Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Хренников, Симплектическая геометрия на бесконечномерном фазовом пространстве и асимптотическое представление квантовых средних гауссовыми функциональными интегралами, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2008, том 72, выпуск 1, 137–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/im786>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 14:04:40

УДК 511.34

А. Ю. Хренников

Симплектическая геометрия на бесконечномерном фазовом пространстве и асимптотическое представление квантовых средних гауссовыми функциональными интегралами

Изучается связь между математическими структурами статистической механики на бесконечномерном фазовом пространстве (обозначаемом через Ω) и квантовой механики. Показано, что квантовые средние (задаваемые формулой следа фон Неймана) могут быть получены как главный член асимптотического разложения гауссовых функциональных интегралов по малому параметру α , где α – дисперсия гауссовой меры. Симплектическая структура бесконечномерного фазового пространства играет ключевую роль в наших рассуждениях. В частности, гауссовы меры, индуцирующие квантовые средние, должны быть совместимы с симплектической структурой. Уравнения Шрёдингера, Гейзенберга и фон Неймана получаются как образы гамильтоновой динамики на Ω .

Библиография: 10 наименований.

§ 1. Введение

Хорошо известно, что в физике параллельно (и практически независимо друг от друга) используются две математические модели статистического характера: классическая статистическая механика с фазовым пространством состояний $\Omega_{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и квантовая механика с комплексным гильбертовым пространством состояний. Обычно отмечают различия между классическими и квантовыми моделями, но цель настоящей статьи – показать, что между этими математическими структурами имеется тесная связь. Мы увидим, что если вместо конечномерного фазового пространства Ω_{2n} рассмотреть бесконечномерное фазовое пространство $\Omega = H \times H$, где H – вещественное (сепарабельное) гильбертово пространство, то основные математические структуры квантового формализма могут быть получены из асимптотических разложений соответствующих структур классической статистической механики на фазовом пространстве $\Omega = H \times H$. Надлежащий малый параметр задается дисперсией гауссовой меры на $\Omega = H \times H$. Симплектическая структура бесконечномерного фазового пространства играет ключевую роль в нашем подходе. В частности, гауссовы меры, индуцирующие квантовые средние, должны быть совместимы с симплектической структурой. Уравнения Шрёдингера, Гейзенберга и фон Неймана получаются как образы гамильтоновой динамики на Ω .

Отметим, что настоящая статья носит чисто математический характер. Мы не претендуем на физическую интерпретацию полученных асимптотических соотношений между математическими формализмами классической статистической механики на бесконечномерном фазовом пространстве и квантовой механики (см. соответствующие обсуждения в [1]). В работе [1] мы для простоты изучали (на физическом уровне строгости¹) асимптотические разложения гауссовых интегралов на вещественном гильбертовом пространстве H , не принимая во внимание структуру фазового пространства. Поэтому мы получили не формулу следа фон Неймана [2] на комплексном гильбертовом пространстве, а лишь ее вещественный аналог. Рассмотрение бесконечномерной симплектической структуры в настоящей работе порождает математические трудности, но зато дает правильную квантовую формулу следа для средних значений.

Настоящая работа (как и работы [1], [3], [4]) посвящена не квантованию систем с бесконечным числом степеней свободы [5], а асимптотическому “*деквантованию*” систем с конечным числом степеней свободы, поэтому она не имеет никакого отношения к так называемому вторичному квантованию [5].

Наше основное нововведение – это рассмотрение асимптотических разложений интегралов на бесконечномерном фазовом пространстве относительно дисперсии как малого параметра модели. Такая асимптотическая конструкция нетривиальна для неквадратичных функционалов. Она также влечет, что динамическое уравнение – это нелинейное уравнение Шрёдингера, получающееся из общей системы бесконечномерных гамильтоновых уравнений. Обычные линейные уравнения отвечают квадратичным гамильтонианам (см. [5]).

§ 2. Гамильтонова механика на конечномерном фазовом пространстве и ее комплексное представление

Рассмотрим обычное классическое фазовое пространство $\Omega = Q \times P$, где $Q = P = \mathbb{R}^n$. Состояния представляются точками $\psi = (q, p) \in \Omega$, а эволюция состояний описывается гамильтоновыми уравнениями $\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}$, $\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}$, где $\mathcal{H}(q, p)$ – гамильтониан (вещественнозначная функция на фазовом пространстве Ω).

Рассмотрим скалярное произведение $(x, y) = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ на $\mathbb{R}^n$ и определим скалярное произведение на Ω формулой $(\psi_1, \psi_2) = (q_1, q_2) + (p_1, p_2)$. Нас будут интересовать квадратичные гамильтонианы $\mathcal{H}(q, p) = \frac{1}{2}(\mathbf{H}\psi, \psi)$, где $\mathbf{H}: \Omega \rightarrow \Omega$ – симметрический оператор. Заметим, что любой ($\mathbb{R}$ -линейный) оператор $A: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ можно записать в виде

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

где $A_{11}: Q \rightarrow Q$, $A_{12}: P \rightarrow Q$, $A_{21}: Q \rightarrow P$, $A_{22}: P \rightarrow P$. Линейный оператор $A: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ является симметрическим, если $A_{11}^* = A_{11}$, $A_{22}^* = A_{22}$, $A_{12}^* = A_{21}$,

¹Чтобы получить правильную математическую теорему об асимптотическом разложении, необходимо модифицировать рассматриваемые в [1] функциональные пространства, пользуясь предположениями из настоящей работы.

$A_{21}^* = A_{12}$. Поэтому квадратичные гамильтонианы записываются в виде

$$\mathcal{H}(q, p) = \frac{1}{2}[(\mathbf{H}_{11}q, q) + 2(\mathbf{H}_{12}p, q) + (\mathbf{H}_{22}p, p)].$$

Соответствующие им гамильтоновы уравнения линейны:

$$\dot{q} = \mathbf{H}_{21}q + \mathbf{H}_{22}p, \quad \dot{p} = -(\mathbf{H}_{11}q + \mathbf{H}_{12}p).$$

Как обычно, зададим каноническую симплектическую структуру на фазовом пространстве $\Omega = Q \times P$ с помощью *симплектического оператора*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь блоки “ ± 1 ” означают $(n \times n)$ -матрицы с ± 1 на диагонали. Тогда гамильтоновы уравнения можно записать в операторном виде:

$$\dot{\psi} \equiv \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = J\mathbf{H}\psi. \quad (1)$$

Таким образом,

$$\psi(t) = U_t\psi, \quad \text{где} \quad U_t = e^{J\mathbf{H}t}. \quad (2)$$

Отображение $U_t\psi$ есть линейный гамильтонов поток на фазовом пространстве Ω .

Далее мы будем рассматривать только J -инвариантные квадратичные формы. Легко видеть, что J -инвариантность квадратичной формы $f_A(\psi) = (A\psi, \psi)$, где $A: \Omega \rightarrow \Omega$ – линейный симметрический оператор, эквивалентна тому, что A коммутирует с симплектическим оператором J . Рассмотрим множество $\mathcal{L}_{\text{symp}} \equiv \mathcal{L}_{\text{symp}}(\Omega)$ всех линейных операторов $A: \Omega \rightarrow \Omega$, коммутирующих с симплектическим оператором:

$$AJ = JA. \quad (3)$$

Это множество есть подалгебра в алгебре $\mathcal{L}(\Omega)$ всех линейных операторов. Операторы из этой подалгебры будем называть *J -коммутирующими*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. $A \in \mathcal{L}_{\text{symp}}(\Omega) \iff A = \begin{pmatrix} D & S \\ -S & D \end{pmatrix}$.

Заметим, что оператор $A \in \mathcal{L}_{\text{symp}}(\Omega)$ является симметрическим тогда и только тогда, когда $D^* = D$ и $S^* = -S$. Поэтому всякий симметрический J -коммутирующий оператор на фазовом пространстве задается парой операторов (D, S) , где D симметричен, а S антисимметричен. Такой оператор индуцирует квадратичную форму

$$f_A(\psi) = (A\psi, \psi) = (Dq, q) + 2(Sp, q) + (Dp, p).$$

Рассмотрим оператор $\mathbf{H} \in \mathcal{L}_{\text{symp}}(\Omega)$, т. е. $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} R & T \\ -T & R \end{pmatrix}$. Он задает квадратичный гамильтониан $\mathcal{H}(q, p) = \frac{1}{2}(\mathbf{H}\psi, \psi)$, который можно записать в виде

$$\mathcal{H}(q, p) = \frac{1}{2}[(Rp, p) + 2(Tp, q) + (Rq, q)],$$

где $R^* = R$ и $T^* = -T$. Соответствующие гамильтоновы уравнения имеют вид

$$\dot{q} = Rp - Tq, \quad \dot{p} = -(Rq + Tp). \quad (4)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Если гамильтониан J -инвариантен, то гамильтонов поток U_t (см. (2)) состоит из J -коммутирующих операторов: $U_t J = J U_t$.

ПРИМЕР 2.1 (одномерный J -инвариантный гармонический осциллятор). Пусть $\mathcal{H}(q, p) = \frac{1}{2} [\frac{p^2}{m} + mk^2 q^2]$ (мы обозначаем частоту через k , поскольку через ψ уже обозначена точка фазового пространства). Чтобы получить J -инвариантный гамильтониан, рассмотрим случай, когда $\frac{1}{m} = mk^2$. В этом случае $m = \frac{1}{k}$ и $\mathcal{H}(q, p) = \frac{k}{2} [p^2 + q^2]$, а гамильтоновы уравнения принимают вид $\dot{q} = kp$, $\dot{p} = -kq$. Они отвечают симметрической J -коммутирующей матрице $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$.

