, \end{aligned}$$

поэтому $H^2(X_{2s}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C', s)} = \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})$ и, следовательно, $\text{rank NS}(X_{2s})$ равен $\dim_{\mathbb{Q}} H^0(C', R^2\pi'_{2*}\mathbb{Q})$ и не зависит от выбора точки $s \in C \setminus \Delta_{\text{countable}}$.

Это обстоятельство позволяет заменять выражение “точка, общая в смысле Ходжа” на выражение “общая геометрическая точка”, где “общность” точки означает ее принадлежность множеству $C \setminus \Delta_{\text{countable}}$ для некоторого счетного подмножества $\Delta_{\text{countable}} \hookrightarrow C$.

3.2. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\pi_1: X_1 \rightarrow C$ – эллиптическая поверхность, и пусть $\pi_2: X_2 \rightarrow C$ – гладкое проективное семейство КЗ-поверхностей, $X = X_1 \times_C X_2$. Предположим, что для общего геометрического слоя X_{2s} число $22 - \text{rank NS}(X_{2s})$ не делится на 4. Тогда верна стандартная гипотеза В(X).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы из п. 1.1 можно считать, что $\pi_1: X_1 \rightarrow C$ – потенциально непостоянное эллиптическое расслоение с полустабильными слоями, $\pi_2: X_2 \rightarrow C$ – потенциально непостоянное гладкое семейство КЗ-поверхностей, алгебраическая группа G_2 связна.

Пусть $s \in C'$ – общая точка в смысле Ходжа и $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}$ – ортогональное дополнение к $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})$ в $H^2(X_{2s}, \mathbb{Q})$ относительно канонического билинейного спаривания

$$H^2(X_{2s}, \mathbb{Q}) \times H^2(X_{2s}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{x \times y \mapsto x \cup y} H^4(X_{2s}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}(-2) \xrightarrow{\sim (2\pi i)^2} \mathbb{Q}.$$

Из описания Ю.Г. Зархиным группы $\text{Hg}(X_{2s})$ известно, что $\text{Hg}(X_{2s})$ -модуль $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}$ простой и $E = \text{End}_{\text{Hg}(X_{2s})} \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}$ – вполне вещественное поле E_0 или мнимое квадратичное расширение вполне вещественного поля E_0 [16, теоремы 1.4.1, 1.6, 1.5.1]. Пусть

$$\Phi: \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp} \times \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp} \xrightarrow{x \times y \mapsto \alpha} E$$

– спаривание, определенное формулой

$$\langle ex, y \rangle = \text{tr}_{E/\mathbb{Q}}(e\alpha) \quad \forall e \in E.$$

Если $E = E_0$, то группа $\text{Hg}(X_{2s})$ полупростая [16, замечание 1.5.3, b],

$$\text{Hg}(X_{2s}) = \text{Res}_{E_0/\mathbb{Q}}(\text{SO}(\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}, \Phi)),$$

где $\text{Res}_{E_0/\mathbb{Q}}(\text{SO}(\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}, \Phi))$ получается из E_0 -группы $\text{SO}(\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}, \Phi)$ ограничением поля скаляров до $\mathbb{Q}$ [16, теорема 2.2.1]. Лемма Шура и равенство

$$E \otimes \overline{\mathbb{Q}} = \text{End}_{\text{Hg}(X_{2s})} \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp} \otimes \overline{\mathbb{Q}}$$

влекут разложение

$$\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp} \otimes \overline{\mathbb{Q}} = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r,$$

где $r = [E : \mathbb{Q}]$, V_k – неприводимые попарно неизоморфные ортогональные $\text{Hg}(X_{2s}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ -модули, образ канонического морфизма $\text{Hg}(X_{2s}) \otimes \overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{GL}(V_k)$ совпадает с группой $\text{SO}(V_k)$, а группа Галуа $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ транзитивно переставляет $V_1, \dots, V_r$. Следовательно,

$$\text{Hg}(X_{2s}) \otimes \overline{\mathbb{Q}} \simeq \prod_{k=1}^r \text{SO}(V_k)$$

