Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Кузьмин, О формулах для числа классов вещественных абелевых полей, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1996, том 60, выпуск 4, 43–110

DOI: <https://doi.org/10.4213/im79>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 18:17:37

УДК 519.4

Л. В. Кузьмин

О формулах для числа классов вещественных абелевых полей

Для заданных вещественного абелева поля k и простого натурального ℓ получена индексформула для порядка группы $\text{Cl}(k)_{\ell, \varphi}$, где $\text{Cl}(k)_{\ell}$ — ℓ -компонента группы классов поля k и $\text{Cl}(k)_{\ell, \varphi}$ означает φ -компоненту группы $\text{Cl}(k)_{\ell}$, соответствующую $\mathbf{Q}_{\ell}$ -неприводимому характеру φ группы Галуа $G(k/\mathbf{Q})$, тривиальному на силовой ℓ -подгруппе группы $G(k/\mathbf{Q})$. Этот результат обобщает гипотезу Гра. Доказательства основаны на использовании “основной гипотезы” теории Ивасава.

Библиография: 17 наименований.

Введение

Пусть k — вещественное абелево поле с группой классов $\text{Cl}(k)$ и числом классов h . Если k имеет вид $k = \mathbf{Q}(\varepsilon_{\ell} + \varepsilon_{\ell}^{-1})$, т.е. k является максимальным вещественным подполем кругового поля $\mathbf{Q}(\varepsilon_{\ell})$, где ε_{ℓ} — первообразный корень из единицы степени ℓ и ℓ — простое число, то еще Куммер доказал, что h равно индексу подгруппы круговых единиц $C(k)$ в группе всех единиц $U(k)$.

Этот результат был обобщен рядом авторов на некоторые другие типы вещественных абелевых полей и другие типы круговых единиц (см. ссылки в [16]). Наиболее важные результаты в этом направлении были получены Синноттом. В [15] он доказал, что в случае, когда k является максимальным вещественным подполем некоторого кругового поля $\mathbf{Q}(\varepsilon_m)$, т.е. $k = \mathbf{Q}(\varepsilon_m + \varepsilon_m^{-1})$, справедливо равенство

$$[U(k) : C(k)] = 2^b h(k). \quad (0.1)$$

Здесь $C(k)$ — группа круговых единиц поля k в смысле Синнотта (ниже в этом разделе мы дадим ее определение), а b — неотрицательное целое число, зависящее только от числа g различных простых делителей m . Именно,

$$b = 0 \text{ при } g = 1 \text{ и } b = 2^{g-2} - g + 1 \text{ при } g > 1. \quad (0.2)$$

Синнотт получил также формулу

$$[U(k) : C(k)] = c_k^+ h(k), \quad (0.3)$$

которая справедлива для любого абелева вещественного поля [16]. В этом случае группа круговых единиц $C(k)$ и дополнительный множитель c_k^+ определяются более сложным способом. Доказательство формул (0.1) и (0.3), данное Синноттом, основано на использовании аналитической формулы для числа классов. Поэтому его доказательство ничего не говорит нам о соотношении между двумя абелевыми группами $U(k)/C(k)$ и $\text{Cl}(k)$ даже в случае, когда эти группы имеют одинаковые

порядки. Однако хорошо известно, что в общем случае эти группы не изоморфны. Например, если k – вещественное квадратичное поле, то группа $U(k)/C(k)$ всегда циклическая, в то время как группа $\text{Cl}(k)$ не является циклической в общем случае. Тем не менее Ж. Гра [2] предположил, что для любого вещественного абелева поля k и любого простого ℓ , взаимно простого со степенью $[k : \mathbf{Q}]$, ℓ -компоненты групп $\text{Cl}(k)$ и $U(k)/C(k)$ имеют изоморфные композиционные ряды Жордана–Гёльдера. Впервые эта гипотеза была полностью доказана в [17]. Следует отметить, что недавно В. А. Кольвагин [6] получил относительно простое доказательство этой гипотезы в случае, когда $k = \mathbf{Q}(\varepsilon_\ell + \varepsilon_\ell^{-1})$.

Настоящая работа возникла из желания достичь лучшего понимания взаимосвязи между группами $\text{Cl}(k)$ и $U(k)/C(k)$ для произвольного вещественного абелева поля k . В частности, мы получили уточнение формул Синнотта (0.1) и (0.3). Чтобы сформулировать наши основные результаты, прежде всего заметим, что мы можем рассматривать только “ ℓ -компоненты” формул (0.1) и (0.3) для произвольного, но фиксированного простого ℓ . Например, формула (0.1) эквивалентна утверждению, что для любого простого ℓ порядки ℓ -компонент $(U(k)/C(k))_\ell$ и $\text{Cl}(k)_\ell$ совпадают (с учетом дополнительного множителя 2^b для $\ell = 2$). Мы пользуемся чисто ℓ -адическими методами, поэтому в дальнейшем мы предполагаем, что все рассматриваемые поля являются подполями некоторого фиксированного алгебраического замыкания $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ поля рациональных ℓ -адических чисел $\mathbf{Q}_\ell$, а все рассматриваемые характеры принимают значения в $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$. Пусть $G = G(k/\mathbf{Q})$ и $G = G_\ell \times G_0$, где G_ℓ – силовская ℓ -подгруппа группы G , а порядок группы G_0 взаимно прост с ℓ . Пусть φ – некоторый $\mathbf{Q}_\ell$ -неприводимый характер группы G_0 . Тогда для любого $\mathbf{Z}_\ell[G]$ -модуля A имеется разложение $A = \bigoplus_{\varphi \in \Phi} A_\varphi$, где φ пробегает множество Φ всех $\mathbf{Q}_\ell$ -неприводимых характеров G_0 и A_φ совпадает с $e_\varphi A$, где e_φ – идемпотент, соответствующий φ . Через φ_0 мы обозначим тривиальный характер группы G_0 . Для любой конечно порожденной абелевой группы B через $B[\ell]$ мы обозначаем про- ℓ -пополнение B . Мы доказываем следующие результаты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть k – максимальное вещественное подполе некоторого кругового поля $\mathbf{Q}(\varepsilon_m)$. Тогда для любого простого ℓ и любого характера $\varphi \in \Phi$ справедливо равенство

$$[U(k)[\ell]_\varphi : C(k)[\ell]_\varphi] = \lambda |\text{Cl}(k)_{\ell, \varphi}|, \quad (0.4)$$

где

$$\lambda = \begin{cases} 1 & \text{при } \ell \neq 2, \\ 1 & \text{при } \ell = 2 \text{ и } \varphi \neq \varphi_0, \\ 2^b & \text{при } \ell = 2 \text{ и } \varphi = \varphi_0, \end{cases}$$

а b задается формулой (0.2).

ТЕОРЕМА 2. Пусть k – произвольное вещественное абелево поле. Тогда для любого простого ℓ и любого $\varphi \in \Phi$ справедливо равенство

$$[U(k)[\ell]_\varphi : C(k)[\ell]_\varphi] = c_{k, \varphi}^+ |\text{Cl}(k)_{\ell, \varphi}| \quad (0.5)$$

с некоторым рациональным $c_{k, \varphi}^+$, причем определение множителя $c_{k, \varphi}^+$, которое будет дано ниже, не зависит явно от арифметики поля k .

Позже мы покажем, что $c_{k, \varphi}^+$ в некотором естественном смысле можно рассматривать как φ -компоненту константы Синнотта c_k^+ . Поэтому (0.4) и (0.5) можно

рассматривать как уточнение формул (0.1) и (0.3). Отметим, что гипотеза Гра эквивалентна утверждению, что для $G = G_0$ имеет место равенство

$$[U(k)[\ell]_\varphi : C(k)[\ell]_\varphi] = |\mathrm{Cl}(k)_{\ell, \varphi}|.$$

Таким образом, мы можем рассматривать теоремы 1 и 2 как обобщение гипотезы Гра.

Оказывается, что теория Ивасава является основным инструментом, позволяющим доказать эти теоремы и некоторые другие связанные с ними результаты. Эта теория имеет дело с круговым $\mathbf{Z}_\ell$ -расширением $k_\infty = \bigcup_{n=0}^\infty k_n$, $[k_n : k] = \ell^n$ заданного поля $k = k_0$, где ℓ – некоторое фиксированное простое число. Для любого такого расширения определен модуль Тэйта (модуль Ивасава) $T_\ell(k_\infty)$, который можно определить как $\varprojlim \mathrm{Cl}(k_n)_{S, \ell}$. Здесь $\mathrm{Cl}(k_n)$ совпадает с группой классов поля k_n , $\mathrm{Cl}(k_n)_S$ обозначает факторгруппу группы $\mathrm{Cl}(k_n)$ по подгруппе, порожденной всеми простыми дивизорами $v \in S$, где S – множество всех точек поля, лежащих над ℓ , индекс ℓ означает переход к ℓ -компоненте и проективный предел берется относительно норменных отображений. Глобальная теория полей классов позволяет нам интерпретировать $T_\ell(k_\infty)$ как группу Галуа максимального абелева неразветвленного ℓ -расширения M_∞ поля k_∞ такого, что все точки поля k_∞ , лежащие над ℓ , вполне распадаются в M_∞/k_∞ . Группа Галуа $T_\ell(k_\infty) = G(M_\infty/k_\infty)$ является абелевой про- ℓ -группой и Γ -модулем относительно действия группы $\Gamma = G(k_\infty/k) \cong \mathbf{Z}_\ell$.

Рассмотрим группу $T_\ell(k_\infty)_{(0)} = T_\ell(k_\infty)/(\gamma - 1)$, где γ – некоторая фиксированная топологическая образующая группы Γ . Группу $T_\ell(k_\infty)_{(0)}$ можно интерпретировать как группу Галуа $G(M_\infty^0/k_\infty)$, где M_∞^0 – максимальное подполе поля M_∞ , абелево над k . Хорошо известно, что гипотеза Леопольдта справедлива для любого вещественного абелева поля, поэтому $T_\ell(k_\infty)_{(0)}$ является конечной абелевой ℓ -группой.

Нашим первым основным результатом является некоторая индексформула, дающая порядок групп $T_\ell(k_\infty)_{(0)}$ и $T_\ell(k_\infty)_{(0), \varphi}$ для любого $\varphi \in \Phi$.

ТЕОРЕМА 3. *Для любого вещественного абелева поля k и любого $\varphi \in \Phi$ справедливы равенства*

$$|T_\ell(k_\infty)_{(0)}| = [\widehat{U}_S(k) : C_S(k)], \quad (0.6)$$

$$|T_\ell(k_\infty)_{(0), \varphi}| = [\widehat{U}_S(k)_\varphi : C_S(k)_\varphi]. \quad (0.7)$$

Здесь $\widehat{U}_S(k)$ означает некоторую модифицированную группу единиц, а $C_S(k)$ означает некоторую модифицированную группу круговых единиц. Полное определение этих групп будет приведено ниже.

Заметим, что формулировка теоремы 3 не содержит никаких дополнительных множителей. Мы докажем теорему 3 с помощью теории Ивасава, а затем выведем теоремы 1 и 2 из теоремы 3.

Теперь мы дадим полное определение групп $\widehat{U}_S(k)$ и $C_S(k)$. Затем мы более подробно опишем наш метод и содержание работы, отмечая наиболее важные промежуточные результаты.

Для произвольного поля k пусть k^* – мультипликативная группа поля k , $\mu(k)$ – группа всех корней из единицы в k и $\mu_\ell(k)$ означает ℓ -компоненту группы $\mu(k)$.

Для поля алгебраических чисел k пусть k_v означает v -пополнение k относительно некоторой точки $v \mid \ell$. Тогда мы положим

$$\mathcal{B}(k_v) := (k_v^*/\mu(k_v))[\ell] \quad \text{и} \quad \mathcal{B}(k) := \prod_{v \mid \ell} \mathcal{B}(k_v).$$

Если $k_{\infty, v}$ является круговым $\mathbf{Z}_{\ell}$ -расширением k_v , то мы определим $H(k_v)$ как подгруппу всех универсальных норм в группе $\mathcal{B}(k_v)$ относительно расширения $k_{\infty, v}/k_v$, т.е.

$$H(k_v) = \bigcap_{n=1}^{\infty} N_{k_{n, v}/k_v} \mathcal{B}(k_{n, v}).$$

Положим

$$H(k) := \prod_{v \mid \ell} H(k_v).$$

Тогда из локальной теории полей классов следует, что группа $H(k_v)$ (соответственно $H(k)$) является свободным $\mathbf{Z}_{\ell}$ -модулем ранга $[k_v : \mathbf{Q}_{\ell}]$ (соответственно ранга $[k : \mathbf{Q}]$).

Для абелева поля k обозначим через $U_S(k)$ группу S -единиц поля k , где S было определено выше. Положим $\overline{U}_S(k) = U_S(k)/\mu(k)$, $\overline{U}(k) = U(k)/\mu(k)$. Поскольку гипотеза Леопольдта справедлива для поля k , естественное отображение $\overline{U}_S(k)[\ell] \rightarrow \mathcal{B}(k)$ инъективно, поэтому мы можем рассматривать $\overline{U}_S(k)[\ell]$ как подгруппу группы $\mathcal{B}(k)$. Положим

$$\widehat{U}_S(k) := \overline{U}_S(k)[\ell] \cap H(k).$$

Мы можем считать, что $\widehat{U}_S(k)$ – это подгруппа группы $\overline{U}_S(k)[\ell]$, состоящая из всех локальных универсальных норм из поля k_{∞} .

Чтобы определить для абелева поля k группу круговых S -единиц $C_S(k)$, мы заметим, что k является подполем некоторого кругового поля $K = \mathbf{Q}(\varepsilon_m)$. Мы можем предположить, что K содержит первообразный корень из единицы степени ℓ (K содержит $\sqrt{-1}$ при $\ell = 2$). Тогда любое промежуточное подполе K_n кругового $\mathbf{Z}_{\ell}$ -расширения K_{∞}/K тоже будет круговым. Положим $H = G(K_{\infty}/k_{\infty})$.

Пусть $P(K_n)$ – группа круговых чисел в смысле Синнотта [15], т.е. $P(K_n)$ – подгруппа группы K_n^* , порожденная всеми числами вида $1 - \varepsilon$, $\varepsilon \in \mu(K_n)$, $\varepsilon \neq 1$. Тогда Синнотт определяет круговые единицы поля K_n формулой $C(K_n) := P(K_n) \cap U(K_n)$, где $U(K_n)$ – группа единиц поля K_n . Положим

$$C(K_{\infty}) := \varprojlim (C(K_n)/\mu(K_n)[\ell]), \quad \overline{U}_S(K_{\infty}) := \varprojlim (\overline{U}_S(K_n)[\ell])$$

и

$$\overline{U}_S(k_{\infty}) := \varprojlim (\overline{U}_S(k_n)[\ell]),$$

где все проективные пределы берутся относительно норменных отображений. Мы рассматриваем $C(K_{\infty})$ как подгруппу группы $H(K_{\infty}) := \varprojlim \mathcal{B}(K_n) = \varprojlim H(K_n)$.

Мы определим группы $\overline{U}_S(k_{\infty})$ и $H(k_{\infty})$ аналогичным образом. Естественное вложение $k_{\infty} \subset K_{\infty}$ индуцирует вложения $H(k_{\infty}) \subset H(K_{\infty})$, $\overline{U}_S(k_{\infty}) \subset \overline{U}_S(K_{\infty})$. Пусть

$$\widetilde{C}(k_{\infty}) := C(K_{\infty})^H, \quad \widetilde{H}(k_{\infty}) := H(K_{\infty})^H.$$

Положим

$$\tilde{C}_S(k_\infty) := \{x \in \tilde{H}(k_\infty) \mid (\gamma_n - 1)x \in \tilde{C}(k_\infty) \text{ при некотором натуральном } n\},$$

где $\gamma_n = \gamma^{\ell^n}$, и

$$C_S(k_\infty) = \tilde{C}_S(k_\infty) \cap \overline{U}_S(k_\infty).$$

Имеется естественная проекция

$$\pi: \overline{U}_S(k_\infty) \longrightarrow \overline{U}_S(k)[\ell], \quad (0.8)$$

и очевидно, что $\text{Im } \pi \subset \widehat{U}_S(k)$. Мы определим S -круговые единицы поля k формулой

$$C_S(k) := \pi(C_S(k_\infty)) \subset \widehat{U}_S(k).$$

Отметим, что все определенные нами группы являются модулями Галуа. Более того, группы $H(K_\infty)$, $\overline{U}_S(K_\infty)$, $C(K_\infty)$ и т.д. имеют естественное строение R_∞ -модулей, где $R_\infty := \varprojlim \mathbf{Z}_\ell[G(K_n/\mathbf{Q})]$ – пополненное групповое кольцо группы Галуа $G_\infty := G(K_\infty/\mathbf{Q})$. Существует естественное разложение в прямое произведение $G(K_\infty/\mathbf{Q}) = \Gamma \times V$, где $\Gamma = G(\mathbf{Q}_\infty/\mathbf{Q})$ и $V = G(E/\mathbf{Q})$, E – максимальное подполе поля K , кондуктор которого не делится на ℓ^2 (не делится на ℓ^3 при $\ell = 2$). Мы имеем $R_\infty = \Lambda[V]$, где $\Lambda = \mathbf{Z}_\ell[[\Gamma]] \cong \varprojlim [\Gamma/\Gamma_n]$ и Γ_n – единственная подгруппа группы Γ индекса ℓ^n . Зафиксировав топологическую образующую $\gamma \in \Gamma$, мы получаем изоморфизм $\Lambda \cong \mathbf{Z}_\ell[[T]]$, $\gamma \rightarrow 1 + T$, где $\mathbf{Z}_\ell[[T]]$ – кольцо формальных степенных рядов от одной переменной T над $\mathbf{Z}_\ell$.

В § 1 мы даем характеристику группы $C(K_\infty)$ как Λ -модуля. Используя результаты Кубера [7], [8] об ординарных универсальных распределениях, мы доказываем, что $C(K_\infty)$ является свободным Λ -модулем (теорема 1.1).

В § 2 мы рассматриваем характеристические ряды конечно порожденных Λ -периодических R_∞ -модулей A . В случае, когда A свободен над $\mathbf{Z}_\ell$, мы получаем формулу, выражающую порядок $|A_{(0),\varphi}^H| = |A_{\varphi,(0)}^H|$ в терминах характеристических рядов A (предложение 2.3), где H – некоторая подгруппа группы V . Затем мы даем описание характеристических рядов R_∞ -модуля $\mathcal{A}(K_\infty)/C(K_\infty)$, где $\mathcal{A}(K_\infty) := \varprojlim \mathcal{A}(K_n)$ и $\mathcal{A}(K_n) := \prod_{v|\ell} \overline{U}(K_{n,v})$, $\overline{U}(K_{n,v}) = U(K_{n,v})/\mu(K_{n,v})$. Это описание основано на теореме Ивасава о круговых единицах [4], [11], [12]. Мы показываем, что рассматриваемые характеристические ряды тесно связаны с так называемыми рядами Ивасава.

В § 3 мы продолжаем вычисление характеристических рядов. Пусть $T_\ell(K_\infty)^+$ – максимальная подгруппа группы $T_\ell(K_\infty)$, неподвижная относительно действия автоморфизма комплексного сопряжения. Положим $\overline{U}(K_\infty) = \varprojlim \overline{U}(K_n)[\ell]$. Мы доказываем (теорема 3.1), что модули $T_\ell(K_\infty)^+$ и $\overline{U}(K_\infty)/C(K_\infty)$ имеют одинаковые характеристические ряды для любого четного характера группы V . Доказательство основывается на так называемой “основной гипотезе теории Ивасава” [4], [13], [17], а также на некоторых теоремах двойственности, полученных автором в [10]. Затем мы обобщаем этот результат на случай произвольного абелева числового поля k и его кругового $\mathbf{Z}_\ell$ -расширения k_∞ .

В § 4 мы доказываем теорему 3 введения. Коротко говоря, если k – вещественное абелево поле, то существует точная последовательность

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow T_\ell(k_\infty) \longrightarrow R \longrightarrow 0, \quad (0.9)$$

где P – максимальный конечный подмодуль модуля $T_\ell(k_\infty)$ и модуль R свободен над $\mathbf{Z}_\ell$. Мы получаем из (0.9), что

$$|T_\ell(k_\infty)_{(0),\varphi}| = |P_{(0),\varphi}| \cdot |R_{(0),\varphi}| \quad (0.10)$$

для любого φ . С другой стороны, обозначая через $U_S^*(k)$ образ $\pi(\overline{U}_S(k_\infty))$ в формуле (0.8), мы получаем вложения $C_S \subseteq U_S^*(k) \subseteq \widehat{U}_S(k)$. Таким образом, мы имеем

$$|\widehat{U}_S(k)_\varphi / C_S(k)_\varphi| = [\widehat{U}_S(k)_\varphi : U_S^*(k)_\varphi] \cdot [U_S^*(k)_\varphi : C_S(k)_\varphi] \quad (0.11)$$

для любого $\varphi \in \Phi$. Используя характеристические ряды, мы доказываем, что

$$|U_S^*(k)_\varphi : C_S(k)_\varphi| = |R_{(0),\varphi}| \quad (0.12)$$

для любого φ .

В [9, предложение 7.5] было доказано существование естественного изоморфизма

$$\widehat{U}_S(k) / U_S^*(k) \cong T_\ell(k_\infty)^\Gamma. \quad (0.13)$$

Мы даем в §4 короткое независимое доказательство (0.13) (см. предложение 4.3). Тогда теорема 3 непосредственно следует из (0.10)–(0.13).

Чтобы вывести теоремы 1 и 2 из теоремы 3, нам необходима некоторая модификация теоремы 3. Пусть ν_ℓ означает ℓ -адический показатель в $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$, нормализованный так, чтобы выполнялось условие $\nu_\ell(\ell) = 1$. В §5 нами доказывается

ТЕОРЕМА 4. *Для любого вещественного абелева поля k и любого характера $\varphi \in \Phi$ справедливо равенство*

$$\nu_\ell(|T_\ell(k_\infty)_{(0),\varphi}|) = \nu_\ell \left([H(k)_\varphi : \widehat{U}_S(k)_\varphi]^{-1} \ell^{t_\varphi} \prod_{\substack{\chi \neq 1 \\ \chi | \varphi}} \frac{1}{2} L_\ell(1, \chi) \right), \quad (0.14)$$

где χ пробегает все нетривиальные одномерные характеры группы $G = G(k/\mathbf{Q})$ такие, что ограничение $\chi|_{G_0}$ входит в φ , t_φ – некоторый множитель, определенный явно в теореме 5.1, а $L_\ell(s, \chi)$ означает ℓ -адическую L -функцию Куботы–Леопольдта [5].

Отметим, что справедливо равенство

$$[\widehat{U}_S(k)_\varphi : C_S(k)_\varphi] = [H(k)_\varphi : \widehat{U}_S(k)_\varphi]^{-1} [H(k)_\varphi : C_S(k)_\varphi],$$

поэтому единственное отличие данной ситуации от ситуации теоремы 3 состоит в том, что мы даем явную формулу для индекса $[H(k)_\varphi : C_S(k)_\varphi]$. Эта формула получена нами из рассмотрения характеристических рядов модуля $H(k_\infty)/C_S(k_\infty)$. Эти ряды тесно связаны с рядами Ивасавы. Отметим, что открытая Ивасавой [5] связь между рядами Ивасавы и ℓ -адическими L -функциями объясняет, почему (0.14) содержит значения функции $L_\ell(1, \chi)$.

В §6 мы доказываем один результат, который можно рассматривать как уточнение теоремы Хассе о дискриминанте и ведущем модуле. Для абелева поля алгебраических чисел k рассмотрим алгебру Галуа $\mathbf{A}_k = k \otimes_{\mathbf{Q}} \overline{\mathbf{Q}}_\ell$. Пусть $\mathbf{R}_k$ – максимальный порядок алгебры $\mathbf{A}_k$. Естественное вложение $k \hookrightarrow \mathbf{A}_k$ индуцирует вложение $\alpha: \mathcal{O}_k \hookrightarrow \mathbf{R}_k$, где $\mathcal{O}_k$ – кольцо целых поля k . Положим $\overline{\mathcal{O}}_k = \overline{\mathcal{O}} \cdot \alpha(\mathcal{O}_k) \subset \mathbf{R}_k$, где $\overline{\mathcal{O}}$ – кольцо целых поля $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$. Тогда выполняется (теорема 6.1)

ТЕОРЕМА 5. Для любого $\varphi \in \Phi$ справедливо равенство

$$\nu_\ell((\mathbf{R}_{k,\varphi} : \tilde{\mathcal{O}}_{k,\varphi})) = \nu_\ell\left(\prod_{\substack{\chi \neq 1 \\ \chi|\varphi}} g_{\bar{\chi}}\right),$$

где $(A : B)$ означает обобщенный индекс в смысле Синнотта [15], а $g_{\bar{\chi}}$ – гауссова сумма, соответствующая характеру $\bar{\chi} = \chi^{-1}$.

В §7 мы вычисляем некоторые индексы единиц. Пусть k – вещественное абелево поле и $G = G(k/\mathbf{Q})$. Как и в [15], для $\mathbf{Z}_\ell[G]$ -модуля A , свободного над $\mathbf{Z}_\ell$, мы полагаем

$$A_0 = \{x \in A \mid \text{Sp}_G(x) = 0\},$$

где Sp_G – отображение следа относительно группы G . Мы доказываем (теорема 7.1), что для любого $\varphi \in \Phi$

$$\ell^{s_\varphi} \frac{|T_\ell(k_\infty)_{(0),\varphi}|}{|\text{Cl}(k)_{\ell,\varphi}|} = \frac{[\mathcal{A}(k)_{0,\varphi} : \bar{U}(k)[\ell]_\varphi]}{[H(k)_\varphi : \hat{U}_S(k)_\varphi]}, \quad (0.15)$$

где $s_\varphi = 0$ при $\varphi \neq \varphi_0$ и s_{φ_0} – некоторая простая константа, явно указанная в предложении 7.4.

Пусть $\text{Log} : \bar{U}(k)[\ell] \hookrightarrow \mathbf{A}_k$ – композиция отображений $\log : \bar{U}(k)[\ell] \hookrightarrow k \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_\ell$, индуцированного отображением ℓ -адического логарифма, и естественного вложения $k \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_\ell \hookrightarrow \mathbf{A}_k = k \otimes_{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{Q}}_\ell$. Положим $\tilde{U}(k) = \bar{\mathcal{O}} \text{Log}(\bar{U}(k)[\ell])$. Следующая теорема (теорема 7.3) может рассматриваться как ℓ -адическая аналитическая формула для числа классов некоторой φ -компоненты ℓ -группы классов.

ТЕОРЕМА 6. Для произвольного вещественного абелева поля k и любого характера $\varphi \in \Phi$ справедливо равенство

$$\nu_\ell(|\text{Cl}(k)_{\ell,\varphi}|) = \nu_\ell\left((\mathbf{R}_{k,0,\varphi} : \tilde{U}(k)_\varphi)^{-1} \prod_{\substack{\chi \in \hat{G} \\ \chi|\varphi, \chi \neq 1}} \frac{1}{2} a(\chi)\right),$$

где

$$a(\chi) = \sum_{\substack{a \bmod f_\chi \\ (a, f_\chi)=1}} \bar{\chi}(a) \log(1 - \varepsilon_\chi^a),$$

f_χ – кондуктор χ , ε_χ – первообразный корень из единицы степени f_χ и $\log$ означает ℓ -адический логарифм.

Отметим, что индекс $(\mathbf{R}_{k,0,\varphi} : \tilde{U}(k)_\varphi)$ можно интерпретировать как φ -компоненту ℓ -адического регулятора поля k .

Мы выводим теорему 6 из теорем 4 и 5 и из (0.15). Затем, используя метод Синнотта, мы получаем (теорема 7.4) “абстрактную индексформулу”. Эта формула выражает порядок $|\text{Cl}(k)_{\ell,\varphi}|$ в терминах индекса $[\bar{U}(k)[\ell]_\varphi : C_{k,\varphi}]$, где группа круговых единиц C_k определяется аксиоматически.

В §8 мы, используя аргументы Синнотта, выводим теорему 1 из теоремы 7.4 (см. теорему 8.3).

В §9 мы доказываем теорему 2 (см. теорему 9.2). Затем мы доказываем формулу для числа классов еще одного типа (см. теорему 9.3). Эта формула содержит модифицированную группу круговых единиц и модифицированные константы $c_{k,\varphi}^+$. В некоторых частных случаях удастся явно вычислить эти модифицированные константы, что приводит к нетривиальным сравнениям для числа классов некоторых вещественных абелевых полей (см. теоремы 9.4 и 9.5). Отметим, что похожие (и даже более сильные) результаты были получены Корнеллом [1] с помощью теории родов.

В §10 мы даем некоторые замечания к нашим результатам и формулируем ряд открытых проблем.

Автор глубоко благодарен профессору Х. Коху и его коллегам по рабочей группе “Алгебраическая геометрия и теория чисел” при институте Макса Планка, чье гостеприимство помогло автору выполнить значительную часть данной работы.

Автор благодарит также М. Ж. Шматикова, научившего его пользоваться системой L^AT_EX, и Н. В. Игумнову за помощь в подготовке рукописи.

§1. О круговых единицах в $\mathbf{Z}_\ell$ -расширениях

Пусть ℓ – фиксированное простое число и $d \not\equiv 2 \pmod{4}$ – некоторое натуральное число, взаимно простое с ℓ . Мы считаем d фиксированным на протяжении всего параграфа. Пусть μ_d – группа всех корней из единицы степени d в некотором фиксированном алгебраическом замыкании $\overline{\mathbf{Q}}$ поля $\mathbf{Q}$. Мы полагаем $K_{-1} := \mathbf{Q}(\mu_d)$ и $K_n := \mathbf{Q}(\mu_d, \zeta_n)$ при любом $n \geq 0$, где $\zeta_n \in \overline{\mathbf{Q}}$ – первообразный корень из единицы степени ℓ^{n+1} (степени ℓ^{n+2} при $\ell = 2$). Мы выберем корни ζ_n таким образом, чтобы при любом n выполнялось равенство $\zeta_{n+1}^\ell = \zeta_n$. Тогда любое круговое поле имеет вид K_n для некоторых d и n , причем при фиксированном d поля K_n , $n \geq 0$, образуют башню всех промежуточных подполей кругового $\mathbf{Z}_\ell$ -расширения K_∞/K_0 , где по определению $K_\infty := \bigcup_{n=1}^\infty K_n$. Мы обозначаем через $\mu(K_n)$ (соответственно через $\mu_\ell(K_n)$) группу всех корней из единицы в поле K_n (соответственно ℓ -компоненту группы $\mu(K_n)$).

Пусть $P(K_n)$ и $C(K_n)$ – определенные во введении группы круговых чисел и круговых единиц соответственно. Заметим, что элементы $(1 - \alpha\zeta_n^i)$, где $\alpha \in \mu_d$, $i = 0, \dots, \ell^{n+1+\delta} - 1$, порождают всю группу $P(K_n)$. Если это не приводит к недоразумению, мы будем обозначать эти группы просто через P_n и C_n , опуская символ K . Мы полагаем $P_\infty := \varprojlim P_n[\ell]$, $C_\infty := \varprojlim C_n[\ell]$, где $\overline{P}_n := P_n/\mu(K_n)$, $\overline{C}_n := C_n/(\mu(K_n) \cap C_n)$ и символ $[\ell]$ означает ℓ -пополнение. Таким образом, как было отмечено во введении, группы P_∞ и C_∞ являются R_∞ -модулями и Λ -модулями.

Для $\alpha \in \mu_d$ мы положим $\varepsilon_n(\alpha) := 1 - \alpha^{\ell^{-n-\delta}} \zeta_n$, где $\delta = 0$ при $\ell \neq 2$ и $\delta = 1$ при $\ell = 2$. Элементы $\varepsilon_n(\alpha)$ образуют при $n \geq 0$ последовательность, согласованную относительно норменных отображений. Следовательно, мы имеем элемент

$$\varepsilon_\infty(\alpha) := \varprojlim \varepsilon_n(\alpha) \in P_\infty.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Элементы $\varepsilon_\infty(\alpha)$, где α пробегает μ_d , порождают P_∞ как R_∞ -модуль.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть D_n – подмодуль Галуа в группе $\bar{P}_n$, порожденный всеми элементами $\varepsilon_n(\alpha)$ для $\alpha \in \mu_d$. Так как $N_{K_n/K_r}(\varepsilon_n(\alpha)) = \varepsilon_r(\alpha)$ для $n > r \geq 0$, мы имеем $\bar{P}_n = D_n \cdot \bar{P}_{-1}$. Следовательно,

$$P_\infty = \varprojlim \bar{P}_n[\ell] = \varprojlim D_n[\ell].$$

Чтобы исследовать строение групп P_∞ и C_∞ , как модулей Галуа, нам потребуются некоторые результаты об универсальных распределениях, полученные в [7], [8]. По определению *универсальным распределением на группе $\frac{1}{N}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$* для некоторого натурального N называется абелева группа $U(N)$, порожденная символами (a) для всех $a \in \frac{1}{N}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$, удовлетворяющими соотношениям

$$\sum_{mb=a} (b) = (a) \quad \text{для любого } a \in \frac{1}{N}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}, \quad m \mid N. \quad (1.1)$$

Согласно [7] группа $U(N)$ является свободной абелевой группой. Естественное действие группы $G(N) = (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*$ на $\frac{1}{N}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$ индуцирует действие $G(N)$ на $U(N)$, и мы имеем изоморфизм $G(N)$ -модулей [7, теорема 4.11]

$$U(N) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \cong \mathbf{Q}[G(N)]. \quad (1.2)$$

Если $N \mid N_1$, то естественное включение $\frac{1}{N}\mathbf{Z}/\mathbf{Z} \hookrightarrow \frac{1}{N_1}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$ и отображение $\frac{1}{N_1}\mathbf{Z}/\mathbf{Z} \rightarrow \frac{1}{N}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$, переводящее $x \in \frac{1}{N_1}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$ в $\frac{N_1}{N}x \in \frac{1}{N}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$, индуцируют отображения $i(N, N_1) : U(N) \rightarrow U(N_1)$ и $N(N_1, N) : U(N_1) \rightarrow U(N)$. Хорошо известно, что отображение $i(N, N_1)$ всегда инъективно. Из (1.1) немедленно следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *При произвольном простом ℓ пусть $N \equiv 0 \pmod{\ell}$. Пусть $N_1 = \ell N$. Обозначим через $H(N_1, N)$ ядро естественной проекции $G(N_1) \rightarrow G(N)$. Тогда отображение $i(N, N_1) \circ N(N_1, N) : U(N_1) \rightarrow U(N)$ совпадает с норменным отображением относительно группы $H(N_1, N)$.*

Для произвольного натурального N пусть $Z^*(N)$ – множество всех примитивных элементов группы $\frac{1}{N}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$, т.е. элементов, имеющих порядок в точности N . Пусть $N = \prod_{p \mid N} p^{n(p)}$ – разложение N на простые множители. Тогда имеется естественное разложение

$$\frac{1}{N}\mathbf{Z}/\mathbf{Z} = \prod_{p \mid N} \left(\frac{1}{p^{n(p)}}\mathbf{Z}/\mathbf{Z} \right), \quad Z^*(N) = \prod_{p \mid N} Z^*(p^{n(p)}).$$

ТЕОРЕМА А [7, теорема 1.8, предложение 1.9]. *Пусть*

$$T(N) := \prod_{p \mid N} \left[Z^*(p^{n(p)}) - \left\{ \frac{1}{p^{n(p)}} \right\} \cup \{0\} \right].$$

Тогда элементы (t) для $t \in T(N)$ образуют базис свободной абелевой группы $U(N)$.