Определим симплектическую форму на фазовом пространстве формулой

$$w(\psi_1, \psi_2) = (\psi_1, J\psi_2). \quad (5)$$

Таким образом, $w(\psi_1, \psi_2) = (p_2, q_1) - (p_1, q_2)$ для $\psi_j = \{q_j, p_j\}$, $j = 1, 2$. Это кососимметрическая билинейная форма.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть A – симметрический оператор. Имеем $A \in \mathcal{L}_{\text{symp}}(\Omega)$ тогда и только тогда, когда A симметричен относительно симплектической формы:

$$w(A\psi_1, \psi_2) = w(\psi_1, A\psi_2). \quad (6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1 (келерова структура). Мы начали изложение теории не для произвольной симплектической формы на Ω , а для канонической симплектической формы (5), отвечающей скалярному произведению (римановой метрике) на Ω . Это позволяет канонически ввести эрмитову метрику на комплексной реализации Ω_c пространства Ω . Таким образом, мы с самого начала рассматриваем не произвольное симплектическое многообразие, а келерово многообразие. При этом J -инвариантность естественно возникает как условие совместимости римановой метрики и симплектической структуры.

Введем на фазовом пространстве Ω комплексную структуру: $\Omega_c = Q \oplus iP$. Имеем $i\psi = -p + iq = -J\psi$. При этом $\mathbb{R}$ -линейный оператор $A: \Omega_c \rightarrow \Omega_c$ является $\mathbb{C}$ -линейным тогда и только тогда, когда $A(i\psi) = iA\psi$, что эквивалентно требованию $A \in \mathcal{L}_{\text{symp}}(\Omega)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Множество $\mathcal{L}(\Omega_c)$ всех $\mathbb{C}$ -линейных операторов совпадает с множеством $\mathcal{L}_{\text{symp}}(\Omega)$ всех J -коммутирующих операторов.

Введем на Ω_c комплексное скалярное произведение (эрмитову метрику; см. замечание 2.1) посредством $\mathbb{C}$ -продолжения вещественного скалярного произведения:

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \langle q_1 + ip_1, q_2 + ip_2 \rangle = (q_1, q_2) + (p_1, p_2) + i((p_1, q_2) - (p_2, q_1)).$$

Таким образом, $\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = (\psi_1, \psi_2) - iw(\psi_1, \psi_2)$, где w – симплектическая форма. Это каноническая эрмитова метрика на келеровом многообразии Ω .

$\mathbb{C}$ -линейный оператор A симметричен относительно комплексного скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ тогда и только тогда, когда он симметричен относительно обеих вещественных билинейных форм $(\cdot, \cdot)$ и $w(\cdot, \cdot)$. Поскольку для $A \in \mathcal{L}_{\text{symp}}(\Omega)$ первое влечет второе, мы видим, что $\mathbb{C}$ -линейный оператор на Ω_c симметричен тогда и только тогда, когда он симметричен на вещественном пространстве Ω .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. *Множество $\mathcal{L}_s(\Omega_c)$ всех $\mathbb{C}$ -линейных симметрических операторов совпадает с множеством $\mathcal{L}_{\text{symp},s}(\Omega)$ всех J -коммутирующих симметрических операторов.*

Заметим также, что для каждого J -коммутирующего оператора A его вещественный и комплексный сопряженные операторы (обозначаемые через A^* и A^*) совпадают. Мы показали, что $\mathbb{C}$ -линейные симметрические операторы естественно возникают как комплексные представления J -коммутирующих симметрических операторов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. *Комплексификация квадратичного J -инвариантного гамильтониана $\mathcal{H}(\psi)$ не меняет динамики.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что $w(\mathbf{H}\psi, \psi) = 0$, откуда для $\psi \in \Omega$ имеем

$$\mathcal{H}(\psi) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{H}\psi, \psi \rangle = \frac{1}{2} [(\mathbf{H}\psi, \psi) - iw(\mathbf{H}\psi, \psi)] = \frac{1}{2} (\mathbf{H}\psi, \psi).$$

По предложению 2.6 гамильтониан можно записать в виде $\mathcal{H}(\psi) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{H}\psi, \psi \rangle$, где $\mathbf{H} \in \mathcal{L}_s(\mathbb{C}^n)$, а гамильтоновы уравнения (1) принимают комплексный вид:

$$i \frac{d\psi}{dt} = \mathbf{H}\psi. \quad (7)$$

Все решения допускают комплексное представление

$$\psi(t) = U_t \psi, \quad U_t = e^{-i\mathbf{H}t/\hbar}. \quad (8)$$

Таково комплексное представление потоков, отвечающих квадратичному J -инвариантному гамильтониану.

§ 3. Динамика Шрёдингера как динамика с J -инвариантным гамильтонианом на бесконечномерном фазовом пространстве

Пусть Ω_c есть (бесконечномерное сепарабельное) комплексное гильбертово пространство с комплексным скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Обозначим через $\mathcal{L}_s \equiv \mathcal{L}_s(\Omega_c)$ пространство всех непрерывных $\mathbb{C}$ -линейных самосопряженных операторов на Ω_c . Используется планковская система единиц: $\hbar = 1$. Динамика Шрёдингера на Ω_c задается линейным уравнением

$$i \frac{d\psi}{dt} = \mathbf{H}\psi, \quad (9)$$

откуда получаем

$$\psi(t) = U_t \psi, \quad U_t = e^{-i\mathbf{H}t}. \quad (10)$$

Мы видим, что уравнения (9) и (10) – это просто бесконечномерные варианты уравнений (7) и (8), полученных из гамильтоновых уравнений для квадратичного J -инвариантного гамильтониана в процессе комплексификации классической механики. Теперь мы можем обратить наши рассуждения (заметив только, что фазовое пространство теперь бесконечномерно) и представить динамику Шрёдингера (9) на комплексном гильбертовом пространстве как гамильтонову динамику на бесконечномерном фазовом пространстве (ср. с [3]). Отметим, что гамильтонова динамика (1) есть динамика на всем фазовом пространстве Ω , а не на единичной сфере гильбертова пространства. Гамильтонов поток $\psi(t, \psi) = U_t \psi$ также определен на всем фазовом пространстве Ω .

Рассмотрим $\mathbb{R}$ -линейный оператор J на Ω , заданный умножением на $-i$. Мы представляем комплексное гильбертово пространство как $\Omega_c = Q \oplus iP$, где Q и P – два экземпляра некоторого вещественного гильбертова пространства, и пишем $\psi = q + ip$. Отметим, что здесь q и p не являются обычными координатой и импульсом частицы: это их полевые аналоги (функции от $x \in \mathbb{R}^3$, если мы выберем $Q = P = L_2(\mathbb{R}^3)$). Рассмотрим вещественное фазовое пространство $\Omega = Q \times P$. Как и в конечномерном случае, имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Множество $\mathcal{L}_s(\Omega_c)$ всех непрерывных $\mathbb{C}$ -линейных самосопряженных операторов совпадает с множеством $\mathcal{L}_{\text{symp},s}(\Omega)$ всех непрерывных J -коммутирующих самосопряженных операторов.*

Рассмотрим квантовый гамильтониан² $\mathbf{H} \in \mathcal{L}_s(\Omega_c)$. Он определяет классический гамильтониан

$$\mathcal{H}(\psi) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{H}\psi, \psi \rangle = \frac{1}{2} [(Rp, p) + 2(Tp, q) + (Rq, q)].$$

Соответствующие гамильтоновы уравнения на классическом фазовом пространстве $\Omega = Q \times P$, где Q и P – экземпляры вещественного гильбертова пространства, имеют вид

$$\frac{dq}{dt} = Rp - Tq, \quad \frac{dp}{dt} = -(Rq + Tp). \quad (11)$$

Применяя к этой гамильтоновой системе уравнений процедуру комплексификации, мы, конечно, получим шрёдингеровское уравнение (9).

ПРИМЕР 3.1. Рассмотрим гамильтонианы вида $\mathcal{H}(q, p) = \frac{1}{2} [(Rp, p) + (Rq, q)]$, где R – симметрический оператор. Соответствующие гамильтоновы уравнения имеют вид $\dot{q} = Rp$, $\dot{p} = -Rq$. Выберем $H = L_2(\mathbb{R}^3)$. Тогда $q(x)$ и $p(x)$ – компоненты векторного поля $\psi(x) = (q(x), p(x))$. Поля $q(x)$ и $p(x)$ можно назвать *взаимно индуцирующими*: наличие поля $p(x)$ индуцирует динамику поля $q(x)$, и наоборот (ср. с электрической и магнитной компонентами $q(x) =$

²Можно считать, что $\mathbf{H} \geq 0$, но в данном рассуждении это не важно.

$E(x)$ и $p(x) = B(x)$ классического электромагнитного поля). Квадратичную форму можно записать в виде

$$\mathcal{H}(q, p) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^6} R(x, y)[q(x)q(y) + p(x)p(y)] dx dy$$

или в виде

$$\mathcal{H}(\psi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^6} R(x, y)\psi(x)\bar{\psi}(y) dx dy,$$

где $R(x, y) = R(y, x)$ – в общем случае распределение на $\mathbb{R}^6$.