является полупростой $\overline{\mathbb{Q}}$ -группой типа

$$\begin{aligned} B_n \times \cdots \times B_n, & \quad \text{если} \quad \dim V_k = 2n + 1, \quad n \geq 2, \\ D_n \times \cdots \times D_n, & \quad \text{если} \quad \dim V_k = 2n, \quad n \geq 3, \\ A_1 \times \cdots \times A_1, & \quad \text{если} \quad \dim V_k = 3 \quad \text{или} \quad \dim V_k = 4. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Если $\dim V_k \notin \{3, 4\}$, то в силу (3.1) алгебра Ли $\text{Lie Hg}(X_{2s}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ не имеет простых факторов типа A_1 и результат следует из основной теоремы.

С другой стороны, $\dim V_k \neq 4$ в силу предположения о том, что число $22 - \text{rank NS}(X_{2s})$ не делится на 4.

Если $\dim V_k = 3$, то (в обозначениях из п. 1.3) образ $\text{Lie } G_2 \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ в простой алгебре Ли $\text{Lie SO}(V_k)$ типа A_1 является идеалом (поскольку s – общая точка в смысле Ходжа); следовательно, этот идеал равен 0 или $\text{Lie SO}(V_k)$. В первом случае мы приходим к противоречию с тем фактом, что

$$H^2(X_{2s}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C', s)} = H^2(X_{2s}, \mathbb{Q})^{G_2} \hookrightarrow \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})$$

(согласно [16, следствие 4.1.1]), и поэтому $[\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}]^{G_2} = 0$. Значит,

$$\text{Im}[\text{Lie } G_2 \otimes \overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{Lie SO}(V_k)] = \text{Lie SO}(V_k).$$

В частности, V_k – простой $\text{Lie } G_2 \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ -модуль для всех k . Если $H^0(C', R^3 \pi'_* \mathbb{Q}) \neq 0$, то, используя аргументы из п. 1.8, покажем, что пространство $H^1(X_{1s}, \mathbb{Q})$ – неприводимый $\pi_1(C', s)$ -подмодуль полупростого $\pi_1(C', s)$ -модуля $H^2(X_{2s}, \mathbb{Q}) = \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s}) \oplus \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}$; следовательно, 2-мерное пространство $H^1(X_{1s}, \mathbb{Q}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ является неприводимым $\text{Lie } G_2 \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ -подмодулем прямой суммы ортогональных простых 3-мерных $\text{Lie } G_2 \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ -модулей V_k , и мы приходим к противоречию. Поэтому $H^0(C', R^3 \pi'_* \mathbb{Q}) = 0$ и результат следует из алгоритма, приведенного в пп. 1.3–2.5.

Далее мы предполагаем, что $E \neq E_0$. Тогда

$$\text{Hg}(X_{2s}) = \text{Res}_{E_0/\mathbb{Q}}(\text{U}(\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}, \Phi)),$$

где $U(NS_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}, \Phi)$ – унитарная группа E -векторного пространства $NS_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}$ относительно эрмитовой формы Φ [16, теорема 2.3.1].

Поскольку E_0 – вполне вещественное поле, то алгебра $E_0 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ суть прямая сумма полей $\mathbb{R}_{\sigma} = \mathbb{R}$, индексированных вложениями $\sigma: E_0 \hookrightarrow \mathbb{R}$, где

$$\mathbb{R}_{\sigma} = \{a \in E_0 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \mid ea = \sigma(e)a \text{ для } e \in E_0\} = E_0 \otimes_{E_0, \sigma} \mathbb{R}.$$

Поэтому $E_0 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ -модуль $NS_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = NS_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp} \otimes_{E_0} (E_0 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$ становится прямой суммой таких $\mathbb{R}_{\sigma}$ -векторных пространств W_{σ} , что

$$\begin{aligned} W_{\sigma} &= \mathbb{R}_{\sigma} NS_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \{x \in NS_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \mid ex = \sigma(e)x, e \in E_0\} \\ &= NS_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp} \otimes_{E_0, \sigma} \mathbb{R} \end{aligned}$$