Пусть ℓ – простое число, d взаимно просто с ℓ и $d \not\equiv 2 \pmod{4}$. Положим

$$U(\ell^\infty d) := \varprojlim U(\ell^n d) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_\ell,$$

где проективный предел берется относительно отображений $N(\ell^{n+1}d, \ell^n d)$. Мы имеем естественное действие группы $G_\infty := \varprojlim G(\ell^n d)$ на $U(\ell^\infty d)$. Пусть Γ – ядро естественной проекции $G_\infty \rightarrow G(qd)$, где $q = \ell$ при $\ell \neq 2$ и $q = 4$ при $\ell = 2$. Тогда группа $\Gamma \cong \mathbf{Z}_\ell$ действует на $U(\ell^\infty d)$. Таким образом, $U(\ell^\infty d)$ имеет естественное строение Λ -модуля.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. *Группа $U(\ell^\infty d)$ является свободным Λ -модулем ранга $\varphi(qd)$, где $\varphi(x)$ – функция Эйлера.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $N = \ell^n d$, $d = \prod_{p|d} p^{n(p)}$, мы представим множество $T(\ell^n d)$ в виде несвязного объединения

$$T(\ell^n d) = T(\ell^n d)_1 \cup T(\ell^n d)_2,$$

где

$$T(\ell^n d)_1 := \left[Z^*(\ell^n) - \left\{ \frac{1}{\ell^n} \right\} \right] \times \prod_{p|d} \left[Z^*(p^{n(p)}) - \left\{ \frac{1}{p^{n(p)}} \right\} \cup \{0\} \right],$$

$$T(\ell^n d)_2 := \{0\} \times \prod_{p|d} \left[Z^*(p^{n(p)}) - \left\{ \frac{1}{p^{n(p)}} \right\} \cup \{0\} \right].$$

Поскольку существует разложение $\frac{1}{\ell^n d} \mathbf{Z}/\mathbf{Z} \cong \frac{1}{\ell^n} \mathbf{Z}/\mathbf{Z} \oplus \frac{1}{d} \mathbf{Z}/\mathbf{Z}$, любой элемент $a \in \frac{1}{\ell^n d} \mathbf{Z}/\mathbf{Z}$ может быть однозначно представлен в виде $a = (a', a'')$, где $a' \in \frac{1}{\ell^n} \mathbf{Z}/\mathbf{Z}$, $a'' \in \frac{1}{d} \mathbf{Z}/\mathbf{Z}$. Если $H_n \cong (\mathbf{Z}/\ell^n \mathbf{Z})^*$ – ядро естественной проекции $G(\ell^n d) \rightarrow G(d)$, то любые два элемента $a, b \in \frac{1}{\ell^n d} \mathbf{Z}/\mathbf{Z}$ вида $a = (a', a'')$, $b = (b', b'')$ сопряжены относительно действия H_n тогда и только тогда, когда $a'' = b''$ и a', b' имеют один и тот же порядок как элементы группы $\frac{1}{\ell^n} \mathbf{Z}/\mathbf{Z}$. Это означает, что $\mathbf{Z}_\ell[G(\ell^n d)]$ -подмодуль $U_1(\ell^n d)$ модуля $U(\ell^n d) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_\ell$, порожденный всеми (t) , $t \in T(\ell^n d)_1$, может быть порожден как H_n -модуль множеством $\varphi(d)$ элементов (t) , где t пробегает множество

$$T(\ell^n d)_3 := \left\{ \frac{1}{\ell^n} \right\} \times \prod_{p|d} \left[Z^*(p^{n(p)}) - \left\{ \frac{1}{p^{n(p)}} \right\} \cup \{0\} \right].$$

Если мы перейдем к проективному пределу относительно отображений $N(\ell^{n+1}d, \ell^n d)$, то получим, что модуль $U_1(\ell^\infty d) := \varprojlim U_1(\ell^n d)$ может быть порожден $\varphi(d)$ элементами как H_∞ -модуль, где $H_\infty := \varprojlim H_n \cong \mathbf{Z}_\ell^*$. Следовательно, $U_1(\ell^\infty d)$ может быть порожден $\varphi(q)\varphi(d) = \varphi(qd)$ элементами как Λ -модуль. Пусть $U_2(\ell^n d) = \mathbf{Z}_\ell[G(\ell^n d)]$ -подмодуль модуля $U(\ell^n d) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_\ell$, порожденный всеми (t) , где t пробегает множество $T(\ell^n d)_2$. Тогда, рассуждая, как и при доказательстве предложения 1.1, мы получаем, что

$$U(\ell^\infty d) := \varprojlim (U_1(\ell^n d) \cdot U_2(\ell^n d)) = \varprojlim U_1(\ell^n d) = U_1(\ell^\infty d).$$

Таким образом, существует сюръективное отображение Λ -модулей $\alpha : \Lambda^{\varphi(qd)} \rightarrow U(\ell^\infty d)$. Чтобы проверить, что $U(\ell^\infty d)$ является свободным Λ -модулем ранга $\varphi(qd)$, заметим, что естественная проекция $p_n : U_1(\ell^\infty d) \rightarrow U_1(\ell^n d)$ сюръективна для любого n . Сюръективное отображение $p_n \circ \alpha : \Lambda^{\varphi(qd)} \rightarrow U_1(\ell^n d)$ индуцирует сюръекцию $\beta_n : \Lambda_{(n-\delta-1)}^{\varphi(qd)} \rightarrow U_1(\ell^n d)$, где $\delta = 0$ при $\ell \neq 2$ и $\delta = 1$ при $\ell = 2$, причем для любого G_∞ -модуля A через $A_{(i)}$ обозначается результат факторизации A по действию подгруппы $\Gamma_i \subseteq \Gamma$ индекса ℓ^i (таким образом, $\Gamma_{n-\delta-1}$ совпадает с ядром естественного отображения $G_\infty \rightarrow G(\ell^n d)$). Обозначая через $\text{rk}(A)$ $\mathbf{Z}_\ell$ -ранг модуля A , мы получаем, что $\text{rk}(\Lambda_{(n-\delta-1)}^{\varphi(qd)}) = \varphi(\ell^n d)$ и $\text{rk}(U_1(\ell^n d)) \geq \text{rk}(U(\ell^n d)) - |T(\ell^n d)_2| = \varphi(\ell^n d) - \varphi(d)$. Следовательно, $\text{rk}(\text{Ker } \beta_n) \leq \varphi(d)$, поэтому $\text{Ker } \alpha = \varprojlim \text{Ker } \beta_n = 0$. Предложение доказано.

ТЕОРЕМА В [8, теорема 2.16, предложение 3.3]. Пусть $\{\pm \text{id}\} \subset G(N)$ – подгруппа, порожденная элементами ± 1 . Тогда для любого k существует изоморфизм $H^k(\pm \text{id}, U(N)) \cong (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^r$, где $H^k(\ , \)$ – группы когомологий в смысле Тэйта, $r = 2^{\nu(N)-1}$ и $\nu(N)$ – число различных простых делителей N . Пусть $M \mid N$, $\nu(M) = \nu(N)$ и $M \not\equiv 2 \pmod{4}$; тогда включение $i(M, N) : U(M) \hookrightarrow U(N)$ индуцирует изоморфизм

$$i^*(M, N) : H^k(\pm \text{id}, U(M)) \cong H^k(\pm \text{id}, U(N)).$$

СЛЕДСТВИЕ. Если $\ell = 2$, то для любого k

$$H^k(\pm \text{id}, U(\ell^\infty d)) = 0.$$

Действительно, по теореме В при $\ell = 2$ норменное отображение относительно $H(\ell^n d, \ell^{n-1} d)$ совпадает с умножением на $|H(\ell^n d, \ell^{n-1} d)| = 2$ для $n \geq 3$ и, следовательно, обращает в нуль группы $H^k(\pm \text{id}, U(\ell^n d))$ при любом k . Тогда из предложения 1.2 и из изоморфного характера отображений $i^*(\ell^{n-1} d, \ell^n d)$ следует, что отображение $N(\ell^n d, \ell^{n-1} d)$ обращает в нуль группы $H^k(\pm \text{id}, U(\ell^n d))$ при любых k и $n \geq 3$. Следовательно,

$$H^k(\pm \text{id}, U(\ell^\infty d)) = 0.$$

ТЕОРЕМА 1.1. Группы P_∞ и C_∞ являются свободными Λ -модулями ранга $\frac{1}{2}[K_0 : \mathbf{Q}]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α – некоторая фиксированная образующая группы μ_d . Для произвольного элемента

$$\frac{c}{\ell^{n+1+\delta} d} \in \frac{1}{\ell^{n+1+\delta} d} \mathbf{Z}/\mathbf{Z}, \quad c \in \mathbf{Z},$$

положим

$$\psi^n(0) = 1, \quad \psi^n\left(\frac{c}{\ell^n d}\right) = (1 - \alpha^{\ell^{-n} c} \zeta_n^c) \pmod{P_n \cap (\mathbf{Q}^* \times \mu(K^n))}.$$

Тогда мы получаем отображение

$$\psi^n : \frac{1}{\ell^{n+1+\delta} d} \mathbf{Z}/\mathbf{Z} \rightarrow P_n/P_n \cap (\mathbf{Q}^* \times \mu(K_n)).$$

Отображение ψ^n является четным распределением в смысле [7], т.е. оно удовлетворяет соотношениям

$$\sum_{mb=a} \psi^n(b) = \psi^n(a) \quad \text{для любого } a \in \frac{1}{\ell^{n+1+\delta} d} \mathbf{Z}/\mathbf{Z}, \quad m \mid \ell^{n+1+\delta} d$$

и

$$\psi^n(-a) = \psi^n(a).$$

Следовательно, отображение ψ^n определяет естественный эпиморфизм

$$\bar{\psi}^n : U(\ell^{n+1+\delta} d) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_\ell \rightarrow P_n/P_n \cap (\mathbf{Q}^* \times \mu(K_n))[\ell].$$

Отображения $\bar{\psi}^n$ согласованы с действием групп $G(\ell^{n+1+\delta}d) \cong G(K_n/\mathbf{Q})$ и с норменными отображениями, поэтому, переходя к проективному пределу относительно норменных отображений, мы получаем эпиморфизм R_∞ -модулей

$$\bar{\psi}_\infty : U(\ell^\infty d)/U(\ell^\infty d)^- \longrightarrow \varprojlim (P_n/P_n \cap (\mathbf{Q}^* \times \mu(K_n))[\ell]) = P_\infty,$$

где $U(\ell^\infty d)^-$ означает максимальную подгруппу группы $U(\ell^\infty d)$, на которую $-\text{id}$ действует как умножение на -1 .

Поскольку P_∞ можно рассматривать как Λ -подмодуль R_∞ -модуля $H(K_\infty)$, определенного во введении, мы получаем, что P_∞ не имеет Λ -кручения. Из предложения 1.3 и определения группы $U(\ell^\infty d)^-$ следует, что модуль $U(\ell^\infty d)/U(\ell^\infty d)^-$ также не имеет Λ -кручения. Пусть $U(\ell^\infty d)^+$ означает максимальную подгруппу группы $U(\ell^\infty)$, неподвижную относительно действия группы $\{\pm \text{id}\}$. Тогда легко проверить, что оба модуля, $U(\ell^\infty d)^+$ и $U(\ell^\infty d)^-$, имеют Λ -ранг $\frac{1}{2}[K_0 : \mathbf{Q}]$.

Согласно предложению 1.1 для любого n существует естественный эпиморфизм $P_\infty \rightarrow D_n[\ell]$. Согласно [15, теорема 4.1] группа C_n имеет конечный индекс в группе единиц $U(K_n)$, поэтому мы получаем, что $\mathbf{Z}_\ell$ -ранг группы $D_n[\ell]$ удовлетворяет при любом n условию

$$\text{rk } D_n[\ell] \geq \text{rk } U(K_n)[\ell] - \text{rk } \bar{P}_{-1}[\ell],$$

т.е. $\text{rk } D_n[\ell] \geq \frac{1}{2}[K_n : \mathbf{Q}] - c$, где c не зависит от n . Тогда из [9, предложение 1.2] следует, что Λ -ранг модуля P_∞ равен $\frac{1}{2}[K_0 : \mathbf{Q}]$, т.е. отображение $\bar{\psi}_\infty$ является изоморфизмом.

Если $\ell \neq 2$, то $U(\ell^\infty d) = U(\ell^\infty d)^+ \oplus U(\ell^\infty d)^-$, поэтому $\bar{\psi}_\infty$ индуцирует изоморфизм $U(\ell^\infty d)^+ \cong P_\infty$. Следовательно, в этом случае P_∞ свободен как Λ -модуль.

При $\ell = 2$ мы имеем изоморфизм

$$P_\infty \cong U(\ell^\infty d)/U(\ell^\infty d)^- \cong N(U(\ell^\infty d)),$$

где $N(\cdot)$ означает образ норменного отображения относительно группы $\{\pm \text{id}\}$. Согласно следствию из теоремы В $H^0(\{\pm \text{id}\}, U(\ell^\infty d)) = 0$, следовательно, $N(U(\ell^\infty d)) = U(\ell^\infty d)^+$. Чтобы доказать, что $U(\ell^\infty d)^+$ свободен как Λ -модуль, заметим, что $U(\ell^\infty d)^+$ является подмодулем Λ -свободного модуля $U(\ell^\infty d)$, кроме того, $U(\ell^\infty d)/U(\ell^\infty d)^+$ не имеет кручения, поэтому наше утверждение вытекает из [9, предложение 1.1].

Итак, мы показали, что в любом случае P_∞ является Λ -свободным модулем. Чтобы показать, что C_∞ Λ -свободен, заметим, что произвольный $x \in \bar{P}_n[\ell]$ может содержаться в образе естественной проекции $P_\infty \rightarrow \bar{P}_n[\ell]$ только в том случае, когда x принадлежит ℓ -пополнению группы S -единиц, где S состоит из всех простых делителей ℓ . Пусть ε_m — первообразный корень из единицы степени m . Хорошо известно, что число $1 - \varepsilon_m$ является единицей тогда и только тогда, когда число m составное. Если $m = p^r$ для некоторого простого p , то $1 - \varepsilon_{p^r}$ является простым элементом локального поля $\mathbf{Q}_p(\varepsilon_{p^r})$. Тогда легко проверить, что точна последовательность Λ -модулей

$$0 \longrightarrow C_\infty \longrightarrow P_\infty \longrightarrow \mathbf{Z}_\ell \longrightarrow 0,$$

где $\mathbf{Z}_\ell$ порожден элементом $\varepsilon_\infty(1)$. Поскольку P_∞ свободен над Λ , из [9, предложение 1.1] следует, что C_∞ также свободен над Λ , что доказывает теорему.

§2. Некоторые характеристические ряды

Пусть $R_\infty := \mathbf{Z}_\ell[[G_\infty]] := \varprojlim \mathbf{Z}_\ell[G(K_n/\mathbf{Q})]$ – кольцо, определенное во введении. Имеется естественное разложение в прямое произведение $G_\infty := G(K_\infty/\mathbf{Q}) = \Gamma \times V$, где $\Gamma \cong G(\mathbf{Q}_\infty/\mathbf{Q}) \cong G(K_\infty/K_0)$, $V \cong G(K_0/\mathbf{Q}) \cong G(K_\infty/\mathbf{Q}_\infty)$. Если мы зафиксируем некоторую топологическую образующую $\gamma \in \Gamma$, то получим изоморфизм $\Lambda := \mathbf{Z}_\ell[[\Gamma]] \cong \mathbf{Z}_\ell[[T]]$, $\gamma \rightarrow 1 + T$, где $\mathbf{Z}_\ell[[T]]$ – кольцо формальных степенных рядов. Тогда $R_\infty = \Lambda[V]$. Мы предполагаем, что все R_∞ -модули, рассматриваемые ниже, конечно порождены над R_∞ . Если χ – некоторый одномерный характер V , принимающий значения в алгебраическом замыкании $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ поля $\mathbf{Q}_\ell$, то кольцо $\mathcal{O}_\chi$, порожденное над $\mathbf{Z}_\ell$ всеми значениями характера χ , получит естественную структуру V -модуля, если мы положим $\sigma(a) = \chi(\sigma)a$ для любых $\sigma \in V$, $a \in \mathcal{O}_\chi$. Для любого R_∞ -модуля A мы определим χ -компоненту A формулой

$$A_\chi = A \otimes_{\mathbf{Z}_\ell[V]} \mathcal{O}_\chi.$$

Таким образом, $R_{\infty, \chi} \cong \mathcal{O}_\chi[[\Gamma]] \cong \mathcal{O}_\chi[[T]]$. Мы можем рассматривать A_χ как $R_{\infty, \chi}$ -модуль, если положим $T(a \otimes b) = T(a) \otimes b$, $\tau(a \otimes b) = a \otimes \tau(b)$ для $a \in A$, $b, \tau \in \mathcal{O}_\chi$. Положим $V = V_\ell \times V_0$, где V_ℓ – силовская ℓ -подгруппа группы V и $(|V_0|, \ell) = 1$. Пусть Φ – множество всех $\mathbf{Q}_\ell$ -неприводимых характеров группы V_0 . Тогда для любого R_∞ -модуля A имеется разложение в прямое произведение

$$A = \bigoplus_{\varphi \in \Phi} A_\varphi,$$

где $A_\varphi = e_\varphi A$ и e_φ – идемпотент, соответствующий φ . Для одномерного характера $\chi \in \widehat{V}$, где $\widehat{V}$ – группа всех характеров группы V , запись $\chi \mid \varphi$ означает, что ограничение $\chi|_{V_0}$ характера χ на V_0 входит в φ как его неприводимая компонента над $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$. Мы имеем

$$(A_\varphi)_\chi = \begin{cases} A_\chi \cong A_\varphi & \text{при } \chi \mid \varphi, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2.1)$$

Если A является Λ -периодическим модулем, то определен характеристический ряд $f_A = f_A(T) \in \Lambda$ модуля A (см. [5], [12]). Мы напомним некоторые свойства таких рядов. Прежде всего, заметим, что f_A определен однозначно с точностью до умножения на некоторую единицу $u \in \Lambda^*$. Если A, B – квазиизоморфные Λ -периодические модули (т.е. существует гомоморфизм $f : A \rightarrow B$ с конечным ядром и коядром; мы пишем в этом случае $A \sim B$), то $f_A = f_B$. Если $A = \bigoplus_{i=1}^r \Lambda/f_i \Lambda$ для некоторых $f_i \in \Lambda$, $f_i \neq 0$, то $f_A = \prod_{i=1}^r f_i$. Известно, что любой Λ -периодический модуль A квазиизоморфен модулю вида $\bigoplus_{i=1}^r \Lambda/f_i \Lambda$.

Пусть Λ -модуль A конечно порожден над $\mathbf{Z}_\ell$ (в данной работе мы будем иметь дело только с таким случаем). Тогда f_A имеет вид $f_1(T)u$, где $u \in \Lambda^*$ и $f_1(T)$ – отмеченный многочлен вида $T^\lambda + a_{\lambda-1}T^{\lambda-1} + \dots + a_0$, где $a_{\lambda-1}, \dots, a_0 \in \ell\mathbf{Z}_\ell$. Заметим, что мы можем рассматривать $f_1(T)$ как характеристический многочлен оператора $T = \gamma - 1$, действующего на λ -мерном $\mathbf{Q}_\ell$ -пространстве $A \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell$. Если R_∞ -модуль A является Λ -периодическим, то для любого $\chi \in \widehat{V}$ существует характеристический ряд $f_A(T, \chi) \in \mathcal{O}_\chi[[T]]$ -модуля A_χ , определяемый аналогичным образом. Следующее утверждение хорошо известно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть A – R_∞ -модуль, который конечно порожден над $\mathbf{Z}_\ell$ и, следовательно, является Λ -периодическим. Тогда

$$f_A(T) = \prod_{\chi \in \hat{V}} f_A(T, \chi), \quad f_{A_\varphi}(T) = \prod_{\chi | \varphi} f_A(T, \chi) \quad (2.2)$$

для любого $\varphi \in \Phi$, где мы полагаем $f_A(T, \chi) = 1$ в случае, когда A_χ конечен. Пусть

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

– точная последовательность R_∞ -модулей, конечно порожденных над $\mathbf{Z}_\ell$. Тогда

$$f_B = f_A \cdot f_C, \quad f_B(T, \chi) = f_A(T, \chi) \cdot f_C(T, \chi) \quad \text{для любого } \chi \in \hat{V}. \quad (2.3)$$

Через $\nu_\ell(\cdot)$ мы будем обозначать ℓ -адический показатель поля $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$, нормированный условием $\nu_\ell(\ell) = 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть A является Λ -периодическим модулем. В этом случае группа $A_{(0)} = A/(\gamma - 1)A$ конечна тогда и только тогда, когда $f_A(0) \neq 0$. Если модуль A свободен над $\mathbf{Z}_\ell$, то

$$\nu_\ell(|A_{(0)}|) = \nu_\ell(f_A(0)). \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие $f_A(0) \neq 0$ означает, что группа A^Γ конечна. Группа A^Γ конечна тогда и только тогда, когда конечна группа $A_{(0)}$. Если A, B – $\mathbf{Z}_\ell$ -свободные модули и A квазиизоморфен B , то $|A_{(0)}| = |B_{(0)}|$. Поэтому достаточно проверить формулу (2.4) для модуля A вида $A = \bigoplus_{i=1}^r \Lambda/f_i\Lambda$, где f_i – некоторые отмеченные многочлены. В последнем случае справедливость формулы (2.4) очевидна. Предложение доказано.

Следующее утверждение представляет из себя далеко идущее обобщение предложения 2.2. Пусть задан эпиморфизм $\tau : G_\infty \rightarrow G$ группы G_∞ на некоторую конечную группу G . Тогда $\text{Ker } \tau = H \times \bar{\Gamma}$, где $H = V \cap \text{Ker } \tau$, причем группа $\bar{\Gamma} \cong \mathbf{Z}_\ell$ определена неканонически. Мы сталкиваемся с такой ситуацией в случае, когда $G = G(k/\mathbf{Q})$ для некоторого поля алгебраических чисел $k \subset K_\infty$. В этом случае мы имеем $H = G(K_\infty/k_\infty)$, $\bar{\Gamma} \cong G(k_\infty/k)$. Заметим, что мы можем выбрать топологическую образующую $\bar{\gamma}$ группы $\bar{\Gamma}$ вида

$$\bar{\gamma} = \gamma^{\ell^r} \sigma \quad (2.5)$$

для некоторого $\sigma \in V$, причем целое $r \geq 0$ является инвариантом поля k . Если R_∞ -модуль A является Λ -периодическим и $\mathbf{Z}_\ell$ -свободным, то этими же свойствами обладает и $((V/H) \times \bar{\Gamma})$ -модуль A^H .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Если группа $A_{(0)}$ конечна, то такова же и группа $(A^H)_{(0)} := A^H/(\bar{\gamma} - 1)$, и ее порядок ℓ^t задается формулой

$$t = \nu_\ell \left(\prod_{\chi \in \widehat{V/H}} \prod_{\zeta^{\ell^r} = 1} f_A(\zeta \zeta_\chi^{-1} - 1, \chi) \right), \quad (2.6)$$

где ζ_χ определяется условием

$$\zeta_\chi^{\ell^r} = \chi(\sigma),$$

ζ пробегает все корни из единицы степени ℓ^r и σ, r задаются равенством (2.5). Пусть φ – произвольный $\mathbf{Q}_\ell$ -неприводимый характер группы $V/V \cap H$, и пусть ℓ^{t_φ} – порядок группы $(A^H)_{(0), \varphi} = ((A^H)_\varphi)_{(0)}$. Тогда

$$t_\varphi = \nu_\ell \left(\prod_{\substack{\chi \in \widehat{V/H} \\ \chi|_\varphi}} \prod_{\zeta^{\ell^r}=1} f_A(\zeta \zeta_\chi^{-1} - 1, \chi) \right), \quad (2.7)$$

где ζ_χ и ζ определены, как и выше.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что значение $\nu_\ell(f_A(0))$ в (2.4) равно $\nu_\ell \left(\prod_{i=1}^{\lambda} \alpha_i \right)$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_\lambda$ – все корни отмеченного многочлена $f_1(T)$, или, что эквивалентно, все собственные значения оператора $\gamma - 1$ на $A \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell$. Теперь пусть $\alpha(\chi)_1, \dots, \alpha(\chi)_{\lambda(\chi)}$ – корни отмеченного многочлена, соответствующего характеристическому ряду $f_A(T, \chi)$ для некоторого $\chi \in \widehat{G/H}$. Элемент σ , определенный формулой (2.5), действует на группу $(A^H)_\chi$ умножением на $\chi(\sigma)$, следовательно, оператор $\bar{\gamma}$, действующий на $\mathbf{Q}_\ell$ -пространство $(A^H)_\chi \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell$, имеет собственные значения $(1 + \alpha(\chi)_1)^{\ell^r} \chi(\sigma), \dots, (1 + \alpha(\chi)_{\lambda(\chi)})^{\ell^r} \chi(\sigma)$. Тогда согласно (2.2) и предложению 2.2 мы получаем

$$t = \nu_\ell \left(\prod_{\chi \in \widehat{V/H}} \prod_{i=1}^{\lambda(\chi)} ((1 + \alpha(\chi)_i)^{\ell^r} \chi(\sigma) - 1) \right).$$

Поскольку выполняются равенства

$$\begin{aligned} (1 + \alpha(\chi)_i)^{\ell^r} \chi(\sigma) - 1 &= \prod_{\zeta^{\ell^r}=1} ((1 + \alpha(\chi)_i) \zeta_\chi - \zeta) = \prod_{\zeta^{\ell^r}=1} \zeta_\chi (1 + \alpha(\chi)_i - \zeta_\chi^{-1} \zeta), \\ f_1(T, \chi) &= \prod_{i=1}^{\lambda(\chi)} (T - \alpha(\chi)_i), \end{aligned}$$

мы получаем

$$\begin{aligned} t &= \nu_\ell \left(\eta \prod_{\chi \in \widehat{V/H}} \prod_{\zeta^{\ell^r}=1} \prod_{i=1}^{\lambda(\chi)} (\zeta_\chi^{-1} \zeta - 1 - \alpha(\chi)_i) \right) \\ &= \nu_\ell \left(\eta \prod_{\chi \in \widehat{V/H}} \prod_{\zeta^{\ell^r}=1} f_A(\zeta \zeta_\chi^{-1} - 1, \chi) \right), \end{aligned}$$

где $\eta = \pm 1$. Это доказывает формулу (2.6). Доказательство формулы (2.7) полностью аналогично. Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ. В ситуации предложения 2.3 пусть $|A_{(n)}| = \ell^{t(n)}$, $|A_{(n),\varphi}| = \ell^{t(n)_\varphi}$, где $A_{(n)} := A/(\gamma_n - 1)$, $\gamma_n = \gamma^{\ell^n}$. Тогда

$$t(n) = \nu_\ell \left(\prod_{\chi \in \widehat{V}} \prod_{\zeta^{\ell^n}=1} f_A(\zeta - 1, \chi) \right), \quad (2.8)$$

$$t(n)_\varphi = \nu_\ell \left(\prod_{\substack{\chi \in \widehat{V} \\ \chi|_\varphi}} \prod_{\zeta^{\ell^n}=1} f_A(\zeta - 1, \chi) \right). \quad (2.9)$$

Чтобы доказать это, достаточно применить предложение 2.3 к эпиморфизму $\tau: G_\infty = V \times \Gamma \rightarrow V \times \Gamma/\Gamma_n$, где $\Gamma_n := \langle \gamma_n \rangle$.

Пусть K_∞ – круговое $\mathbf{Z}_\ell$ -расширение некоторого кругового поля $K_0 = \mathbf{Q}(\mu_d, \zeta_0)$. Напомним, что во введении были определены R_∞ -модули $\mathcal{A}(K_\infty)$ и $H(K_\infty)$ такие, что имеются естественные включения $C(K_\infty) \subset \mathcal{A}(K_\infty) \subset H(K_\infty)$. В дальнейшем мы будем работать с некоторым фиксированным полем K_∞ , поэтому вместо $C(K_\infty)$, $\mathcal{A}(K_\infty)$ и т.д. мы будем писать просто C_∞ , $\mathcal{A}_\infty$ и т.д. Пусть $j \in G_\infty$ – автоморфизм комплексного сопряжения в поле K_∞ . Для произвольного R_∞ -модуля A положим

$$A^+ = \{a \in A \mid j(a) = a\}, \quad A^- = \{a \in A \mid j(a) = -a\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Группы $\mathcal{A}_\infty$, H_∞ являются свободными Λ -модулями ранга $[K_0 : \mathbf{Q}]$. Группы $\mathcal{A}_\infty^+$, H_∞^+ являются свободными Λ -модулями ранга $\frac{1}{2}[K_0 : \mathbf{Q}]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [9, лемма 7.2 и предложение 7.1] H_∞ является свободным Λ -модулем ранга $[K_0 : \mathbf{Q}]$. Существует естественная точная последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_\infty \longrightarrow H_\infty \longrightarrow \mathcal{D}_\infty \longrightarrow 0,$$

где $\mathcal{D}_\infty$ – свободный $\mathbf{Z}_\ell$ -модуль, порожденный всеми точками $v \mid \ell$ поля K_∞ . Тогда, рассуждая, как в доказательстве теоремы 1.1, мы получаем, что $\mathcal{A}_\infty$ также Λ -свободен. Поскольку H_∞/H_∞^+ и $\mathcal{A}_\infty/\mathcal{A}_\infty^+$ не имеют Λ -кручения, из [9, предложение 1.1] следует, что H_∞^+ и $\mathcal{A}_\infty^+$ являются свободными Λ -модулями. Используя аргументы [9, §7], можно легко доказать, что H_∞^+ и $\mathcal{A}_\infty^+$ имеют Λ -ранг $\frac{1}{2}[K_0 : \mathbf{Q}]$. Предложение доказано.

Теперь мы собираемся вычислить характеристические ряды Λ -периодического R_∞ -модуля $\mathcal{A}_\infty/C_\infty$. Для этого нам потребуются некоторые дополнительные обозначения и определения. Мы можем рассматривать любой характер $\chi \in \widehat{V}$, где $V = G(K_0/\mathbf{Q})$, как примитивный характер Дирихле кондуктора $f_\chi \mid dq$, где $q = \ell$ при $\ell \neq 2$ и $q = 4$ при $\ell = 2$. Любой такой χ является характером первого рода в смысле Ивасава [5]. Для любого такого χ определен идемпотент

$$e_\chi = |V|^{-1} \sum_{\sigma \in V} \bar{\chi}(\sigma) \sigma, \quad \text{где } \bar{\chi}(\sigma) = \chi(\sigma)^{-1}.$$

Пусть

$$e^+ = \frac{1+j}{2}, \quad e^- = \frac{1-j}{2}.$$

Как и в [15, формула (3.3)], мы определяем “минус компоненту” элемента Шти-кельбергера $s(a, \ell^{n+1+\delta}d)$, $a \not\equiv 0 \pmod{\ell^{n+1+\delta}d}$, соответствующего полю K_n кондуктора $\ell^{n+1+\delta}d$, формулой

$$e^{-}s(a, \ell^{n+1+\delta}d) = \sum_{\substack{i \bmod \ell^{n+1+\delta} \\ (i, \ell d)=1}} \left(- \left\langle \frac{ai}{\ell^{n+1+\delta}d} \right\rangle + \frac{1}{2} \right) \sigma_i^{-1} \in \mathbf{Q}_\ell[G(K_n/\mathbf{Q})],$$

где $\langle x \rangle$ означает однозначно определенное рациональное число x' , $0 \leq x' < 1$, такое, что $x \equiv x' \pmod{\mathbf{Z}}$, а σ_i – элемент группы $G(K_n/\mathbf{Q})$, переводящий ε в ε^i для любого $\varepsilon \in \mu(K_n)$. Элементы $e^{-}s(a, \ell^{n+1+\delta}d)$ согласованы при различных n относительно естественных проекций $\mathbf{Q}_\ell[G(K_{n_2}/\mathbf{Q})] \rightarrow \mathbf{Q}_\ell[G(K_{n_1}/\mathbf{Q})]$, где $n_2 > n_1$. Таким образом, переходя к проективному пределу, мы получаем элемент

$$s(a, \ell^\infty d) := \varprojlim e^{-}s(a, \ell^{n+1+\delta}d) \in \varprojlim \mathbf{Q}_\ell[G(K_n/\mathbf{Q})].$$

Хорошо известно (см. [15, раздел 3]), что $(\sigma_i - i) \cdot s(a, \ell^\infty d) \in R_\infty$ для любого i , взаимно простого с $d\ell$. Поэтому мы можем рассматривать $s(a, \ell^\infty d)$ как элемент групповой алгебры $L[V]$, где L – поле частных кольца Λ . Из данного в [5] определения рядов Ивасава непосредственно следует, что в поле частных кольца $R_{\infty, \chi} = \mathcal{O}_\chi[[T]]$ справедливо равенство

$$\frac{1}{2} e_\chi s(1, \ell^\infty f_\chi) = f(T, \chi). \quad (2.10)$$

Здесь χ – некоторый нечетный характер (т.е. $\chi(-1) = -1$) первого рода кондуктора f_χ и $f(T, \chi)$ – ряд Ивасава, соответствующий χ . Отметим, что в [5] ряд $f(T, \chi)$ называется рядом, соответствующим четному характеру $\theta = \bar{\chi}\omega$, где ω – характер Тейхмюллера, $\omega: V \rightarrow \mathbf{Z}_\ell^*$, $\omega(\sigma_i) \equiv i \pmod{q}$ для любого $\sigma_i \in V$. В [5] было доказано, что $f(T, \chi) \in \mathcal{O}_\chi[[T]]$ при $\chi \neq \omega$. Если $\chi = \omega$, то

$$f(T, \omega) = \left(1 - \frac{\kappa}{1+T} \right)^{-1} \eta(T, \omega),$$

где $\eta(T, \omega)$ – обратимый элемент кольца $\mathbf{Z}_\ell[[T]]$, и $\kappa \in 1 + \mathbf{Z}_\ell$ определяется формулой $\gamma(\zeta_n) = \zeta_n^\kappa$ для любого $n \geq 0$. Положим

$$Y(K_n) := \prod_{v|\ell} \mu_\ell(K_{n,v}),$$

где $K_{n,v}$ – пополнение поля K_n относительно v , и положим $Y_\infty := \varprojlim Y(K_n)$, где проективный предел берется относительно норменных отображений. Отметим, что, как $\mathbf{Z}_\ell$ -модуль, Y_∞ изоморфен модулю $\mathcal{D}_\infty$ из доказательства предложения 2.4.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $h(T, \theta)$ (соответственно $y(T, \theta)$) – характеристический ряд Λ -периодического R_∞ -модуля $\mathcal{A}_\infty^+/C_\infty$ (соответственно модуля Y_∞), соответствующий некоторому четному характеру первого рода θ . Тогда, полагая $\bar{\theta}(\sigma) = \theta(\sigma)^{-1}$, мы имеем

$$h(T, \theta) = f\left(\frac{\kappa}{1+T} - 1, \bar{\theta}\omega\right) y(T, \theta)^{-1} \quad \text{при } \theta \neq 1, \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} h(T, \theta) &= \eta\left(\frac{\kappa}{1+T} - 1, \omega\right) y(T, 1)^{-1} \\ &= (-T)f\left(\frac{\kappa}{1+T} - 1, \omega\right) y(T, 1)^{-1} \quad \text{при } \theta = 1. \end{aligned} \quad (2.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы выведем формулы (2.11) и (2.12) из [11, теорема 4.1]. Чтобы сформулировать это последнее утверждение, введем некоторые определения. Обозначим через S'_∞ R_∞ -модуль, порожденный в $L[V]$ элементами $s(a, \ell^\infty d)$ для всех $a \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. Легко можно проверить, что S'_∞ порождается как R_∞ -модуль множеством $s(a, \ell^\infty d)$ для $a = 1, \dots, dq$. Следовательно, S'_∞ – конечно порожденный R_∞ -модуль. Мы определим идеал Штикельберга в R_∞ формулой $S_\infty := S'_\infty \cap R_\infty$. В [11] для поля K_∞ был определен R_∞ -модуль с одной образующей $V(K_\infty)$ такой, что $\mathcal{A}(K_\infty) \subset V(K_\infty)$ и (неканонически)

$$V(K_\infty)/\mathcal{A}(K_\infty) \cong Y_\infty \quad (2.13)$$

(см. [11, (1.10)]). Пусть $\kappa: G_\infty \rightarrow \mathbf{Z}_\ell^*$ – круговой характер, определенный формулой $\zeta_n^\sigma = \zeta_n^{\kappa(\sigma)}$ для $n = 1, 2, \dots$. Мы определим автоморфизм $w: R_\infty \rightarrow R_\infty$ формулой $w(\sigma) = \kappa(\sigma)\sigma^{-1}$ для любого $\sigma \in G_\infty$.