§ 4. Поднятие динамики точек в пространства физических величин и мер

4.1. Общая динамическая постановка. Пусть (X, F) – произвольное измеримое пространство, т. е. X – некоторое множество, а F – σ -алгебра его подмножеств. Обозначим пространство случайных величин (измеримых отображений $f: X \rightarrow \mathbb{R}$) через $RV(X)$, а пространство вероятностных мер на (X, F) – через $PM(X)$. Всякое измеримое отображение $g: X \rightarrow X$ индуцирует отображения

$$\begin{aligned} g^*: RV(X) &\rightarrow RV(X), & g^* f(x) &= f(g(x)), \\ g^*: PM(X) &\rightarrow PM(X), & \int_X f(x) dg^* \mu(x) &= \int_X g^* f(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Рассмотрим на X динамическую систему вида

$$x_t = g_t(x), \tag{12}$$

где $g_t: X \rightarrow X$ – однопараметрическое семейство измеримых отображений (вещественный параметр t играет роль времени). Пользуясь указанными выше отображениями g^* , можно поднять эту динамику точек пространства X до динамики в пространствах $RV(X)$ и $PM(X)$:

$$f_t = g_t^* f, \tag{13}$$

$$\mu_t = g_t^* \mu. \tag{14}$$

Мы увидим, что для бесконечномерного фазового пространства $X = \Omega$ квантовые образы динамических систем (12)–(14) суть соответственно динамики Шрёдингера (для состояний, т. е. волновых функций), Гейзенберга (для наблюдаемых, т. е. операторов) и фон Неймана (для оператора плотности). Чтобы получить квантовую механику, надо выбрать надлежащие пространства физических величин и мер.

4.2. Поднятие гамильтоновой динамики. Хорошо известно, что поднятие гамильтоновой динамики на пространство гладких физических величин задается *уравнением Лиувилля*. В частности, функциональное поднятие любой гамильтоновой динамики на гильбертовом фазовом пространстве Ω можно

представить бесконечномерным уравнением Лиувилля (см. [3]–[8]). Заметим, что это – общий факт, не имеющий отношения к нашей специальной классической постановке, основанной на J -инвариантных гамильтонианах. Для гладких функций на Ω введем скобки Пуассона

$$\{f_1(\psi), f_2(\psi)\} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial q}(\psi), \frac{\partial f_2}{\partial p}(\psi) \right) - \left(\frac{\partial f_2}{\partial q}(\psi), \frac{\partial f_1}{\partial p}(\psi) \right).$$

Напомним, что первую производную функции $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ можно представлять как вектор из H . Поэтому градиент $\nabla f(\psi)$ функции $f: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит $H \times H$. Заметим, что $\{f_1, f_2\} = (\nabla f_1, J\nabla f_2) = w(\nabla f_1, \nabla f_2)$. Пусть гладкий гамильтониан $\mathcal{H}(\psi)$ индуцирует поток $U_t(\psi)$. Для любой гладкой функции f_0 положим $f(t, \psi) = f_0(U_t(\psi))$. Легко видеть, что эта функция является решением задачи Коши для уравнения Лиувилля:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, \psi) = \{f(t, \psi), \mathcal{H}(\psi)\}, \quad f(0, \psi) = f_0(\psi). \quad (15)$$

Функциональный поток $\Psi(t, f_0) = U_t^* f_0$ можно представить как $\Psi(t, f_0) = e^{-tL} f_0$, где $L = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}(\psi), \frac{\partial}{\partial p} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}(\psi), \frac{\partial}{\partial q} \right)$.

§ 5. Динамика статистических состояний, сохраняющая дисперсию

В этом параграфе мы рассматриваем только квадратичные гамильтонианы на бесконечномерном фазовом пространстве Ω . Пусть задан произвольный квадратичный гамильтониан $\mathcal{H}(\psi) = \frac{1}{2}(\mathbf{H}\psi, \psi)$, где оператор $\mathbf{H}$ не обязан быть J -коммутирующим. Рассмотрим гамильтонов поток $U_t: \Omega \rightarrow \Omega$, порожденный гамильтоновой системой (1). Отображения U_t заданы формулой (2). Важно отметить, что они обратимы, в частности

$$U_t(\Omega) = \Omega. \quad (16)$$

Нас интересуют такие гамильтоновы потоки U_t , что соответствующая динамика (14) на пространстве вероятностей сохраняет размер статистических флуктуаций:

$$\sigma^2(U_t^* \rho) = \sigma^2(\rho), \quad \text{т. е.} \quad \int_{\Omega} \|\psi\|^2 dU_t^* \rho(\psi) = \int_{\Omega} \|\psi\|^2 d\rho(\psi) \quad (17)$$

или

$$\int_{\Omega} \|U_t \psi\|^2 d\rho(\psi) = \int_{\Omega} \|\psi\|^2 d\rho(\psi). \quad (18)$$

Начнем изучение этой задачи с доказательства достаточности условия для сохранения размера статистических флуктуаций. Это условие заключается в том, что гамильтонов поток $U_t \psi$ состоит из изометрических отображений:

$$\|U_t \psi\|^2 = \|\psi\|^2, \quad \psi \in \Omega. \quad (19)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Гамильтонов поток $U_t \psi$ изометричен тогда и только тогда, когда функция $\mathcal{H}(\psi)$ J -инвариантна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Пусть $\mathcal{H}$ является J -коммутирующим. Тогда

$$\frac{d}{dt} \|U_t \psi\|^2 = 2(\dot{U}_t \psi, U_t \psi) = 2(J\mathbf{H}U_t \psi, U_t \psi) = 0.$$

Здесь мы использовали кососимметричность оператора $J\mathbf{H}$: $(J\mathbf{H})^* = -\mathbf{H}J = -J\mathbf{H}$. Следовательно, имеет место (19).

(б) Пусть выполнено (19). Тогда $\frac{d}{dt} \|U_t \psi\|^2 = 0$. Из предыдущих вычислений и (16) получаем, что

$$(J\mathbf{H}\psi, \psi) = 0, \quad \psi \in \Omega. \quad (20)$$

Следовательно, оператор $J\mathbf{H}$ кососимметричен. Отсюда вытекает, что $\mathbf{H}$ коммутирует с J .

Для дальнейшего полезно переписать (20) в виде

$$(J\mathcal{H}'(\psi), \psi) = 0, \quad \psi \in \Omega. \quad (21)$$

СЛЕДСТВИЕ 5.1. *Поток, заданный J -инвариантным гамильтонианом, сохраняет множество флуктуаций фиксированного размера α : для всякой меры ρ (с нулевым средним значением и конечной дисперсией) из равенства $\sigma^2(\rho) = \alpha$ вытекает, что $\sigma^2(U_t^* \rho) = \alpha$ для всех $t \geq 0$.*

Этим объясняется исключительная роль J -инвариантных физических величин на бесконечномерном классическом фазовом пространстве. Если гамильтониан не является J -инвариантным, то его гамильтонов поток может привести к увеличению размера флуктуаций.

§ 6. Динамика на пространстве физических величин

6.1. Произвольные квадратичные величины. Рассмотрим гамильтонов поток $U_t: \Omega \rightarrow \Omega$, порожденный произвольным квадратичным гамильтонианом. Для любого непрерывного самосопряженного оператора $A: \Omega \rightarrow \Omega$ положим $f_A(\psi) = (A\psi, \psi)$. Тогда

$$U_t^* f_A(\psi) = f_A(U_t \psi) = f_{U_t^* A U_t}(\psi).$$

Эту динамику можно представить как динамику $A_t = U_t^* A U_t$ на пространстве непрерывных линейных симметрических операторов. Заметим, что $U_t = e^{J\mathbf{H}t}$, откуда $U_t^* = e^{-\mathbf{H}Jt}$. Поэтому

$$A_t = e^{-\mathbf{H}Jt} A e^{J\mathbf{H}t}. \quad (22)$$

Таким образом, $\frac{dA_t}{dt} = (A_t J\mathbf{H} - \mathbf{H}J A_t)$, или

$$\frac{dA_t}{dt} = [A_t, \mathbf{H}J] + A_t [J, \mathbf{H}]. \quad (23)$$

6.2. J -инвариантные величины. Рассмотрим пространство физических величин

$$V_{\text{quad, symp}}(\Omega) = \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \equiv f_A(\psi) = \frac{1}{2}(A\psi, \psi), A \in \mathcal{L}_{\text{symp, s}}(\Omega) \right\},$$

состоящее из J -инвариантных квадратичных форм, и поднимем на пространство $V_{\text{quad, symp}}(\Omega)$ поток, заданный J -инвариантным квадратичным гамильтонианом. В этом случае оба оператора $\mathbf{H}$, A коммутируют с J . Поэтому поток (22) можно записать в виде $A_t = U_t^* A U_t = e^{-J\mathbf{H}t} A e^{J\mathbf{H}t}$. Эволюционное уравнение (23) упрощается:

$$\frac{dA_t}{dt} = -J[\mathbf{H}, A_t]. \quad (24)$$

6.3. Комплексификация. Как в п. 6.2, допустим, что $[\mathbf{H}, J] = 0$ и $[A, J] = 0$. Используя комплексную структуру фазового пространства и представляя симплектический оператор J как умножение на $-i$, запишем (22) в виде динамики Гейзенберга:

$$A_t = U_t^* A U_t = e^{it\mathbf{H}} A e^{-it\mathbf{H}},$$

где U_t^* – комплексный сопряженный оператор к U_t , а эволюционное уравнение (23) – в виде уравнения Гейзенберга:

$$\frac{dA_t}{dt} = i[\mathbf{H}, A_t]. \quad (25)$$

Итак, это уравнение есть не что иное, как образ поднятия классической динамики квадратичного гамильтониана в случае J -инвариантных квадратичных физических величин.