и $\dim_{\mathbb{R}} W_{\sigma} = \dim_{E_0} NS_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}$ для любого σ . Аналогично, $E_0 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ -алгебра Ли $\text{Lie Hg}(X_{2s}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ становится прямой суммой таких $\mathbb{R}_{\sigma}$ -алгебр Ли $hg_{\sigma} \subset \text{End}_{\mathbb{R}} W_{\sigma}$, что

$$\begin{aligned} hg_{\sigma} &= \mathbb{R}_{\sigma} \text{Lie Hg}(X_{2s}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \{u \in \text{Lie Hg}(X_{2s}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \mid eu = \sigma(e)u, e \in E_0\} \\ &= \text{Lie Hg}(X_{2s}) \otimes_{E_0, \sigma} \mathbb{R} \end{aligned}$$

и $\dim_{\mathbb{R}} hg_{\sigma} = \dim_{E_0} \text{Lie Hg}(X_{2s})$.

Более того, $\text{Lie Hg}(X_{2s}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ -модуль $NS_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ является прямой суммой точных hg_{σ} -модулей W_{σ} , и

$$\text{End}_{hg_{\sigma}} W_{\sigma} = \mathbb{C}. \quad (3.2)$$

В частности, hg_{σ} – неприводимая подалгебра в $\text{End}_{\mathbb{R}} W_{\sigma}$ [16, замечание 1.9.4].

Мы утверждаем, что существует разложение

$$W_{\sigma} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = V_{\sigma} \oplus \overset{\vee}{V}_{\sigma}, \quad (3.3)$$

где V_{σ} – неприводимый $hg_{\sigma} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ -модуль.

Действительно, в силу (3.2) и леммы Шура имеется разложение $W_{\sigma} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = V_{\sigma} \oplus U_{\sigma}$, где V_{σ} и U_{σ} – неизоморфные неприводимые $hg_{\sigma} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ -модули. Введем обозначения

$$V_{\sigma} = E(\omega_{\sigma}^{(1)})(\chi_{\sigma}^{(1)}), \quad U_{\sigma} = E(\omega_{\sigma}^{(2)})(\chi_{\sigma}^{(2)}),$$

где $\omega_{\sigma}^{(1)}$ – старший вес V_{σ} , рассматриваемого как модуль над полупростой частью $[hg_{\sigma} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}]^{\text{ss}}$ алгебры Ли $hg_{\sigma} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, и $\chi_{\sigma}^{(1)}$ – вес $\text{Cent}(hg_{\sigma} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ -модуля V_{σ} ; аналогичные обозначения используются для U_{σ} .

Напомним, что для невырожденной эрмитовой формы Ψ на $(n+1)$ -мерном комплексном векторном пространстве $V_{\mathbb{C}}$ существует каноническая точная последовательность вещественных групп Ли [20, гл. IX, § 6, предложение 3]

$$1 \rightarrow \text{SU}(\Psi) \rightarrow \text{U}(\Psi) \rightarrow \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\} \rightarrow 1,$$

где $\text{SU}(\Psi)$ – компактная вещественная форма комплексной группы Ли $\text{SL}(V_{\mathbb{C}})$ типа A_n [21, гл. IX, § 4, табл. I]. Следовательно, $\chi_{\sigma}^{(1)} \neq 0$ или $\chi_{\sigma}^{(2)} \neq 0$.