ТЕОРЕМА С [11, теорема 4.1]. При заданном поле K_∞ имеют место равенства

$$C_\infty = w(S_\infty)V(K_\infty), \quad P_\infty = w(S'_\infty)V(K_\infty).$$

Периодические Λ -модули $V(K_\infty)^+/C_\infty$ и $R_\infty^+/w(S_\infty)$ изоморфны как R_∞ -модули.

Хорошо известно (и без труда может быть получено из [15, лемма 2.1]), что характеристические ряды Λ -периодического R_∞ -модуля R_∞^-/S_∞ совпадают с рядами Ивасава для нечетных характеров χ , $\chi \neq \omega$, и совпадают с $\eta(T, \omega)$ для $\chi = \omega$. Согласно теореме Ферреро–Вашингтона модуль R_∞^-/S_∞ конечно порожден над Z_ℓ . Следовательно, R_∞^-/S_∞ имеет тривиальные ряды Ивасава для четных характеров χ . Таким образом, $V(K_\infty)^+/C_\infty$ имеет тривиальные характеристические ряды для нечетных характеров χ . Поскольку $w(\gamma) = \kappa\gamma^{-1}$, мы получаем, что $w(T) = \frac{\kappa}{1+T} - 1$. Автоморфизм w отображает $(R_\infty^-/S_\infty)_\chi$ на $(R_\infty^+/w(S_\infty))_{\bar{\chi}\omega}$. Поэтому согласно теореме С характеристический ряд модуля $V(K_\infty)^+/C_\infty$, соответствующий четному характеру θ , совпадает с $f(\frac{\kappa}{1+T} - 1, \bar{\theta}\omega)$ при $\theta \neq 1$ (соответственно с $\eta(\frac{\kappa}{1+T} - 1, \omega)$ при $\theta = 1$). Тогда, используя (2.13) и (2.3), мы получаем формулу (2.11). Чтобы получить (2.12), достаточно заметить, что θ -компонента $Y_{\infty, \theta}$ конечна при $\theta = 1$. Теорема доказана.

§3. Вычисление некоторых характеристических рядов

Пусть K_∞ имеет тот же смысл, что и в §2. Пусть $\overline{M}_\infty$ – максимальное абелево неразветвленное ℓ -расширение поля K_∞ и M_∞ – максимальное подрасширение в $\overline{M}_\infty/K_\infty$ такое, что ℓ полностью распадается в M_∞/K_∞ . Положим $\overline{T}_\ell(K_\infty) := G(\overline{M}_\infty/K_\infty)$ и $T_\ell(K_\infty) := G(M_\infty/K_\infty)$. Пусть $R_\ell(K_\infty)$ – ядро естественного эпиморфизма $\overline{T}_\ell(K_\infty) \rightarrow T_\ell(K_\infty)$. Таким образом, группа $R_\ell(K_\infty) = G(\overline{M}_\infty/M_\infty)$ совпадает с подгруппой группы $\overline{T}_\ell(K_\infty)$, порожденной подгруппами разложения для всех точек, лежащих над ℓ . Отметим, что $\overline{T}_\ell(K_\infty)$, $T_\ell(K_\infty)$ и $R_\ell(K_\infty)$ имеют естественную структуру R_∞ -модулей.

Следующая теорема, известная как “основная гипотеза теории Ивасава”, дает нам характеристические ряды модуля $\overline{T}_\ell(K_\infty)$, соответствующие нечетным характеристам χ первого рода, или, что эквивалентно, характеристические ряды модуля $\overline{T}_\ell(K_\infty)^-$ для всех χ первого рода.

ТЕОРЕМА D. *Для любого нечетного характера первого рода $\chi \neq \omega$ соответствующий ему характеристический ряд модуля $\overline{T}_\ell(K_\infty)$ совпадает с рядом Ивасава $f(T, \chi)$. Для $\chi = \omega$ характеристический ряд модуля $\overline{T}_\ell(K_\infty)$ для $\chi = \omega$ совпадает с $\eta(T, \omega)$ и, следовательно, обратим.*

Эта теорема была доказана в [13] (для нечетных ℓ) и в [17] (для $\ell = 2$). Другое доказательство, основанное на эйлеровых системах Кольвагина, было дано в [4] (см. также [6], [12], [14]). Положим $\mathbf{Z}_\ell(1) = \varprojlim \mu_\ell(K_n)$. Для любого R_∞ -модуля A , конечно порожденного над $\mathbf{Z}_\ell$, мы превратим группу $\text{Hom}_{\mathbf{Z}_\ell}(A, \mathbf{Z}_\ell(1))$ в R_∞ -модуль, полагая $(\sigma\chi)(a) = \kappa(\sigma)\chi(\sigma^{-1}(a))$ для любых $\sigma \in G_\infty$, $\chi \in \text{Hom}_{\mathbf{Z}_\ell}(A, \mathbf{Z}_\ell(1))$, $a \in A$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Для всех характеров характеристические ряды R_∞ -модулей $\mathcal{A}_\infty^+/C_\infty$ и $\text{Hom}_{\mathbf{Z}_\ell}(\overline{T}_\ell(K_\infty)^-, \mathbf{Z}_\ell(1))$ совпадают.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольного нечетного характера первого рода χ положим $\theta = \overline{\chi}\omega$. Тогда R_∞ -модули $\text{Hom}_{\mathbf{Z}_\ell}((\overline{T}_\ell(K_\infty)^-)_\chi, \mathbf{Z}_\ell(1))$ и $(\text{Hom}_{\mathbf{Z}_\ell}(\overline{T}_\ell(K_\infty)^-, \mathbf{Z}_\ell(1)))_\theta$ квазиизоморфны и, следовательно, имеют одинаковые характеристические ряды. Согласно теореме D модуль $(\overline{T}_\ell(K_\infty)^-)_\chi = \overline{T}_\ell(K_\infty)_\chi$ имеет единственный нетривиальный характеристический ряд $f(T, \chi)$, соответствующий характеру χ ($\eta(T, \omega)$ при $\chi = \omega$). Если $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ – нули этого ряда, то $1 + \alpha_1, \dots, 1 + \alpha_r$ – собственные значения оператора γ , действующего на $\overline{T}_\ell(K_\infty)_\chi \otimes_{\mathcal{O}_\chi} L_\chi$, где L_χ – поле частных кольца $\mathcal{O}_\chi$. Тогда γ , рассматриваемый как оператор на L_χ -пространстве $(\text{Hom}_{\mathbf{Z}_\ell}(\overline{T}_\ell(K_\infty)^-, \mathbf{Z}_\ell(1)))_\theta \otimes_{\mathcal{O}_\chi} L_\chi$, имеет собственные значения $\beta_1 = \kappa(1 + \alpha_1)^{-1}, \dots, \beta_r = \kappa(1 + \alpha_r)^{-1}$. Прямая проверка показывает, что $\beta_1 - 1, \dots, \beta_r - 1$ – это все нули ряда

$$g(T, \theta) = f\left(\frac{\kappa}{1+T} - 1, \overline{\theta}\omega\right) \quad \text{при } \theta \neq 1, \quad (3.1)$$

$$g(T, \theta) = \eta\left(\frac{\kappa}{1+T} - 1, \overline{\theta}\omega\right) \quad \text{при } \theta = \omega, \quad (3.2)$$

удовлетворяющие условию $\nu_\ell(\beta_i - 1) > 0$ для $i = 1, \dots, r$. Следовательно, $\beta_1 - 1, \dots, \beta_r - 1$ – это все корни отмеченного многочлена, ассоциированного с рядом $g(T, \theta)$. Поэтому ряд $g(T, \theta)$ является характеристическим рядом модуля $\text{Hom}_{\mathbf{Z}_\ell}(\overline{T}_\ell(K_\infty)^-, \mathbf{Z}_\ell(1))$ для любого четного характера первого рода θ .

Рассмотрим теперь естественную последовательность отображений

$$0 \longrightarrow R_\ell(K_\infty)^- \longrightarrow \bar{T}_\ell(K_\infty)^- \longrightarrow T_\ell(K_\infty)^- \longrightarrow 0. \quad (3.3)$$

Последовательность (3.3) точна по модулю конечных групп. Пусть $\mathcal{D}_\infty$ – R_∞ -модуль из доказательства предложения 2.4. Тогда $\mathcal{D}_\infty \cong \mathbf{Z}_\ell[G_\infty/G_{\infty,v}]$ как R_∞ -модуль, где $G_{\infty,v}$ – подгруппа разложения любой точки $v \mid \ell$ в группе G_∞ . Мы имеем естественный эпиморфизм $f: \mathcal{D}_\infty \rightarrow R_\ell(K_\infty)$, который переводит любую точку $v \mid \ell$ в автоморфизм Фробениуса в ее подгруппе разложения в группе $\bar{T}_\ell(K_\infty)$. Отображение f индуцирует отображение $f^-: \mathcal{D}_\infty^- \rightarrow R_\ell(K_\infty)^-$, которое, как хорошо известно, является квазиизоморфизмом (и даже изоморфизмом при $\ell \neq 2$). Из явного вида модулей $\mathcal{D}_\infty$ и Y_∞ следует, что

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_\ell}(\mathcal{D}_\infty, \mathbf{Z}_\ell(1)) \cong Y_\infty \quad (\text{неканонически}).$$

Таким образом, имеется квазиизоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_\ell}(\mathcal{D}_\infty^-, \mathbf{Z}_\ell(1)) \cong Y_\infty^+. \quad (3.4)$$

Сопоставляя теорему 2.1 с формулами (3.1)–(3.4) и учитывая, что модуль $(Y_\infty)_\theta$ конечен для $\theta = 1$, мы получаем утверждение нашего предложения.

Для любого поля K_n и его группы единиц $U(K_n)$ положим $\bar{U}(K_n) := U(K_n)/\mu(K_n)$ и $U_\infty = \varprojlim (\bar{U}(K_n)[\ell])$, где проективный предел берется относительно норменных отображений. Имеются естественные включения $C_\infty \subseteq U_\infty \subseteq \mathcal{A}_\infty^+$, поэтому существует точная последовательность

$$0 \longrightarrow U_\infty/C_\infty \longrightarrow \mathcal{A}_\infty^+/C_\infty \longrightarrow \mathcal{A}_\infty^+/U_\infty \longrightarrow 0. \quad (3.5)$$

Пусть $U_S(K_n)$ – группа S -единиц поля K_n , где S – множество всех точек над ℓ в поле K_n . Положим $\bar{U}_S(K_n) := U_S(K_n)/\mu(K_n)$ и $U_{S,\infty} := \varprojlim \bar{U}_S(K_n)[\ell]$, где проективный предел берется относительно норменных отображений. Тогда имеется естественное включение $U_{S,\infty} \subseteq H(K_\infty)^+$. Если k – произвольное вещественное абелево поле и k_∞ – круговое $\mathbf{Z}_\ell$ -расширение k , то можно аналогичным образом определить абелевы про- ℓ -группы $H(k_\infty)$, $\mathcal{A}(k_\infty)$, $U(k_\infty)$ и $U_S(k_\infty)$. Если $k_\infty \subseteq K_\infty$ для некоторого кругового поля $K = K_0$, то все эти группы можно рассматривать как R_∞ -модули.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *R_∞ -модули $\mathcal{A}_\infty^+/U_\infty$ и $H_\infty^+/U_{S,\infty}$ квазиизоморфны. Пусть k – произвольное вещественное абелево поле, k_∞ – круговое $\mathbf{Z}_\ell$ -расширение поля k , причем $k_\infty \subseteq K_\infty$ для некоторого кругового поля K . Тогда R_∞ -модули $\mathcal{A}(k_\infty)/U(k_\infty)$ и $H(k_\infty)/U_S(k_\infty)$ квазиизоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $U_\infty = U_{S,\infty} \cap \mathcal{A}_\infty^+$, естественное отображение

$$i: \mathcal{A}_\infty^+/U_\infty \longrightarrow H_\infty^+/U_{S,\infty}$$

является вложением. Поэтому достаточно проверить, что i имеет конечное коядро. Для этого мы дадим интерпретацию рассматриваемых групп в терминах теории полей классов. Пусть N_∞ – максимальное ℓ -разветвленное абелево ℓ -расширение

поля K_∞ . Положим $X_\infty := G(N_\infty/K_\infty)$. Тогда имеются естественные точные последовательности R_∞ -модулей

$$0 \longrightarrow W_\infty \longrightarrow X_\infty \longrightarrow T_\ell(K_\infty) \longrightarrow 0, \quad (3.6)$$

$$0 \longrightarrow \overline{W}_\infty \longrightarrow X_\infty \longrightarrow \overline{T}_\ell(K_\infty) \longrightarrow 0, \quad (3.7)$$

где W_∞ (соответственно $\overline{W}_\infty$) означает подгруппу группы X_∞ , порожденную подгруппами разложения (соответственно подгруппами инерции) для всех точек $v \mid \ell$ поля K_∞ . Пусть $f: Y_\infty \rightarrow X_\infty$ – естественное отображение, возникающее из теории полей классов. Тогда $\text{Im} f \subset \overline{W}_\infty \subseteq W_\infty$ и из теории полей классов следует, что

$$W_\infty/\text{Im} f \cong H_\infty/U_{S,\infty}, \quad \overline{W}_\infty/\text{Im} f \cong \mathcal{A}_\infty/U_\infty.$$

Таким образом,

$$W_\infty/\overline{W}_\infty = R_\ell(K_\infty) \cong H_\infty/(\mathcal{A}_\infty \cdot U_{S,\infty}) \supset \text{Coker } i = H_\infty^+/\mathcal{A}_\infty^+ \cdot U_{S,\infty}.$$

Следовательно, $\text{Coker } i \subset R_\ell(K_\infty)^+$. Отметим, что группа $R_\ell(K_\infty)^+$ конечно порождена. С другой стороны, согласно гипотезе Леопольдта над полем K_n^+ не существует некруговых $\mathbf{Z}_\ell$ -расширений ни при каких n . Значит, $R_\ell(K_\infty)^+$ – периодический модуль и, следовательно, он конечен. Итак, группа $\text{Coker } i$ конечна, следовательно, i является квазиизоморфизмом. Аналогичным образом устанавливается квазиизоморфизм модулей $\mathcal{A}(k_\infty)/U(k_\infty)$ и $H(k_\infty)/U_S(k_\infty)$. Предложение доказано.

ТЕОРЕМА 3.1. *R_∞ -модули $T_\ell(K_\infty)^+$ и U_∞/C_∞ имеют одинаковые характеристические ряды (для любого четного характера первого рода θ).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы выведем эту теорему из некоторых теорем двойственности, полученных в [10]. Положим $\overline{X}_\infty := X_\infty/f(Y_\infty)$ и $\mathcal{A}_\ell(K) = \overline{X}_\infty/H_\infty^-$, где X_∞, Y_∞ имеют тот же смысл, что и в доказательстве предложения 3.2. Тогда справедлива

ТЕОРЕМА Е. *R_∞ -модули $2\mathcal{A}_\ell(K)$ и $\text{Hom}_{\mathbf{Z}_\ell}(2\mathcal{A}_\ell(K), \mathbf{Z}_\ell(1))$ квазиизоморфны.*

Действительно, если $\ell \neq 2$, то из теоремы Ферреро–Вашингтона следует, что модуль $\mathcal{A}_\ell(K)$ конечно порожден над $\mathbf{Z}_\ell$. Тогда из [10, следствие из теоремы 4.1] вытекает, что $\mathcal{A}_\ell(K) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Z}_\ell}(\mathcal{A}_\ell(K), \mathbf{Z}_\ell(1))$. Хотя случай $\ell = 2$ не был явно рассмотрен в [10], в этой работе было отмечено, что все ее результаты остаются справедливыми в случае $\ell = 2$ с точностью до подгрупп и факторгрупп периода 2. Если $\ell = 2$, то модуль $2\mathcal{A}_\ell(K)$ конечно порожден над $\mathbf{Z}_\ell$, поэтому, повторяя доказательство теоремы 4.1 работы [10] для этого случая, мы получаем утверждение теоремы Е.

Из теоремы Е следует существование квазиизоморфизма

$$2\mathcal{A}_\ell(K)^+ \sim \text{Hom}_{\mathbf{Z}_\ell}(2\mathcal{A}_\ell(K)^-, \mathbf{Z}_\ell(1)). \quad (3.8)$$

Определение модуля $\mathcal{A}_\ell(K)$ и формула (3.6) показывают, что

$$2\mathcal{A}_\ell(K)^- \sim T_\ell(K_\infty)^-. \quad (3.9)$$

Следовательно, модуль $2\mathcal{A}_\ell(K)^+$ входит в точную последовательность

$$0 \longrightarrow 2H_\infty/(2H_\infty \cap (H_\infty^- \cdot U_{S,\infty})) \xrightarrow{\alpha} 2\mathcal{A}_\ell(K)^+ \xrightarrow{\beta} 2T_\ell(K_\infty)^+ \quad (3.10)$$

с конечной группой $\text{socer } \beta$.

Из предложения 3.1 и формул (3.8), (3.9) следует, что модули $2\mathcal{A}_\ell(K)^+$ и $\mathcal{A}_\infty^+/C_\infty$ имеют одинаковые характеристические ряды. Тогда из предложения 3.2 вытекает, что

$$2H_\infty/(2H_\infty \cap (H_\infty^- \cdot U_{S,\infty})) \sim H_\infty^-/U_{S,\infty} \sim \mathcal{A}_\infty^+/U_\infty.$$

Поэтому из (3.5), (3.10) и из предложения 2.1 следует, что U_∞/C_∞ и $T_\ell(K_\infty)^+$ имеют одинаковые характеристические ряды. Теорема доказана.

Пусть теперь k – произвольное вещественное абелево поле, k_∞ – круговое $\mathbf{Z}_\ell$ -расширение поля k и $k_\infty \subset K_\infty$ при некотором подходящем выборе кругового поля $K = K_0$.

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть k_∞ и K_∞ имеют тот же смысл, что и выше. Положим $H = G(K_\infty/k_\infty)$. Тогда R_∞ -модули $T_\ell(k_\infty)$ и U_∞^H/C_∞^H имеют одинаковые характеристические ряды.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существуют квазиизоморфизмы $T_\ell(k_\infty) \sim T_\ell(K_\infty)^H$, $U_\infty^H/C_\infty^H \sim (U_\infty/C_\infty)^H$, поэтому наша теорема непосредственно следует из теоремы 3.1.

§4. Доказательство теоремы 3

Пусть $k, k_\infty, K_\infty, R_\infty$ и $H = G(K_\infty/k_\infty)$ имеют тот же смысл, что и в §3. Напомним, что мы определили R_∞ -модули $H(k_\infty), U_S(k_\infty)$, остающиеся неподвижными под действием H . Положим $\tilde{H}(k_\infty) := (H_\infty)^H$, $\tilde{U}_S(k_\infty) := (U_{S,\infty})^H$, $\tilde{C}(k_\infty) := (C_\infty)^H$. Тогда в силу предложения 1.1 из [8] R_∞ -модули $\tilde{H}(k_\infty), \tilde{U}_S(k_\infty), \tilde{C}(k_\infty)$, являющиеся Λ -свободными. Пусть $H(k)$ (соответственно $\tilde{H}(k)$) – образ естественной проекции $H(k_\infty) \rightarrow \mathcal{B}(k)$ (соответственно $\tilde{H}(k_\infty) \rightarrow \mathcal{B}(k) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell$). Пусть $U_S^*(k)$ (соответственно $\tilde{U}_S^*(k)$) – образ естественной проекции $U_S(k_\infty) \rightarrow H(k)$ (соответственно $\tilde{U}_S(k_\infty) \rightarrow \tilde{H}(k)$). Положим $\hat{U}_S(k) := \overline{U}_S(k)[\ell] \cap H(k)$. Таким образом, $\hat{U}_S(k)$ совпадает с подгруппой всех элементов группы $\overline{U}_S(k)[\ell]$, являющихся локальными универсальными нормами из поля k_∞ . Положим

$$\begin{aligned} \tilde{C}_S(k_\infty) &:= \{x \in \tilde{H}(k_\infty) \mid (\gamma_n - 1)x \in \tilde{C}(k_\infty) \text{ при некотором } n\}, \\ C_S(k_\infty) &:= \tilde{C}_S(k_\infty) \cap U_S(k_\infty). \end{aligned}$$

Из определения и из предложения 3.2 следует, что модули $\tilde{H}(k_\infty)/\tilde{C}_S(k_\infty)$ и $(\mathcal{A}_\infty^+/C_\infty)^H$ квазиизоморфны.

Пусть $\tilde{C}_S(k)$ (соответственно $C_S(k)$) – образ естественной проекции $\tilde{C}_S(k_\infty) \rightarrow \tilde{H}(k)$ (соответственно $C_S(k_\infty) \rightarrow H(k)$). Мы будем называть группу $C_S(k)$ *группой круговых S -единиц*. Следующее предложение выясняет связь между всеми этими группами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Существуют естественные включения*

$$\tilde{H}(k) \supseteq \tilde{U}_S^*(k) \supseteq \tilde{C}_S(k), \quad H(k) \supseteq \hat{U}_S(k) \supseteq U_S^*(k) \supseteq C_S(k), \quad (4.1)$$

причем все индексы, возникающие в (4.1), конечны.

Если $\ell \neq 2$, то $H(k) = \tilde{H}(k_\infty)$, $U_S(k_\infty) = \tilde{U}_S(k_\infty)$, $C_S(k_\infty) = \tilde{C}_S(k_\infty)$, $H(k) = \tilde{H}(k)$, $U_S^*(k) = \tilde{U}_S^*(k)$ и $C_S(k) = \tilde{C}_S(k)$.

Если $\ell = 2$ и $\sqrt{-1} \in k_{\infty, v}$ для некоторой точки $v \mid \ell$ (следовательно, для любой точки $v \mid \ell$), то $H(k_\infty) = \tilde{H}(k_\infty)$, $H(k) = \tilde{H}(k)$.

Если $\ell = 2$ и $\sqrt{-1} \notin k_{\infty, v}$ для $v \mid \ell$, то

$$\tilde{H}(k_\infty)/H(k_\infty) \cong \prod_{v \mid \ell} \mu_\ell(k_{\infty, v}) \cong (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^r,$$

где r – число точек $v \mid \ell$ в поле k_∞ .

Если $\ell = 2$, то в любом из случаев

$$\begin{aligned} [\tilde{U}_S(k_\infty) : U_S(k_\infty)] &= [\tilde{C}_S(k_\infty) : C_S(k_\infty)] \\ &= [\tilde{U}_S^*(k) : U_S^*(k)] = [\tilde{C}_S(k) : C_S(k)] = 2, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\tilde{U}_S(k)/\tilde{C}_S(k) = U_S^*(k)/C_S(k). \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\bar{\Gamma} = G(k_\infty/k)$, то для любого достаточно большого n естественная проекция $G_\infty \rightarrow G(k_\infty/\mathbf{Q})$ отображает Γ_n на $\bar{\Gamma}_{n-s}$, где $s \geq 0$ не зависит от n . Естественное включение $\tilde{H}(k_\infty)/\tilde{U}_S(k_\infty) \subseteq H_\infty^+/U_{S, \infty}$ индуцирует для всех достаточно больших n включение

$$(\tilde{H}(k_\infty)/\tilde{U}_S(k_\infty))^{\bar{\Gamma}_{n-s}} \subseteq (H_\infty^+/U_{S, \infty})^{\Gamma_n}.$$

Согласно [9, лемма 7.2 и теорема 7.2] Λ -модули H_∞ и $U_{S, \infty}$ свободны. Следовательно, H_∞^+ свободен как Λ -модуль, и $H_\infty^+/U_{S, \infty}$ не содержит нетривиальных конечных подмодулей. С другой стороны, модуль $(H_\infty^+/U_{S, \infty})^{\Gamma_n}$ не содержит Λ -подмодулей, которые изоморфны как Λ -модули модулю $\mathbf{Z}_\ell$, поскольку в нашем случае справедлива гипотеза Леопольдта. Таким образом, $(H_\infty^+/U_{S, \infty})^{\Gamma_n} = 0$ и $(\tilde{H}(k_\infty)/\tilde{U}_S(k_\infty))^{\bar{\Gamma}_n} = 0$ для всех достаточно больших n . Из определения модуля $\tilde{C}_S(k_\infty)$ и из последнего равенства следует, что $\tilde{C}_S(k_\infty) \subseteq \tilde{U}_S(k_\infty)$. Поэтому $\tilde{C}_S(k_\infty) \subseteq \tilde{U}_S(k_\infty)$ и $\tilde{C}_S(k) \subseteq \tilde{U}_S^*(k)$, $C_S(k) \subseteq U_S^*(k)$. Остальные включения в (4.1) очевидны.

Согласно теореме 1.1 модуль H_∞^+/C_∞ является Λ -периодическим, следовательно, $\tilde{H}(k_\infty)/\tilde{C}_S(k_\infty)$ является $\bar{\Gamma}$ -периодическим, причем из определения модуля $\tilde{C}_S(k_\infty)$ следует, что $(\tilde{H}(k_\infty)/\tilde{C}_S(k_\infty))^{\bar{\Gamma}_n} = 0$ при любом n . Поскольку $\tilde{H}(k_\infty)$ и $\tilde{C}_S(k_\infty)$ свободны как $\bar{\Gamma}$ -модули, мы имеем естественную точную последовательность (см. [9, (1.2)])

$$\begin{aligned} 0 &= (\tilde{H}(k_\infty)/\tilde{C}_S(k_\infty))^{\bar{\Gamma}} \longrightarrow \tilde{C}_S(k_\infty)_{(0)} \\ &\longrightarrow \tilde{H}(k_\infty)_{(0)} \longrightarrow (\tilde{H}(k_\infty)/\tilde{C}_S(k_\infty))_{(0)} \longrightarrow 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где $A_{(0)} = A/(\bar{\gamma} - 1)A$ для любого $\bar{\Gamma}$ -модуля A .

Из локальной теории полей классов следует, что $\tilde{H}(k_\infty)_{(0)} \cong \tilde{H}(k)$. Поэтому (4.4) показывает, что $\tilde{C}_S(k_\infty)_{(0)} \cong \tilde{C}_S(k)$ и

$$(\tilde{H}(k_\infty)/\tilde{C}_S(k_\infty))_{(0)} \cong \tilde{H}(k)/\tilde{C}_S(k). \quad (4.5)$$

Так как $\tilde{H}(k_\infty)$ и $\tilde{C}_S(k_\infty)$ являются свободными $\bar{\Gamma}$ -модулями одинакового ранга, группы $\tilde{C}_S(k_\infty)_{(0)}$ и $\tilde{H}(k_\infty)_{(0)}$ являются свободными $\mathbf{Z}_\ell$ -модулями одинакового ранга. Тогда из (4.4) следует, что группы в (4.5) конечны. Из этого, а также из равенств $C_S(k) = \tilde{C}_S(k)$ при $\ell \neq 2$, $[\tilde{C}_S(k) : C_S(k)] = 2$ при $\ell = 2$, которые будут доказаны ниже, вытекает конечность всех индексов в (4.1).

Если $\ell \neq 2$, то согласно [9, лемма 7.2] мы получаем, что H_∞ является свободным Γ -модулем, а $H(k_\infty)$ является свободным $\bar{\Gamma}$ -модулем. Рассмотрим включения $\tilde{H}(k_\infty) \supseteq H(k_\infty) \supseteq N_H(H_\infty)$, где $H = G(K_\infty/k_\infty)$. Из локальной теории полей классов следует, что группа когомологий Тэйта $H^0(H, H_\infty)$ конечна и, следовательно, $[\tilde{H}(k_\infty) : H(k_\infty)] < \infty$. Поскольку оба рассматриваемых модуля свободны над $\bar{\Gamma}$, мы получаем, что $\tilde{H}(k_\infty) = H(k_\infty)$.

Равенство $\tilde{U}_S(k_\infty) = U_S(k_\infty)$ может быть доказано тем же путем. Из [9, теорема 7.2] следует, что $U_{S,\infty}$ является свободным Γ -модулем, а $U_S(k_\infty)$ является свободным $\bar{\Gamma}$ -модулем. Порядки групп когомологий Тэйта $H^0(H, \bar{U}_S(K_n))$ могут быть оценены сверху в терминах числа образующих ℓ -групп классов $\text{Cl}(K_n)$. Поэтому конечность группы $H^0(H, U_{S,\infty})$ следует из тривиальности μ -инварианта Ивасава поля K_∞ . Тогда мы получаем $\tilde{C}_S(k_\infty) = C_S(k_\infty)$, $\tilde{H}(k) = H(k)$, $\tilde{U}_S^*(k) = U_S^*(k)$. Это доказывает наше предположение при $\ell \neq 2$.

Если $\ell = 2$ и $\sqrt{-1} \in k_{\infty,v}$ для любой точки $v \mid \ell$, то, применяя лемму 7.2 из [9], мы снова получаем, что $H(k_\infty)$ является свободным $\bar{\Gamma}$ -модулем и $\tilde{H}(k_\infty) = H(k_\infty)$.

В случае, когда $\ell = 2$ и $\sqrt{-1} \notin k_{\infty,v}$ для любой точки $v \mid \ell$, лемма 7.2 работы [9] нуждается в некоторых исправлениях. Правильное утверждение, которое легко можно доказать, используя локальную теорию полей классов, говорит, что в этом случае $H(k_\infty)$ является $\bar{\Gamma}$ -модулем без кручения и существует вложение $H(k_\infty) \hookrightarrow F$, где F – свободный $\bar{\Gamma}$ -модуль, причем $F/H(k_\infty) \cong \prod_{v \mid \ell} \mu_\ell(k_{\infty,v})$ как модуль Галуа (заметим, что $\mu_\ell(k_{\infty,v}) = \{\pm 1\}$ для любой точки $v \mid \ell$).

Если $\ell = 2$ и $\sqrt{-1} \notin k_\infty$ (именно этот случай имеет место для вещественного абелева k), то теорема 7.2 работы [9] также нуждается в исправлениях. В этом случае правильное утверждение состоит в том, что модуль $U_S(k_\infty)$ изоморфен подмодулю индекса 2 некоторого свободного $\bar{\Gamma}$ -модуля. Действительно, теорема 7.2 вместе с доказательством, приведенным в [9], остаются справедливыми для поля $k'_\infty = k_\infty(\sqrt{-1})$. Следовательно, $U_S(k'_\infty)$ является свободным $\bar{\Gamma}$ -модулем. Из теории Куммера следует, что $[U_S(k'_\infty) : U_S(k_\infty)] \leq 2$. С другой стороны, модуль $U_S(k_\infty)$ не является $\bar{\Gamma}$ -свободным. Последнее утверждение вытекает из [9, предложение 1.2] и из того наблюдения, что -1 содержится в образе естественной проекции $U_S(k_\infty) \rightarrow U_S(k_n)[\ell]$ (достаточно проверить это для поля $k = \mathbf{Q}$). Таким образом, мы получаем $[U_S(k'_\infty) : U_S(k_\infty)] = 2$, как и требовалось. Более того, мы получаем, что $\tilde{U}_S(k_\infty) = U_S(k'_\infty)$.

Рассмотрим теперь круговое число $\varepsilon_\infty(1) = \varprojlim (1 - \zeta_n) \in U_S(k'_\infty)$. Как было доказано Синноттом (см. [15, раздел 1]), мы имеем при любом n

$$1 - \zeta_n \notin U_S(k_n) \cdot \mu(k_n(\sqrt{-1})). \quad (4.6)$$

Это означает, что $\varepsilon_\infty(1) \notin U_S(k_\infty)$. Поскольку из определения группы $\tilde{C}(k_\infty)$ следует, что $\varepsilon_\infty(1) \in \tilde{C}_S(k_\infty)$, то мы получаем, что первые два индекса в (4.2) равны 2. Пусть n_0 – наибольший индекс такой, что $\zeta_{n_0} \in k(\sqrt{-1})$. Следовательно, естественная проекция $\tilde{C}_S(k_\infty) \rightarrow \tilde{C}_S(k)$ переводит $\varepsilon_\infty(1)$ в $(1 - \zeta_{n_0})$. Тогда из (4.6) следует, что $\tilde{U}_S^*(k) \neq U_S^*(k)$, $\tilde{C}_S(k) \neq C_S(k)$. Так как $[\tilde{U}_S(k_\infty) : U_S(k_\infty)] \geq [\tilde{U}_S^*(k) :$

$U_S^*(k)$ и $[\tilde{C}_S(k_\infty) : C_S(k_\infty)] \geq [\tilde{C}_S(k) : C_S(k)]$, то мы получаем, что последние два индекса в (4.2) также равны 2. Этим формула (4.2) доказана полностью.