§ 7. Вероятностная динамика

7.1. Произвольные гауссовы меры. Рассмотрим поток $U_t: \Omega \rightarrow \Omega$, заданный произвольным квадратичным гамильтонианом $\mathcal{H}(\psi)$. Пусть ρ – любая гауссова мера с нулевым средним значением. Поскольку непрерывное линейное преобразование гауссовой меры есть гауссова мера, то мера $U_t^*(\rho)$ гауссова. Найдем динамику ковариационного оператора меры $U_t^*(\rho)$. Имеем

$$\begin{aligned} (\text{cov}(U_t^* \rho) y_1, y_2) &= \int_{\Omega} (y_1, \psi)(y_2, \psi) dU_t^* \rho(\psi) \\ &= \int_{\Omega} (y_1, U_t \psi)(y_2, U_t \psi) d\rho(\psi) = (\text{cov}(\rho) U_t^* y_1, U_t^* y_2). \end{aligned}$$

Таким образом, ковариационный оператор $B_t = \text{cov}(U_t^* \rho)$ удовлетворяет соотношению

$$B_t = U_t B U_t^* \equiv e^{J\mathbf{H}t} B e^{-J\mathbf{H}t}. \quad (26)$$

Отсюда $\frac{dB_t}{dt} = (J\mathbf{H}B_t - B_t\mathbf{H}J)$, или

$$\frac{dB_t}{dt} = [J\mathbf{H}, B_t] + B_t[J, \mathbf{H}]. \quad (27)$$

7.2. J -инвариантные меры. Рассмотрим поднятие потока $U_t: \Omega \rightarrow \Omega$, порожденного J -инвариантным квадратичным гамильтонианом $\mathcal{H}(\psi)$, на пространство мер. Начнем со следующего чисто математического результата.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. *Гауссова мера ρ с нулевым средним значением J -инвариантна тогда и только тогда, когда ее ковариационный оператор J -инвариантен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Пусть $J^*\rho = \rho$. Достаточно доказать кососимметричность оператора B , где $B = \text{cov } \rho$. Имеем

$$\begin{aligned} (BJy_1, y_2) &= \int_{\Omega} (Jy_1, \psi)(y_2, \psi) d\rho(\psi) = - \int_{\Omega} (y_1, J\psi)(y_2, J^*J\psi) d\rho(\psi) \\ &= - \int_{\Omega} (y_1, J\psi)(Jy_2, J\psi) d\rho(\psi) = - \int_{\Omega} (y_1, \psi)(Jy_2, \psi) d\beta_J\rho(\psi) \\ &= - \int_{\Omega} (Jy_2, \psi)(y_1, \psi) d\rho(\psi) = -(BJy_2, y_1) = -(y_1, BJy_2). \end{aligned}$$

(б) Пусть $B = \text{cov}(\rho) \in \mathcal{L}_{\text{symp},s}(\Omega)$. Найдем преобразование Фурье гауссовой меры $J^*\rho$:

$$\widetilde{J^*\rho}(y) = \int_{\Omega} e^{i(y, J\psi)} d\rho(\psi) = \widetilde{\rho}(J^*y) = e^{-\frac{1}{2}(BJ^*y, J^*y)} = \widetilde{\rho}(y).$$

Из этого доказательства получаем также

СЛЕДСТВИЕ 7.1. *Пусть ρ – любая J -инвариантная мера. Тогда ее ковариационный оператор J -инвариантен.*

Поскольку поток J -инвариантного квадратичного гамильтониана состоит из J -коммутирующих линейных операторов ($JU_t = U_tJ$), из представления (26) и предложения 7.1 вытекает, что пространство всех J -инвариантных гауссовых мер с нулевым средним значением инвариантно относительно отображений U_t^* . Здесь мы имеем

$$B_t = U_t B U_t^* \equiv e^{J\mathbf{H}t} B e^{-J\mathbf{H}t}, \quad (28)$$

откуда

$$\frac{dB_t}{dt} = -J[B_t, \mathbf{H}]. \quad (29)$$

7.3. Комплексификация. Допустим, что $[\mathbf{H}, J] = 0$ и $[B, J] = 0$. Используя комплексную структуру фазового пространства и представляя симплектический оператор J как умножение на $-i$, запишем (28) в виде

$$B_t = U_t B U_t^* = e^{-i\mathbf{H}t} B e^{i\mathbf{H}t}, \quad (30)$$

откуда

$$\frac{dB_t}{dt} = i[B_t, \mathbf{H}]. \quad (31)$$

Это не что иное, как уравнение фон Неймана для статистического оператора. Единственное различие состоит в том, что ковариационный оператор B не нормирован. Его нормировка будет задана отображением T , проектирующим предквантовую статистическую модель на квантовую модель (см. далее § 8).

7.4. Динамика в пространстве статистических состояний. Сначала рассмотрим пространство всех гауссовых мер с нулевым средним значением и дисперсией α . Заметим, что если выбрать $H = Q = P = L_2(\mathbb{R}^3)$, то

$$\alpha = \int_{L_2(\mathbb{R}^3) \times L_2(\mathbb{R}^3)} \int_{\mathbb{R}^3} (|q(x)|^2 + |p(x)|^2) dx d\rho(q, p).$$

Обозначим это пространство мер через $S_G^\alpha(\Omega)$. Его элементы – это такие гауссовы меры, что

$$(y, m_\rho) = \int_{\Omega} (y, \psi) d\rho(\psi) = 0, \quad y \in \Omega, \quad \sigma^2(\rho) = \int_{\Omega} \|\psi\|^2 d\rho(\psi) = \alpha.$$

Для потока U_t , заданного J -инвариантным квадратичным гамильтонианом, имеем $U_t^*: S_G^\alpha(\Omega) \rightarrow S_G^\alpha(\Omega)$ (см. § 5). Обозначим через $S_{G, \text{symp}}^\alpha(\Omega)$ подпространство пространства $S_G^\alpha(\Omega)$, состоящее из всех J -инвариантных мер. Тогда снова имеем $U_t^*: S_{G, \text{symp}}^\alpha(\Omega) \rightarrow S_{G, \text{symp}}^\alpha(\Omega)$.

7.5. Комплексная ковариация. Всюду далее рассматриваются только меры с конечными дисперсиями. Введем *комплексное среднее значение* m_ρ^c и *комплексный ковариационный оператор* $B^c \equiv \text{cov}^c \rho$, полагая

$$\langle m_\rho^c, y \rangle = \int_{\Omega} \langle y, \psi \rangle d\rho(\psi), \quad (32)$$

$$\langle B^c y_1, y_2 \rangle = \int_{\Omega} \langle y_1, \psi \rangle \langle \psi, y_2 \rangle d\rho(\psi). \quad (33)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. Для J -инвариантных мер ρ имеем

$$m_\rho^c = 0 \iff m_\rho = 0. \quad (34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу J -инвариантности ρ для любой борелевской функции $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ имеем

$$\int_{\Omega} f(\psi_q, \psi_p) d\rho(\psi_q, \psi_p) = \int_{\Omega} f(\psi_p, -\psi_q) d\rho(\psi_q, \psi_p). \quad (35)$$

Пусть $m_\rho = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (y, \psi) d\rho(\psi) = \int_{\Omega} [(y_q, \psi_q) + (y_p, \psi_p)] d\rho(\psi) \\ &= \int_{\Omega} [(y_q, \psi_p) - (y_p, \psi_q)] d\rho(\psi) = \int_{\Omega} w(y, \psi) d\rho(\psi), \end{aligned}$$

где w – симплектическая форма на Ω . Следовательно, последний интеграл также равен нулю. С другой стороны, для комплексного среднего имеем

$$\langle y, m_\rho^c \rangle = \int_{\Omega} (y, \psi) d\rho(\psi) - i \int_{\Omega} w(y, \psi) d\rho(\psi). \quad (36)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.3. Пусть ρ – произвольная J -инвариантная мера с нулевым средним значением. Тогда

$$\text{cov}^c \rho = 2 \text{cov} \rho. \quad (37)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \text{cov}^c \rho(y, y) &= \int_{\Omega} |\langle y, \psi \rangle|^2 d\rho(\psi) = \int_{\Omega} |(y, \psi) - iw(y, \psi)|^2 d\rho(\psi) \\ &= \int_{\Omega} [(y, \psi)^2 + (y, J\psi)^2] d\rho(\psi). \end{aligned}$$

Пользуясь симплектической инвариантностью меры ρ , получаем

$$\int_{\Omega} (y, J\psi)^2 d\rho(\psi) = \int_{\Omega} (y, \psi)^2 d\rho(\psi).$$

Таким образом,

$$\text{cov}^c \rho(y, y) = 2 \int_{\Omega} (y, \psi)^2 d\rho(\psi) = 2 \text{cov} \rho(y, y).$$

ТЕОРЕМА 7.1. Для любой меры ρ с нулевым средним значением и любого J -коммутирующего оператора A имеем

$$\int_{\Omega} \langle A\psi, \psi \rangle d\rho(\psi) = \text{Tr}(\text{cov}^c \rho)A. \quad (38)$$