Мы можем (и будем) считать, что $\chi_\sigma^{(1)} \neq 0$. Тогда

$$[\mathrm{Sym}^2(V_\sigma)]^{hg_\sigma \otimes \mathbb{R} \mathbb{C}} = [[\mathrm{Sym}^2(E(\omega_\sigma^{(1)}))](2\chi_\sigma^{(1)})]^{hg_\sigma \otimes \mathbb{R} \mathbb{C}} = 0. \quad (3.4)$$

Поскольку ограничение формы поляризации на неприводимую $\mathbb{R}$ -структуру Ходжа W_σ веса 2 невырождено и hg_σ -инвариантно [16, пп. 0.3.1.1, 0.3.1.2, 0.3.2], то разложение

$$\begin{aligned} [\mathrm{Sym}^2(W_\sigma \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})]^{hg_\sigma \otimes \mathbb{R} \mathbb{C}} &= [\mathrm{Sym}^2(V_\sigma \oplus U_\sigma)]^{hg_\sigma \otimes \mathbb{R} \mathbb{C}} \\ &= [\mathrm{Sym}^2(V_\sigma)]^{hg_\sigma \otimes \mathbb{R} \mathbb{C}} \oplus [V_\sigma \otimes_{\mathbb{C}} U_\sigma]^{hg_\sigma \otimes \mathbb{R} \mathbb{C}} \oplus [\mathrm{Sym}^2(U_\sigma)]^{hg_\sigma \otimes \mathbb{R} \mathbb{C}}, \end{aligned}$$

лемма Шура и соотношение (3.4) показывают, что имеется ненулевой элемент $\mathbb{C}$ -пространства $[V_\sigma \otimes_{\mathbb{C}} U_\sigma]^{hg_\sigma \otimes \mathbb{R} \mathbb{C}}$, определяющий некоторый изоморфизм $hg_\sigma \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ -модулей $U_\sigma \xrightarrow{\sim} V_\sigma$. Формула (3.3) доказана.

По условию следствия из п. 3.2 целое число $22 - \mathrm{rank} \mathrm{NS}(X_{2s})$ не делится на 4. Из (3.3) следует, что $\dim_{\mathbb{C}} V_\sigma \neq 2$ и $hg_\sigma \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ не имеет простого фактора типа A_1 . Следовательно, гипотеза $B(X)$ верна по основной теореме. Следствие доказано.

3.3. ЗАМЕЧАНИЕ. Предположим, что для общего геометрического слоя X_{2s} число $22 - \mathrm{rank} \mathrm{NS}(X_{2s})$ не делится на 4. Если семейство $\pi_2: X_2 \rightarrow C$ потенциально непостоянно, то оно жесткое в силу [22, следствие 1].

3.4. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $X_2 \rightarrow C$ – гладкое проективное семейство КЗ-поверхностей над гладкой проективной кривой. Предположим, что для общего геометрического слоя X_{2s} группа Ходжа $\mathrm{Hg}(X_{2s})$ не имеет геометрических простых факторов типа A_1 . Если X – такое гладкое проективное четырехмерное многообразие, что общий схемный слой некоторого морфизма $f: X \rightarrow X_2$ является эллиптической кривой с якобиевой структурой уровня $N \geq 6$, то гипотеза $B(X)$ верна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы из п. 1.1 можно считать, что $f: X \rightarrow X_2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} S$ индуцирует абелеву схему $f': X' \rightarrow S'$ с якобиевой структурой уровня $N \geq 6$ над открытой непустой подсхемой $S' \hookrightarrow S$. Пусть $\mathcal{A}_{1,N} \rightarrow \mathcal{M}_{1,N}$ – универсальное семейство эллиптических кривых с якобиевой структурой уровня N . Тогда имеется такой единственный морфизм $\varphi': S' \rightarrow \mathcal{M}_{1,N}$, что $f': X' \rightarrow S'$ совпадает с канонической проекцией $\mathcal{A}_{1,N} \times_{\mathcal{M}_{1,N}} S' \rightarrow S'$.

Если $\varphi'(S')$ – точка, то $X' \xrightarrow{\sim} S' \times E$ для подходящей эллиптической кривой E и, следовательно, X бирационально эквивалентно произведению $S \times E$. Поскольку $S = X_2 \rightarrow C$ – гладкое проективное семейство КЗ-поверхностей, гипотеза $B(S)$ верна в силу [8, теорема 3.1]; с другой стороны, $B(E)$ верна и $B(S) \& B(E) \Rightarrow B(S \times E)$ согласно [5, следствие 2.5], значит, $B(X)$ верна в силу леммы из п. 1.1.