Чтобы доказать (4.3), достаточно заметить, что $\tilde{U}_S(k) = U_S^*(k) \langle (1 - \zeta_{n_0}) \rangle$ и $\tilde{C}_S(k) = C_S(k) \langle (1 - \zeta_{n_0}) \rangle$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Существуют естественные изоморфизмы конечных абелевых групп*

$$\begin{aligned} (\tilde{H}(k_\infty)/\tilde{C}_S(k))_{(0)} &\cong \tilde{H}(k)/\tilde{C}_S(k), \\ (\tilde{U}_S(k_\infty)/\tilde{C}_S(k_\infty))_{(0)} &\cong \tilde{U}_S(k)/\tilde{C}_S(k). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая формула уже доказана (см. (4.5)). Вторая может быть доказана тем же способом, используя тот факт, что группа $\tilde{U}_S(k_\infty)$ является Λ -свободным и, следовательно, $\bar{\Gamma}$ -свободным модулем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. (см. [9, предложение 7.5]). *Для любого поля алгебраических чисел k существует естественный изоморфизм*

$$T_\ell(k_\infty)^{\bar{\Gamma}} \cong \tilde{U}_S(k)/U_S^*(k).$$

Для удобства читателя мы дадим здесь короткое замкнутое доказательство этого утверждения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{X}$ – группа Галуа максимального абелева ℓ -расширения поля k_∞ и $\tilde{W}$ – подгруппа группы $\tilde{X}$, порожденная подгруппами инерции для точек $v \nmid \ell$ и подгруппами разложения для точек $v \mid \ell$. Тогда имеется точная последовательность

$$0 \longrightarrow \tilde{W} \longrightarrow \tilde{X} \longrightarrow T_\ell(k_\infty) \longrightarrow 0. \quad (4.7)$$

Как хорошо известно, $\tilde{X}^{\bar{\Gamma}} = 0$, поэтому (4.7) индуцирует точную последовательность

$$0 \longrightarrow T_\ell(k_\infty)^{\bar{\Gamma}} \longrightarrow \tilde{W}_{(0)} \xrightarrow{\beta} \tilde{X}_{(0)} \xrightarrow{\alpha} T_\ell(k_\infty)_{(0)} \longrightarrow 0.$$

Положим

$$\tilde{H}(k_v) = \bigcap_{n=1}^{\infty} N_{k_{n,v}/k_v}(k_{n,v}^*[\ell]), \quad E(k) = \left(\prod_{v \nmid \ell} U(k_v)[\ell] \right) \times \left(\prod_{v \mid \ell} \tilde{H}(k_v) \right).$$

Отметим, что для вещественной точки v при $\ell = 2$ мы имеем $U(k_v)[\ell] = \{\pm 1\}$, а для комплексной точки v имеем $U(k_v)[\ell] = 0$ при любом ℓ .

Положим $\hat{\mathcal{U}}_S(k) = U_S(k)[\ell] \cap E(k)$. Тогда точна последовательность

$$1 \longrightarrow \mu_\ell(k) \longrightarrow \hat{\mathcal{U}}_S(k) \longrightarrow \hat{U}_S(k) \longrightarrow 1.$$

Мы определим группы $E(k_n)$ и $\hat{\mathcal{U}}_S(k_n)$ аналогичным образом. Применяя теорию полей классов, мы получаем, что

$$\text{Im } \beta = \text{Ker } \alpha \cong E(k)/\hat{\mathcal{U}}_S(k). \quad (4.8)$$

По этой же причине мы получаем

$$\widetilde{W} = \varprojlim (E(k_n)/\widehat{\mathcal{U}}_S(k_n)) = (\varprojlim E(k_n))/(\varprojlim U_S(k_n)[\ell]). \quad (4.9)$$

Поскольку $E(k_n)$ является когомологически тривиальным $G(k_n/k)$ -модулем, мы получаем из (4.9)

$$\widetilde{W}_{(0)} \cong E(k)/\mathcal{U}_S^*(k), \quad (4.10)$$

где $\mathcal{U}_S^*(k)$ – образ естественной проекции $\varprojlim U_S(k_n)[\ell] \rightarrow \widehat{\mathcal{U}}_S(k)$. Отметим, что β индуцировано тождественным отображением $\text{id}: E(k) \rightarrow E(k)$. Из (4.8) и (4.9) следует

$$T_\ell(k_\infty)^\Gamma \cong \text{Ker } \beta \cong \widehat{\mathcal{U}}_S(k)/\mathcal{U}_S^*(k) = \widetilde{U}_S(k)/U_S^*(k).$$

Предложение доказано.

Для вещественного абелева поля k с группой Галуа $G = G(k/\mathbf{Q})$ положим $G = G_\ell \times G_0$, где G_ℓ – силовская ℓ -подгруппа группы G и $(|G_0|, \ell) = 1$. Пусть Φ – множество всех $\mathbf{Q}_\ell$ -неприводимых характеров группы G_0 .

ТЕОРЕМА 4.1 (теорема 3 введения). *Для любого вещественного абелева поля k справедливо равенство*

$$|T_\ell(k_\infty)_{(0)}| = [\widehat{U}_S(k) : C_S(k)].$$

Для любого $\varphi \in \Phi$ справедливо равенство

$$|T_\ell(k_\infty)_{(0), \varphi}| = [\widehat{U}_S(k)_\varphi : C_S(k)_\varphi].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть P – максимальный конечный подмодуль модуля $T_\ell(k_\infty)$ и $R := T_\ell(k_\infty)/P$. Тогда для любого $\varphi \in \Phi$ существует точная последовательность

$$0 \longrightarrow P_\varphi \longrightarrow T_\ell(k_\infty)_\varphi \longrightarrow R_\varphi \longrightarrow 0 \quad (4.11)$$

со свободным $\mathbf{Z}_\ell$ -модулем R_φ . Поскольку для поля k справедлива гипотеза Леопольдта, мы имеем $R^\Gamma = 0$. Следовательно, (4.11) индуцирует точную последовательность конечных абелевых групп

$$0 \longrightarrow P_{(0), \varphi} \longrightarrow T_\ell(k_\infty)_{(0), \varphi} \longrightarrow R_{(0), \varphi} \longrightarrow 0. \quad (4.12)$$

Из теоремы 3.2 следует, что $\mathbf{Z}_\ell$ -свободные R_∞ -модули R и $\widetilde{U}(k_\infty)/\widetilde{C}(k_\infty)$ имеют одинаковые характеристические ряды. Тогда согласно предложению 2.3 для любого характера $\varphi \in \Phi$ мы имеем

$$|(\widetilde{U}(k_\infty)/\widetilde{C}(k_\infty))_{(0), \varphi}| = |R_{(0), \varphi}|.$$

Из предложений 4.1 и 4.2 следует, что

$$(\widetilde{U}(k_\infty)/\widetilde{C}(k_\infty))_{(0), \varphi} \cong (U_S^*(k)_\varphi / C_S(k)_\varphi).$$

Таким образом,

$$|R_{(0), \varphi}| = [U_S^*(k)_\varphi : C_S(k)_\varphi]. \quad (4.13)$$

Поскольку $T_\ell(k_\infty)^\Gamma = P^\Gamma$, мы получаем из предложения 4.3

$$|P_{(0), \varphi}| = [\widehat{U}_S(k)_\varphi : U_S^*(k)_\varphi]. \quad (4.14)$$

Сопоставляя (4.12), (4.13) и (4.14), мы получаем последнее утверждение теоремы. Первое утверждение может быть доказано точно так же.

§5. Доказательство теоремы 4

Пусть k – некоторое вещественное абелево поле и $G = G(k/\mathbf{Q})$. Как и в §4, мы полагаем $G = G_\ell \times G_0$, где G_ℓ – силовская ℓ -подгруппа группы G и $(|G_0|, \ell) = 1$. Если χ – произвольный $\overline{\mathbf{Q}}_\ell^*$ -значный одномерный характер группы G и Φ – множество всех $\mathbf{Q}_\ell$ -неприводимых характеров группы G_0 , то запись $\chi \mid \varphi$ для $\varphi \in \Phi$ означает, что $\chi \mid_{G_0}$ является неприводимой компонентой характера φ . Через φ_0 мы обозначаем тривиальный характер группы G_0 , т.е. $\varphi_0(\sigma) = 1$ для любого $\sigma \in G_0$.

Положим

$$Y(k) = \prod_{v|\ell} \mu_\ell(k_v).$$

ТЕОРЕМА 5.1 (теорема 4 введения). *Для любого вещественного абелева поля k и любого $\varphi \in \Phi$ справедливы равенства*

$$\nu_\ell(|T_\ell(k_\infty)_{(0)}|) = \nu_\ell \left([H(k) : \widehat{U}_S(k)]^{-1} |Y(k)|^{-1} \ell^t \prod_{\substack{\chi \in \widehat{G} \\ \chi \neq 1}} \frac{1}{2} L_\ell(1, \chi) \right), \quad (5.1)$$

$$\nu_\ell(|T_\ell(k_\infty)_{(0), \varphi}|) = \nu_\ell \left([H(k)_\varphi : \widehat{U}_S(k)_\varphi]^{-1} |Y(k)_\varphi|^{-1} \ell^{t_\varphi} \prod_{\substack{\chi \in \widehat{G} \\ \chi \mid \varphi, \chi \neq 1}} \frac{1}{2} L_\ell(1, \chi) \right), \quad (5.2)$$

где показатели t и t_φ определяются равенствами

$$t = \begin{cases} r & \text{при } \ell \neq 2, \\ r+1 & \text{при } \ell = 2, \end{cases} \quad t_\varphi = \begin{cases} t & \text{при } \varphi = \varphi_0, \\ 0 & \text{при } \varphi \neq \varphi_0, \end{cases}$$

а r определяется из формулы (2.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 3.2 мы имеем квазиизоморфизм $\mathcal{A}(k_\infty)/C(k_\infty) \sim \widetilde{H}(k_\infty)/\widetilde{C}_S(k_\infty)$. Последний модуль свободен над $\mathbf{Z}_\ell$. Поэтому мы можем вычислять порядок

$$\ell^{s_\varphi} := |(\widetilde{H}(k_\infty)/\widetilde{C}_S(k_\infty))_{(0), \varphi}|, \quad (5.3)$$

используя формулу (2.7), где $A_{(0)} := A/(\overline{\gamma} - 1)A$ для любого $\overline{\Gamma}$ -модуля A . Так как $\mathcal{A}(k_\infty)/C(k_\infty) \sim (\mathcal{A}_\infty^+/C_\infty)^H$, мы получаем

$$s_\varphi = \nu_\ell \left(\prod_{\substack{\theta \in \widehat{V/H} \\ \theta \mid \varphi}} \prod_{\zeta^{\ell^r} = 1} h(\zeta \zeta_\theta^{-1} - 1, \theta) \right), \quad (5.4)$$

где $h(T, \theta)$ – характеристические ряды модуля $\mathcal{A}_\infty^+/C_\infty$, вычисленные в теореме 2.1, $H = G(K_\infty/k_\infty)$, $V = G(K_0/\mathbf{Q})$, ζ_θ определяется из равенства $\zeta_\theta^{\ell^r} = \theta(\sigma)$ и r, σ имеют тот же смысл, что и в (2.5).

Сопоставляя формулы (2.11), (2.12) и (5.4), мы получаем, что

$$s_\varphi = \begin{cases} \nu_\ell(a_\varphi b_\varphi^{-1}) & \text{при } \varphi \neq \varphi_0, \\ \nu_\ell(c_{\varphi_0} b_{\varphi_0}^{-1}) & \text{при } \varphi = \varphi_0, \end{cases} \quad (5.5)$$

где

$$a_\varphi := \prod_{\substack{\theta \in \widehat{V/H} \\ \theta|_\varphi}} \prod_{\zeta^{\ell^r}=1} f(\kappa\zeta_\theta\zeta^{-1} - 1, \bar{\theta}\omega), \quad (5.6)$$

$$b_\varphi = \prod_{\substack{\theta \in \widehat{V/H} \\ \theta|_\varphi}} \prod_{\zeta^{\ell^r}=1} y(\zeta\zeta_\theta^{-1} - 1, \theta), \quad (5.7)$$

$$c_{\varphi_0} = \left[\prod_{\substack{\theta \in \widehat{V/H} \\ \theta|_{\varphi_0}, \theta \neq 1}} \prod_{\zeta^{\ell^r}=1} f(\kappa\zeta_\theta\zeta^{-1} - 1, \bar{\theta}\omega) \right] \times \prod_{\zeta^{\ell^r}=1} \eta(\zeta - 1, \omega) \quad (5.8)$$

и b_{φ_0} определяется формулой (5.7) при $\varphi = \varphi_0$.

Пусть χ – произвольный характер группы G_∞ , который четен как характер Дирихле. Тогда характер χ можно представить в виде $\chi = \theta\pi$, где θ и π – характеры первого и второго рода в смысле Ивасава соответственно. Согласно данному в [5] знаменитому соотношению Ивасава между ℓ -адическими L -функциями и рядами Ивасава мы имеем

$$\frac{1}{2}L_\ell(s, \chi) = f(\xi\kappa^s - 1, \bar{\theta}\omega), \quad (5.9)$$

где $L_\ell(s, \chi)$ – ℓ -адическая L -функция Куботы–Леопольдта, соответствующая характеру χ , и $\xi = \chi(\gamma)^{-1} = \pi(\gamma)^{-1}$.

Заметим, что χ является характером группы $G = G(k/\mathbf{Q})$ тогда и только тогда, когда $\theta|_H = 1$, т.е. θ является характером группы V/H , и $\chi(\bar{\gamma}) = 1$, т.е. $\chi(\gamma^{\ell^r}\sigma) = \pi(\gamma)^{\ell^r}\theta(\sigma) = 1$. Таким образом, все характеры χ группы G с заданным θ имеют вид $\theta\pi$, где $\pi(\gamma)^{-1} = \zeta_\theta\zeta^{-1}$ и ζ пробегает все корни из единицы степени ℓ^r .

Тогда из (5.6) и (5.9) следует

$$a_\varphi = \prod_{\substack{\chi \in \widehat{G} \\ \chi|_\varphi}} \frac{1}{2}L_\ell(1, \chi). \quad (5.10)$$

Чтобы вычислить c_{φ_0} , заметим, что, рассуждая, как и прежде, мы получаем

$$\prod_{\substack{\theta \in \widehat{V/H} \\ \theta|_{\varphi_0}, \theta \neq 1}} \prod_{\zeta^{\ell^r}=1} f(\kappa\zeta_\theta\zeta^{-1} - 1, \bar{\theta}\omega) = \prod_{\substack{\chi \in \widehat{G}, \chi = \theta\pi \\ \theta|_{\varphi_0}, \theta \neq 1}} \frac{1}{2}L_\ell(1, \chi), \quad (5.11)$$

где χ пробегает все характеры группы G вида $\chi = \theta\pi$ с $\theta|_{\varphi_0}$ и $\theta \neq 1$.

Чтобы вычислить последнее произведение в (5.8), заметим, что согласно (2.12) мы имеем

$$\begin{aligned} \prod_{\zeta^{\ell^r}=1} \eta(\kappa\zeta - 1, \omega) &= \eta(\kappa - 1, \omega) \times \prod_{\substack{\zeta^{\ell^r}=1 \\ \zeta \neq 1}} [(1 - \zeta) \cdot f(\kappa\zeta - 1, \omega)] \\ &= \ell^r \eta(\kappa - 1, \omega) \times \prod_{\substack{\chi \in \widehat{G} \\ \chi = \theta\pi, \theta=1}} \frac{1}{2}L_\ell(1, \chi). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Таким образом, в последнем произведении χ пробегает все элементы $\widehat{G}$, являющиеся характерами второго рода.

Сопоставляя (5.11) и (5.12) и учитывая, что ряд $\eta(T, \omega)$ обратим, мы получаем

$$c_{\varphi_0} = \varepsilon \ell^r \prod_{\substack{\chi \in \widehat{G} \\ \chi|_{\varphi_0}, \chi \neq 1}} \frac{1}{2} L_\ell(1, \chi) \quad (5.13)$$

с некоторым обратимым элементом ε .

Чтобы вычислить $\nu_\ell(b_\varphi)$, заметим, что согласно (2.7) мы имеем

$$\nu_\ell(b_\varphi) = \nu_\ell(|(Y_\infty^H)_{(0), \varphi}|).$$

Положим

$$Y(k_n) := \prod_{v|\ell} \mu_\ell(k_{n,v}) \quad \text{и} \quad Y(k_\infty) := \varprojlim Y(k_n),$$

где проективный предел берется относительно норменных отображений. Тогда $Y_\infty^H \cong Y(k_\infty)$, поэтому $(Y_\infty^H)_{(0)} \cong Y(k_\infty)_{(0)}$. Если $\ell \neq 2$ и $\zeta_0 \notin k_v$, то $\zeta_0 \notin k_{n,v}$ при любом n , и мы имеем $Y(k_\infty)_{(0)} = Y(k) = 0$. Если $\ell \neq 2$ и $\zeta_0 \in k_v$, то $Y(k_n)$ является когомологически тривиальным $G(k_n/k)$ -модулем, следовательно, $Y(k_\infty)_{(0)} \cong Y(k)$.

Если $\ell = 2$ и $\sqrt{-1} \notin k_{\infty,v}$, то $Y(k_\infty) = 0$. Если $\ell = 2$ и $\sqrt{-1} \in k_v$, то группы $Y(k_n)$ снова будут когомологически тривиальными, и мы получаем, что $Y(k_\infty)_{(0)} \cong Y(k)$.

Наконец, если $\ell = 2$, $\sqrt{-1} \notin k_v$ и $\sqrt{-1} \in k_{\infty,v}$, то мы получаем снова $Y(k_\infty)_{(0)} \cong Y(k)$. В самом деле, если любая точка $v \mid \ell$ поля k не распадается в k_∞/k , то $\bar{\gamma}$ действует на группу $Y(k_\infty)$, как умножение на некоторое число $\lambda \in \mathbf{Z}_2^*$. Без труда проверяется, что $\lambda \not\equiv 1 \pmod{4}$, поэтому $Y(k_\infty)_{(0)} \cong Y(k_\infty)/2Y(k_\infty) \cong Y(k)$. Общий случай может быть без труда сведен к уже рассмотренному. Таким образом, мы получаем, что с точностью до умножения на некоторую единицу

$$b_\varphi = \begin{cases} 1 & \text{при } \ell = 2 \text{ и } \sqrt{-1} \notin k_{\infty,v} \text{ для } v \mid \ell, \\ |Y(k)_\varphi| & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (5.14)$$

Заметим, что при $\ell \neq 2$ мы имеем $b_{\varphi_0} = 1$, поскольку в этом случае $Y(k)_{\varphi_0} = 1$. Поэтому из (5.3), (5.5), (5.10), (5.13) и (5.14) следует, что

$$[\tilde{H}(k)_\varphi : \tilde{C}(k)_\varphi] = |(\tilde{H}(k_\infty)/\tilde{C}(k_\infty))_{(0), \varphi}| = \ell^{s_\varphi},$$

где при $\ell \neq 2$ s_φ задается формулой

$$s_\varphi = \begin{cases} \nu_\ell \left(\left(\prod_{\substack{\chi \in \widehat{G} \\ \chi|_\varphi}} \frac{1}{2} L_\ell(1, \chi) \right) |Y(k)_\varphi|^{-1} \right) & \text{при } \varphi \neq \varphi_0, \\ \nu_\ell \left(\ell^r \prod_{\substack{\chi \in \widehat{G} \\ \chi|_{\varphi_0}, \chi \neq 1}} \frac{1}{2} L_\ell(1, \chi) \right) & \text{при } \varphi = \varphi_0. \end{cases} \quad (5.15)$$

Если $\ell = 2$, то s_φ задается формулой

$$s_\varphi = \begin{cases} \nu_\ell \left(\prod_{\substack{\chi \in \widehat{G} \\ \chi|_\varphi}} \frac{1}{2} L_\ell(1, \chi) \right) & \text{при } \varphi \neq \varphi_0, \quad \sqrt{-1} \notin k_{\infty, v} \text{ для } v \mid \ell, \\ \nu_\ell \left(\ell^r \prod_{\substack{\chi \in \widehat{G} \\ \chi|_{\varphi_0}, \chi \neq 1}} \frac{1}{2} L_\ell(1, \chi) \right) & \text{при } \varphi = \varphi_0, \quad \sqrt{-1} \notin k_{\infty, v} \text{ для } v \mid \ell, \\ \nu_\ell \left(\left(\prod_{\substack{\chi \in \widehat{G} \\ \chi|_\varphi}} \frac{1}{2} L_\ell(1, \chi) \right) |Y(k)_\varphi|^{-1} \right) & \text{при } \varphi \neq \varphi_0, \quad \sqrt{-1} \in k_{\infty, v} \text{ для } v \mid \ell, \\ \nu_\ell \left(\ell^r \left(\prod_{\substack{\chi \in \widehat{G} \\ \chi|_{\varphi_0}, \chi \neq 1}} \frac{1}{2} L_\ell(1, \chi) \right) |Y(k)_{\varphi_0}|^{-1} \right) & \text{при } \varphi = \varphi_0, \quad \sqrt{-1} \in k_{\infty, v} \text{ для } v \mid \ell. \end{cases} \quad (5.16)$$

Согласно теореме 4.1 мы получаем

$$\begin{aligned} |T_\ell(k_\infty)_{(0)}| &= [H(k) : C_S(k)] [H(k) : \widehat{U}_S(k)]^{-1}, \\ |T_\ell(k_\infty)_{(0), \varphi}| &= [H(k)_\varphi : C_S(k)_\varphi] [H(k)_\varphi : \widehat{U}_S(k)_\varphi]^{-1} \end{aligned}$$

для любого φ .

Если $\ell \neq 2$, то $\tilde{H}(k_\infty) = H(k_\infty)$ и $\tilde{C}(k_\infty) = C(k_\infty)$. Поэтому в этом случае $(\tilde{H}(k_\infty)/\tilde{C}(k_\infty))_{(0)} = (H(k_\infty)/C(k_\infty))_{(0)} \cong H(k)/C(k)$. Таким образом, при $\ell \neq 2$ утверждение теоремы следует из (5.3) и (5.15).

Если $\ell = 2$ и $\sqrt{-1} \notin k_{\infty, v}$ для $v \mid \ell$, то $\tilde{H}(k)/H(k) \cong {}_2Y(k) = Y(k)$, где ${}_2Y(k) = \{y \in Y(k) \mid 2y = 0\}$ и $\tilde{C}_S(k)/C_S(k) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Если $\sqrt{-1} \in k_{\infty, v}$ для $v \mid \ell$, то $\tilde{H}(k) = H(k)$ и $\tilde{C}_S(k)/C_S(k) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Следовательно,

$$[H(k) : C_S(k)] = \begin{cases} 2|Y(k)|^{-1} [\tilde{H}(k) : \tilde{C}_S(k)] & \text{при } \sqrt{-1} \notin k_{\infty, v} \text{ для } v \mid \ell, \\ 2[\tilde{H}(k) : \tilde{C}_S(k)] & \text{при } \sqrt{-1} \in k_{\infty, v} \text{ для } v \mid \ell. \end{cases}$$

Если $\varphi \neq \varphi_0$, то

$$[H(k)_\varphi : C_S(k)_\varphi] = \begin{cases} |Y(k)_\varphi|^{-1} [\tilde{H}(k)_\varphi : \tilde{C}_S(k)_\varphi] & \text{при } \sqrt{-1} \notin k_{\infty, v} \text{ для } v \mid \ell, \\ [\tilde{H}(k)_\varphi : \tilde{C}_S(k)_\varphi] & \text{при } \sqrt{-1} \in k_{\infty, v} \text{ для } v \mid \ell. \end{cases}$$

Если $\varphi = \varphi_0$, то

$$[H(k)_{\varphi_0} : C_S(k)_{\varphi_0}] = \begin{cases} 2|Y(k)_{\varphi_0}|^{-1} [\tilde{H}(k)_{\varphi_0} : \tilde{C}_S(k)_{\varphi_0}] & \text{при } \sqrt{-1} \notin k_{\infty, v} \text{ для } v \mid \ell, \\ 2[\tilde{H}(k)_{\varphi_0} : \tilde{C}_S(k)_{\varphi_0}] & \text{при } \sqrt{-1} \in k_{\infty, v} \text{ для } v \mid \ell. \end{cases}$$

Теперь утверждение нашей теоремы для $\ell = 2$ следует из (5.3) и (5.16).

§6. Уточнение теоремы Хассе о дискриминанте и ведущем модуле

Пусть k – поле алгебраических чисел степени t , являющееся расширением Галуа над $\mathbf{Q}$ и имеющее группу Галуа $G = G(k/\mathbf{Q})$. Мы будем рассматривать k как подполе некоторого фиксированного алгебраического замыкания $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ поля $\mathbf{Q}_\ell$. Положим

$$\mathbf{A}_k = \{(x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_t}) \mid x_{\sigma_i} \in \overline{\mathbf{Q}}_\ell, \quad G = \{\sigma_1 = 1, \sigma_2, \dots, \sigma_t\}\}.$$

Таким образом, $\mathbf{A}_k$ совпадает с множеством всех векторов длины t с координатами из $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$, имеющих G в качестве множества индексов. Мы определим сложение и умножение в $\mathbf{A}_k$ покомпонентно. Для $\lambda \in \overline{\mathbf{Q}}_\ell$ и $\sigma \in G$ мы полагаем $\lambda(x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_t}) = (\lambda x_{\sigma_1}, \dots, \lambda x_{\sigma_t})$,

$$\sigma(x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_t}) = (y_{\sigma_1}, \dots, y_{\sigma_t}), \quad \text{где } y_{\sigma_i} = x_{\sigma_i \sigma} \quad \text{для } i = 1, \dots, t. \quad (6.1)$$

Таким образом, действие G коммутирует с умножением на $\lambda \in \overline{\mathbf{Q}}_\ell$, и мы можем рассматривать $\mathbf{A}_k$ как $\overline{\mathbf{Q}}_\ell[G]$ -алгебру.

Положим $f_i = \{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0\} \in \mathbf{A}_k$, где единственная ненулевая координата имеет индекс σ_i . Тогда множество $\{f_1, \dots, f_t\}$ образует базис алгебры $\mathbf{A}_k$ над $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ и любой из элементов f_i порождает $\mathbf{A}_k$ как $\overline{\mathbf{Q}}_\ell[G]$ -модуль. Это означает, что $\mathbf{A}_k \cong \overline{\mathbf{Q}}_\ell[G]$ как $\overline{\mathbf{Q}}_\ell[G]$ -модуль, причем мы имеем $\sigma(f_i) = f_j$, где $\sigma_j = \sigma_i \sigma$.

Мы определим вложение $\alpha: k \hookrightarrow \mathbf{A}_k$ при помощи формулы $\alpha(x) = (x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_t})$, где $x_{\sigma_i} = \sigma_i^{-1}(x)$, $i = 1, \dots, t$. Таким образом, мы имеем $\alpha(\sigma(x)) = \sigma(\alpha(x))$ для любых $\alpha \in k$ и $\sigma \in G$.

Если элементы $e_1, \dots, e_t \in k$ образуют базис k над $\mathbf{Q}$, то элементы $\alpha(e_1), \dots, \alpha(e_t)$ образуют базис $\mathbf{A}_k$ над $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$. Следовательно, α индуцирует изоморфизм

$$\overline{\mathbf{Q}}_\ell \otimes_{\mathbf{Q}} k \cong \mathbf{A}_k, \quad \lambda \otimes x \rightarrow \lambda \alpha(x) \quad \text{для любых } \lambda \in \overline{\mathbf{Q}}_\ell, \quad x \in k.$$

Если $\overline{\mathcal{O}}$ – кольцо целых поля $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$, то множество

$$\mathbf{R}_k = \{(x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_t}) \in \mathbf{A}_k \mid x_{\sigma_i} \in \overline{\mathcal{O}} \quad \text{для любых } \sigma_i \in G\}$$

совпадает с максимальным порядком в $\mathbf{A}_k$. Отметим, что $\mathbf{R}_k$ является свободным $\overline{\mathcal{O}}[G]$ -модулем ранга 1, порождаемым любым из элементов $f_1, \dots, f_t$.

Если $\mathcal{O}_k$ – кольцо целых поля k и элементы $\{e_1, \dots, e_t\}$ образуют $\mathbf{Z}$ -базис $\mathcal{O}_k$, то $\{\alpha(e_1), \dots, \alpha(e_t)\}$ образуют $\overline{\mathcal{O}}$ -базис модуля $\mathcal{O}_k := \overline{\mathcal{O}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{O}_k$.

Пусть V – некоторое $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ -подпространство в $\mathbf{A}_k$ и $L, M \subset V$ – полные $\overline{\mathcal{O}}$ -решетки в V . Это означает, что L и M конечно порождены как $\overline{\mathcal{O}}$ -модули и каждый из них порождает V как $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ -пространство. Тогда существует невырожденное линейное преобразование $A: V \rightarrow V$ такое, что $A(L) = M$. В этом случае, как и в [15], мы определим индекс

$$(L : M) = \det(A),$$

где $\det(A)$ означает определитель A . Итак, $(L : M) \in \overline{\mathbf{Q}}_\ell^*$ и индекс $(L : M)$ определен однозначно с точностью до умножения на единицу из $\overline{\mathcal{O}}$. Следовательно, $\nu_\ell((L : M))$ не зависит от выбора A . Если $L \subseteq M$, то $\nu_\ell((L : M)) = 0$ тогда и только тогда, когда $L = M$.

Мы определим $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ -билинейную форму $\psi: \mathbf{A}_k \times \mathbf{A}_k \rightarrow \overline{\mathbf{Q}}_\ell$ при помощи формулы $\psi(x, y) = \sum_{\sigma_i \in G} x_{\sigma_i} y_{\sigma_i}$ для $x = (x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_t})$, $y = (y_{\sigma_1}, \dots, y_{\sigma_t}) \in \mathbf{A}_k$.

Тогда для любых $a, b \in k$ мы имеем

$$\psi(\alpha(a), \alpha(b)) = \text{Sp}_{k/\mathbf{Q}}(ab),$$

где $\text{Sp}_{k/\mathbf{Q}}$ означает след из k в $\mathbf{Q}$.

Пусть A – матрица $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ -линейного преобразования такого, что $Af_i = \alpha(e_i)$, $i = 1, \dots, t$, где $\{f_1, \dots, f_t\}$ и $\{\alpha(e_1), \dots, \alpha(e_t)\}$ определены, как и выше.

Форма ψ имеет матрицу $E = 1$ относительно базиса $\{f_1, \dots, f_t\}$ и матрицу $C = (\text{Sp}_{k/\mathbf{Q}}(e_i e_j))$ относительно базиса $\{e_1, \dots, e_t\}$. Поэтому $(\det(A))^2 = \det(C)$ и, следовательно, $(\mathbf{R}_k : \tilde{\mathcal{O}}_k)^2 = d_k$, где d_k – абсолютный дискриминант поля k .

Начиная с этого места, мы предполагаем, что поле k абелево. Согласно теореме Хассе о дискриминанте и ведущем модуле справедливо равенство

$$d_k = \prod_{\chi \in \widehat{G}} f_\chi = \prod_{\substack{\chi \in \widehat{G} \\ \chi \neq 1}} f_\chi,$$

где $\widehat{G}$ – группа характеров группы G и f_χ – кондуктор характера χ , рассматриваемого как примитивный характер Дирихле. Мы считаем, что все характеры G принимают значения в $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$. Для заданного $\chi \in \widehat{G}$ пусть ζ – некоторый первообразный корень из единицы в $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ степени f_χ . Тогда можно образовать гауссову сумму

$$g_\chi = \sum_{\substack{a \bmod f_\chi \\ (a, f_\chi)=1}} \chi(a) \zeta^a \in \overline{\mathbf{Q}}_\ell.$$

Хорошо известно, что $\nu_\ell(g_\chi)$ не зависит от конкретного выбора корня ζ . Хорошо известно также, что $g_\chi \bar{g}_\chi = f_\chi$ и $\bar{g}_\chi = \chi(-1)g_{\bar{\chi}}$, где $\bar{\chi} = \chi^{-1}$ и

$$\bar{g}_\chi = \sum_{\substack{a \bmod f_\chi \\ (a, f_\chi)=1}} \bar{\chi}(a) \zeta^{-a}.$$

Тогда “ ℓ -часть” теоремы Хассе о дискриминанте и ведущем модуле можно сформулировать в виде равенства

$$\nu_\ell((\mathbf{R}_k : \tilde{\mathcal{O}}_k)) = \nu_\ell \left(\prod_{\substack{\chi \in \widehat{G} \\ \chi \neq 1}} g_\chi \right). \quad (6.2)$$

Пусть Φ определено, как и выше. Следующий результат является уточнением формулы (6.2).

ТЕОРЕМА 6.1. *Для любого $\varphi \in \Phi$ индекс $(\mathbf{R}_{k,\varphi} : \tilde{\mathcal{O}}_{k,\varphi})$ определен и выполняется равенство*

$$\nu_\ell((\mathbf{R}_{k,\varphi} : \tilde{\mathcal{O}}_{k,\varphi})) = \nu_\ell \left(\prod_{\substack{\chi \in \widehat{G} \\ \chi|_\varphi, \chi \neq 1}} g_{\bar{\chi}} \right). \quad (6.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть поле k имеет кондуктор $N = \ell^m d$, $(d, \ell) = 1$. Мы докажем нашу теорему индукцией по m .

1. Если $N = d$ (т.е. $m = 0$), то d_k взаимно прост с ℓ и $\mathbf{R}_k = \tilde{\mathcal{O}}_k$. Тогда $\mathbf{R}_{k,\varphi} = \tilde{\mathcal{O}}_{k,\varphi}$ и $\nu_\ell((\mathbf{R}_{k,\varphi} : \tilde{\mathcal{O}}_{k,\varphi})) = 0$ для любого $\varphi \in \Phi$. С другой стороны, соотношение $g_\chi g_{\bar{\chi}} = \chi(-1)f_\chi$, $f_\chi \mid d$, выполняющееся для целых алгебраических чисел g_χ , $g_{\bar{\chi}}$, показывает, что $\nu_\ell(g_\chi) = 0$ для любого χ . Это доказывает равенство (6.3) для $m = 0$.