В частности,

$$\sigma^2(\rho) = \text{Tr} \text{cov}^c \rho. \quad (39)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{e_j\}$ – ортонормированный базис в Ω_c . (Отметим, что ортогональность и нормировка понимаются в смысле комплексного, а не вещественного скалярного произведения.) Тогда

$$\text{Tr}(\text{cov}^c \rho)A = \int_{\Omega} \sum_j \langle Ae_j, \psi \rangle \langle \psi, e_j \rangle d\rho(\psi) = \int_{\Omega} \langle A\psi, \psi \rangle d\rho(\psi).$$

Напомним, что в [1] было получено следующее равенство:

$$\sigma^2(\rho) = \text{Tr} \text{cov} \rho. \quad (40)$$

Может показаться, что уравнения (40), (39) и (37) противоречат друг другу. На самом деле противоречия нет, так как следы в (40) и (39) разные: они берутся относительно вещественного и комплексного скалярных произведений соответственно. Это важное место: даже нормировка следа единицей для оператора плотности фон Неймана понимается в смысле комплексного скалярного произведения. Обозначая вещественный и комплексный следы индексами $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ соответственно, имеем

$$\sigma^2(\rho) = \text{Tr}_{\mathbb{R}} \text{cov} \rho = \text{Tr}_{\mathbb{C}} \text{cov}^c \rho.$$

Заметим, что комплексное среднее m_ρ^c и комплексный ковариационный оператор B^c являются $\mathbb{C}$ -линейными даже для не J -инвариантных мер. Однако в общем случае вещественные и комплексные средние не совпадают, а вещественные и комплексные ковариационные операторы не связаны формулой (37).

Чтобы найти соотношение между $B = \text{cov } \rho$ и $B^c = \text{cov}^c \rho$ в общем случае, запишем $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$, $B_{11}^* = B_{11}$, $B_{22}^* = B_{22}$, $B_{12}^* = B_{21}$ и $B^c = \begin{pmatrix} D & S \\ -S & D \end{pmatrix}$. Тогда легко получается следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.4. *Блоки вещественного и комплексного ковариационных операторов связаны уравнениями*

$$D = B_{11} + B_{22}, \quad S = B_{12} - B_{21}. \quad (41)$$

Таким образом, в общем случае гауссова мера ρ_B не определяется однозначно своим комплексным ковариационным оператором B^c .

Если же мера ρ_B является J -инвариантной, то $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ -B_{12} & B_{11} \end{pmatrix}$. Следовательно, $D = 2B_{11}$, $S = 2B_{12}$, откуда получаем (37). Этим доказано

СЛЕДСТВИЕ 7.2. *Имеется взаимно однозначное соответствие между J -инвариантными гауссовыми мерами с нулевым средним значением и комплексными ковариационными операторами³.*

Как уже отмечалось, комплексный ковариационный оператор B^c не определяет однозначно меру ρ даже для гауссовых (но не J -инвариантных) мер. Тем не менее, мы будем представлять произвольную меру ρ (с нулевым средним значением и конечной дисперсией) ее комплексным ковариационным оператором B^c (тем самым мы “проектируем” меры в их комплексные ковариационные операторы).

Рассмотрим динамику меры ρ , индуцированную динамикой квадратичного J -инвариантного гамильтониана $\mathcal{H}$ на Ω . Получим однопараметрическое семейство мер $\rho_t = U_t^* \rho$. Легко видеть, что $B^c(t) = U_t B^c U_t^*$. Поскольку $[B^c, J] = 0$, оператор $B^c(t)$ удовлетворяет уравнению фон Неймана (31).

§ 8. Асимптотическое разложение гауссовых интегралов на гильбертовом пространстве и формула следа фон Неймана

Рассмотрим бесконечномерное фазовое пространство $\Omega = Q \times P$, где Q и P – экземпляры (сепарабельного) гильбертова пространства. Наша цель – построить предквантовую классическую статистическую модель на этом фазовом пространстве, индуцирующую обычную квантовую статистическую модель (Дирака–фон Неймана)

$$N_{\text{quant}} = (\mathcal{D}(\Omega_c), \mathcal{L}_s(\Omega_c)),$$

³То есть $\mathbb{C}$ -линейными самосопряженными положительно определенными операторами $B^c: \Omega_c \rightarrow \Omega_c$, принадлежащими классу операторов со следом.

где $\Omega_c = Q \oplus iP$ – комплексное гильбертово пространство, $\mathcal{D}(\Omega_c)$ – пространство операторов плотности, а $\mathcal{L}_s(\Omega_c)$ – пространство ограниченных самосопряженных операторов на Ω_c (квантовых наблюдаемых⁴).

В качестве пространства классических статистических состояний выберем множество $S_{G,\text{symp}}^\alpha(\Omega)$ всех J -инвариантных гауссовых мер с нулевым средним значением и дисперсией α .

Рассмотрим Ω как вещественное гильбертово пространство и перейдем к его комплексификации $\Omega^\mathbb{C} = \Omega \oplus i\Omega$. (Следует четко различать два комплексных гильбертовых пространства: $\Omega^\mathbb{C}$ и Ω с его естественной комплексной структурой, отвечающей J .) Пусть $b_n: \Omega^\mathbb{C} \times \dots \times \Omega^\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ – непрерывная n -линейная симметрическая форма. Определим ее норму как $\|b_n\| = \sup_{\|\psi\| \leq 1} |b_n(\psi, \dots, \psi)|$. Тогда

$$\|b_n(\psi, \dots, \psi)\| \leq \|b_n\| \|\psi\|^n. \quad (42)$$

Рассмотрим пространство аналитических функций *экспоненциального роста*

$$|f(\psi)| \leq ae^{b\|\psi\|}, \quad \psi \in \Omega^\mathbb{C} \quad (43)$$

(см., например, [10]). Здесь константы зависят от f : $a = a_f$, $b = b_f$.

ЛЕММА 8.1. *Пространство аналитических функций экспоненциального роста совпадает с пространством таких аналитических функций, что*

$$\|f^{(n)}(0)\| \leq cr^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (44)$$

Здесь константы $c = c_f$ и $r = r_f$ зависят от функции f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Пусть f имеет экспоненциальный рост. Для каждого $\psi \in \Omega^\mathbb{C}$ рассмотрим функцию $g_\psi(z) = f(z\psi)$ комплексной переменной $z \in \mathbb{C}$. По интегральной формуле Коши для $g_\psi(z)$ имеем

$$g_\psi^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z|=R} g_\psi(z) z^{-(n+1)} dz,$$

где $R > 0$ пока является свободным параметром. Отсюда

$$|g_\psi^{(n)}(0)| \leq n! R^{-n} \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |f(Re^{i\theta}\psi)| \leq a_f n! R^{-n} e^{b_f R \|\psi\|}.$$

Выбирая $R = n$ и замечая, что $g_\psi^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)(\psi, \dots, \psi)$, получаем

$$\|f^{(n)}(0)\| \leq a'_f e^{-n} n^{1/2} e^{b_f n}.$$

Поэтому производные функции f удовлетворяют неравенствам (44) с $r_f = e^{b_f}$.

⁴Для простоты мы рассматриваем только те квантовые наблюдаемые, которые представляются ограниченными операторами. Чтобы получить общую квантовую модель, где некоторые наблюдаемые представлены неограниченными операторами, следует перейти к предквантовой классической статистической модели, основанной на тройке Гельфанда $\Omega_c^+ \subset \Omega_c \subset \Omega_c^-$.

(b) Пусть производные функции f удовлетворяют неравенствам (44). В силу неравенств (42) имеем

$$|f(\psi)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|f^{(n)}(0)\| \|\psi\|^n}{n!} \leq c_f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r_f \|\psi\|)^n}{n!} \leq c_f e^{r_f \|\psi\|}.$$

Поэтому f имеет экспоненциальный рост с $b_f = r_f$.

Рассмотрим пространство $\mathcal{V}_{\text{symp}}(\Omega)$, состоящее из таких функций $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, что:

- (i) $f(0) = 0$;
- (ii) f является J -инвариантной: $f(J\psi) = f(\psi)$;
- (iii) f продолжается до аналитической функции $f: \Omega^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$, имеющей экспоненциальный рост⁵:

$$|f(\psi)| \leq c_f e^{r_f \|\psi\|}$$

для некоторых $c_f, r_f \geq 0$ и для всех $\psi \in \Omega^{\mathbb{C}}$.

Отметим, что возможность аналитического продолжения функции f на $\Omega^{\mathbb{C}}$ и экспоненциальная оценка на $\Omega^{\mathbb{C}}$ играют важную роль в асимптотическом разложении гауссовых интегралов. Для получения математически строгой формулировки следут аналогичным образом переформулировать условия основной теоремы работы [1].

ПРИМЕР 8.1. Пусть $\mathbf{H} \in \mathcal{L}_{\text{symp},s}(\Omega)$. Тогда пространство $\mathcal{V}_{\text{symp}}(\Omega)$ содержит все полиномы вида $f(\psi) = \sum_{k=1}^N a_k(\mathbf{H}\psi, \psi)^k$, где $a_k \in \mathbb{R}$.

Следующий математически тривиальный результат играет фундаментальную роль при переходе от классических объектов к квантовым.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1. Пусть $f \in \mathcal{V}_{\text{symp}}(\Omega)$. Тогда $f''(0) \in \mathcal{L}_{\text{symp},s}(\Omega)$.