Далее мы предполагаем, что $\varphi': S' \rightarrow \mathcal{M}_{1,N}$ – доминантный морфизм.

Обозначим через $\overline{\mathcal{M}}_{1,N}$ гладкую проективную модель кривой $\mathcal{M}_{1,N}$. Хорошо известно, что род кривой $\overline{\mathcal{M}}_{1,N}$ есть

$$g(\overline{\mathcal{M}}_{1,N}) = 1 + \frac{(N-6)}{12N} \frac{N^3}{2} \prod_{p|N} (1 - p^{-2}) = 1 + \frac{(N-6)}{24} N^2 \prod_{p|N} (1 - p^{-2}),$$

где p пробегает множество всех простых чисел, делящих N [23, гл. 1, § 1.6, (1.6.2)–(1.6.4)]; в частности,

$$g(\overline{\mathcal{M}_{1,N}}) \geq 1 \quad \forall N \geq 6. \quad (3.5)$$

Поскольку общий схемный слой композиции

$$X \xrightarrow{f} X_2 \xrightarrow{\pi_2} C$$

является гладким трехмерным многообразием, имеется такое непустое открытое по Зарискому подмножество $U \subset C$, что для любой точки $s \in U$ схемный слой X_s является гладким многообразием со структурой $X_s \rightarrow X_{2s}$ эллиптического трехмерного многообразия над гладкой КЗ-поверхностью X_{2s} . Более того, общий схемный слой морфизма $X_s \rightarrow X_{2s}$ имеет якобиеву структуру уровня $N \geq 6$, которая, в свою очередь, определяет каноническое рациональное отображение $X_{2s} \dashrightarrow \overline{\mathcal{M}_{1,N}}$. Поскольку $H^1(X_{2s}, \mathbb{Q}) = 0$ для всех $s \in U$, из (3.5) и условия $N \geq 6$ следствия вытекает, что КЗ-поверхность X_{2s} отображается в точку при рациональном отображении $X_{2s} \dashrightarrow \overline{\mathcal{M}_{1,N}}$. В частности, структура $X_s \rightarrow X_{2s}$ эллиптического трехмерного многообразия постоянна: $X_s = E_s \times X_{2s}$ для подходящей эллиптической кривой E_s . Семейство $(E_s)_{s \in U}$ определяет относительно минимальную эллиптическую поверхность X_1 над C , так что для всех $s \in U$ имеем $E_s = X_{1s}$. Поэтому X бирационально изоморфно многообразию $X_1 \times_C X_2$. Следовательно, гипотеза $B(X)$ верна в силу леммы из п. 1.1 и основной теоремы. Следствие доказано.

Список литературы

1. A. Grothendieck, “Standard conjectures on algebraic cycles”, *Algebraic geometry*, Internat. Colloq. (Bombay, 1968), Oxford Univ. Press, London, 1969, 193–199.
2. D. I. Lieberman, “Numerical and homological equivalence of algebraic cycles on Hodge manifolds”, *Amer. J. Math.*, **90**:2 (1968), 366–374.
3. С. Г. Танкеев, “О стандартной гипотезе типа Лефшеца для комплексных проективных трехмерных многообразий. II”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:5 (2011), 177–194; англ. пер.: S. G. Tankeev, “On the standard conjecture of Lefschetz type for complex projective threefolds. II”, *Izv. Math.*, **75**:5 (2011), 1047–1062.
4. S. L. Kleiman, “The standard conjectures”, *Motives*, Part I (Seattle, WA, USA, 1991), Proc. Sympos. Pure Math., **55**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, 3–20.
5. S. L. Kleiman, “Algebraic cycles and the Weil conjectures”, *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North-Holland, Amsterdam; Masson, Paris, 1968, 359–386.
6. С. Г. Танкеев, “Моноидальные преобразования и гипотезы об алгебраических циклах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71**:3 (2007), 197–224; англ. пер.: S. G. Tankeev, “Monoidal transformations and conjectures on algebraic cycles”, *Izv. Math.*, **71**:3 (2007), 629–655.
7. G. Kempf, F. F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat, *Toroidal embeddings. I*, Lecture Notes in Math., **339**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1973.
8. С. Г. Танкеев, “О стандартной гипотезе типа Лефшеца для комплексных проективных трехмерных многообразий”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:1 (2010), 175–196; англ. пер.: S. G. Tankeev, “On the standard conjecture of Lefschetz type for complex projective threefolds”, *Izv. Math.*, **74**:1 (2010), 175–196.