2. Пусть ℓ нечетно. Мы утверждаем, что для того, чтобы доказать (6.3) для поля k , достаточно доказать (6.3) для поля $k_1 = k(\zeta_0)$, где ζ_0 – первообразный корень из единицы степени ℓ . Положим $G_1 = G(k_1/\mathbf{Q})$, $H_1 = G(k_1/k)$. Тогда H_1 – циклическая группа порядка, взаимно простого с ℓ . Для $\varphi \in \Phi$ и $\chi \in \hat{G}$ мы обозначим через φ_1 (соответственно χ_1) образы элементов φ (соответственно χ) относительно инфляции из G в G_1 . Тогда φ_1 является $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ -неприводимым характером группы G_1 , тривиальным на H_1 и на силовой ℓ -подгруппе группы G_1 . Таким образом, любой $\chi' \in \hat{G}_1$ такой, что $\chi' \mid \varphi_1$, является инфляцией некоторого характера $\chi \in \hat{G}$ такого, что $\chi \mid \varphi$. Поскольку χ и χ_1 имеют одинаковый кондуктор, мы получаем, что $g_\chi = g_{\chi_1}$. Следовательно,

$$\prod_{\substack{\chi \in \hat{G} \\ \chi \mid \varphi, \chi \neq 1}} g_{\bar{\chi}} = \prod_{\substack{\chi_1 \in \hat{G}_1 \\ \chi_1 \mid \varphi_1, \chi_1 \neq 1}} g_{\bar{\chi}_1}.$$

С другой стороны, отображение следа $\text{Sp}_{k_1/k}$ индуцирует изоморфизмы $\mathbf{R}_{k_1,\varphi_1} \cong \mathbf{R}_{k,\varphi}$, $\tilde{\mathcal{O}}_{k_1,\varphi_1} \cong \tilde{\mathcal{O}}_{k,\varphi}$, что доказывает наше утверждение.

3. Пусть теперь ℓ нечетно и $m = 1$, т.е. k имеет только ручное ветвление. Согласно п. 2 мы можем предположить, что $k = E(\zeta_0)$, где поле E не разветвлено над ℓ . Тогда $k = E \cdot \mathbf{Q}(\zeta_0)$ и $G = G(k/\mathbf{Q}) \cong F \times \Delta$, где $F = G(E/\mathbf{Q})$, $\Delta = G(\mathbf{Q}(\zeta_0)/\mathbf{Q})$. Таким образом, любой $\mathbf{Q}_\ell$ -неприводимый характер φ группы G имеет вид $\varphi = \varphi_1 \otimes \omega^i$, где φ_1 – некоторый $\mathbf{Q}_\ell$ -неприводимый характер F , а ω^i – некоторая степень характера Тейхмюллера $\omega: \Delta \rightarrow \mathbf{Z}_\ell^*$, $i = 0, \dots, \ell - 2$. Если $\chi \in \hat{G}$ и $\chi \mid \varphi$, то $\chi = \chi_1 \otimes \omega^i$, где $\chi_1 \in \hat{F}$ и $\chi_1 \mid \varphi_1$. Разумеется, мы можем предполагать, что $i \neq 0$ (если $i = 0$, то мы находимся в ситуации п. 1). Поскольку χ_1 и ω^i имеют взаимно простые кондукторы, выполняется равенство $g_{\bar{\chi}} = g_{\bar{\chi}_1} g_{\bar{\omega}^i}$, следовательно,

$$\prod_{\chi \mid \varphi} g_{\bar{\chi}} = \prod_{\chi_1 \mid \varphi_1} g_{\bar{\chi}_1} \cdot g_{\bar{\omega}^i}. \quad (6.4)$$

ЛЕММА 6.1. Пусть $g_{\omega^i} \in \overline{\mathbf{Q}}_\ell$ – гауссова сумма, соответствующая характеру ω^i . Тогда

$$\nu_\ell(g_{\omega^i}) = \frac{\ell - 1 - i}{\ell - 1} \quad \text{для } i = 1, \dots, \ell - 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\omega^i = \bar{\omega}$, т.е. $i = \ell - 2$, то, полагая $\pi_0 = 1 - \zeta_0$, где ζ_0 – первообразный корень из единицы степени ℓ , мы получаем

$$g_{\bar{\omega}} = \sum_{a=1}^{\ell-2} \bar{\omega}(a)(1 - \pi_0)^a \equiv \sum_{a=1}^{\ell-2} -\bar{\omega}(a)a\pi_0 \equiv \pi_0 \pmod{\pi_0^2}.$$

Следовательно, $\nu_\ell(g_{\bar{\omega}}) = 1/(\ell - 1)$.

Если автоморфизм $\delta_b \in \Delta$ переводит ζ_0 в ζ_0^b , то $\delta_b(g_{\omega^i}) = \bar{\omega}^i(b)g_{\omega^i}$ и $\delta_b(g_{\bar{\omega}}) = \omega(b)g_{\bar{\omega}}$. Поэтому $(g_{\omega^i})^{\ell-1} \in \mathbf{Q}_\ell$, и согласно теории Куммера $g_{\omega^i} = (g_{\bar{\omega}})^c a$ для некоторых $c = 1, \dots, \ell - 2$ и $a \in \mathbf{Q}_\ell$. Так как $\delta_b(g_{\omega^i}) = \bar{\omega}^i(b)g_{\omega^i} = \omega(b)^c (g_{\bar{\omega}})^c$, то мы получаем, что $c = (\ell - 1) - i$. Соотношение $g_{\omega^i} \bar{g}_{\omega^i} = \ell$ показывает, что $\nu_\ell(g_{\omega^i}) \leq 1$, поэтому $\nu_\ell(a) = 0$. Следовательно, $\nu_\ell(g_{\omega^i}) = \frac{\ell-1-i}{\ell-1}$, что доказывает лемму.

Если $\mathcal{O}_F$ (соответственно $\mathcal{O}_k$) – кольцо целых поля F (соответственно поля k), то $\mathcal{O}_k = \mathcal{O}_F + \mathcal{O}_F \zeta_0 + \dots + \mathcal{O}_F \zeta_0^{\ell-2}$. Пусть

$$e_{\omega^i} = |\Delta|^{-1} \sum_{\delta \in \Delta} \bar{\omega}^i(\delta) \delta$$

– идемпотент, соответствующий характеру ω^i . Тогда $e_{\omega^i} \zeta_0^b = |\Delta|^{-1} \omega^i(b) g_{\bar{\omega}^i}$. Следовательно, $\mathcal{O}_{k,\varphi} = g_{\bar{\omega}^i} \mathcal{O}_{F,\varphi_1}$. Учитывая, что $\tilde{\mathcal{O}}_{k,\varphi} = \tilde{\mathcal{O}} \cdot \mathcal{O}_{k,\varphi}$, мы получаем, что $\nu_\ell((\mathbf{R}_{k,\varphi} : \tilde{\mathcal{O}}_{k,\varphi})) = s \nu_\ell(g_{\bar{\omega}^i})$, где s совпадает с $\mathbf{Z}_\ell$ -рангом модуля $\mathcal{O}_{F,\varphi_1}$, т.е. с размерностью характера φ_1 . Сравнивая это с (6.4) и с равенством леммы 6.1 и учитывая, что $\nu_\ell(g_{\bar{\chi}_1}) = 0$ для любого $\chi_1 \mid \varphi_1$, мы получаем справедливость (6.3) в случае ручного ветвления.

4. Пусть абелево числовое поле k кондуктора N имеет дикое ветвление над ℓ . Согласно п. 2 мы можем предположить, что $\zeta_0 \in k$ для $\ell \neq 2$. В этом случае $N = \ell^m d$, где $m \geq 1$ при $\ell \neq 2$ и $m \geq 2$ при $\ell = 2$. Положим $K_n = \mathbf{Q}(\mu_d, \zeta_n)$, где $n = m - 1$ при $\ell \neq 2$; $n = m - 2$ при $\ell = 2$. Тогда $k \subseteq K_n$ и $k \not\subseteq K_{n-1}$, т.е., полагая $k_0 := k \cap K_{n-1}$, мы получаем следующую диаграмму полей:

$$\begin{array}{ccc} k & \subseteq & K_n \\ | & & | \\ k_0 & \subseteq & K_{n-1} \end{array} \quad (6.5)$$

Положим $H = G(K_n/K_{n-1}) \cong G(k/k_0)$ и $F = G(K_n/k) \cong G(K_{n-1}/k_0)$. Заметим, что $H \cong \mathbf{Z}/\ell \mathbf{Z}$.

ЛЕММА 6.2. Пусть k имеет кондуктор $N \equiv 0 \pmod{\ell^2}$ ($N \equiv 0 \pmod{8}$ при $\ell = 2$) и k_0 имеет тот же смысл, что и в (6.5). Пусть $\mathbf{B}_k$ – ядро отображения следа $\mathrm{Sp}_{k/k_0}: \tilde{\mathcal{O}}_k \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}_{k_0}$. Тогда $\mathbf{B}_k$ является циклическим $\tilde{\mathcal{O}}[G]$ -модулем, изоморфным $\mathbf{R}_k/\mathbf{R}_k^H$, и $\mathrm{Sp}_{k/k_0}(\tilde{\mathcal{O}}_k) = \ell \tilde{\mathcal{O}}(k_0)$. Если K_n и k имеют тот же смысл, что и в (6.5), то отображение $\mathrm{Sp}_{K_n/k}: \tilde{\mathcal{O}}_{K_n} \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}_k$ индуцирует эпиморфизм $\mathbf{B}_{K_n} \rightarrow \mathbf{B}_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что $k = K_n$ (тогда $k_0 = K_{n-1}$). Пусть отображение $\alpha: K_n \hookrightarrow \mathbf{A}_{K_n}$ определено, как и выше. Тогда элементы вида $\alpha(\varepsilon \zeta_n^s)$, $s \in \mathbf{Z}$, порождают $\tilde{\mathcal{O}}_{K_n}$ как $\tilde{\mathcal{O}}$ -модуль. Мы имеем

$$\mathrm{Sp}_{K_n/K_{n-1}}(\alpha(\varepsilon \zeta_n^s)) = \begin{cases} 0 & \text{при } s \not\equiv 0 \pmod{\ell}, \\ \ell \alpha(\varepsilon \zeta_n^s) & \text{при } s \equiv 0 \pmod{\ell}. \end{cases}$$

Таким образом, элементы $\alpha(\varepsilon \zeta_n^s)$ с $s \not\equiv 0 \pmod{\ell}$ порождают $\mathbf{B}_{K_n}$ и, следовательно,

$$\tilde{\mathcal{O}}_{K_n} = \mathbf{B}_{K_n} \oplus \tilde{\mathcal{O}}_{K_{n-1}}. \quad (6.6)$$

Поле $K_{-1} = \mathbf{Q}(\mu_d)$ не разветвлено над ℓ , следовательно, $\tilde{\mathcal{O}}_{K_{-1}}$ является свободным $\overline{\mathcal{O}}[G(K_{-1}/\mathbf{Q})]$ -модулем с одной образующей, например x . Тогда $x \cdot \alpha(\zeta_n)$ порождает $\mathbf{B}_{K_n}$ как $G(K_n/\mathbf{Q})$ -модуль, т.е. $\mathbf{B}_{K_n}$ – циклический модуль. Следовательно, существует эпиморфизм $p: \mathbf{R}_{K_n} \rightarrow \mathbf{B}_{K_n}$. Разумеется, $\mathbf{R}_{K_n}^H \subset \text{Ker } p$. Поскольку модуль $\mathbf{R}_{K_n}/\mathbf{R}_{K_n}^H$ свободен над $\overline{\mathcal{O}}$ и имеет тот же $\overline{\mathcal{O}}$ -ранг, что и $\mathbf{B}_{K_n}$, мы получаем, что p индуцирует изоморфизм $\mathbf{B}_{K_n} \cong \mathbf{R}_{K_n}/\mathbf{R}_{K_n}^H$. Этим наша лемма доказана для случая $k = K_n$.

Если k – произвольное абелево поле, то мы имеем коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{B}_{K_n} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{O}}_{K_n} & \xrightarrow{\text{Sp}_H} & \tilde{\mathcal{O}}_{K_{n-1}} \\ & & \downarrow \text{Sp}_F & & \downarrow \text{Sp}_F & & \downarrow \text{Sp}_F \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{B}_k & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{O}}_k & \xrightarrow{\text{Sp}_H} & \tilde{\mathcal{O}}_{k_0} \end{array} \quad (6.7)$$

где K_n , K_{n-1} и k_0 имеют тот же смысл, что и в (6.5).

Предположим сначала, что расширение K_n/k не разветвлено над ℓ . Тогда K_{n-1}/k_0 не разветвлено над ℓ и отображения $\text{Sp}_F: \tilde{\mathcal{O}}_{K_n} \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}_k$, $\text{Sp}_F: \tilde{\mathcal{O}}_{K_{n-1}} \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}_{k_0}$ эпиморфны. Следовательно,

$$\text{Sp}_H(\tilde{\mathcal{O}}_k) = \text{Sp}_H \cdot \text{Sp}_F(\tilde{\mathcal{O}}_{K_n}) = \text{Sp}_F \cdot \text{Sp}_H(\tilde{\mathcal{O}}_{K_n}) = \text{Sp}_F(\ell \tilde{\mathcal{O}}_{K_{n-1}}) = \ell \tilde{\mathcal{O}}_{k_0}.$$

Таким образом, любой $x \in \tilde{\mathcal{O}}_k$ может быть представлен в виде $x = (x - \ell^{-1} \text{Sp}_H x) + \ell^{-1} \text{Sp}_H x$, где $(x - \ell^{-1} \text{Sp}_H x) \in \mathbf{B}_k$, $\ell^{-1} \text{Sp}_H x \in \tilde{\mathcal{O}}_{k_0}$, следовательно, $\tilde{\mathcal{O}}_k = \mathbf{B}_k \oplus \tilde{\mathcal{O}}_{k_0}$. Разложение (6.6) показывает, что отображение $\text{Sp}_F: \mathbf{B}_{K_n} \rightarrow \mathbf{B}_k$ эпиморфно. Поэтому $\mathbf{B}_k$ является циклическим $\overline{\mathcal{O}}[G]$ -модулем, и, рассуждая, как и прежде, мы получаем, что $\mathbf{B}_k \cong \mathbf{R}_k/\mathbf{R}_k^H$. Этим наша лемма доказана в случае, когда K_n/k не разветвлено над ℓ .

Заметим, что этот случай всегда имеет место, если $\ell \neq 2$ или $\ell = 2$ и $n = 0$. В самом деле, поскольку $\zeta_0 \in k_0$ при $\ell \neq 2$ (см. п. 2), подгруппа инерции W точки ℓ в $G(K_n/k_0)$ является циклической ℓ -группой, и $G(K_n/K_{n-1}) \subset W$. Так как $G(K_n/k) \cap G(K_n/K_{n-1}) = 1$, то мы имеем $G(K_n/k) \cap W = 1$, т.е. расширение K_n/k не разветвлено над ℓ .

Теперь, чтобы закончить доказательство леммы, мы должны рассмотреть случай, когда $\ell = 2$, $n \geq 1$, и расширение K_n/k разветвлено над точкой 2. Пусть W – подгруппа инерции точки 2 в $G(K_n/\mathbf{Q})$. Тогда $W \cong (\mathbf{Z}/\ell^m \mathbf{Z})^*$, поэтому $W = V \times \Delta$, где $\Delta \cong \{\pm 1\}$ и $V \cong (1 + 4\mathbf{Z})/(1 + 2^m \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}/2^n \mathbf{Z}$. Так как $k \not\subset K_{n-1}$, мы имеем $F \cap V = 1$. Пусть σ – единственный элемент порядка 2 в группе V и τ – единственный отличный от единицы элемент группы Δ , т.е. $\sigma(\zeta_n) = -\zeta_n$, $\tau(\zeta_n) = \zeta_n^{-1}$. Тогда $H = \{1, \sigma\}$ и условие $F \cap W = 1$ означает, что либо $F \cap W = \{1, \tau\}$, либо $F \cap W = \{1, \sigma\tau\}$. Пусть k_1 – неподвижное поле относительно группы $F \cap W$. Тогда $K_n \supset k_1 \supseteq k$, $[K_n : k_1] = 2$, $G(K_n/k_1) = \{1, \tau\}$ или $\{1, \sigma\tau\}$ и k_1/k не разветвлено над ℓ .

Теперь нам нужно вычислить ℓ -компоненты дифферента всех расширений, входящих в (6.5). В дальнейшем символ $\mathcal{D}$ будет обозначать ℓ -компоненту дифферента. Хорошо известно, что $\mathcal{D}_{K_n/K_{n-1}} = (2)$. Если $G(K_n/k_1) = \{1, \tau\}$, то $\text{Sp}_{K_n/k_1}(\zeta_n^i) = \zeta_n^i + \zeta_n^{-i}$. Положим $\pi = 1 - \zeta_{n-1}$. Поскольку $\text{Sp}_{K_n/k_1}(\zeta_n) = \zeta_n + \zeta_n^{-1} \equiv \zeta_n^{-1}(1 - \zeta_{n-1}) \pmod{2}$, мы получаем, что $\text{Sp}_{K_n/k_1}(\mathcal{O}_{K_n}) = \pi \mathcal{O}_{k_1}$,

т.е. $\text{Sp}_{K_n/k_1}(\pi^{-1}\mathcal{O}_{K_n}) = \mathcal{O}_{k_1}$. Учитывая, что $\text{Sp}_{K_n/k_1}((1 - \zeta_n)\pi^{-2}) \notin \mathcal{O}_{k_1}$, мы получаем $\mathcal{D}_{K_n/k_1} = (\pi)$. Расширение k_1/k не разветвлено над ℓ , поэтому $\mathcal{D}_{K_n/k} = \mathcal{D}_{K_n/k_1} = (\pi)$ и $\nu_\ell(\mathcal{D}_{K_n/k}) = 2^{-n}$. Если $G(K_n/k_1) = \{1, \sigma\tau\}$, то, рассуждая, как и выше, и полагая $\pi = \zeta_n - \zeta_n^{-1}$, мы снова получаем, что $\nu_\ell(\mathcal{D}_{K_n/k}) = 2^{-n}$.

В силу мультипликативного свойства дифференцы мы имеем

$$\mathcal{D}_{K_n/k} \cdot \mathcal{D}_{k/k_0} = \mathcal{D}_{K_n/K_{n-1}} \cdot \mathcal{D}_{K_{n-1}/k_0}.$$

Мы уже вычислили $\mathcal{D}_{K_n/k}$. Хорошо известно, что $\mathcal{D}_{K_n/K_{n-1}} = (2)$. Заметим, что точки, лежащие над 2, разветвлены в расширении k/k_0 (поскольку $K_n = k \times K_{n-1}$), следовательно, они разветвлены и в расширении K_{n-1}/k_0 . Тогда, если $n \geq 2$, то, рассуждая, как и выше, мы получаем, что $\nu_\ell(\mathcal{D}_{K_{n-1}/k_0}) = 2^{1-n}$. Если $n = 1$, то расширение $k_0/\mathbf{Q}$ не разветвлено над точкой 2. Тогда $\mathcal{D}_{K_0/k_0} = (2)$ и $\nu_\ell(\pi) = \frac{1}{2}$. Итак, в любом случае мы имеем $\nu_\ell(\mathcal{D}_{k/k_0}) = \nu_\ell(2\pi)$. Следовательно, $\text{Sp}_{k/k_0}(\tilde{\mathcal{O}}_k) = 2\tilde{\mathcal{O}}_{k_0}$.

Если $x \in \tilde{\mathcal{O}}_k \setminus \alpha(\pi)\tilde{\mathcal{O}}_k$, то мы можем представить x в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in \tilde{\mathcal{O}}_{k_0}^*$ и $x_2 \in \alpha(\pi)\tilde{\mathcal{O}}_k$. Пусть элемент $\pi_0 \in k_0$ является локальным параметром в любой точке $v \mid \ell$ поля k_0 . Тогда $\alpha(\pi)\tilde{\mathcal{O}}_k = \alpha(\pi^{-1}\pi_0)\tilde{\mathcal{O}}_k$, следовательно, имеют место включения $\text{Sp}_H(x_2) \in \text{Sp}_H(\alpha(\pi^{-1}\pi_0)\tilde{\mathcal{O}}_k) \subset \alpha(2\pi_0)\tilde{\mathcal{O}}_k$, поскольку $\nu_\ell(\mathcal{D}_{k/k_0}) = \nu_\ell(2\pi)$. С другой стороны, $\text{Sp}_H(x_1) = 2x_1 \notin \alpha(2\pi_0)\tilde{\mathcal{O}}_k$. Следовательно, $\text{Sp}_H(x) \neq 0$, т.е. $x \notin \mathbf{B}_k$, откуда следует, что $\mathbf{B}_k \subset \alpha(\pi)\tilde{\mathcal{O}}_k = \text{Sp}_{K_n/k}(\tilde{\mathcal{O}}_{K_n})$. Если $a \in \mathbf{B}_k$ и $a = \text{Sp}_F(b)$, $b \in \tilde{\mathcal{O}}_{K_n}$, то согласно (6.6) мы имеем $b = b_1 + b_2$, где $b_1 \in \mathbf{B}_{K_n}$, $b_2 \in \tilde{\mathcal{O}}_{K_{n-1}}$. Тогда

$$0 = \text{Sp}_H(a) = \text{Sp}_H \text{Sp}_F(b_1 + b_2) = \text{Sp}_F \text{Sp}_H(b_1) + \text{Sp}_F \text{Sp}_H(b_2) = \text{Sp}_F(2b_2).$$

Следовательно, $\text{Sp}_F(b_2) = 0$ и $a = \text{Sp}_F(b_1)$, т.е. отображение $\text{Sp}_F: \mathbf{B}_{K_n} \rightarrow \mathbf{B}_k$ в (6.7) эпиморфно. Это означает, что $\mathbf{B}_k$ является циклическим $\tilde{\mathcal{O}}[G]$ -модулем, поэтому $\mathbf{B}_k \cong \mathbf{R}_k/\mathbf{R}_k^H$. Этим наша лемма доказана.

ЛЕММА 6.3. Пусть k , k_0 и H те же, что и в (6.5). Положим $\mathbf{N}_k := (1 - \ell^{-1}\text{Sp}_H)\mathbf{R}_k \subset \ell^{-1}\mathbf{R}_k$. Тогда

$$(\mathbf{R}_{k,\varphi} : \tilde{\mathcal{O}}_{k,\varphi}) = (\mathbf{N}_{k,\varphi} : \mathbf{B}_{k,\varphi})(\mathbf{R}_{k,\varphi} : \tilde{\mathcal{O}}_{k,\varphi}) \quad \text{для любого } \varphi \in \Phi.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathbf{M}_k$ ядро отображения следа $\text{Sp}_H: \mathbf{R}_k \rightarrow \mathbf{R}_{k_0}$. Тогда для заданного $\varphi \in \Phi$ мы имеем коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{B}_{k,\varphi} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{O}}_{k,\varphi} & \xrightarrow{\text{Sp}_H} & \ell\tilde{\mathcal{O}}_{k_0,\varphi} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{M}_{k,\varphi} & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{R}}_{k,\varphi} & \xrightarrow{\text{Sp}_H} & \tilde{\mathbf{R}}_{k_0,\varphi} \longrightarrow 0 \end{array} \quad (6.8)$$

в которой вертикальные стрелки являются естественными вложениями.

Из (6.8) следует

$$(\mathbf{R}_{k,\varphi} : \tilde{\mathcal{O}}_{k,\varphi}) = (\mathbf{M}_{k,\varphi} : \mathbf{B}_{k,\varphi})(\mathbf{R}_{k_0,\varphi} : \ell\tilde{\mathcal{O}}_{k_0,\varphi}). \quad (6.9)$$

Поскольку $\mathbf{R}_k \cong \overline{\mathcal{O}}[G]$ как $\overline{\mathcal{O}}[G]$ -модуль, отображение $\mathrm{Sp}_H : \mathbf{R}_k \rightarrow \mathbf{R}_{k_0}$ индуцирует изоморфизм $\mathbf{N}_k / \mathbf{M}_k \cong \mathbf{R}_{k_0} / \ell \mathbf{R}_{k_0}$. Следовательно, $(\mathbf{N}_{k,\varphi} : \mathbf{M}_{k,\varphi}) = (\mathbf{R}_{k_0,\varphi} : \ell \mathbf{R}_{k_0,\varphi})$, и тогда из (6.9) следует, что

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}_{k,\varphi} : \tilde{\mathcal{O}}_{k,\varphi}) &= (\mathbf{M}_{k,\varphi} : \mathbf{B}_{k,\varphi})(\mathbf{R}_{k_0,\varphi} : \ell \mathbf{R}_{k_0,\varphi})(\ell \mathbf{R}_{k_0,\varphi} : \ell \tilde{\mathcal{O}}_{k_0,\varphi}) \\ &= (\mathbf{N}_{k,\varphi} : \mathbf{B}_{k,\varphi})(\mathbf{R}_{k_0,\varphi} : \tilde{\mathcal{O}}_{k_0,\varphi}). \end{aligned}$$

ЛЕММА 6.4. Пусть $L, M \subset \mathbf{A}_k$ – две решетки, которые порождают одно и то же $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ -пространство $V \subseteq \mathbf{A}_k$. Пусть L, M являются $\overline{\mathcal{O}}[G]$ -модулями. Для $\chi \in \widehat{G}$ положим $L_\chi = e_\chi L$, $M_\chi = e_\chi M$, где $e_\chi = |G|^{-1} \sum_{\sigma \in G} \bar{\chi}(\sigma) \sigma$ – идемпотент, соответствующий χ . Если $L \cong M$ как $\overline{\mathcal{O}}[G]$ -модули, то

$$(L : M) = \prod_{\chi \in \widehat{G}} (L_\chi : M_\chi)$$

и для любого $\varphi \in \Phi$

$$(L_\varphi : M_\varphi) = \prod_{\substack{\chi \in \widehat{G} \\ \chi | \varphi}} (L_\chi : M_\chi),$$

где мы полагаем $(L_\varphi : M_\varphi) = 1$ в случае, когда $L_\varphi = M_\varphi = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $L' = \bigoplus_{\chi \in \widehat{G}} L_\chi$, $M' = \bigoplus_{\chi \in \widehat{G}} M_\chi$. Если отображение $f : L \cong M$ является $\overline{\mathcal{O}}[G]$ -изоморфизмом, то f индуцирует изоморфизмы $L' \cong M'$ и $L'/L \cong M'/M$. Тогда

$$(L : M) = (L : L')(L' : M')(M' : M).$$

Учитывая, что $(L : L')^{-1} = (M' : M)$ и $(L' : M') = \prod_{\chi \in \widehat{G}} (L_\chi : M_\chi)$, мы получаем первое утверждение леммы. Второе утверждение может быть доказано тем же способом. Лемма доказана.

Теперь мы можем закончить доказательство теоремы. Если k не разветвлено над ℓ , то равенство (6.3) было доказано в п. 1. Согласно п. 2 мы можем предполагать, что $\zeta_0 \in k$ при $\ell \neq 2$. Итак, пусть $\zeta_0 \in k$ и k имеет кондуктор $N = \ell^m d$, где $m \geq 2$. Пусть k_0 то же, что и в (6.5). Поскольку k_0 имеет кондуктор $\ell^{m_0} d$, где $m_0 = m - 1$ ($m_0 = m - 2 = 0$ при $\ell = m = 2$), мы можем предполагать, что (6.3) справедливо для k_0 . Тогда согласно лемме 6.3 для заданного $\varphi \in \Phi$ мы имеем

$$(\mathbf{R}_{k,\varphi} : \tilde{\mathcal{O}}_{k,\varphi}) = (\mathbf{N}_{k,\varphi} : \mathbf{B}_{k,\varphi})(\mathbf{R}_{k_0,\varphi} : \tilde{\mathcal{O}}_{k_0,\varphi}), \quad (6.10)$$

где по предположению индукции

$$\nu_\ell((\mathbf{R}_{k_0,\varphi} : \tilde{\mathcal{O}}_{k_0,\varphi})) = \nu_\ell \left(\prod_{\substack{\chi \in G(\widehat{k_0/\mathbf{Q}}) \\ \chi | \varphi}} G_{\bar{\chi}} \right). \quad (6.11)$$

Для $\chi \in G(\widehat{k_0/\mathbf{Q}})$ пусть χ' обозначает характер χ , рассматриваемый как характер группы G . В этом случае $\chi \mid \varphi$ тогда и только тогда, когда $\chi' \mid \varphi$, при этом $g_{\bar{\chi}} = g_{\bar{\chi}'}$. Таким образом, мы имеем

$$\prod_{\substack{\chi \in G(\widehat{k_0/\mathbf{Q}}) \\ \chi | \varphi, \chi \neq 1}} g_{\bar{\chi}} = \prod_{\substack{\chi \in \widehat{G}, \chi | \varphi \\ \chi | H = 1, \chi \neq 1}} g_{\bar{\chi}}. \quad (6.12)$$

Из леммы 6.2 и определения модуля $\mathbf{N}_k$ следует, что $\mathbf{N}_k \cong \mathbf{B}_k$ как $\overline{\mathcal{O}}[G]$ -модуль. Тогда из леммы 6.4 мы получаем

$$(\mathbf{N}_{k,\varphi} : \mathbf{B}_{k,\varphi}) = \prod_{\substack{\chi \in \widehat{G} \\ \chi|_{\varphi}}} (\mathbf{N}_{k,\chi} : \mathbf{B}_{k,\chi}). \quad (6.13)$$

Заметим, что Sp_H аннулирует $\mathbf{N}_k$ и $\mathbf{B}_k$. Следовательно, если $\chi|_H = 1$, то $\mathbf{N}_{k,\chi} = \mathbf{B}_{k,\chi} = 0$. Поэтому мы можем переписать (6.13) в виде

$$(\mathbf{N}_{k,\varphi} : \mathbf{B}_{k,\varphi}) = \prod_{\substack{\chi \in \widehat{G} \\ \chi|_{\varphi}, \chi|_H \neq 1}} (\mathbf{N}_{k,\chi} : \mathbf{B}_{k,\chi}). \quad (6.14)$$

Чтобы вычислить индекс $(\mathbf{N}_{k,\chi} : \mathbf{B}_{k,\chi})$, мы сначала вычислим индекс $(\mathbf{N}_{K_n,\chi} : \mathbf{B}_{K_n,\chi})$, где мы рассматриваем χ как характер группы $G(K_n/\mathbf{Q})$. Если $\chi|_H \neq 1$, то $e_{\chi}\mathbf{N}_{K_n} = e_{\chi}\mathbf{R}_{K_n} = \overline{\mathcal{O}}e_{\chi}f_1$, где $f_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}_{K_n}$ – образующая $\overline{\mathcal{O}}[G(K_n/\mathbf{Q})]$ -модуля $\mathbf{R}_{K_n}$, определенная в начале параграфа.

Мы знаем, что $\mathbf{B}_{K_n}$ порождается над $\overline{\mathcal{O}}$ всеми элементами вида $\alpha(\varepsilon\zeta_n^i)$, где $\varepsilon \in \mu_d$ и $i \not\equiv 0 \pmod{\ell}$. Заметим, что $\varepsilon\zeta_n^i$ является первообразным корнем из единицы степени $\ell^m d_0$ для некоторого $d_0 \mid d$. Если $\chi|_H \neq 1$, то χ имеет кондуктор $f_{\chi} = \ell^m d_1$ для некоторого $d_1 \mid d$. Пусть ξ – первообразный корень из единицы степени $d_0 \ell^m$ для некоторого $d_0 \mid d$. Тогда

$$e_{\chi}\alpha(\xi) = \sum_{\sigma \in G_n} \overline{\chi}(\sigma)\sigma(\xi)e_{\chi}f_1,$$

где $G_n = G(K_n/\mathbf{Q})$.

Пусть $H(\chi)$ – ядро естественной проекции

$$G(K_n/\mathbf{Q}) = (\mathbf{Z}/\ell^m d \mathbf{Z})^* \rightarrow (\mathbf{Z}/f_{\chi} \mathbf{Z})^*,$$

а $H(\xi)$ – ядро естественной проекции

$$G(K_n/\mathbf{Q}) = (\mathbf{Z}/\ell^m d \mathbf{Z})^* \rightarrow (\mathbf{Z}/\ell^m d_0 \mathbf{Z})^*,$$

т.е. $H(\chi) \cong \mathrm{Ker}((\mathbf{Z}/d \mathbf{Z})^* \rightarrow (\mathbf{Z}/d_1 \mathbf{Z})^*)$ и $H(\xi) \cong \mathrm{Ker}((\mathbf{Z}/d \mathbf{Z})^* \rightarrow (\mathbf{Z}/d_0 \mathbf{Z})^*)$. Если $d_1 \nmid d_0$, то, полагая $G_n/H(\chi) \cap H(\xi) = S$, $H(\xi)/H(\chi) \cap H(\xi) = T \neq 1$, мы получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in G_n} \overline{\chi}(\sigma)\sigma(\xi) &= |H(\chi) \cap H(\xi)| \sum_{\sigma \in S} \overline{\chi}(\sigma)\sigma(\xi) \\ &= |H(\chi) \cap H(\xi)| \sum_{\sigma \in \overline{S/T}} \sum_{\tau \in T} \overline{\chi}(\sigma\tau)\sigma\tau(\xi), \end{aligned}$$

где $\overline{S/T} \subset S$ – некоторая система представителей для S/T . Мы имеем $\sigma\tau(\xi) = \sigma(\xi)$ для любого $\tau \in T$ и $\sum_{\tau \in T} \overline{\chi}(\sigma\tau) = \overline{\chi}(\sigma) \sum_{\tau \in T} \overline{\chi}(\tau)$. Заметим, что $\chi|_{H(\xi)} \neq 1$, поэтому $\chi|_T \neq 1$ и $\sum_{\tau \in T} \overline{\chi}(\tau) = 0$. Таким образом, если $d_1 \nmid d_0$, то $\sum_{\sigma \in G_n} \overline{\chi}(\sigma)\sigma(\xi) = 0$.

Если $d_1 \mid d_0$, то $H(\xi) \subseteq H(\chi)$ и, полагая $A = H(\chi)/H(\xi)$, $B = G_n/H(\xi)$, $C = G_n/H(\chi)$, мы получаем

$$\sum_{\sigma \in G_n} \bar{\chi}(\sigma)\sigma(\xi) = |H(\xi)| \sum_{\sigma \in B} \bar{\chi}(\sigma)\sigma(\xi) = \sum_{\sigma \in C} \bar{\chi}(\sigma)\sigma(\text{Sp}_A(\xi)). \quad (6.15)$$

Пусть $d_0/d_1 = q_1^{s_1}, \dots, q_r^{s_r}$ – разложение числа d_0/d_1 на простые множители. Хорошо известно, что для первообразного корня из единицы μ степени p^n для некоторого простого p выполняются равенства

$$\text{Sp}_{\mathbf{Q}(\mu)/\mathbf{Q}}(\mu) = \begin{cases} -1 & \text{при } n = 1, \\ 0 & \text{при } n \geq 1. \end{cases}$$

Более того, если $n \geq 1$, то $\text{Sp}_{\mathbf{Q}(\mu)/\mathbf{Q}(\mu^p)}(\mu) = 0$. Таким образом, мы имеем

$$\text{Sp}_A(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{при } s_i \geq 1 \text{ для некоторого } i = 1, \dots, r, \\ 0 & \text{при } d_1 \equiv 0 \pmod{q_i} \text{ для некоторого } i = 1, \dots, r, \\ \pm \xi_1 & \text{при } s_1 = \dots = s_r = 1 \text{ и } (d_1, d_0/d_1) = 1, \end{cases}$$

где ξ_1 – некоторый первообразный корень из единицы степени $\ell^m d_1$.