Заметим, что для любой функции $\psi \in \Omega$ имеем $Jf''(\psi) = f''(J\psi)J$. Любая функция из $\mathcal{V}_{\text{symp}}(\Omega)$ интегрируема по любой гауссовой мере на Ω . Выберем $\mathcal{V}_{\text{symp}}(\Omega)$ в качестве пространства классических физических величин (ср. с [1]) и рассмотрим однопараметрическое семейство классических статистических моделей

$$M_{\text{symp}}^{\alpha} = (S_{G,\text{symp}}^{\alpha}(\Omega), \mathcal{V}_{\text{symp}}(\Omega)). \quad (45)$$

Фиксируем физическую величину $f \in \mathcal{V}_{\text{symp}}(\Omega)$ и статистическое состояние $\rho_B \in S_{G,\text{symp}}^{\alpha}(\Omega)$. Наша следующая цель – найти асимптотическое разложение (классического) среднего значения

$$\langle f \rangle_{\rho_B} = \int_{\Omega} f(\psi) d\rho_B(\psi)$$

относительно малого параметра α .

⁵В бесконечномерном случае пространства аналитических функций экспоненциального роста широко использовались в [9], [10].

ЛЕММА 8.2. Для $f \in \mathcal{V}_{\text{symp}}(\Omega)$ и $\rho \in S_{G,\text{symp}}^\alpha(\Omega)$ имеет место асимптотическое равенство

$$\langle f \rangle_\rho = \frac{\alpha}{2} \text{Tr } D^c f''(0) + o(\alpha), \quad \alpha \rightarrow 0, \quad (46)$$

где оператор D^c имеет вид $D^c = (\text{cov}^c \rho)/\alpha$. При этом

$$o(\alpha) = \alpha^2 R(\alpha, f, \rho); \quad (47)$$

здесь $|R(\alpha, f, \rho)| \leq c_f \int_\Omega e^{r_f \|\psi\|} d\rho_D(\psi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделаем замену масштаба в интеграле $\int_\Omega f(\psi) d\rho(\psi)$:

$$\psi \rightarrow \frac{\psi}{\sqrt{\alpha}}. \quad (48)$$

Получаем, что

$$\langle f \rangle_\rho = \int_\Omega f(\sqrt{\alpha} \psi) d\rho_D(\psi) = \frac{\alpha}{2} \int_\Omega (f''(0)\psi, \psi) d\rho_D(\psi) + \alpha^2 R(\alpha, f, \rho), \quad (49)$$

где

$$R(\alpha, f, \rho) = \int_\Omega g(\alpha, f; \psi) d\rho_D(\psi), \quad g(\alpha, f; \psi) = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{\alpha^{n/2-2}}{n!} f^{(n)}(0)(\psi, \dots, \psi).$$

Отметим, что

$$\int_\Omega (f'(0), \psi) d\rho_D(\psi) = 0, \quad \int_\Omega f'''(0)(\psi, \psi, \psi) d\rho_D(\psi) = 0,$$

поскольку мера ρ (и, следовательно, ρ_D) имеет нулевое среднее значение. Так как $\rho \in S_{G,\text{symp}}^\alpha(\Omega)$, то вещественный след $\text{Tr } D = 1$, следовательно, и комплексный след⁶ $\text{Tr } D^c = 1$.

Оценим остаточный член $R(\alpha, f, \rho)$. Пользуясь неравенством (44), для $\alpha \leq 1$ имеем

$$|g(\alpha, f; \psi)| = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{\|f^{(n)}(0)\| \|\psi\|^n}{n!} \leq c_f \sum_{n=4}^{\infty} \frac{r_f^n \|\psi\|^n}{n!} = C_f e^{r_f \|\psi\|}.$$

Поэтому $|R(\alpha, f, \rho)| \leq c_f \int_\Omega e^{r_f \|\psi\|} d\rho_D(\psi)$. Получаем, что

$$\langle f \rangle_\rho = \frac{\alpha}{2} \int_\Omega (f''(0)\psi, \psi) d\rho_D(\psi) + o(\alpha), \quad \alpha \rightarrow 0. \quad (50)$$

Выполняя гауссово интегрирование, приходим к асимптотическому равенству (46).

⁶Можно рассматривать указанную замену переменных как масштабирование размера статистических (гауссовых) флуктуаций. Пренебрежимо малые случайные флуктуации с $\sigma(\rho) = \sqrt{\alpha}$ (где α – малый параметр) рассматриваются на новой шкале как стандартные нормальные флуктуации. В терминах теории вероятностей если мы рассмотрим гауссовы случайные величины $\xi(\lambda)$, то преобразование (48) есть не что иное, как стандартная нормализация этой случайной величины (используемая, например, в центральной предельной теореме): $\eta(\lambda) = \frac{\xi(\lambda) - E\xi}{\sqrt{E(\xi(\lambda) - E\xi)^2}}$ (в нашем случае $E\xi = 0$).

Мы видим, что классическое среднее (вычисленное в модели

$$M_{\text{symp}}^\alpha = (S_{G,\text{symp}}^\alpha(\Omega), \mathcal{V}_{\text{symp}}(\Omega))$$

при помощи подхода, основанного на теории меры) связано равенством (46) с квантовым средним (вычисленным в модели $N_{\text{quant}} = (\mathcal{D}(\Omega_c), \mathcal{L}_s(\Omega_c))$ с помощью формулы следа фон Неймана).

Равенство (46) можно рассматривать как мотивировку для определения следующего отображения перехода от классических к квантовым объектам. Это отображение T переводит классическую статистическую модель $M_{\text{symp}}^\alpha = (S_{G,\text{symp}}^\alpha(\Omega), \mathcal{V}_{\text{symp}}(\Omega))$ в квантовую статистическую модель $N_{\text{quant}} = (\mathcal{D}(\Omega_c), \mathcal{L}_s(\Omega_c))$ по формулам

$$T: S_{G,\text{symp}}^\alpha(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega_c), \quad D^c = T(\rho) = \frac{\text{cov}^c \rho}{\alpha} \quad (51)$$

(гауссова мера ρ представляется матрицей плотности D^c , равной ковариационному оператору этой меры, нормированному делением на α) и

$$T: \mathcal{V}_{\text{symp}}(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}_s(\Omega_c), \quad A_{\text{quant}} = T(f) = \frac{1}{2} f''(0). \quad (52)$$

Наши предыдущие рассуждения можно представить в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 8.1. *Однопараметрическое семейство классических статистических моделей $M_{\text{symp}}^\alpha = (S_{G,\text{symp}}^\alpha(\Omega), \mathcal{V}_{\text{symp}}(\Omega))$ задает “деквантование” квантовой модели $N_{\text{quant}} = (\mathcal{D}(\Omega_c), \mathcal{L}_s(\Omega_c))$ посредством пары отображений (51), (52). Классические и квантовые средние связаны асимптотическим равенством (46).*

Заметим, что проекция $T: \mathcal{V}_{\text{symp}}(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}_s(\Omega_c)$ удовлетворяет важному постулату для отображений перехода от классических к квантовым объектам, используемому фон Нейманом [2]:

$$T\left(\sum_j \lambda_j f_j\right) = \sum_j \lambda_j T(f_j), \quad \lambda_j \in \mathbb{R}, \quad f_j \in \mathcal{V}_{\text{symp}}(\Omega). \quad (53)$$

Здесь квантовые наблюдаемые $A_j = T(f_j)$ могут быть несовместимыми (так что эти операторы не коммутируют); см. [2].

СЛЕДСТВИЕ 8.1. *Сужение отображения T на пространство $V_{\text{quad},\text{symp}}(\Omega)$ всех квадратичных J -инвариантных физических величин взаимно однозначно переводит это пространство на его образ $\mathcal{L}_s(\Omega_c)$.*

Пусть $\Psi = u + iv \in \Omega_c$, так что $u \in Q$ и $v \in P$, и пусть $\|\Psi\| = 1$. В нашем подходе матрица плотности $D_\Psi = \Psi \otimes \Psi$ есть образ классического статистического состояния: J -инвариантной гауссовой меры ρ_Ψ на фазовом пространстве⁷, имеющей нулевое среднее и (комплексный) ковариационный оператор $B_\Psi^c = \alpha D_\Psi$, или $B_\Psi^c = 2\alpha \begin{pmatrix} u \otimes u + v \otimes v & v \otimes u - u \otimes v \\ u \otimes v - v \otimes u & u \otimes u + v \otimes v \end{pmatrix}$.

⁷Эта мера однозначно определена (см. предложение 7.3).

§ 9. Инвариантные гауссовы меры для динамики Шрёдингера

Все гауссовы меры, рассматриваемые в этом параграфе, предполагаются J -инвариантными. В рамках нашего подхода векторы Ψ , $\|\Psi\| = 1$, суть просто метки для гауссовых мер, сосредоточенных на одномерных (комплексных) подпространствах Ω_Ψ бесконечномерного фазового пространства Ω . В настоящем параграфе мы более подробно изучим случай так называемых *стационарных чистых состояний*. Масштабирование делением на α не играет в этом случае никакой роли, так что мы не будем его учитывать. Будем рассматривать чистое состояние Ψ , $\|\Psi\| = 1$, как метку для гауссовой меры ν_Ψ с нулевым средним значением и ковариационным оператором $\text{cov}^c \nu_\Psi = \Psi \otimes \Psi$.