9. W. Schmid, "Variation of Hodge structure: The singularities of the period mapping", *Invent. Math.*, **22**:3–4 (1973), 211–319.
10. П. Делинь, "Теория Ходжа. II", *Математика. Сб. пер.*, **17**:5 (1973), 3–56; пер. с франц.: P. Deligne, "Théorie de Hodge. II", *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **40**:1 (1971), 5–57.
11. Ю. Г. Зархин, "Веса простых алгебр Ли в когомологиях алгебраических многообразий", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48**:2 (1984), 264–304; англ. пер.: Yu. G. Zarkhin, "Weights of simple Lie algebras in the cohomology of algebraic varieties", *Math. USSR-Izv.*, **24**:2 (1985), 245–281.
12. S. Zucker, "Hodge theory with degenerating coefficients: L_2 cohomology in the Poincaré metric", *Ann. of Math.* (2), **109**:3 (1979), 415–476.
13. С. Н. Clemens, "Degeneration of Kähler manifolds", *Duke Math. J.*, **44**:2 (1977), 215–290.
14. P. Deligne, "Théorie de Hodge. III", *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **44**:1 (1974), 5–77.
15. Н. Бурбаки, *Элементы математики. Алгебра*, гл. 10: Гомологическая алгебра, Наука, М., 1987; пер. с франц.: N. Bourbaki, *Éléments de mathématique*, Algèbre. Ch. 10: Algèbre homologique, Masson, Paris, 1980.
16. Yu. G. Zarhin, "Hodge groups of K3 surfaces", *J. Reine Angew. Math.*, **341** (1983), 193–220.
17. Г. Э. Бредон, *Теория пучков*, Наука, М., 1988; пер. с англ.: G. E. Bredon, *Sheaf theory*, McGraw-Hill, New York–Toronto–London, 1967.
18. G. Shimura, "Reduction of algebraic varieties with respect to a discrete valuation of the basic field", *Amer. J. Math.*, **77**:1 (1955), 134–176.
19. Дж. Милн, *Этальные когомологии*, Мир, М., 1983; пер. с англ.: J. S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Math. Ser., **33**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1980.
20. Н. Бурбаки, *Элементы математики. Алгебра*, гл. VII–IX, Наука, М., 1966; пер. с фр.: N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Algèbre*, Ch. IX. *Formes sesquilineaires et formes quadratiques*, Hermann, Paris, 1959.
21. С. Хелгасон, *Дифференциальная геометрия и симметрические пространства*, Мир, М., 1964; пер. с англ.: S. Helgason, *Differential geometry and symmetric spaces*, Pure Appl. Math., **12**, Academic Press, New York–London, 1962.
22. М.-Н. Saito, S. Zucker, "Classification of non-rigid families of K3 surfaces and a finiteness theorem of Arakelov type", *Math. Ann.*, **289**:1 (1991), 1–31.
23. Г. Шимура, *Введение в арифметическую теорию автоморфных функций*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: G. Shimura, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971.

С. Г. ТАНКЕЕВ (S. G. TANKEEV)
 Владимирский государственный университет
 им. А. Г. и Н. Г. Столетовых
 E-mail: tankeev@vlsu.ru

Поступило в редакцию
 08.08.2011