Итак, в любом случае мы получаем

$$\sum_{\sigma \in G_n} \bar{\chi}(\sigma)\sigma(\xi) = |H(\xi)| \eta g_{\bar{\chi}}, \quad (6.16)$$

где η – некоторый корень из единицы или $\eta = 0$. Следовательно, $e_{\chi} \mathbf{B}_{K_n} \subseteq \overline{\mathcal{O}} g_{\bar{\chi}} e_{\chi} f_1$.

Пусть $p_1, \dots, p_r$ – все простые делители d/d_1 такие, что $(p_i, d_1) = 1$ для $i = 1, \dots, r$. Положим $d_0 = d_1 p_1 \dots p_r$ и $\xi = \zeta_n \varepsilon_{d_1} \varepsilon_{p_1} \dots \varepsilon_{p_r}$, где ε_n – некоторый первообразный корень из единицы степени n . Тогда ξ – первообразный корень из единицы степени $\ell^m d_0$, и при нашем выборе d_0 мы получаем, что $\text{Sp}_A(\xi)$ в (6.15) задается формулой

$$\text{Sp}_A(\xi) = (-1)^r \xi_1,$$

где ξ_1 – некоторый первообразный корень из единицы степени $\ell^m d_1$. Заметим, что любой простой делитель p числа d делит и d_0 , следовательно, p делит порядок группы $H(\xi)$, только если $p \mid d$. Поэтому $|H(\xi)|$ взаимно прост с ℓ . Таким образом, множитель $|H(\xi)| \eta$ является единицей в $\overline{\mathcal{O}}$. Это доказывает, что

$$e_{\chi} \mathbf{B}_{K_n} = \overline{\mathcal{O}} g_{\bar{\chi}} e_{\chi} f_1 \quad \text{и} \quad (\mathbf{N}_{K_n, \chi} : \mathbf{B}_{K_n, \chi}) = g_{\bar{\chi}}.$$

Теперь если $\chi \in \widehat{G}$, то мы можем рассматривать χ как характер группы $G_n = G(K_n/\mathbf{Q})$ такой, что $\chi|_F = 1$. Поскольку в силу леммы 6.2 мы имеем эпиморфизмы

$$\text{Sp}_F : \mathbf{N}_{K_n, \chi} \rightarrow \mathbf{N}_{k, \chi}, \quad \text{Sp}_F : \mathbf{B}_{K_n, \chi} \rightarrow \mathbf{B}_{k, \chi} \quad (6.17)$$

и все рассматриваемые модули имеют ранг 1 над $\overline{\mathcal{O}}$, мы получаем, что отображения (6.17) являются изоморфизмами. Следовательно,

$$(\mathbf{N}_{k, \chi} : \mathbf{B}_{k, \chi}) = (\mathbf{N}_{K_n, \chi} : \mathbf{B}_{K_n, \chi}) = g_{\bar{\chi}}, \quad (6.18)$$

где для $\chi = 1$ мы полагаем по определению $g_{\bar{\chi}} = 1$. Сопоставляя (6.10), (6.11), (6.12), (6.14) и (6.18), мы получаем (6.3). Этим наша теорема полностью доказана.

§7. Некоторые индексы

Пусть k – вещественное абелево поле и $\mathbf{A}_k$, $\mathbf{R}_k$, $\tilde{\mathcal{O}}_k$ имеют тот же смысл, что и в § 6. Как и во введении, мы полагаем $\mathcal{A}(k) = \prod_{v|\ell} (U(k_v)/\mu(k_v))$. Для любой точки $v \mid \ell$ имеется инъективное отображение $\log_v: U(k_v)/\mu(k_v) \rightarrow k_v$, определяемое при помощи ℓ -адического логарифма. Беря прямое произведение отображений $\log_v$ по всем $v \mid \ell$, мы получаем инъективное отображение

$$\log: \mathcal{A}(k) \hookrightarrow \prod_{v|\ell} k_v. \quad (7.1)$$

Отображение (7.1) является гомоморфизмом $\mathbf{Z}_\ell[G]$ -модулей, где $G = G(k/\mathbf{Q})$, и действие G на $\mathcal{A}(k)$ и $\prod_{v|\ell} k_v$ определяется при помощи отождествления $\prod_{v|\ell} k_v \cong \mathbf{Q}_\ell \otimes_{\mathbf{Q}} k$. Естественное включение $\mathbf{Q}_\ell \hookrightarrow \overline{\mathbf{Q}}_\ell$ индуцирует включение

$$i: \prod_{v|\ell} k_v \cong \mathbf{Q}_\ell \otimes_{\mathbf{Q}} k \hookrightarrow \overline{\mathbf{Q}}_\ell \otimes_{\mathbf{Q}} k = \mathbf{A}_k.$$

Полагая $\text{Log} = i \cdot \log$, мы получаем вложение $\mathbf{Z}_\ell[G]$ -модулей

$$\text{Log}: \mathcal{A}(k) \longrightarrow \mathbf{A}_k. \quad (7.2)$$

Через $\tilde{\mathcal{A}}(k)$ мы будем обозначать $\overline{\mathcal{O}}[G]$ -подмодуль $\overline{\mathcal{O}} \cdot \text{Log}(\mathcal{A}(k))$ модуля $\mathbf{A}_k$.

Пусть L , M – две $\mathbf{Z}_\ell$ -решетки в $\prod_{v|\ell} k_v$, порождающие одно и то же $\mathbf{Q}_\ell$ -пространство $V \subseteq \prod_{v|\ell} k_v$. Тогда, как и в [15], мы определяем индекс $(L : M)$ как $\det(A)$, где A является $\mathbf{Q}_\ell$ -линейным преобразованием V таким, что $A(L) = M$. Индекс $(L : M)$ определен однозначно с точностью до умножения на произвольный элемент из $\mathbf{Z}_\ell^*$. Если $L \supseteq M$ и индекс $(L : M)$ существует, то обычный индекс $[L : M]$ конечен и

$$\nu_\ell((L : M)) = \nu_\ell([L : M]).$$

Если мы положим $\tilde{L} = \overline{\mathcal{O}} \cdot i(L)$, $\tilde{M} = \overline{\mathcal{O}} \cdot i(M)$, то индекс $(\tilde{L} : \tilde{M})$, определенный в § 6, существует тогда и только тогда, когда существует индекс $(L : M)$, и в этом случае

$$\nu_\ell((L : M)) = \nu_\ell((\tilde{L} : \tilde{M})). \quad (7.3)$$

Пусть $\tilde{\mathcal{O}}_k$ имеет тот же смысл, что и в § 6.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. *Индекс $(\tilde{\mathcal{A}}(k) : \tilde{\mathcal{O}}_k)$ существует и*

$$(\tilde{\mathcal{O}}_k : \tilde{\mathcal{A}}(k)) = |P(k)| \cdot |Y(k)|,$$

где $P(k) = \prod_{v|\ell} \bar{k}_v$, $\bar{k}_v$ – поле вычетов поля k_v , а $Y(k)$ имеет тот же смысл, что и в теореме 5.1.

Для любого $\varphi \in \Phi$ справедливо равенство

$$(\tilde{\mathcal{O}}_{k,\varphi} : \tilde{\mathcal{A}}(k)_\varphi) = |P(k)_\varphi| \cdot |Y(k)_\varphi|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{O}_v = \mathcal{O}(k_v)$ – кольцо целых поля k_v . Положим $\mathcal{O}_\ell = \prod_{v|\ell} \mathcal{O}_v$. Тогда в силу (7.3) мы имеем

$$(\tilde{\mathcal{O}}_k : \tilde{\mathcal{A}}(k)) = (\mathcal{O}_\ell : \log \mathcal{A}(k)) \quad \text{и} \quad (\tilde{\mathcal{O}}_{k,\varphi} : \tilde{\mathcal{A}}(k)_\varphi) = (\mathcal{O}_{\ell,\varphi} : (\log \mathcal{A}(k))_\varphi).$$

Пусть π_v – локальный параметр поля k_v . Положим

$$U^{(i)}(k_v) = \{x \in U(k_v) \mid x \equiv 1 \pmod{\pi_v^i}\}.$$

Хорошо известно, что для всех достаточно больших i ℓ -адический логарифм $\log_v$ устанавливает изоморфизм $\log_v : U^{(i)}(k_v) \cong \pi_v^i \mathcal{O}_v$. Поэтому отображение (7.1) индуцирует для любого такого i точную последовательность

$$0 \longrightarrow Y(k) \longrightarrow \prod_{v|\ell} (U^{(1)}(k_v)/U^{(i)}(k_v)) \xrightarrow{\log^{(i)}} \prod_{v|\ell} (k_v/\pi_v^i \mathcal{O}_v). \quad (7.4)$$

Поскольку $\prod_{v|\ell} (U^{(i)}(k_v)/U^{(i+1)}(k_v)) \cong P(k)$ для любого $i \geq 1$ и $\prod_{v|\ell} (\pi_v^i \mathcal{O}_v/\pi_v^{i+1} \mathcal{O}_v) \cong P(k)$ для любого $i \geq 0$, то мы получаем из (7.4)

$$(\mathcal{O}_\ell : \log \mathcal{A}(k)) = |Y(k)| \cdot |P(k)|.$$

Это доказывает первое утверждение предложения. Второе утверждение доказывается аналогично. Предложение доказано.

Как и в [15], мы полагаем для любого G -модуля A

$$A_0 = \{a \in A \mid s(G)a = 0\},$$

где $s(G) = \sum_{\sigma \in G} \sigma$. Мы имеем $(A_\varphi)_0 = (A_0)_\varphi$ для любого $\varphi \in \Phi$, и при $\varphi \neq \varphi_0$ справедливо равенство $(A_\varphi)_0 = A_\varphi$. Поэтому мы можем просто писать $A_{\varphi,0}$.

Пусть k имеет кондуктор $N = \ell^m d$, где $(d, \ell) = 1$. Положим $K_n = \mathbf{Q}(\mu_d, \zeta_n)$. Чтобы сформулировать наши дальнейшие результаты, напомним, что, как было показано при доказательстве леммы 6.2, в случае $\ell = 2$ имеются три возможности:

- (А) расширение K_n/k не разветвлено над ℓ ;
- (В) $G(K_n/k) \cap G(K_n/K_{-1}) = \{1, \tau\}$;
- (С) $G(K_n/k) \cap G(K_n/K_{-1}) = \{1, \sigma\tau\}$;

где σ, τ были определены в доказательстве леммы 6.2. Заметим, что в случаях (В), (С) любая точка $v \mid \ell$ имеет индекс ветвления 2 в расширении K_n/k .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. *Справедливы равенства*

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathcal{O}}_{k,0} : \tilde{\mathcal{A}}(k)_0) &= \ell^a |P(k)| \cdot |Y(k)|, \\ (\tilde{\mathcal{O}}_{k,0,\varphi_0} : \tilde{\mathcal{A}}(k)_{0,\varphi_0}) &= \ell^a |P(k)_{\varphi_0}| \cdot |Y(k)_{\varphi_0}|, \end{aligned}$$

где $a = -1$ при $\ell \neq 2$. Если $\ell = 2$, то мы имеем $a = -2$ при $m = 0$, а при $m > 0$ мы имеем

$$a = \begin{cases} -1 & \text{для } k \text{ типа (А), (С),} \\ -2 & \text{для } k \text{ типа (В).} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть L, M – некоторые $\overline{\mathcal{O}}$ -решетки в $\mathbf{A}_k$ (соответственно $\mathbf{Z}_\ell$ -решетки в $\prod_{v|\ell} k_v$) такие, что L, M являются G -модулями, и определен индекс $(L : M)$. Тогда оба индекса $(L_0 : M_0)$ и $(\mathrm{Sp}_G(L) : \mathrm{Sp}_G(M))$ определены и

$$(L : M) = (L_0 : M_0)(\mathrm{Sp}_G(L) : \mathrm{Sp}_G(M)). \quad (7.5)$$

Действительно, в [15, лемма 6.1] аналогичное утверждение было доказано для $\mathbf{Z}$ -решеток в $\mathbf{Q}[G]$. Те же аргументы показывают, что (7.5) справедливо также для $\overline{\mathcal{O}}$ -решеток или $\mathbf{Z}_\ell$ -решеток. Таким образом, нам необходимо вычислить индекс

$$\ell^{-a} = (\mathrm{Sp}_G(\tilde{\mathcal{O}}_k) : \mathrm{Sp}_G(\tilde{\mathcal{A}}(k))) = (\mathrm{Sp}_G(\tilde{\mathcal{O}}_{k, \varphi_0}) : \mathrm{Sp}_G(\tilde{\mathcal{A}}(k)_{\varphi_0})).$$

Отметим, что согласно (7.3) мы имеем

$$(\mathrm{Sp}_G(\tilde{\mathcal{O}}_k) : \mathrm{Sp}_G(\tilde{\mathcal{A}}(k))) = (\mathrm{Sp}_G(\mathcal{O}_\ell) : \mathrm{Sp}_G(\log \mathcal{A}(k))). \quad (7.6)$$

Если G_v – подгруппа разложения некоторой точки $v \mid \ell$, то

$$(\mathrm{Sp}_G(\mathcal{O}_\ell) : \mathrm{Sp}_G(\log \mathcal{A}(k))) = (\mathrm{Sp}_{G_v}(\mathcal{O}(k_v)) : \mathrm{Sp}_{G_v}(\log \overline{U}(k_v))).$$

Пусть $T_v \neq 1$ – подгруппа инерции в группе G_v . Тогда

$$\nu_\ell(|T_v|) = \begin{cases} m-1 & \text{для } \ell \neq 2, \\ m-1 & \text{для } \ell = 2 \text{ и } k \text{ типа (A)}, \\ m-2 & \text{для } \ell = 2 \text{ и } k \text{ типа (B), (C)}. \end{cases}$$

Если $F_v = k_v^{T_v}$, то $F_v/\mathbf{Q}_\ell$ не разветвлено и $\mathrm{Sp}_{F_v/\mathbf{Q}_\ell}(\mathcal{O}_{F_v}) = \mathbf{Z}_\ell$. Пусть $\mathcal{D}_{k_v/\mathbf{Q}_\ell}$ – дифференц расширения $k_v/\mathbf{Q}_\ell$. Тогда, используя вычисления из доказательства леммы 6.2, можно легко проверить, что в любом случае $\mathcal{D}_{k_v/\mathbf{Q}_\ell} \subseteq |T_v|\mathcal{O}(k_v)$, следовательно, $\mathrm{Sp}_{G_v}(\mathcal{O}(k_v)) \subseteq |T_v|\mathbf{Z}_\ell$. С другой стороны, $\mathrm{Sp}_{G_v}(\mathcal{O}(F_v)) = |T_v|\mathbf{Z}_\ell$. Таким образом, в любом случае, включая случай $T_v = 1$, мы имеем $\mathrm{Sp}_{G_v}(\mathcal{O}(k_v)) = |T_v|\mathbf{Z}_\ell$.

Чтобы вычислить $\mathrm{Sp}_{G_v}(\log \overline{U}(k_v))$, мы заметим, что $\mathrm{Sp}_{G_v}(\log \overline{U}(k_v)) = \log N_{k_v/\mathbf{Q}_\ell}(U(k_v))$. Согласно локальной теории полей классов мы имеем $\mathbf{Z}_\ell^*/N_{k_v/\mathbf{Q}_\ell}(U(k_v)) \cong T_v$. Учитывая, что $\log(\mathbf{Z}_\ell^*) = \ell\mathbf{Z}_\ell$ при $\ell \neq 2$ (соответственно $\ell^2\mathbf{Z}_\ell$ при $\ell = 2$), мы получаем, что $\mathrm{Sp}_{G_v}(\log \overline{U}(k_v)) = \ell^m\mathbf{Z}_\ell$ при $\ell \neq 2$. Это доказывает наше предложение для $\ell \neq 2$. Если $\ell = 2$ и $m = 0$, то $\mathrm{Sp}_{G_v}(\log \overline{U}(k_v)) = \ell^2\mathbf{Z}_\ell$. Если $\ell = 2$ и $m > 0$, то

$$N_{k_v/\mathbf{Q}_\ell}(U(k_v)) = \begin{cases} 1 + \ell^m\mathbf{Z}_\ell & \text{для } k \text{ типа (A)}, \\ \{\pm 1\} \times (1 + \ell^m\mathbf{Z}_\ell) & \text{для } k \text{ типа (B)}, \\ \langle -(1 + \ell^{m-1}) \rangle & \text{для } k \text{ типа (C)}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\mathrm{Sp}_{G_v}(\log \overline{U}(k_v)) = \begin{cases} \ell|T_v|\mathbf{Z}_\ell & \text{для } k \text{ типа (A)}, \\ \ell^2|T_v|\mathbf{Z}_\ell & \text{для } k \text{ типа (B)}, \\ \ell|T_v|\mathbf{Z}_\ell & \text{для } k \text{ типа (C)}. \end{cases}$$

Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.3. Пусть k имеет кондуктор $N = \ell^m d$, $(d, \ell) = 1$ и $G = G(k/\mathbf{Q})$. Тогда

$$\nu_\ell((\mathbf{R}_{k,0} : \tilde{O}_{k,0})) = -c + \nu_\ell\left(\prod_{\substack{\chi \in \hat{G} \\ \chi \neq 1}} g_{\overline{\chi}}\right), \quad (7.7)$$

$$\nu_\ell((\mathbf{R}_{k,\varphi_0,0} : \tilde{O}_{k,\varphi_0,0})) = -c + \nu_\ell\left(\prod_{\substack{\chi \in \hat{G} \\ \chi|_{\varphi_0}, \chi \neq 1}} g_{\overline{\chi}}\right), \quad (7.8)$$

где

$$c = \begin{cases} 0 & \text{для } m = 0, \\ m - 1 & \text{для } m > 0 \text{ и } \ell \neq 2, \\ m - 1 & \text{для } m > 0, \ell = 2 \text{ и } k \text{ типа (A)}, \\ m - 2 & \text{для } m > 0, \ell = 2 \text{ и } k \text{ типа (B) или (C)}. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение $\text{Sp}_G: \mathbf{A}_k \rightarrow \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}$ отображает $\mathbf{R}_k$ на $\overline{O}$. В доказательстве предложения 7.2 мы показали, что $\text{Sp}_G(\mathcal{O}_\ell) = \ell^c \mathbf{Z}_\ell$, где c определено, как и выше. Следовательно, $\text{Sp}_G(\tilde{O}_k) = \ell^c \overline{O}$. Сопоставляя это с теоремой 6.1 и используя (7.5), мы получаем утверждение предложения.

Пусть k будет, как и в предложении 7.3. Положим $K_\infty = \bigcup_{n=1}^\infty \mathbf{Q}(\mu_d, \zeta_n)$. Пусть $\tau: G_\infty = G(K_\infty/\mathbf{Q}) \rightarrow G$ — естественный эпиморфизм, индуцированный включением $k \subset K_\infty$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.4. Пусть k имеет кондуктор $\ell^m d$, как и выше, и r — константа, соответствующая τ , которая была определена в (2.5). Пусть k_s — максимальное подполе поля k_∞ такое, что расширение k_s/k не разветвлено (напомним, что $[k_s : k] = \ell^s$). Если $m = 0$, то $s = r = 0$. Если $m > 0$, то

$$s = \begin{cases} m - 1 - r & \text{для } \ell \neq 2, \\ m - 2 - r & \text{для } \ell = 2 \text{ и } k \text{ типа (A), (B)}, \\ m - 3 - r & \text{для } \ell = 2 \text{ и } k \text{ типа (C)}. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{Q}_\infty$ — круговое $\mathbf{Z}_\ell$ -расширение поля $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{Q}_\infty = \bigcup_{i=1}^\infty \mathbf{Q}_i$, где $[\mathbf{Q}_i : \mathbf{Q}] = \ell^i$. Тогда (2.5) показывает, что $\mathbf{Q}_r \subseteq k$, $\mathbf{Q}_{r+1} \not\subseteq k$, другими словами, $k_i = k \cdot \mathbf{Q}_{r+i}$ для любого $i \geq 1$.

Если $m = 0$, то $k \subseteq \mathbf{Q}(\mu_d)$. В этом случае все точки $v \mid \ell$ вполне разветвлены в расширении k_∞/k , следовательно, мы имеем $r = s = 0$, как и требуется.

Если $m > 0$ и $\ell \neq 2$, то K_n/k не имеет дикого ветвления. Следовательно, поле $k_{n-r} = K_n \cap k_\infty$ не имеет дикого ветвления над k , т.е. расширение k_{n-r}/k не разветвлено. Поскольку $K_{n+1} = k_{n-r+1}K_n$, мы получаем, что поле k_{n-r+1} разветвлено над k . Следовательно, в этом случае $s = n - r = m - 1 - r$. Если $\ell = 2$, $m > 0$ и поле k имеет один из типов (A), (B), то, рассуждая, как и выше, мы получаем, что $s = n - r = m - 2 - r$.

Если $\ell = 2$, $m > 0$ и k — поле типа (C), то $G(K_n/k) \cap G(K_n/K_{-1}) = \{1, \sigma\tau\}$. В этом случае подгруппы инерции точек $v \mid \ell$ в расширениях $G(k_\infty/\mathbf{Q})$ и $G(K_\infty/\mathbf{Q})$ изоморфны, следовательно, мы получаем, что $k_{n-r} = K_n \cap k_\infty$, и расширение

K_n/k_{n-r} не разветвлено. Поскольку расширение K_n/k разветвлено и имеет индекс ветвления 2 относительно любой точки $v \mid \ell$, мы получаем, что расширение k_{n-r}/k_{n-r-1} разветвлено, а расширение k_{n-r-1}/k не имеет ветвления. Поэтому в этом случае $s = n - r - 1 = m - 3 - r$. Предложение доказано.

Для вещественного абелева поля k диагональное вложение $U(k) \hookrightarrow \prod_{v \mid \ell} U(k_v)$ индуцирует вложение $\bar{U}(k)[\ell] \hookrightarrow \mathcal{A}(k)$. Поэтому мы можем рассматривать группу $\bar{U}(k)[\ell]$ как подгруппу группы $\mathcal{A}(k)$. Поскольку $N_{k/\mathbf{Q}}(\bar{U}(k)[\ell]) = 1$, мы получаем, что $\bar{U}(k)[\ell] \subseteq \mathcal{A}(k)_0$. Так как $\bar{U}(k)[\ell]$ и $\mathcal{A}(k)_0$ имеют одинаковый ранг над $\mathbf{Z}_\ell$, мы получаем, что $\bar{U}(k)[\ell]$ имеет конечный индекс в $\mathcal{A}(k)_0$.

ТЕОРЕМА 7.1. *Пусть k – произвольное вещественное абелево поле и $T_\ell(k_\infty)_{(0)}$, $H(k)$, $\bar{U}_S(k)$ имеют тот же смысл, что и в теореме 5.1. Через $\text{Cl}(k)_\ell$ мы обозначаем ℓ -компоненту группы классов поля k . Пусть s – константа, определенная в предложении 7.4. Тогда*

$$\frac{\ell^s |T_\ell(k_\infty)_{(0)}|}{|\text{Cl}(k)_\ell|} = \frac{[\mathcal{A}(k)_0 : \bar{U}(k)[\ell]]}{[H(k) : \bar{U}_S(k)]}.$$

Для любого характера $\varphi \in \Phi$, $\varphi \neq \varphi_0$, мы имеем

$$\frac{|T_\ell(k_\infty)_{(0), \varphi}|}{|\text{Cl}(k)_{\ell, \varphi}|} = \frac{[\mathcal{A}(k)_\varphi : \bar{U}(k)[\ell]_\varphi]}{[H(k)_\varphi : \bar{U}_S(k)_\varphi]}.$$

Если $\varphi = \varphi_0$, то

$$\frac{\ell^s |T_\ell(k_\infty)_{(0), \varphi_0}|}{|\text{Cl}(k)_{\ell, \varphi_0}|} = \frac{[\mathcal{A}(k)_{0, \varphi_0} : \bar{U}(k)[\ell]_{\varphi_0}]}{[H(k)_{\varphi_0} : \bar{U}_S(k)_{\varphi_0}]}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\text{Cl}_S(k) := \text{Cl}(k)/P_S(k)$, где $P_S(k)$ – подгруппа группы $\text{Cl}(k)$, порожденная всеми простыми дивизорами, лежащими над ℓ . Пусть $\text{Cl}_S(k)_\ell$ – ℓ -компонента группы $\text{Cl}_S(k)$. Согласно теории полей классов имеется естественный изоморфизм $\text{Cl}_S(k)_\ell \cong G(k_{S, \ell}/k)$, где $G(k_{S, \ell}/k)$ – группа Галуа максимального абелева неразветвленного ℓ -расширения поля k , в котором все точки $v \mid \ell$ вполне распадаются. Тогда имеются естественные отображения

$$T_\ell(k_\infty)_{(0)} \xrightarrow{\alpha} \text{Cl}_S(k)_\ell \xleftarrow{\beta} \text{Cl}(k)_\ell, \quad (7.9)$$

где α индуцировано включением $k_{S, \ell} \subset M_\infty$, M_∞ – поле, определенное в §3, а β означает факторизацию по подгруппе $P_S(k)$. Таким образом, отображение β всегда эпиморфно, в то время как $\text{Coker } \alpha \cong G(k_{s_0}/k)$, где $s_0 \geq 0$ – максимальный индекс такой, что все точки $v \mid \ell$ вполне распадаются в k_{s_0}/k .

Чтобы интерпретировать группы $\text{Ker } \alpha$ и $\text{Ker } \beta$, мы положим $\mathcal{B}(k_v) = (k_v^*/\mu(k_v))[\ell]$ для любой точки $v \mid \ell$ и положим $\mathcal{B}(k) = \prod_{v \mid \ell} \mathcal{B}(k_v)$. Обозначим через Γ_v подгруппу разложения $G(k_{\infty, v}/k_v)$. Тогда согласно локальной теории полей классов имеется естественный эпиморфизм $\lambda_v : \mathcal{B}(k_v) \rightarrow \Gamma_v$. С другой стороны, имеется эпиморфизм $\eta_v : \mathcal{B}(k_v) \rightarrow D_v$, где $D_v \cong \mathbf{Z}_\ell$, и для $x \in k_v^*$, $x = \pi_v^n u$, где $u \in U(k_v)$ и π_v – локальный параметр поля k_v , мы полагаем $\eta_v(x) = n$. Тогда, полагая $\mathcal{R} = \prod_{v \mid \ell} \Gamma_v$, мы получаем естественные G -гомоморфизмы

$$\lambda = \prod_{v \mid \ell} \lambda_v : \mathcal{B}(k) \rightarrow \mathcal{R}, \quad \eta = \prod_{v \mid \ell} \eta_v : \mathcal{B}(k) \rightarrow D_\ell := \prod_{v \mid \ell} D_v,$$

где G действует на $\mathcal{R}$ и D_ℓ посредством действия на множество S всех точек поля k , лежащих над ℓ . Таким образом, $\mathcal{R} \cong D_\ell \cong \mathbf{Z}_\ell[G/G_v]$ как модули Галуа. Поскольку Γ_v является подгруппой разложения точки v в группе $\bar{\Gamma} = G(k_\infty/k)$, мы получаем естественное отображение $\mathcal{R} \rightarrow \bar{\Gamma}$, ядро которого совпадает с $\mathcal{R}_0$. Тогда согласно глобальной теории полей классов мы получаем

$$\text{Ker } \alpha = \mathcal{R}_0 / \lambda(\bar{U}_S(k)[\ell]). \quad (7.10)$$

С другой стороны, мы имеем

$$\text{Ker } \beta = P_S(k) \cong D_\ell / \eta(\bar{U}_S(k)[\ell]). \quad (7.11)$$

Согласно локальной теории полей классов для $x \in \mathcal{B}(k_{n,v})$ равенство $\lambda_v(x) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $x \in \bigcap_{n=1}^\infty N_{k_n/k} \mathcal{B}(k_{n,v})$. Таким образом, мы получаем $\text{Ker } \lambda = H(k)$. Из определения η следует, что $\text{Ker } \eta = \mathcal{A}(k)$. Поэтому мы имеем

$$\bar{U}_S(k)[\ell] \cap \text{Ker } \lambda = \hat{U}_S(k), \quad \bar{U}_S(k)[\ell] \cap \text{Ker } \eta = \bar{U}(k)[\ell].$$

Положим

$$\begin{aligned} V &:= \text{Ker } \lambda \cap \text{Ker } \eta = H(k) \cap \mathcal{A}(k), \\ E &:= \bar{U}_S(k)[\ell] \cap \text{Ker } \lambda \cap \text{Ker } \eta = \hat{U}_S(k) \cap \text{Ker } \eta = \bar{U}(k)[\ell] \cap \text{Ker } \lambda. \end{aligned}$$

Тогда имеется пара точных последовательностей (в аддитивной записи)

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow V/E \longrightarrow \mathcal{A}(k)_0 / \bar{U}(k)[\ell] \longrightarrow \mathcal{A}(k)_0 / V\bar{U}(k)[\ell] \longrightarrow 0, \\ 0 \longrightarrow V/E \longrightarrow H(k) / \hat{U}_S(k) \longrightarrow H(k) / V\hat{U}_S(k) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем

$$\frac{[\mathcal{A}(k)_0 : \bar{U}(k)[\ell]]}{[H(k) : \hat{U}_S(k)]} = \frac{[\mathcal{A}(k)_0 : V\bar{U}(k)[\ell]]}{[H(k) : V\hat{U}_S(k)]}, \quad (7.12)$$

$$\frac{[\mathcal{A}(k)_{0,\varphi} : \bar{U}(k)[\ell]_\varphi]}{[H(k)_\varphi : \hat{U}_S(k)_\varphi]} = \frac{[\mathcal{A}(k)_{0,\varphi} : (V\bar{U}(k)[\ell])_\varphi]}{[H(k)_\varphi : (V\hat{U}_S(k))_\varphi]} \quad (7.13)$$

для любого $\varphi \in \Phi$.

Для $v \mid \ell$ пусть $\bar{\Gamma}'_v$ – подгруппа инерции точки v в $\bar{\Gamma}$. Тогда $\Gamma'_v \subseteq \Gamma_v$ и для любой точки $v \mid \ell$ $[\Gamma_v : \Gamma'_v] = \ell^u$, где $u = s - s_0$. Согласно локальной теории полей классов мы имеем $\lambda(\mathcal{A}(k)) = \prod_{v \mid \ell} \Gamma'_v = \ell^u \mathcal{R}$. Обозначим через $\lambda' : \mathcal{B}(k) \rightarrow \mathcal{R} / \ell^u \mathcal{R}$ композицию λ и естественного отображения $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R} / \ell^u \mathcal{R}$. Тогда $\text{Ker } \lambda' = \mathcal{A}(k) \cdot H(k)$. Заметим, что λ отображает $\mathcal{A}(k)_0$ на $\ell^u \mathcal{R}_0$. Следовательно, (7.10) индуцирует точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(k)_0 / V\bar{U}(k)[\ell] \longrightarrow \text{Ker } \alpha \longrightarrow (\mathcal{R}_0 / \ell^u \mathcal{R}_0) / \lambda'(\bar{U}_S(k)[\ell]) \longrightarrow 0. \quad (7.14)$$

Обозначим теперь через $\eta' : \mathcal{B}(k) \rightarrow D_\ell / \ell^u D_\ell$ композицию η и естественного отображения $D_\ell \rightarrow D_\ell / \ell^u D_\ell$. Поскольку все точки $v \mid \ell$ поля k_{s_0} остаются инертными в k_s / k_{s_0} и вполне разветвлены в k_∞ / k_s , мы получаем, что включение $x \in H(k)$ влечет $\eta'(x) = 0$. С другой стороны, если $x \in \mathcal{B}(k)$ и $\eta'(x) = 0$, то можно найти $y \in \mathcal{A}(k)$ такой, что $xy \in H(k)$. Следовательно,

$$\text{Ker } \eta' = \mathcal{A}(k) \cdot H(k) = \text{Ker } \lambda', \quad (7.15)$$

и (7.11) индуцирует точную последовательность

$$0 \longrightarrow H(k)/V\widehat{U}_S(k) \longrightarrow \text{Ker } \beta \longrightarrow (D_\ell/\ell^u D_\ell)/\eta'(\overline{U}_S(k)[\ell]) \longrightarrow 0. \quad (7.16)$$

Так как $\mathcal{R} \cong D_\ell$, мы получаем, что $\mathcal{R}/\ell^u \mathcal{R} \cong D_\ell/\ell^u D_\ell$. Легко проверить, что $(\mathcal{R}/\ell^u \mathcal{R})/(\mathcal{R}_0/\ell^u \mathcal{R}_0) \cong \mathbf{Z}/\ell^u \mathbf{Z}$ (с тривиальным действием G). Согласно (7.15) мы имеем

$$\lambda'(\overline{U}_S(k)[\ell]) \cong \overline{U}_S(k)[\ell]/(\overline{U}_S(k)[\ell] \cap \mathcal{A}(k) \cdot H(k)) \cong \eta'(\overline{U}_S(k)[\ell]).$$

Тогда из (7.14) и (7.16) мы получаем

$$\frac{[\mathcal{A}(k)_0 : V\overline{U}(k)[\ell]]}{[H(k) : V\widehat{U}_S(k)]} = \ell^{-u} \frac{|\text{Ker } \alpha|}{|\text{Ker } \beta|}, \quad (7.17)$$

$$\frac{[\mathcal{A}(k)_{0,\varphi} : (V\overline{U}(k)[\ell])_\varphi]}{[H(k)_\varphi : (V\widehat{U}_S(k))_\varphi]} = \ell^{-u_\varphi} \frac{|(\text{Ker } \alpha)_\varphi|}{|(\text{Ker } \beta)_\varphi|}, \quad (7.18)$$

где $u_\varphi = 0$ при $\varphi \neq \varphi_0$ и $u_\varphi = u$ при $\varphi = \varphi_0$.

Сопоставляя формулы (7.12), (7.17), (7.9), мы получаем первую формулу теоремы. Чтобы получить последние две формулы теоремы, мы должны сопоставить формулы (7.13), (7.18) и (7.9). Теорема доказана.

Следующий результат является аналогом теоремы 5.1.

ТЕОРЕМА 7.2. *Для любого вещественного абелева поля k и любого $\varphi \in \Phi$ мы имеем*

$$\begin{aligned} \nu_\ell(|\text{Cl}(k)_\ell|) &= \nu_\ell \left(\ell^{s+t} |Y(k)|^{-1} [\mathcal{A}(k)_0 : \overline{U}(k)[\ell]]^{-1} \prod_{\substack{\chi \in \widehat{G} \\ \chi \neq 1}} \frac{1}{2} L_\ell(1, \chi) \right), \\ \nu_\ell(|\text{Cl}(k)_{\ell,\varphi}|) &= \nu_\ell \left(\ell^{s_\varphi+t_\varphi} |Y(k)_\varphi|^{-1} [\mathcal{A}(k)_{0,\varphi} : \overline{U}(k)[\ell]_\varphi]^{-1} \prod_{\substack{\chi \in \widehat{G} \\ \chi|_\varphi, \chi \neq 1}} \frac{1}{2} L_\ell(1, \chi) \right), \end{aligned}$$

где t, t_φ были определены в теореме 5.1, s имеет тот же смысл, что и в предложении 7.4 и $s_\varphi = 0$ для $\varphi \neq \varphi_0$, $s_{\varphi_0} = s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наша теорема немедленно следует из теорем 5.1 и 7.1.