ТЕОРЕМА 9.1. Пусть ν – гауссова мера с нулевым средним значением, сосредоточенная на одномерном комплексном подпространстве, натянутом на нормированный вектор Ψ , и пусть $\mathbf{H}: \Omega \rightarrow \Omega$ – ограниченный самосопряженный оператор. Мера ν инвариантна относительно унитарной динамики $U_t = e^{-it\mathbf{H}}$ тогда и только тогда, когда Ψ – собственный вектор оператора $\mathbf{H}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Пусть $\mathbf{H}\Psi = \lambda\Psi$. Гауссова мера $U_t^* \nu$ имеет ковариационный оператор

$$B_t^c = U_t(\Psi \otimes \Psi)U_t^* = U_t\Psi \otimes U_t\Psi = e^{-it\lambda}\Psi \otimes e^{-it\lambda}\Psi = \Psi \otimes \Psi.$$

Поскольку все рассматриваемые меры гауссовы, отсюда следует, что $U_t^* \nu = \nu$. Поэтому мера ν инвариантна.

(б) Пусть $U_t^* \nu = \nu$ и $\nu = \nu_\Psi$ для некоторого Ψ , $\|\Psi\| = 1$. Тогда $U_t\Psi \otimes U_t\Psi = \Psi \otimes \Psi$. Поэтому для всех $\psi_1, \psi_2 \in \Omega$ имеем

$$\langle \psi_1, U_t\Psi \rangle \langle U_t\Psi, \psi_2 \rangle = \langle \psi_1, \Psi \rangle \langle \Psi, \psi_2 \rangle.$$

Полагая $\psi_2 = \Psi$, получаем, что $\langle \psi_1, \overline{c(t)}U_t\Psi \rangle = \langle \psi_1, \Psi \rangle$, где $c(t) = \langle U_t\Psi, \Psi \rangle$. Поэтому $\overline{c(t)}U_t\Psi = \Psi$. Заметим, что $c(0) = \|\Psi\|^2 = 1$. Отсюда $\overline{c'(0)}\Psi - i\mathbf{H}\Psi = 0$, т. е. $\mathbf{H}\Psi = -i\overline{c'(0)}\Psi$. Таким образом, Ψ есть собственный вектор оператора $\mathbf{H}$ с собственным значением $-i\overline{c'(0)}$. Заметим, что $c'(0) = -i\langle \mathbf{H}\Psi, \Psi \rangle$, т. е. $\overline{c'(0)} = i\langle \mathbf{H}\Psi, \Psi \rangle$. Поэтому $\lambda = -i\overline{c'(0)} = \langle \mathbf{H}\Psi, \Psi \rangle$.

Опишем теперь все возможные U_t -инвариантные гауссовы меры.

ТЕОРЕМА 9.2. Пусть $\mathbf{H}$ – ограниченный самосопряженный оператор с чисто дискретным невырожденным спектром: $\mathbf{H}\Psi_k = \lambda_k\Psi_k$ для некоторого ортонормированного базиса $\{\Psi_k\}$, состоящего из собственных векторов оператора $\mathbf{H}$. Тогда всякая U_t -инвариантная гауссова мера ν с нулевым средним значением имеет ковариационный оператор вида

$$B^c = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Psi_k \otimes \Psi_k, \quad c_k \geq 0, \quad (54)$$

и обратно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Пусть $\text{cov}^c \nu = B^c$ имеет вид (54). Тогда

$$\text{cov}^c(U_t^* \nu) = U_t B U_t^* = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-i\lambda_k t} \Psi_k \otimes e^{-i\lambda_k t} \Psi_k = \text{cov}^c \nu = B^c.$$

Поскольку меры гауссовы, отсюда вытекает, что $U_t^* \nu = \nu$ для всех t .

(б) Пусть $U_t^* \nu = \nu$ для всех t . Заметим, что любой ковариационный оператор B^c можно записать в виде

$$B^c = \sum_{k=1}^{\infty} \langle B \Psi_k, \Psi_k \rangle \Psi_k \otimes \Psi_k + \sum_{k \neq j} \langle B \Psi_k, \Psi_j \rangle \Psi_k \otimes \Psi_j.$$

Покажем, что $\langle B \Psi_k, \Psi_j \rangle = 0$ при $k \neq j$. Обозначим оператор, отвечающий $\sum_{k \neq j}$, через Z . Имеем

$$\langle U_t Z U_t^* \psi_1, \psi_2 \rangle = \sum_{k \neq j} \langle B \Psi_k, \Psi_j \rangle e^{it(\lambda_j - \lambda_k)} \langle \Psi_k, \psi_2 \rangle \langle \psi_1, \Psi_j \rangle = \langle Z \psi_1, \psi_2 \rangle.$$

Выберем $\psi_1 = \Psi_j$, $\psi_2 = \Psi_k$. Тогда

$$\langle U_t Z U_t^* \Psi_j, \Psi_k \rangle = \langle B \Psi_k, \Psi_j \rangle e^{it(\lambda_j - \lambda_k)} = \langle B \Psi_k, \Psi_j \rangle.$$

Поэтому $\langle B \Psi_k, \Psi_j \rangle = 0$ при $k \neq j$.

§ 10. Сохраняющая дисперсию динамика с неквадратичным гамильтонианом

Рассматривая неквадратичные классические величины, мы сталкиваемся с новой интересной задачей: исследованием динамики для неквадратичных гамильтонианов. Пусть дан произвольный гамильтониан $\mathcal{H}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Первое важное замечание состоит в том, что его динамика переводит гауссовы состояния в гауссовы тогда и только тогда, когда функция $\mathcal{H}$ квадратична. Допустим, что для каждого $\psi \in \Omega$ система гамильтоновых уравнений имеет единственное решение $\psi(t) \equiv U_t \psi$, $\psi(0) = \psi$. В этом случае корректно определено отображение (гамильтонов поток)

$$U_t: \Omega \rightarrow \Omega. \quad (55)$$

Оно индуцирует отображение U_t^* пространства $PM(\Omega)$ вероятностных мер на фазовом пространстве Ω (см. § 4). Мы уже упоминали, что в неквадратичном случае мера $U_t^* \rho$ при $t > 0$ может быть негауссовой даже для гауссовой меры ρ . Таким образом, для неквадратичных гамильтонианов нельзя ограничить классическую статистическую модель до модели с гауссовыми состояниями и приходится взять в качестве пространства статистических состояний множество всех вероятностных мер ρ на Ω с нулевым средним значением и дисперсией α . Обозначим последнее множество через $PM^\alpha(\Omega)$. Может быть, следует рассматривать подмножество $PM_{\text{sym}}^\alpha(\Omega)$ в $PM^\alpha(\Omega)$, состоящее из всех J -инвариантных мер: $J^* \rho = \rho$. Но в данный момент мы рассмотрим произвольные меры.

Нас интересует такая гамильтонова динамика U_t на фазовом пространстве Ω , которая индуцирует некоторую динамику U_t^* на $PM^\alpha(\Omega)$. Такая динамика должна сохранять свойство меры иметь нулевое среднее значение и дисперсию α . Примером динамики, сохраняющей нулевое среднее значение и дисперсию α , является квантовая динамика, соответствующая классической гамильтоновой динамике с квадратичным J -инвариантным гамильтонианом. Нас интересуют более общие примеры с подобными свойствами.

Дисперсия меры $U_t^* \rho$ для произвольной меры $\rho \in PM(\Omega)$ с нулевым средним значением равна

$$\sigma^2(U_t^* \rho) = \int_{\Omega} \|U_t \psi\|^2 d\rho(\psi). \quad (56)$$

Нас интересует такая гамильтонова динамика, при которой дисперсии вероятностных мер сохраняются, т. е. *динамика, сохраняющая дисперсию*.

Допустим, что U_t сохраняет среднее значение мер. Согласно (56) если U_t сохраняет норму на фазовом пространстве Ω , то U_t^* сохраняет дисперсию. Заметим, что нелинейное сохраняющее норму отображение $U: \Omega \rightarrow \Omega$ не обязательно ни инъективным, ни сюръективным. Оно также может не быть изометрией: из того, что $\|U\psi\| = \|\psi\|$ для всех $\psi \in \Omega$, еще не вытекает, что $\|U\psi_1 - U\psi_2\| = \|\psi_1 - \psi_2\|$.

Легко найти необходимое и достаточное условие того, что динамика, заданная гамильтонианом $\mathcal{H}(\psi)$, сохраняет норму. Запишем общее гамильтоново уравнение в виде

$$\dot{\psi} = J\mathcal{H}'(\psi). \quad (57)$$

ТЕОРЕМА 10.1. Пусть поток U_t , порожденный гамильтонианом $\mathcal{H}(\psi)$, состоит из сюръекций: $U_t(\Omega) = \Omega$. Такой поток сохраняет норму тогда и только тогда, когда выполнено равенство (ср. с (21))

$$(J\mathcal{H}'(\psi), \psi) = 0, \quad \psi \in \Omega. \quad (58)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Пусть $\|U_t \psi\|^2 = \|\psi\|^2$ для всех $\psi \in \Omega$. Из представления (57) получаем

$$0 = \frac{d}{dt} \|U_t \psi\|^2 = 2(J\mathcal{H}'(U_t \psi), U_t \psi).$$

Таким образом, $(J\mathcal{H}'(U_t \psi), U_t \psi) = 0$ для всех $\psi \in \Omega$. Пользуясь тем, что $U_t(\Omega) = \Omega$, получаем равенство (58).