Положим $\tilde{U}(k) = \overline{\mathcal{O}} \cdot \text{Log}(\overline{U}(k)[\ell])$, где Log – отображение, определенное в (7.2). Тогда индекс $(\tilde{\mathcal{A}}(k)_0 : \tilde{U}(k))$ существует и

$$(\tilde{\mathcal{A}}(k)_0 : \tilde{U}(k)) = (\mathcal{A}(k)_0 : \overline{U}(k)[\ell]), \quad (\tilde{\mathcal{A}}(k)_{0,\varphi} : \tilde{U}(k)_\varphi) = (\mathcal{A}(k)_{0,\varphi} : \overline{U}(k)[\ell]_\varphi).$$

ТЕОРЕМА 7.3. Для любого вещественного абелева поля k и любого $\varphi \in \Phi$ мы имеем

$$\begin{aligned}\nu_\ell(|\text{Cl}(k)_\ell|) &= \nu_\ell\left((\mathbf{R}_{k,0} : \tilde{U}(k))^{-1} \prod_{\substack{\chi \in \hat{G} \\ \chi \neq 1}} \frac{1}{2} a(\chi)\right), \\ \nu_\ell(|\text{Cl}(k)_{\ell,\varphi}|) &= \nu_\ell\left((\mathbf{R}_{k,0,\varphi} : \tilde{U}(k)_\varphi)^{-1} \prod_{\substack{\chi \in \hat{G} \\ \chi|\varphi, \chi \neq 1}} \frac{1}{2} a(\chi)\right),\end{aligned}$$

где для $\chi \neq 1$

$$a(\chi) = \sum_{\substack{a \bmod f_\chi \\ (a, f_\chi)=1}} \bar{\chi}(a) \log(1 - \varepsilon_\chi^a), \quad (7.19)$$

f_χ – кондуктор χ и ε_χ – некоторый первообразный корень из единицы степени f_χ (замечим, что $\nu_\ell(a(\chi))$ не зависит от выбора ε_χ).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы имеем

$$(\mathbf{R}_{k,0} : \tilde{U}(k)) = (\mathbf{R}_{k,0} : \tilde{\mathcal{O}}_{k,0})(\tilde{\mathcal{O}}_{k,0} : \tilde{\mathcal{A}}_{k,0})(\tilde{\mathcal{A}}_{k,0} : \tilde{U}(k))$$

и

$$(\mathbf{R}_{k,0,\varphi} : \tilde{U}(k)_\varphi) = (\mathbf{R}_{k,0,\varphi} : \tilde{\mathcal{O}}_{k,0,\varphi})(\tilde{\mathcal{O}}_{k,0,\varphi} : \tilde{\mathcal{A}}_{k,0,\varphi})(\tilde{\mathcal{A}}_{k,0,\varphi} : \tilde{U}(k)_\varphi)$$

для любого $\varphi \in \Phi$.

Из (7.3) следует, что

$$\begin{aligned}[\mathcal{A}(k)_0 : \bar{U}(k)[\ell]] &= (\tilde{\mathcal{A}}_{k,0} : \tilde{U}(k)), \\ [\mathcal{A}(k)_{0,\varphi} : \bar{U}(k)[\ell]_\varphi] &= (\tilde{\mathcal{A}}_{k,0,\varphi} : \tilde{U}(k)_\varphi)\end{aligned}$$

для любого $\varphi \in \Phi$.

Тогда из теоремы 7.2 мы получаем

$$\begin{aligned}\nu_\ell(|\text{Cl}(k)_\ell|) &= \nu_\ell\left(\ell^{s+t}|Y(k)|^{-1}(\mathbf{R}_{k,0} : \tilde{U}(k))^{-1} \right. \\ &\quad \left. \times (\mathbf{R}_{k,0} : \tilde{\mathcal{O}}_{k,0})(\tilde{\mathcal{O}}_{k,0} : \tilde{\mathcal{A}}_{k,0}) \prod_{\substack{\chi \in \hat{G} \\ \chi \neq 1}} \frac{1}{2} L_\ell(1, \chi)\right),\end{aligned} \quad (7.20)$$

$$\begin{aligned}\nu_\ell(|\text{Cl}(k)_{\ell,\varphi}|) &= \nu_\ell(\ell^{s_\varphi+t_\varphi}|Y(k)_\varphi|^{-1}) + \nu_\ell\left((\mathbf{R}_{k,0,\varphi} : \tilde{U}(k)_\varphi)^{-1} \right. \\ &\quad \left. \times (\mathbf{R}_{k,0,\varphi} : \tilde{\mathcal{O}}_{k,0,\varphi})(\tilde{\mathcal{O}}_{k,0,\varphi} : \tilde{\mathcal{A}}_{k,0,\varphi}) \prod_{\substack{\chi \in \hat{G} \\ \chi|\varphi, \chi \neq 1}} \frac{1}{2} L_\ell(1, \chi)\right).\end{aligned} \quad (7.21)$$

Из теоремы 5.1 и предложения 7.4 следует, что

$$s+t = \begin{cases} m-2 & \text{для } \ell=2 \text{ и } k \text{ типа (C),} \\ m-1 & \text{во всех остальных случаях} \end{cases}$$

и

$$s_\varphi + t_\varphi = 0 \quad \text{при} \quad \varphi \neq \varphi_0, \quad s_{\varphi_0} + t_{\varphi_0} = s + t.$$

Из предложений 7.1–7.3 и теоремы 6.1 следует, что

$$\begin{aligned} \nu_\ell((\mathbf{R}_{k,0} : \tilde{\mathcal{O}}_{k,0})(\tilde{\mathcal{O}}_{k,0} : \tilde{\mathcal{A}}_{k,0})) &= \nu_\ell\left(|P(k)| \cdot |Y(k)| \cdot \ell^{a-c} \prod_{\substack{\chi \in \hat{G} \\ \chi \neq 1}} g_{\bar{\chi}}\right), \\ \nu_\ell((\mathbf{R}_{k,0,\varphi} : \tilde{\mathcal{O}}_{k,0,\varphi})(\tilde{\mathcal{O}}_{k,0,\varphi} : \tilde{\mathcal{A}}_{k,0,\varphi})) &= \nu_\ell\left(|P(k)_\varphi| \cdot |Y(k)_\varphi| \cdot \ell^{a_\varphi - c_\varphi} \prod_{\substack{\chi \in \hat{G} \\ \chi|_\varphi, \chi \neq 1}} g_{\bar{\chi}}\right), \end{aligned}$$

где a (соответственно c) определено в предложении 7.2 (соответственно в предложении 7.3), $a_\varphi = c_\varphi = 0$ для $\varphi \neq \varphi_0$, и $a_{\varphi_0} = a$, $c_{\varphi_0} = c$.

Если $m = 0$, то

$$a - c = \begin{cases} -1 & \text{при } \ell \neq 2, \\ -2 & \text{при } \ell = 2. \end{cases}$$

Если $m > 0$, то

$$a - c = \begin{cases} -m + 1 & \text{для } \ell = 2 \text{ и } k \text{ типа (C),} \\ -m & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Следовательно, в любом случае мы имеем $s + t + a - c = -1$. Тогда из (7.20) и (7.21) следует, что

$$\nu_\ell(|\text{Cl}(k)_\ell|) = \nu_\ell\left((\mathbf{R}_{k,0} : \tilde{U}(k))^{-1} \cdot \ell^{-1} |P(k)| \prod_{\substack{\chi \in \hat{G} \\ \chi \neq 1}} \frac{1}{2} g_{\bar{\chi}} L_\ell(1, \chi)\right), \quad (7.22)$$

$$\begin{aligned} \nu_\ell(|\text{Cl}(k)_{\ell,\varphi}|) &= \nu_\ell\left((\mathbf{R}_{k,0,\varphi} : \tilde{U}(k)_\varphi)^{-1} \right. \\ &\quad \left. \times \ell^b |P(k)_\varphi| \prod_{\substack{\chi \in \hat{G} \\ \chi|_\varphi, \chi \neq 1}} \frac{1}{2} g_{\bar{\chi}} L_\ell(1, \chi)\right), \end{aligned} \quad (7.23)$$

где $b = -1$ при $\varphi = \varphi_0$, $b = 0$ при $\varphi \neq \varphi_0$.

Хорошо известно (см., например, [12]), что для $\chi \neq 1$

$$L_\ell(1, \chi) = -\left(1 - \frac{\chi(\ell)}{\ell}\right) \frac{g_\chi}{f_\chi} a(\chi).$$

Поскольку $g_\chi g_{\bar{\chi}} = f_\chi \cdot \chi(-1)$, мы имеем

$$g_{\bar{\chi}} L_\ell(1, \chi) = \pm \left(1 - \frac{\chi(\ell)}{\ell}\right) a(\chi). \quad (7.24)$$

Заметим, что

$$\nu_\ell \left(1 - \frac{\chi(\ell)}{\ell} \right) = \begin{cases} 0 & \text{при } \chi(\ell) = 0, \\ -1 & \text{при } \chi(\ell) \neq 0. \end{cases}$$

Пусть k' – максимальное подполе поля k такое, что ℓ не разветвлено в $k'/\mathbf{Q}$. Тогда для $\chi \in \widehat{G}$ равенство $\chi(\ell) \neq 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $\chi|_{G(k/k')} = 1$, другими словами, когда χ является характером группы $G(k'/\mathbf{Q})$. Учитывая, что $P(k) \cong \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}[G(k'/\mathbf{Q})]$ как модуль Галуа, мы получаем

$$\nu_\ell \left(\prod_{\substack{\chi \in \widehat{G} \\ \chi \neq 1}} \left(1 - \frac{\chi(\ell)}{\ell} \right) \right) = \nu_\ell(\ell |P(k)|), \quad (7.25)$$

$$\nu_\ell \left(\prod_{\substack{\chi \in \widehat{G} \\ \chi|_{\varphi}, \chi \neq 1}} \left(1 - \frac{\chi(\ell)}{\ell} \right) \right) = \nu_\ell(\ell^{-b} |P(k)_\varphi|), \quad (7.26)$$

где $b = -1$ при $\varphi = \varphi_0$ и $b = 0$ при $\varphi \neq \varphi_0$. Сопоставляя формулы (7.22), (7.24) и (7.25), мы получаем первую формулу теоремы. Чтобы получить вторую формулу, следует сопоставить формулы (7.23), (7.24) и (7.26). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Хорошо известно, что для любого $\chi \in \widehat{G}$ такого, что $\chi \neq 1$, мы имеем $a(\chi) \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорему 7.3 можно рассматривать как ℓ -адическую аналитическую формулу для числа классов, дающую порядок группы $\text{Cl}(k)_{\ell, \varphi}$. Индекс $(\mathbf{R}_{k,0,\varphi} : \widetilde{U}(k)_\varphi)$ может рассматриваться как φ -компонента ℓ -адического регулятора поля k .

Для вещественного абелева поля k с группой Галуа $G = G(k/\mathbf{Q})$ положим $\mathcal{R}_k = \mathbf{Z}_\ell[G]$. Пусть $\mathbf{R}_k$ имеет тот же смысл, что и в теореме 7.3. Предположим, что нам задан некоторый $\mathcal{R}_k$ -подмодуль $\mathcal{U}_k \subset \mathbf{Q}_\ell[G]$ такой, что определен индекс $(\mathcal{R}_{k,0} : \mathcal{U}_{k,0})$. Положим $\mathbf{U}_k = \overline{\mathcal{O}} \cdot \mathcal{U}_k \subset \mathbf{A}_k$. Пусть задан некоторый $\mathcal{R}_k$ -подмодуль $\mathcal{T}_k$ модуля $\overline{U}(k)[\ell] \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell$ такой, что группа $\overline{U}(k)[\ell] \cap \mathcal{T}_k$ имеет конечный индекс и в $\overline{U}(k)[\ell]$ и в $\mathcal{T}_k$. (Отметим, что $\mathcal{T}_k = \mathcal{T}_{k,0}$.) Пусть задана подгруппа $C_k \subseteq \overline{U}(k)[\ell] \cap \mathcal{T}_k$ такая, что C_k имеет конечный индекс и в $\overline{U}(k)[\ell]$ и в $\mathcal{T}_k$. Положим $\mathbf{T}_k = \overline{\mathcal{O}} \cdot \text{Log}(\mathcal{T}_k)$ и $\mathbf{C}_k = \overline{\mathcal{O}} \cdot \text{Log} C_k$, где Log совпадает с отображением (7.2).

ТЕОРЕМА 7.4. Пусть $\mathcal{R}_k$, $\mathbf{R}_k$, $\mathcal{U}_k$, $\mathbf{U}_k$, $\mathcal{T}_k$, $\mathbf{T}_k$ и C_k , $\mathbf{C}_k$ определены, как указано выше. Предположим, что $\mathbf{U}_{k,0}$ и $\mathbf{T}_k$ изоморфны как $\mathbf{R}_k$ -модули и $e_\chi \mathbf{T}_k = \frac{1}{2} a(\chi) e_\chi \mathbf{U}_k$ для любого $\chi \in \widehat{G}$ $\chi \neq 1$. Тогда

$$|\text{Cl}(k)_\ell| = (\mathcal{R}_{k,0} : \mathcal{U}_{k,0})^{-1} [\mathcal{T}_k : C_k]^{-1} [\overline{U}(k)[\ell] : C_k]$$

и

$$|\text{Cl}(k)_{\ell, \varphi}| = (\mathcal{R}_{k,0,\varphi} : \mathcal{U}_{k,0,\varphi})^{-1} [\mathcal{T}_{k,\varphi} : C_{k,\varphi}]^{-1} [\overline{U}(k)[\ell]_\varphi : C_{k,\varphi}]$$

для любого $\varphi \in \Phi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 6.4 мы имеем

$$\nu_\ell((\mathbf{U}_{k,0} : \mathbf{T}_k)) = \nu_\ell\left(\prod_{\substack{\chi \in \widehat{G} \\ \chi \neq 1}} \frac{1}{2}a(\chi)\right)$$

и

$$\nu_\ell((\mathbf{U}_{k,0,\varphi} : \mathbf{T}_{k,\varphi})) = \nu_\ell\left(\prod_{\substack{\chi \in \widehat{G} \\ \chi|\varphi, \chi \neq 1}} \frac{1}{2}a(\chi)\right)$$

для любого $\varphi \in \Phi$. Тогда по теореме 7.3 мы получаем

$$\begin{aligned} \nu_\ell(|\text{Cl}(k)_\ell|) &= \nu_\ell\left((\mathbf{R}_{k,0} : \widetilde{U}(k))^{-1} \prod_{\substack{\chi \in \widehat{G} \\ \chi \neq 1}} \frac{1}{2}a(\chi)\right) \\ &= (\mathbf{R}_{k,0} : \mathbf{U}_{k,0})^{-1}(\widetilde{U}(k) : \mathbf{R}_{k,0})(\mathbf{R}_{k,0} : \mathbf{U}_{k,0})(\mathbf{U}_{k,0} : \mathbf{T}_k)(\mathbf{T}_k : \mathbf{C}_k)(\mathbf{T}_k : \mathbf{C}_k)^{-1} \\ &= (\mathbf{R}_{k,0} : \mathbf{U}_{k,0})^{-1}(\mathbf{T}_k : \mathbf{C}_k)^{-1}(\widetilde{U}(k) : \mathbf{C}_k). \end{aligned}$$

Согласно (6.4) мы имеем

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}_{k,0} : \mathbf{U}_{k,0}) &= (\mathcal{R}_{k,0} : \mathcal{U}_{k,0}), \\ (\mathbf{T}_k : \mathbf{C}_k) &= (\mathcal{T}_k : C_k) = [\mathcal{T}_k : C_k], \\ (\widetilde{U}(k) : \mathbf{C}_k) &= (\overline{U}(k)[\ell] : C_k) = [\overline{U}(k)[\ell] : C_k]. \end{aligned}$$

Этим доказана первая формула теоремы. Вторая формула может быть доказана аналогичными рассуждениями.

§8. Доказательство теоремы 1

В этом параграфе мы определим модули $\mathcal{U}_k$ и $\mathcal{T}_k$, удовлетворяющие условиям теоремы 7.4 для случая, когда $k = K^+ = \mathbf{Q}(\varepsilon_m + \varepsilon_m^{-1})$ – максимальное вещественное подполе кругового поля $K = \mathbf{Q}(\varepsilon_m)$. Наши результаты опираются на результаты работы [15], поэтому мы будем использовать здесь ряд обозначений из [15].

Пусть $\mathcal{G} \cong (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^*$ – группа Галуа расширения $K/\mathbf{Q}$. Если $m = \prod_i p_i^{s_i}$ – разложение m на простые множители, то $\mathcal{G}$ является прямым произведением подгрупп инерции $T_{p_i} \cong (\mathbf{Z}/p_i^{s_i}\mathbf{Z})^*$:

$$\mathcal{G} = \prod_{p|m} T_p.$$

Для $p \mid m$ положим $e_p = |T_p|^{-1} \sum_{\sigma \in T_p} \sigma$. Как и в [15], мы положим $\bar{\sigma}_p = \lambda_p^{-1} e_p$, где $\lambda_p \in \mathcal{G}$ и $\lambda_p \bmod T_p$ совпадает с автоморфизмом Фробениуса расширения $K^{T_p}/\mathbf{Q}$, соответствующим p . Для $f \mid m$ пусть H_f – ядро естественного эпиморфизма $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^* \rightarrow (\mathbf{Z}/f\mathbf{Z})^*$. Положим $\mathcal{R} := \mathbf{Z}_\ell[\mathcal{G}]$.

Мы определим $\mathcal{R}$ -модуль $\mathcal{U} \subset \mathbf{Q}_\ell[\mathcal{G}]$ как ℓ -пополнение $\mathbf{Z}[\mathcal{G}]$ -модуля $\mathcal{U}$, определенного в [15, раздел 2], т.е. $\mathcal{U}$ совпадает с $\mathbf{Z}_\ell[\mathcal{G}]$ -модулем, порожденным в $\mathbf{Q}_\ell[\mathcal{G}]$ элементами

$$\alpha_f = s(H_f) \prod_{p|f} (1 - \bar{\sigma}_p), \quad 1 \leq f \leq m, \quad f \mid m,$$

где произведение берется по всем простым p , делящим f . Следующее утверждение является непосредственным следствием предложения 5.1 из [15].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1. *Для простого числа $p \mid t$ определим $\mathcal{U}_p$ как $\mathcal{R}$ -модуль, порожденный в $\mathbf{Q}_\ell[\mathcal{G}]$ элементами $s(T_p) = \sum_{\sigma \in T_p} \sigma$ и $1 - \bar{\sigma}_p$:*

$$\mathcal{U}_p = \mathcal{R}s(T_p) + \mathcal{R}(1 - \bar{\sigma}_p).$$

Тогда

$$\mathcal{U} = \prod_{p \mid t} \mathcal{U}_p, \quad (8.1)$$

где произведение берется по всем простым $p \mid t$, а $\prod$ означает произведение в групповой алгебре $\mathbf{Q}_\ell[\mathcal{G}]$.

Как и в [15], мы положим $\bar{m} = \prod_{p \mid m} p$, и для любого $r \mid \bar{m}$ положим

$$\mathcal{U}_r = \prod_{p \mid r} \mathcal{U}_p, \quad T_r = \prod_{p \mid r} T_p.$$

По определению мы имеем $\mathcal{U}_1 = \mathcal{R}$, $T_1 = \{1\}$ и $\mathcal{U}_{\bar{m}} = \mathcal{U}$, $T_{\bar{m}} = \mathcal{G}$. Заметим, что любая группа $\mathcal{U}_p$ является полной $\mathbf{Z}_\ell$ -решеткой в $\mathbf{Q}_\ell[\mathcal{G}]$.

Если $r \mid \bar{m}$, $p \mid \bar{m}$ и $(p, r) = 1$, то имеется пара точных последовательностей $\mathcal{R}$ -модулей

$$0 \longrightarrow \mathcal{U}_r^{T_p} \longrightarrow \mathcal{U}_r \longrightarrow Y \longrightarrow 0, \quad (8.2)$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{U}_{rp}^{T_p} \longrightarrow \mathcal{U}_{rp} \longrightarrow Y \longrightarrow 0 \quad (8.3)$$

(см. [15, (5.3) и (5.4)]). Здесь $Y = (1 - e_p)\mathcal{U}_r = (1 - e_p)\mathcal{U}_{rp}$, а эпиморфизмы в (8.2) и (8.3) совпадают с отображениями, индуцированными умножением на $1 - e_p$.

Следующие две леммы являются точными аналогами для случая $\mathbf{Q}_\ell[\mathcal{G}]$ -модулей лемм 5.1 и 5.2 из [15] и могут быть доказаны тем же способом.

ЛЕММА 8.1. *Пусть H – подгруппа группы $\mathcal{G}$ такая, что $H \cap T_p = \{1\}$. Пусть A – произвольный HT_p -подмодуль в $\mathbf{Q}_\ell[\mathcal{G}]$ такой, что A свободен над $\mathbf{Z}_\ell[HT_p]$. Тогда A^{T_p} и $(1 - e_p)A$ свободны над $\mathbf{Z}_\ell[H]$.*

ЛЕММА 8.2. *Пусть A – некоторый $\mathcal{R}$ -подмодуль в $\mathbf{Q}_\ell[\mathcal{G}]$. Тогда*

$$(A\mathcal{U}_p)^{T_p} = s(T_p)A + (1 - \lambda_p^{-1})A^{T_p}.$$

Следовательно, если A свободен над T_p , то

$$(A\mathcal{U}_p)^{T_p} = A^{T_p} = s(T_p)A.$$

Начиная с этого места, мы зафиксируем некоторую циклическую подгруппу $H \subset \mathcal{G}$ такую, что $H \cap T_r = \{1\}$ для любого $r \mid \bar{m}$, $r \neq \bar{m}$. Для целей настоящего параграфа достаточно случая, когда $H = J = \{1, j\}$, где j – автоморфизм комплексного сопряжения. В следующем параграфе мы встретимся с некоторыми другими типами H .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.2. *Пусть r и r' – взаимно простые делители $\bar{m}$. Тогда $\mathcal{U}_r$ является свободным $T_{r'}$ -модулем. Если, сверх этого, $rr' \neq \bar{m}$, то $\mathcal{U}_r$ является свободным $HT_{r'}$ -модулем.*

Чтобы доказать это предложение, следует повторить доказательство предложения 5.2 из [15], заменяя U_r на $\mathcal{U}_r$ и J на H . Отметим, что единственное свойство J , используемое в этом доказательстве, состоит в том, что $J \cap T_r = \{1\}$ для любого $r \neq \bar{m}$.

В качестве следствия мы получаем, что для $(p, r) = 1$

$$\mathcal{U}_r^{T_p} = \mathcal{U}_{rp}^{T_p}. \quad (8.4)$$

В самом деле, $\mathcal{U}_r$ T_p -свободен, следовательно, $\mathcal{U}_r^{T_p} = s(T_p)\mathcal{U}_r$ и (8.4) вытекает из леммы 8.2.

Теперь мы перейдем к вычислению некоторых групп когомологий, связанных с $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}_r$. Пусть A – некоторый $\mathcal{R}$ -модуль и F – некоторая подгруппа в $\mathcal{G}$. Тогда группы когомологий Тэйта $H^q(F, A)$ являются $\mathcal{G}/F$ -модулями и, следовательно, естественным образом могут рассматриваться как $\mathcal{G}$ -модули. Если $E \supseteq F$ – некоторые подгруппы $\mathcal{G}$, то $\text{Res}: H^q(E, A) \rightarrow H^q(F, A)$ и $\text{Inf}: H^q(E/F, A^F) \rightarrow H^q(E, A)$ являются $\mathcal{G}$ -отображениями при любом $q > 0$.

Следующее предложение является точным аналогом предложения 5.3 из [15] и может быть доказано теми же рассуждениями (с заменой U_r на $\mathcal{U}_r$ и J на H).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.3. Пусть r и r' взаимно просты. Предположим, что ни r , ни r' не равны $\bar{m}$. Тогда для всех $q > 0$ мы имеем

$$H^q(T_{r'}, \mathcal{U}_r^H) \cong H^q(HT_{r'}, \mathcal{U}_r) \cong H^q(H, \mathcal{U}_r^{T_{r'}}).$$

Эти отображения являются изоморфизмами $\mathcal{G}$ -модулей. Более того, эти группы нулевые, за исключением случая, когда $rr' = \bar{m}$.

Как и в [15, раздел 5], для любого $q > 0$ и любого $r \mid m$ мы полагаем $r' = \bar{m}/r$ и $A_r^q = H^q(H, \mathcal{U}_r^{T_{r'}})$.

ЛЕММА 8.3. Для любого $q > 0$ и $r \mid m$ группа $\mathcal{G}$ действует тривиально на A_r^q .

Эта лемма может быть доказана теми же аргументами, что и лемма 5.3 из [15].

ЛЕММА 8.4. Предположим, что $p \nmid r$. Тогда для любого целого $q > 0$ существует точная последовательность

$$0 \longrightarrow A_r^q \longrightarrow A_{rp}^q \longrightarrow A_r^{q+1} \longrightarrow 0.$$

Эта лемма может быть доказана теми же аргументами, что и лемма 5.4 из [15].

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства, данного в [15], следует, что вложения $A_r^q \rightarrow A_{rp}^q$ леммы 8.4 индуцированы естественными включениями H -модулей:

$$\mathcal{U}_r^H = \mathcal{U}_{rp}^H \hookrightarrow \mathcal{U}_{rp}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.4. Пусть n – число простых делителей r . Если $n = 0$, то для любого q

$$A_1^q = \begin{cases} 0 & \text{при нечетном } q, \\ \mathbf{Z}_\ell / |H| \mathbf{Z}_\ell & \text{при четном } q. \end{cases}$$

Если $n > 0$, то

$$A_r^q \cong (\mathbf{Z}_\ell / |H| \mathbf{Z}_\ell)^{2^{n-1}}$$

для любого $q > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку группа H циклическая, достаточно рассмотреть случай $q > 0$. Если $n = 0$, то $r = 1$, $\mathcal{U}_1 = \mathcal{R}$ и

$$A_1^q = H^q(H, \mathcal{R}^{\mathcal{G}}) = H^q(H, \mathbf{Z}_{\ell}),$$

откуда следует первое утверждение предложения. Поскольку $|H| \cdot A_r^q = 0$ для любых q , r и A_r^q являются ℓ -группами, мы получаем, что все A_r^q являются $(\mathbf{Z}_{\ell}/|H|\mathbf{Z}_{\ell})$ -модулями. Используя лемму 8.4, мы можем доказать по индукции, что все модули A_r^q свободны над $(\mathbf{Z}_{\ell}/|H|\mathbf{Z}_{\ell})$. Теперь второе утверждение предложения следует из леммы 8.4. Предложение доказано.

Положим $G = \mathcal{G}/H$, $G = G_{\ell} \times G_0$, где G_{ℓ} – силовская ℓ -подгруппа группы G и $(|G_0|, \ell) = 1$. Пусть Φ – множество всех $\mathbf{Q}_{\ell}$ -неприводимых характеров группы G_0 .

ТЕОРЕМА 8.1. Пусть H – циклическая подгруппа группы G такая, что $H \cap T_r = \{1\}$ для любого $r \mid \overline{m}$, $r \neq \overline{m}$. Пусть g – число различных простых делителей m . Если $g = 1$, то

$$\begin{aligned} \nu_{\ell}((\mathcal{U}^H : \mathcal{R}^H)) &= 0, \\ \nu_{\ell}((\mathcal{R}^H : \text{Sp}_H \mathcal{U})) &= \nu_{\ell}(|H|). \end{aligned}$$

Если $g \geq 2$, то

$$\nu_{\ell}((\mathcal{U}^H : \mathcal{R}^H)) = \nu_{\ell}((\mathcal{R}^H : \text{Sp}_H \mathcal{U})) = 2^{g-2} \nu_{\ell}(|H|).$$

Пусть Φ определено, как и выше. Тогда для любого $\varphi \in \Phi$ мы имеем:
если $g = 1$, то

$$\nu_{\ell}((\mathcal{U}_{\varphi}^H : \mathcal{R}_{\varphi}^H)) = 0, \quad \nu_{\ell}((\mathcal{R}_{\varphi}^H : \text{Sp}_H \mathcal{U}_{\varphi})) = \begin{cases} 0 & \text{при } \varphi \neq \varphi_0, \\ \nu_{\ell}(|H|) & \text{при } \varphi = \varphi_0; \end{cases}$$

если $g \geq 2$, то

$$\nu_{\ell}((\mathcal{U}_{\varphi}^H : \mathcal{R}_{\varphi}^H)) = \nu_{\ell}((\mathcal{R}_{\varphi}^H : \text{Sp}_H \mathcal{U}_{\varphi})) = \begin{cases} 0 & \text{при } \varphi \neq \varphi_0, \\ 2^{g-2} \nu_{\ell}(|H|) & \text{при } \varphi = \varphi_0. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p_1, \dots, p_g$ – все простые делители m . Положим $r_i = p_1 \cdots p_i$, $i = 1, \dots, g$ и $r_0 = 1$. Мы имеем $\mathcal{U}_{r_0} = \mathcal{R}$, $\mathcal{U}_{r_g} = \mathcal{U}_{\overline{m}} = \mathcal{U}$. Следовательно,

$$(\mathcal{U}^H : \mathcal{R}^H) = \prod_{i=1}^g (\mathcal{U}_{r_i}^H : \mathcal{U}_{r_{i-1}}^H)$$

и

$$(\mathcal{U}_{\varphi}^H : \mathcal{R}_{\varphi}^H) = \prod_{i=1}^g (\mathcal{U}_{r_i, \varphi}^H : \mathcal{U}_{r_{i-1}, \varphi}^H)$$

для любого $\varphi \in \Phi$.

Для некоторого $i = 1, \dots, g$ положим $r_{i-1} = r$, $p_i = p$, $r_i = rp$. Чтобы вычислить индекс $(\mathcal{U}_r^H : \mathcal{U}_{rp}^H)$, заметим, что точные последовательности (8.2) и (8.3)

вместе с равенством (8.4) приводят к следующей паре точных последовательностей G -модулей

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{U}_r^{HT_p} & \longrightarrow & \mathcal{U}_r^H & \xrightarrow{\alpha} & Y^H \xrightarrow{\gamma} H^1(H, \mathcal{U}_r^{T_p}) \longrightarrow H^1(H, \mathcal{U}_r) \\ & & \parallel & & & & \parallel & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{U}_{rp}^{HT_p} & \longrightarrow & \mathcal{U}_{rp}^H & \xrightarrow{\beta} & Y^H \xrightarrow{\delta} H^1(H, \mathcal{U}_{rp}^{T_p}) \xrightarrow{\epsilon} H^1(H, \mathcal{U}_{rp}). \end{array} \quad (8.5)$$

Так как $r \neq \overline{m}$, то из предложения 8.3 следует, что $H^1(H, \mathcal{U}_r) = 0$, т.е. γ является эпиморфизмом. С другой стороны, ϵ является мономорфизмом (см. замечание после леммы 8.4). Следовательно, $\delta = 0$ и β является эпиморфизмом. Таким образом, мы получаем

$$\begin{aligned} (\mathcal{U}_{rp}^H : \mathcal{U}_r^H) &= (\mathcal{U}_{rp}^{HT_p} : \mathcal{U}_r^{HT_p})(\text{Im } \beta : \text{Im } \alpha) \\ &= (\text{Im } \beta : \text{Im } \alpha) = |\text{Coker } \alpha| \cdot |\text{Coker } \beta|^{-1} = |\text{Coker } \alpha| = |H^1(H, \mathcal{U}_r^{T_p})|. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Если $g = 1$, то $r = 1$, $\mathcal{U}_r^{T_p} \cong \mathbf{Z}_\ell$ и $H^1(H, \mathcal{U}_r^{T_p}) = 0$. Следовательно, в этом случае $(\mathcal{U}^H : \mathcal{R}^H) = 1$. Согласно предложению 8.4 $\mathcal{U}^H/\text{Sp}_H \mathcal{U} \cong (\mathbf{Z}_\ell/|H|\mathbf{Z}_\ell)$, следовательно, $\nu_\ell((\mathcal{R}^H : \text{Sp}_H \mathcal{U})) = \nu_\ell(|H|)$.

Если $g > 1$ и $rp \neq \overline{m}$ в (8.5), то в силу предложения 8.3 $H^1(H, \mathcal{U}_r^{T_p}) = 0$, поэтому согласно (8.6) мы имеем $(\mathcal{U}_{rp}^H : \mathcal{U}_r^H) = 1$. Если $rp = \overline{m}$, то согласно (8.6) и предложению 8.4 мы имеем

$$\nu_\ell((\mathcal{U}_{rp}^H : \mathcal{U}_r^H)) = \nu_\ell(|H^1(H, \mathcal{U}_r^{T_p})|) = 2^{g-2}\nu_\ell(|H|).$$

Согласно предложению 8.4 $\nu_\ell((\mathcal{U}^H : \text{Sp}_H \mathcal{U})) = 2^{g-1}\nu_\ell(|H|)$, следовательно, $\nu_\ell((\mathcal{R}^H : \text{Sp}_H \mathcal{U})) = 2^{g-2}\nu_\ell(|H|)$. Это доказывает первые два утверждения нашей теоремы.

Если $\varphi \in \Phi$, то, беря φ -компоненты всех групп, входящих в (8.5), и рассуждая, как и прежде, мы получаем

$$(\mathcal{U}_{rp, \varphi}^H : \mathcal{U}_{r, \varphi}^H) = |H^1(H, \mathcal{U}_r^{T_p})_\varphi|.$$

Согласно лемме 8.3 $\mathcal{G}$ действует тривиально на $H^1(H, \mathcal{U}_r^{T_p})$, следовательно, мы имеем

$$|H^1(H, \mathcal{U}_r^{T_p})_\varphi| = \begin{cases} 1 & \text{при } \varphi \neq \varphi_0, \\ |H^1(H, \mathcal{U}_r^{T_p})| & \text{при } \varphi = \varphi_0. \end{cases}$$

Это доказывает оставшуюся часть теоремы.