(б) Пусть равенство (58) выполнено для всех $\psi \in \Omega$. Тогда, в частности, имеем

$$(J\mathcal{H}'(U_t \psi), U_t \psi) = 0 \quad (59)$$

для всех $\psi \in \Omega$. Поэтому $\frac{d}{dt} \|U_t \psi\|^2 = 0$ и, следовательно, $\|U_t \psi\| = \|\psi\|$ для $t \geq t_0$, $\psi \in \Omega$.

Заметим, что (58) влечет сохранение нормы, даже если U_t не сюръективны. Обозначим через $W(\Omega)$ множество всех отображений $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих (58).

СЛЕДСТВИЕ 10.1. Гамильтонов поток сохраняет норму тогда и только тогда, когда выполнено равенство (59).

Условие (58) является линейным уравнением относительно $\mathcal{H}$:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}, p \right) = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, q \right). \quad (60)$$

ТЕОРЕМА 10.2. Пусть $\mathcal{H} \in W(\Omega)$. Тогда $\mathcal{H}''(0) \in \mathcal{L}_{\text{sym},s}(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $(\mathcal{H}'(\psi), J\psi) = 0$. Отсюда $\mathcal{H}''(\psi)J\psi + J^*\mathcal{H}'(\psi) = 0$ и, следовательно, $\mathcal{H}'''(\psi)J\psi + \mathcal{H}''(\psi)J + J^*\mathcal{H}''(\psi) = 0$. Поэтому

$$[\mathcal{H}''(0), J] = 0. \quad (61)$$

Заметим, что в общем случае

$$[\mathcal{H}''(\psi), J] = -\mathcal{H}'''(\psi)J\psi. \quad (62)$$

Отметим также, что для любого отображения $\mathcal{H}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ можно записать $\mathcal{H}'' = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q \partial p} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p \partial q} & \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p^2} \end{pmatrix}$. Условие $\mathcal{H}''(0,0) \in \mathcal{L}_{\text{sym},s}(\Omega)$ влечет, что $\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q^2}(0,0) = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p^2}(0,0)$, $\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p \partial q} = -\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q \partial p}$. Последнее равенство не удивительно ввиду хорошо известного равенства смешанных производных дважды непрерывно дифференцируемого отображения. Конечно, всегда имеем $\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_i \partial q_j} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_j \partial p_i}$ для всех i, j . В качестве иллюстративного примера рассмотрим квадратичный гамильтониан $\mathcal{H}(q_1, q_2, p_1, p_2) = p_1 q_2 - q_1 p_2$. Тогда

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q \partial p} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_1 \partial p_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_1 \partial p_2} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_2 \partial p_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_2 \partial p_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p \partial q} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_1 \partial q_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_1 \partial q_2} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_2 \partial q_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что всякий полином вида, рассмотренного в примере 8.1, удовлетворяет условию (58). Поэтому каждый гамильтониан такого вида (например, $\mathcal{H}(\psi) = a_1(\mathbf{H}\psi, \psi) + a_2(\mathbf{H}\psi, \psi)^2$, где $[\mathbf{H}, J] = 0$) индуцирует сохраняющий норму поток $U_t(\psi)$. Однако нам не известно общее соотношение между классом J -инвариантных функций и классом функций, удовлетворяющих (58).

С другой стороны, с помощью (58) легко найти гамильтонианы, потоки которых не сохраняют норму. Например, рассмотрим отображение $\mathcal{H}(q, p) = q^2 p$ (в двумерном случае). Для него условие (58) не выполняется, так что соответствующий гамильтонов поток не сохраняет норму.

Исследуем условия сохранения среднего значения. Пусть дана мера ρ с нулевым средним значением (“флуктуация вакуума”): $m_\rho = 0$. Мы хотим дать достаточное условие для того, чтобы это значение сохранялось: $m_{\rho_t} = 0$ при $t \geq 0$. Рассмотрим класс симметричных мер, т.е. таких ρ , что $g_{-1}^*\rho = \rho$, где $g_{-1}\psi = -\psi$. Заметим, что всякая четная мера имеет нулевое среднее значение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.1. Пусть ρ – симметричная мера, а $U_t(\psi)$ – нечетный гамильтонов поток:

$$U_t(-\psi) = -U_t(\psi). \quad (63)$$

Тогда среднее значение сохраняется: $m_{\rho_t} = 0$ при $t \geq 0$.

Можно доказать даже следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.2. Нечетный гамильтонов поток сохраняет класс симметричных мер.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Надо показать, что $g_{-1}^* U_t^* \rho = U_t^* \rho$. Имеем

$$\begin{aligned} \int f(\psi) dg_{-1}^* U_t^* \rho(\psi) &= \int f(U_t(-\psi)) d\rho(\psi) = \int f(-U_t(\psi)) d\rho(\psi) \\ &= \int f(U_t(\psi)) d\rho(\psi) = \int f(\psi) dU_t^* \rho(\psi). \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.3. Пусть задача Коши для гамильтоновых уравнений является корректной. Если функция $\mathcal{H}'$ нечетна, то гамильтонов поток нечетен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Пусть выполнено (63). Тогда $\frac{dU_t}{dt}(\psi) = -\frac{dU_t}{dt}(-\psi)$, откуда $\mathcal{H}'(U_t(\psi)) = -\mathcal{H}'(U_t(-\psi))$. Следовательно,

$$\mathcal{H}'(\varphi) = -\mathcal{H}'(-\varphi) \quad (64)$$

для всех $\varphi = U_t\psi$. В силу корректности задачи Коши любой вектор $\varphi \in \Omega$ представим в таком виде.

(б) Пусть выполнено (64). Имеем

$$-\frac{dU_t}{dt}(-\psi) = -J\mathcal{H}'(U_t(-\psi)) = J\mathcal{H}'(-U_t(-\psi)).$$

Но в силу корректности задачи решение единственно. Поэтому выполнено (63).

СЛЕДСТВИЕ 10.2. Пусть гамильтониан $\mathcal{H}(\psi)$ J -инвариантен. Тогда его поток сохраняет среднее значение для симметричных мер.

Наконец, заметим, что всякая J -инвариантная мера симметрична (и, в частности, имеет нулевое среднее значение).

СЛЕДСТВИЕ 10.3. Пусть гамильтониан $\mathcal{H}(\psi)$ и мера ρ являются J -инвариантными. Тогда гамильтонов поток сохраняет среднее значение меры ρ (равное нулю).

Результаты настоящей статьи докладывались на семинарах отдела математической физики Математического института им. В. А. Стеклова РАН, а также на общепринститутском семинаре. Я хотел бы поблагодарить всех участников этих семинаров за интересное обсуждение и комментарии.

Список литературы

1. A. Khrennikov, “A pre-quantum classical statistical model with infinite-dimensional phase space”, *J. Phys. A*, **38**:41 (2005), 9051–9073.
2. И. фон Нейман, *Математические основы квантовой механики*, Наука, М., 1964; англ. пер. с нем.: J. von Neumann, *Mathematical foundations of quantum mechanics*, 12th printing, Princeton Landmarks Math., Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1996.
3. A. Khrennikov, “Generalizations of quantum mechanics induced by classical statistical field theory”, *Found. Phys. Lett.*, **18**:7 (2005), 637–650.
4. A. Khrennikov, “Nonlinear Schrödinger equations from prequantum classical statistical field theory”, *Phys. Lett. A*, **357**:3 (2006), 171–176.
5. S. Albeverio, A. Khrennikov, O. Smolaynov, “A local Liouville theorem for infinite-dimensional Hamilton–Dirac systems”, *Russian J. Math. Phys.*, **9**:2 (2002), 123–139.
6. А. Ю. Хренников, *Уравнения с бесконечномерными псевдодифференциальными операторами*, Дис. . . . канд. физ.-матем. наук, МГУ, М., 1983.
7. А. Ю. Хренников, “Бесконечномерное уравнение Лиувилля”, *Матем. сб.*, **183**:1 (1992), 20–44; англ. пер.: A. Yu. Khrennikov, “The infinite-dimensional Liouville equation”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **75**:1 (1993), 17–41.
8. А. Ю. Хренников, “Принцип соответствия в квантовой теории поля и в теории релятивистской бозонной струны”, *Матем. сб.*, **180**:6 (1989), 763–786; англ. пер.: A. Yu. Khrennikov, “The correspondence principle in quantum field theory and relativistic boson string theory”, *Math. USSR-Sb.*, **67**:1 (1990), 209–233.
9. А. Ю. Хренников, “Бесконечномерные псевдодифференциальные операторы”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **51**:6 (1987), 1265–1291; англ. пер.: A. Yu. Khrennikov, “Infinite-dimensional pseudodifferential operators”, *Math. USSR-Izv.*, **31**:3 (1988), 575–601.
10. А. Ю. Хренников, Х. Петерссон, “Теорема Пэли–Винера для обобщенных целых функций на бесконечномерных пространствах”, *Изв. РАН Сер. матем.*, **65**:2 (2001), 201–224; англ. пер.: A. Yu. Khrennikov, H. Petersson, “A Paley–Wiener theorem for generalized entire functions on infinite-dimensional spaces”, *Izv. Math.*, **65**:2 (2001), 403–424.

А. Ю. ХРЕННИКОВ (A. YU. KHRENNIKOV)
 Växjö University
 E-mail: Andrei.Khrennikov@vxu.se

Поступило в редакцию
 06.02.2006

Перевод с англ. А. В. Домрина