Заметим, что для любого $\mathcal{R}$ -модуля $A \subset \mathbf{Q}_\ell[\mathcal{G}]$ мы имеем $(A_0)^H = (A^H)_0$ и $(\text{Sp}_H A)_0 = \text{Sp}_H(A_0)$, поэтому мы можем просто писать A_0^H и $\text{Sp}_H A_0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.5. В предположениях теоремы 8.1 мы имеем

$$\begin{aligned} \nu_\ell((\mathcal{U}_0^H : \mathcal{R}_0^H)) &= \nu_\ell((\mathcal{U}_{0, \varphi_0}^H : \mathcal{R}_{0, \varphi_0}^H)) = \nu_\ell(|\mathcal{G}/H| \cdot (\mathcal{U}^H : \mathcal{R}^H)), \\ \nu_\ell((\mathcal{R}_0^H : \text{Sp}_H \mathcal{U}_0)) &= \nu_\ell((\mathcal{R}_{0, \varphi_0}^H : \text{Sp}_H \mathcal{U}_{0, \varphi_0})) = \nu_\ell(|\mathcal{G}|^{-1} \cdot (\mathcal{R}^H : \text{Sp}_H \mathcal{U})). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $G = \mathcal{G}/H$. Тогда в силу (7.5) мы получаем

$$(\mathcal{R}_0^H : \mathrm{Sp}_H \mathcal{U}_0) = (\mathcal{R}^H : \mathrm{Sp}_H \mathcal{U})(\mathrm{Sp}_G(\mathrm{Sp}_H \mathcal{U}) : \mathrm{Sp}_G(\mathcal{R}^H)).$$

Заметим, что $\mathcal{R}$ свободен как $\mathcal{G}$ -модуль, следовательно, $\mathcal{R}^H = \mathrm{Sp}_H \mathcal{R}$ и

$$(\mathrm{Sp}_G(\mathrm{Sp}_H \mathcal{U}) : \mathrm{Sp}_G(\mathcal{R}^H)) = (\mathrm{Sp}_G \mathcal{U} : \mathrm{Sp}_G \mathcal{R}).$$

Очевидно, что $\mathrm{Sp}_G \mathcal{R} = s(\mathcal{G})\mathbf{Z}_\ell$. С другой стороны,

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 + s(\mathcal{G})\mathbf{Z}_\ell \quad (8.7)$$

(см. [15, (4.11)]). Следовательно, $\mathrm{Sp}_G \mathcal{U} = |\mathcal{G}|s(\mathcal{G})\mathbf{Z}_\ell$. Это доказывает последнюю формулу предложения. Чтобы доказать первую формулу, мы заметим, что в силу (8.6)

$$\mathcal{U}^H = (\mathcal{U}_0 + s(\mathcal{G})\mathbf{Z}_\ell)^H = \mathcal{U}_0^H + s(\mathcal{G})\mathbf{Z}_\ell.$$

Следовательно, $\mathrm{Sp}_G(\mathcal{U}^H) = |G|s(\mathcal{G})\mathbf{Z}_\ell$ и

$$(\mathcal{U}_0^H : \mathcal{R}_0^H) = (\mathcal{U}^H : \mathcal{R}^H) \cdot (s(\mathcal{G})\mathbf{Z}_\ell : |G|s(\mathcal{G})\mathbf{Z}_\ell) = |G| \cdot (\mathcal{U}^H : \mathcal{R}^H).$$

Предложение доказано.

Если K^+ – максимальное вещественное подполе поля $K = \mathbf{Q}(\varepsilon_m)$, то мы имеем $H = J = G(K/K^+)$ и $G = G(K^+/\mathbf{Q})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для поля K^+ , определенного выше, мы положим $\mathcal{U}_{K^+} = \mathrm{Sp}_J(\mathcal{U})$.

Следующее утверждение непосредственно следует из теоремы 8.1 и предложения 8.5.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.6. Пусть группа $\mathcal{U}_{K^+}$ определена, как выше. Тогда

$$\nu_\ell((\mathcal{R}_0^J : \mathcal{U}_{K^+,0})) = \nu_\ell(|\mathcal{G}|^{-1}2^{b_1}),$$

где

$$b_1 = \begin{cases} 1 & \text{при } g = 1, \\ 2^{g-2} & \text{при } g \geq 2. \end{cases}$$

Для любого $\varphi \in \Phi$ мы имеем

$$\nu_\ell((\mathcal{R}_{0,\varphi}^J : \mathcal{U}_{K^+,0,\varphi})) = \begin{cases} 0 & \text{при } \varphi \neq \varphi_0, \\ \nu_\ell(|\mathcal{G}|^{-1}2^{b_1}) & \text{при } \varphi = \varphi_0. \end{cases}$$

Теперь мы напомним некоторые результаты из [15], относящиеся к круговым единицам и круговым числам. Пусть $P \subset K^*$ – группа круговых чисел, определенная в [15, раздел 4], т.е. P – подгруппа мультипликативной группы K^* поля $K = \mathbf{Q}(\varepsilon_m)$, порожденная всеми элементами вида $1 - \zeta$, где $\zeta \in K$, $\zeta^m = 1$, $\zeta \neq 1$. Группа круговых единиц C поля K определяется равенством $C = P \cap E$, где E – группа единиц поля K . Заметим, что $\mu(K) \subset C$ (см. [15, раздел 1]), поэтому мы полагаем $\overline{P} = P/\mu(K)$, $\overline{C} = C/\mu(K)$. В [15, раздел 4] было определено некоторое логарифмическое отображение l группы P такое, что $\mathrm{Ker} l = \mu(K)$. Поэтому модуль $T = l(P)$, определенный в [15], естественно изоморфен $\overline{P}$. Мы воспроизведем здесь некоторые результаты о модуле T , доказанные в [15].

ЛЕММА 8.5 (см. [15, лемма 4.2]). *Справедливо равенство $l(C) = T_0$. Другими словами, $\overline{C} = \overline{P}_0$.*

ЛЕММА 8.6 (см. [15, лемма 4.3]). *Пусть $e_1 = |\mathcal{G}|^{-1}s(\mathcal{G})$. Тогда $T_0 = T \cap (1 - e_1)T$, T_0 имеет конечный индекс в $(1 - e_1)T$ и*

$$[(1 - e_1)T : T_0] = 2^{-g}|\mathcal{G}|.$$

Другими словами, $\overline{C} = \overline{P} \cap (1 - e_1)\overline{P}$ и

$$[(1 - e_1)\overline{P} : \overline{C}] = 2^{-g}|\mathcal{G}|. \quad (8.8)$$

Учитывая, что $\mathcal{G}$ действует тривиально на $(1 - e_1)\overline{P}/\overline{C}$, мы можем переформулировать лемму 8.6 следующим образом:

ЛЕММА 8.7. *Пусть $\overline{C}[\ell]$ и $\overline{P}[\ell]$ означают ℓ -пополнения $\overline{C}$ и $\overline{P}$ соответственно. Тогда $\overline{C}[\ell]$ имеет конечный индекс в $(1 - e_1)\overline{P}[\ell]$ и для любого $\varphi \in \Phi$ мы имеем*

$$\nu_\ell([(1 - e_1)\overline{P}[\ell]_\varphi : \overline{C}[\ell]_\varphi]) = \begin{cases} 0 & \text{при } \varphi \neq \varphi_0, \\ \nu_\ell(2^{-g}|\mathcal{G}|) & \text{при } \varphi = \varphi_0. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $K^+ = \mathbf{Q}(\varepsilon_m + \varepsilon_m^{-1})$ – максимальное вещественное подполе кругового поля $K = \mathbf{Q}(\varepsilon_m)$. Тогда мы полагаем $\mathcal{T}_{K^+} := (1 - e_1)\overline{P}[\ell]$.

Беря композицию диагонального вложения

$$\overline{C}[\ell] \hookrightarrow \mathcal{A}(K^+)$$

и отображения (7.2), мы получаем вложение

$$\text{Log}: \overline{C}[\ell] \hookrightarrow \mathbf{A}_{K^+}. \quad (8.9)$$

Продолжая отображение (8.9) по линейности на $\mathcal{T}_{K^+}$, мы получаем отображение

$$\text{Log}: \mathcal{T}_{K^+} \hookrightarrow \mathbf{A}_{K^+}. \quad (8.10)$$

Используя изоморфизм $\mathbf{A}_{K^+} \cong \overline{\mathbf{Q}}_\ell[G]$ из § 6 и естественное вложение $\mathbf{Q}_\ell[G] \hookrightarrow \overline{\mathbf{Q}}_\ell[G]$, мы получаем вложение $i: \mathcal{U}_{K^+} \hookrightarrow \mathbf{A}_{K^+}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Мы полагаем $\mathbf{T}_{K^+} = \overline{\mathcal{O}} \cdot \text{Log}(\mathcal{T}_{K^+})$ и $\mathbf{U}_{K^+} = \overline{\mathcal{O}} \cdot i(\mathcal{U}_{K^+})$.

Для $a \in \mathbf{Z}$, $a \not\equiv 0 \pmod{m}$, положим

$$\eta(a) := l(1 - \varepsilon_m^a) := \sum_{\substack{t \bmod m \\ (t, m) = 1}} -\frac{1}{2} \log(1 - \varepsilon_m^{at}) \sigma_t^{-1} \in \overline{\mathbf{Q}}_\ell[\mathcal{G}] = \mathbf{A}_K.$$

Как и в [15, раздел 2], через V мы обозначим $\overline{\mathcal{O}}$ -подмодуль в $\mathbf{A}_K$, порожденный всеми элементами $\eta(a)$, $a \in \mathbf{Z}$, $a \not\equiv 0 \pmod{m}$. Тогда V является $\overline{\mathcal{O}}[\mathcal{G}]$ -модулем и элементы $\eta(d)$, $d \mid m$, порождают V как $\mathbf{R}_K$ -модуль.

Для $r = a/m$, $a \in \mathbf{Z}$, $a \not\equiv 0 \pmod{m}$, мы полагаем

$$u(r) = -\frac{1}{2} \log(1 - \varepsilon_m^a) \in \overline{\mathbf{Q}}_\ell.$$

Если $\chi \in \widehat{\mathcal{G}}$ – примитивный характер Дирихле кондуктора $f > 1$, то, как и в [15, раздел 2], мы полагаем

$$u(\chi) = \sum_{\substack{a \bmod f \\ (a, f) = 1}} \chi(a) u\left(\frac{a}{f}\right). \quad (8.11)$$

Пусть

$$\omega = \sum_{\substack{\chi \in \widehat{\mathcal{G}} \\ \chi \neq 1}} u(\bar{\chi}) e_{\chi} \in \mathbf{A}_K.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.7. Пусть V определено, как выше, и $\mathbf{U} = \overline{\mathcal{O}} \cdot \mathcal{U} \subset \mathbf{A}_K$. Тогда

$$(1 - e_1)V = \omega \cdot \mathbf{U}.$$

Это предложение может быть доказано теми же рассуждениями, что и предложение 2.1 из [15].

ТЕОРЕМА 8.2. $\overline{\mathcal{O}}[G]$ -модули $\mathbf{T}_{K+}$ и $\mathbf{U}_{K+,0}$ изоморфны, и для любого $\chi \in \widehat{G}$, $\chi \neq 1$, справедливо равенство

$$e_{\chi} \mathbf{T}_{K+} = \frac{1}{2} a(\chi) e_{\chi} \mathbf{U}_{K+},$$

где $a(\chi)$ задано формулой (7.19).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что (8.11) индуцирует изоморфизм

$$l: \mathbf{T}_{K+} \cong (1 - e_1)V,$$

причем $\text{Sp}_J \cdot l = \text{id}$. С другой стороны, для нечетных χ мы имеем $u(\bar{\chi}) = 0$, поэтому $\omega \mathbf{U} = \omega e^+ \mathbf{U}$, где $e^+ = \frac{1+j}{2}$. В силу (8.7) мы получаем $\omega \mathbf{U} = \omega e^+ \mathbf{U}_0$. Отображение Sp_J изоморфно отображает $l((1 - e_1)V)$ на $\mathbf{T}_{K+}$ и $\omega \mathbf{U}$ на $\omega \mathbf{U}_{K+}$. Следовательно, в $\mathbf{A}_{K+}$ выполняется равенство

$$\mathbf{T}_{K+} = \omega \mathbf{U}_{K+}. \quad (8.12)$$

Если $\chi \neq 1$ – четный характер группы $\mathcal{G}$, то χ можно рассматривать как характер G , и тогда из (7.19) и (8.11) следует, что $\frac{1}{2} a(\chi) = \mu u(\bar{\chi})$, где μ – некоторый корень из единицы, зависящий от выбора ε_{χ} в (7.19). Следствие из теоремы 7.3 показывает, что $u(\bar{\chi}) \neq 0$ для любого четного $\chi \in \widehat{\mathcal{G}}$, $\chi \neq 1$, поэтому (8.12) определяет изоморфизм $\overline{\mathcal{O}}[G]$ -модулей

$$\mathbf{T}_{K+} \cong \mathbf{U}_{K+,0},$$

и для любого такого χ

$$e_{\chi} \mathbf{T}_{K+} = (e_{\chi} \omega) e_{\chi} \mathbf{U}_{K+} = u(\bar{\chi}) e_{\chi} \mathbf{U}_{K+} = \frac{1}{2} a(\chi) e_{\chi} \mathbf{U}_{K+}.$$

ТЕОРЕМА 8.3 (теорема 1 введения). Пусть K^+ – максимальное вещественное подполе кругового поля $K = \mathbf{Q}(\varepsilon_m)$ кондуктора m . Пусть $U(K^+)$ – группа единиц поля K^+ и $C^+ = C \cap U(K^+)$, где C – группа круговых единиц поля K , определенная выше. Тогда

$$|\mathrm{Cl}(K^+)_{\ell}| = \begin{cases} [U(K^+)[\ell] : C^+[\ell]] & \text{при } \ell \neq 2, \\ 2^{-b} [U(K^+)[\ell] : C^+[\ell]] & \text{при } \ell = 2, \end{cases}$$

и для любого $\varphi \in \Phi$

$$|\mathrm{Cl}(K^+)_{\ell, \varphi}| = \begin{cases} [U(K^+)[\ell]_{\varphi} : C^+[\ell]_{\varphi}] & \text{при } \ell \neq 2, \\ [U(K^+)[\ell]_{\varphi} : C^+[\ell]_{\varphi}] & \text{при } \ell = 2, \quad \varphi \neq \varphi_0, \\ 2^{-b} [U(K^+)[\ell]_{\varphi_0} : C^+[\ell]_{\varphi_0}] & \text{при } \ell = 2, \quad \varphi = \varphi_0, \end{cases}$$

где b определяется следующим образом. Если g – число различных простых делителей m , то $b = 0$ при $g = 1$ и $b = 2^{g-2} + 1 - g$ при $g > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема 8.2 показывает, что определенная выше пара модулей $\mathcal{U}_{K^+}$, $\mathcal{T}_{K^+}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 7.4. Тогда, применяя эту теорему, мы получаем

$$\begin{aligned} |\mathrm{Cl}(K^+)_{\ell}| &= (\mathcal{R}_{K^+,0} : \mathcal{U}_{K^+,0})^{-1} [\mathcal{T}_{K^+} : C_{K^+}]^{-1} [\overline{U}(K^+)[\ell] : C_{K^+}], \\ |\mathrm{Cl}(K^+)_{\ell, \varphi}| &= (\mathcal{R}_{K^+,0, \varphi} : \mathcal{U}_{K^+,0, \varphi})^{-1} [\mathcal{T}_{K^+, \varphi} : C_{K^+, \varphi}]^{-1} [\overline{U}(K^+)[\ell]_{\varphi} : C_{K^+, \varphi}]. \end{aligned}$$

Согласно определению мы имеем $C_{K^+} = \overline{U}(K^+)[\ell] \cap \mathcal{T}_{K^+} = C^+[\ell]/\{\pm 1\}$, поэтому $\overline{U}(K^+)[\ell]/C_{K^+} \cong U(K^+)[\ell]/C^+[\ell]$.

Индекс $Q = [\overline{C}[\ell] : (C^+[\ell]/\{\pm 1\})]$ – это так называемый “индекс единиц”. Хорошо известно (см., например, [15, раздел 1]), что $Q = 1$ при $g = 1$ и $Q = 2$ при $g \geq 2$. Сопоставляя это с леммой 8.7, мы получаем

$$\nu_{\ell}([\mathcal{T}_{K^+} : C_{K^+}]) = \begin{cases} \nu_{\ell}(2^{-g}|\mathcal{G}|) & \text{при } g = 1, \\ \nu_{\ell}(2^{1-g}|\mathcal{G}|) & \text{при } g > 1, \end{cases} \quad (8.13)$$

$$[\mathcal{T}_{K^+, \varphi} : C_{K^+, \varphi}] = \begin{cases} 1 & \text{при } \varphi \neq \varphi_0, \\ [\mathcal{T}_{K^+} : C_{K^+}] & \text{при } \varphi = \varphi_0. \end{cases} \quad (8.14)$$

Мы имеем $\mathcal{R}_{K^+,0} = \mathcal{R}_0^J$, поэтому индексы $(\mathcal{R}_{K^+,0} : \mathcal{U}_{K^+,0})$ и $(\mathcal{R}_{K^+,0, \varphi} : \mathcal{U}_{K^+,0, \varphi})$ определяются из предложения 8.6. Сопоставляя предложение 8.6 с формулами (8.13) и (8.14), мы получаем утверждение теоремы.

Следующий результат является непосредственным следствием теоремы 8.3.

ТЕОРЕМА 8.4. Пусть K и K^+ те же, что и в теореме 8.3. Пусть ℓ – фиксированное простое число и k – некоторое подполе поля K^+ , такое что степень $[K^+ : k]$ взаимно проста с ℓ . Пусть $U(k)$ – группа единиц поля k и $C^+(k) = C^+ \cap U(k)$. Пусть $\varphi \in \Phi$ – некоторый характер группы $G = G(K^+/\mathbf{Q})$ такой, что ограничение φ на $G(K^+/k)$ тривиально (таким образом, φ можно рассматривать как характер группы $G(k/\mathbf{Q})$). Тогда

$$|\mathrm{Cl}(k)_{\ell}| = \begin{cases} [U(k)[\ell] : C^+(k)[\ell]] & \text{при } \ell \neq 2, \\ 2^{-b} [U(k)[\ell] : C^+(k)[\ell]] & \text{при } \ell = 2, \end{cases}$$

$$|\mathrm{Cl}(k)_{\ell, \varphi}| = \begin{cases} [U(k)[\ell]_{\varphi} : C^+(k)[\ell]_{\varphi}] & \text{при } \ell \neq 2, \\ [U(k)[\ell]_{\varphi} : C^+(k)[\ell]_{\varphi}] & \text{при } \ell = 2, \quad \varphi \neq \varphi_0, \\ 2^{-b} [U(k)[\ell]_{\varphi_0} : C^+(k)[\ell]_{\varphi_0}] & \text{при } \ell = 2, \quad \varphi = \varphi_0, \end{cases}$$

где b то же, что и в теореме 8.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если φ удовлетворяет условиям, указанным выше, то $\text{Cl}(k)_{\ell, \varphi} = \text{Cl}(K^+)_{\ell, \varphi}$, $U(k)[\ell]_{\varphi} = U(K^+)[\ell]_{\varphi}$ и $C^+(k)[\ell]_{\varphi} = C^+[\ell]_{\varphi}$.

§9. Доказательство теоремы 2 и некоторые другие результаты

Пусть k – произвольное вещественное абелево поле. Если k имеет кондуктор m , то k является подполем кругового поля $K = K_m = \mathbf{Q}(\varepsilon_m)$. Более того, k является подполем максимального вещественного подполя $K^+ = K_m^+$ поля K_m . Положим $H = G(K^+/k)$, $G = G(k/\mathbf{Q})$ и $\mathcal{R}_k = \mathbf{Z}_{\ell}[G]$. В этом параграфе мы дадим определение модулей $\mathcal{U}_k$ и $\mathcal{T}_k$ для произвольного вещественного абелева k . Мы можем сделать это по крайней мере тремя способами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Положим $\mathcal{U}_k^{(1)} := \pi_H(\mathcal{U}_{K^+})$, $\mathcal{T}_k^{(1)} := N_H \mathcal{T}_{K^+}$ и $C_k^{(1)} := N_H C_{K^+}$, где π_H – естественная проекция $\mathbf{Q}_{\ell}[G(K^+/\mathbf{Q})] \rightarrow \mathbf{Q}_{\ell}[G]$ и N_H – отображение $\bar{U}(K^+) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}_{\ell} \rightarrow \bar{U}(k) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}_{\ell}$, индуцированное норменным отображением $N_H: U(K^+) \rightarrow U(k)$.

Для произвольного натурального $n \mid m$ мы положим, как и в [16], $k_n = K_n \cap k$, где $K_n = \mathbf{Q}(\varepsilon_n)$ – круговое поле кондуктора n . Заметим, что любое k_n является подполем максимального вещественного подполя K_n^+ поля K_n . Пусть π_n – естественная проекция $\mathbf{Q}_{\ell}[G(K_n^+/\mathbf{Q})] \rightarrow \mathbf{Q}_{\ell}[G(k_n/\mathbf{Q})]$ и $i_n: \mathbf{Q}_{\ell}[G(k_n/\mathbf{Q})] \rightarrow \mathbf{Q}_{\ell}[G]$ – отображение, определенное формулой $i_n(\sigma) = \sum_{\tau \in G(k/k_n)} \bar{\sigma} \tau$, где $\sigma \in G(k_n/\mathbf{Q})$ и $\bar{\sigma}$ – некоторый представитель σ в G . С другой стороны, для любого $n \mid m$ имеются норменное отображение $N_{K_n^+/k_n}: \bar{U}(K_n^+) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}_{\ell} \rightarrow \bar{U}(k_n) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}_{\ell}$ и естественное включение $j_n: \bar{U}(k_n) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}_{\ell} \hookrightarrow \bar{U}(k) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}_{\ell}$. Данное ниже определение следует определению, данному в [16].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Определим $\mathcal{U}_k^{(2)}$ как $\mathcal{R}_k$ -подмодуль в $\mathbf{Q}_{\ell}[G]$, порожденный группами $i_n \circ \pi_n(\mathcal{U}_{K_n^+})$ для всех $n \mid m$. Определим $\mathcal{T}_k^{(2)}$ как $\mathcal{R}_k$ -подмодуль в $\bar{U}(k) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}_{\ell}$, порожденный группами $j_n \circ N_{K_n^+/k_n}(\mathcal{T}_{K_n^+})$ для всех $n \mid m$. Определим $C_k^{(2)}$ как $\mathcal{R}_k$ -подмодуль в $\bar{U}(k)[\ell]$, порожденный группами $j_n \circ N_{K_n/k_n} C(K_n)$, где $C(K_n)$ – группа круговых единиц, определенная во введении.

ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что $\mathcal{U}_k^{(2)} \supseteq i_1 \circ \pi(\mathcal{U}_{K_1^+}) = s(G)\mathbf{Z}_{\ell}$. Следовательно,

$$\mathcal{U}_k^{(2)} = \mathcal{U}_{k,0}^{(2)} + s(G)\mathbf{Z}_{\ell}. \quad (9.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Положим $\mathcal{U}_k^{(3)} := i_m^{-1}(\mathcal{U}_{K_m^+}^H) \subset \mathbf{Q}_{\ell}[G]$, $\mathcal{T}_k^{(3)} := j_m^{-1}(\mathcal{T}_{K_m^+}^H) \subset \bar{U}(k) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}_{\ell}$ и $C_k^{(3)} := C_{K^+}^H = \bar{U}(k) \cap C_{K^+}$.

В дальнейшем мы будем обозначать модуль $\mathcal{U} \subset \mathbf{Q}_{\ell}[G(K_m/\mathbf{Q})]$, введенный в § 8, через $\mathcal{U}_m$, если мы хотим явно указать его зависимость от K_m . Для $i = 1, 2, 3$ положим $\mathbf{U}_k^{(i)} = \bar{\mathcal{O}} \cdot \mathcal{U}_k^{(i)} \subset \mathbf{A}_k$ и $\mathbf{T}_k^{(i)} = \bar{\mathcal{O}} \cdot \text{Log}(\mathcal{T}_k^{(i)})$, где отображение $\text{Log}: \mathcal{T}_k^{(i)} \hookrightarrow \mathbf{A}_k$, определено, как в (8.10).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.1. Пусть $\omega \in \mathbf{A}_{K_m}$ имеет тот же смысл, что и в предложении 8.7. Тогда для $i = 1, 2, 3$ справедливы равенства

$$\mathbf{T}_k^{(i)} = \omega \mathbf{U}_k^{(i)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (8.12) мы имеем $\mathbf{T}_{K^+} = \omega \mathbf{U}_{K^+}$, где $K^+ = K_m^+$. Из определения 1 и тождества $\log \cdot N_H = \text{Sp}_H \cdot \log$ следует, что $\mathbf{T}_k^{(1)} = \text{Sp}_H \mathbf{T}_{K^+}$ и $\mathbf{U}_k^{(1)} = \text{Sp}_H \mathbf{U}_{K^+}$. Таким образом, $\mathbf{T}_k^{(1)} = \text{Sp}_H(\omega \mathbf{U}_{K^+}) = \omega \cdot \text{Sp}_H(\mathbf{U}_{K^+}) = \omega \mathbf{U}_k^{(1)}$. Это доказывает наше предложение для $i = 1$.

Поскольку умножение на ω в (8.12) индуцирует изоморфизм $\mathbf{T}_{K^+} \cong \mathbf{U}_{K^+,0}$, мы получаем

$$\mathbf{T}_k^{(3)} = \mathbf{T}_{K^+}^H = \omega \mathbf{U}_{K^+}^H = \omega \mathbf{U}_k^{(3)}.$$

Это доказывает наше предложение для $i = 3$.

Для $i = 2$ и $n \mid m$ положим

$$\omega_n = \sum_{\substack{\chi \in G(K_n/\mathbf{Q}) \\ \chi \neq 1}} u(\bar{\chi}) e_\chi \in \mathbf{A}_{K_n}.$$

Применяя к полю K_n предложение 8.7, мы получаем

$$\mathbf{T}_{K_n^+} = \omega_n \mathbf{U}_{K_n^+}.$$

Если $x \in \mathbf{A}_K^{G(K/K_n)} = \mathbf{A}_{K_n}$, то для любого характера $\chi \in \widehat{G}$, имеющего нетривиальное ограничение на $G(K/K_n)$, мы имеем $e_\chi \cdot x = 0$. Тогда $\omega_n \cdot x = \omega \cdot x$ для любого $x \in \mathbf{A}_{K_n}$ и, следовательно, $\mathbf{T}_{K_n^+} = \omega \mathbf{U}_{K_n^+}$ для любого $n \mid m$. Из определения 2 следует, что $\mathbf{T}_k^{(2)}$ порождается в $\mathbf{A}_k$ группами $\text{Sp}_{K_n/k_n}(\mathbf{T}_{K_n^+})$ для всех $n \mid m$, а $\mathbf{U}_k^{(2)}$ порождается в $\mathbf{A}_k$ группами $\text{Sp}_{K_n/k_n}(\mathbf{U}_{K_n^+})$ для всех $n \mid m$. Поскольку $\omega \cdot \text{Sp}_{K_n/k_n}(x) = \text{Sp}_{K_n/k_n}(\omega \cdot x)$ для любого $x \in \mathbf{A}_{K_n}$, мы получаем

$$\mathbf{T}_k^{(2)} = \omega \mathbf{U}_k^{(2)}.$$

Предложение доказано.

В качестве непосредственного следствия из теоремы 7.4 и предложения 9.1 мы получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 9.1. Пусть k – вещественное абелево поле. Тогда для $i = 1, 2, 3$ и любого $\varphi \in \Phi$ мы имеем

$$|\text{Cl}(k)_\ell| = (\mathcal{R}_{k,0} : \mathcal{U}_{k,0}^{(i)})^{-1} [\mathcal{T}_k^{(i)} : C_k^{(i)}]^{-1} [\overline{U}(k)[\ell] : C_k^{(i)}]$$

и

$$|\text{Cl}(k)_{\ell,\varphi}| = (\mathcal{R}_{k,0,\varphi} : \mathcal{U}_{k,0,\varphi}^{(i)})^{-1} [\mathcal{T}_{k,\varphi}^{(i)} : C_{k,\varphi}^{(i)}]^{-1} [\overline{U}(k)[\ell]_\varphi : C_{k,\varphi}^{(i)}].$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.2. Индекс $(\mathcal{R}_{k,0} : \mathcal{U}_{k,0}^{(i)})$ определяется равенством

$$(R_{k,0} : \mathcal{U}_{k,0}^{(i)}) = \ell^c (R_k : \mathcal{U}_k^{(i)}),$$

где

$$c = \begin{cases} \nu_\ell([K : \mathbf{Q}]) & \text{при } i = 1, \\ \nu_\ell([k : \mathbf{Q}]) & \text{при } i = 2, 3. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $i = 1, 3$ наше утверждение непосредственно следует из (7.5) и (8.7). При $i = 2$ наше утверждение следует из (7.5) и (9.1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.3. Для вещественного абелева k пусть $U \subset \mathbf{Q}[G]$ – модуль, определенный Синноттом в [16]. Тогда

$$\mathcal{U}_k^{(2)} = U[\ell].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в § 8, положим $\bar{m} = \prod_{p|m} p$. Пусть T_p (соответственно $T_p(k)$) – подгруппа инерции точки p в $\mathcal{G} = G(K_m/\mathbf{Q})$ (соответственно в $G = G(k/\mathbf{Q})$). Как было показано в доказательстве предложения 5.1 из [15], модуль $\mathcal{U}_m$ порождается как $\mathbf{Z}_\ell[\mathcal{G}]$ -модуль элементами

$$p_{m,r} := \prod_{p|r} s(T_p) \prod_{p|\bar{m}/r} (1 - \bar{\sigma}_p), \quad 1 \leq r \leq \bar{m}, \quad r \mid m.$$

Для $p \mid m$ положим $(p, k)^* = \lambda_p^{-1} e'_p$, где $e'_p = |T_p(k)|^{-1} \sum_{\sigma \in T_p(k)} \sigma$ и λ_p – любой элемент группы G такой, что $\lambda_p \bmod T_p(k)$ является автоморфизмом Фробениуса, соответствующим p , в группе $G/T_p(k)$. Для $r \mid \bar{m}$ обозначим через $T_r(k)$ коммутатор в G подгрупп инерции $T_p(k)$ для всех p , делящих r . В [16, предложение 2.3] было доказано, что модуль U порождается как $\mathbf{Z}[G]$ -модуль элементами

$$q_r := s(T_r(k)) \prod_{p|\bar{m}/r} (1 - (p, k)^*),$$

где r пробегает все положительные делители $\bar{m}$.

Пусть $r \mid \bar{n} \mid \bar{m}$. Мы докажем, что $i_n \circ \pi_n(p_n, r) \in U$. Пусть $T_r(k_n)$ (соответственно $T_r(K_n)$) – коммутатор в $G = G(k_n/\mathbf{Q})$ (соответственно в $G(K_n/\mathbf{Q})$) подгрупп инерции $T_p(k_n)$ (соответственно $T_p(K_n)$) для всех p , делящих r . Поскольку отображение π_n является гомоморфизмом колец и $\pi_n(\bar{\sigma}_p) = (p, k_n)^*$, мы получаем

$$\pi_n(p_{n,r}) = \frac{|T_r(K_n)|}{|T_r(k_n)|} s(T_r(k_n)) \prod_{p|\bar{n}/r} (1 - (p, k)^*).$$

Положим $r_1 = r\bar{m}/\bar{n}$, т.е. $\bar{m}/r_1 = \bar{n}/r$. Пусть $\pi^{(n)}$ – естественное отображение $\mathbf{Q}[G] \rightarrow \mathbf{Q}[G(k_n/\mathbf{Q})]$. Тогда, рассуждая, как и прежде, и учитывая, что $\pi^{(n)}(T_{r_1}(k)) = T_r(k_n)$, мы получаем

$$\pi_n(q_{r_1}) = \frac{|T_{r_1}(k)|}{|T_r(k_n)|} s(T_r(k_n)) \prod_{p|\bar{n}/r} (1 - (p, k)^*) = \frac{|T_{r_1}(k)|}{|T_r(K_n)|} \pi_n(p_{n,r}). \quad (9.2)$$

Рассмотрим точную последовательность

$$0 \longrightarrow G(k/k_n) \cap T_{r_1}(k) \longrightarrow T_{r_1}(k) \longrightarrow T_r(k_n) \longrightarrow 0.$$

Мы имеем

$$|G(k/k_n) \cap T_{r_1}(k)| = \frac{|T_{r_1}(k)|}{|T_r(k_n)|}.$$

Пусть $S \subset G(k/k_n)$ – множество представителей для $G(k/k_n)/(G(k/k_n) \cap T_{r_1}(k))$. Тогда

$$i_n \circ \pi^{(n)}(q_{r_1}) = \text{Sp}_{k/k_n}(q_{r_1}) = \frac{|T_{r_1}(k)|}{|T_r(k_n)|} \sum_{\sigma \in S} \sigma(q_{r_1}).$$

Таким образом, из (9.2) следует, что

$$i_n \circ \pi^{(n)}(p_{n,r}) = \frac{|T_r(K_n)|}{|T_{r_1}(k)|} \text{Sp}_{k/k_n}(q_{r_1}) = \frac{|T_r(K_n)|}{|T_r(k_n)|} \sum_{\sigma \in S} \sigma(q_{r_1}).$$

Тогда $i_n \circ \pi_n(p_{n,r}) \in U$ для любого $n \mid m$, $r \mid \bar{n}$. Следовательно, $\mathcal{U}_k^{(2)} \subseteq U[\ell]$.

Теперь мы докажем, что $q_2 \in \mathcal{U}_k^{(2)}$ для любого $r \mid \bar{m}$. Положим $m = ab$, где $(b, r) = 1$ и простое p делит a тогда и только тогда, когда p делит r (таким образом, $\bar{a} = r$). Отметим, что $T_r(k) = G(k/k_b)$. Рассмотрим произведение

$$p_{b,1} = \prod_{p \mid \bar{m}/r} (1 - \bar{\sigma}_p).$$

Мы имеем

$$\pi_b(p_{b,1}) = \prod_{p \mid \bar{m}/r} (1 - (p, k_b)^*).$$

Поскольку $q_r \in \mathbf{Q}[G]^{T_r(k)}$, мы получаем $q_r = |T_r(k)|^{-1} \cdot i_b \circ \pi^{(b)}(q_r)$. Отметим, что

$$\pi^{(b)}(q_r) = |T_r(k)| \cdot \prod_{p \mid \bar{m}/r} (1 - (p, k_b)^*).$$

Поэтому $\pi_b(p_{b,1}) = |T_r(k)|^{-1} \pi^{(b)}(q_r)$. Следовательно,

$$q_r = i_b \circ \pi_b(p_{b,1}).$$

Этим доказано, что $\mathcal{U}_k^{(2)} \supseteq U[\ell]$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.4. *Группа $(T_k^{(2)})^2$, где $T_k^{(2)}$ – группа из определения 2, совпадает с группой $(1 - e_G)(D/\{\pm 1\})$, где $e_G = |G|^{-1} \sum_{\sigma \in G} \sigma$ и D – группа круговых чисел поля k , определенная Синноттом в [16, раздел 4].*

Группа $C_k^{(2)}$ определения 2 совпадает с $C/\{\pm 1\}$, где C – группа круговых единиц поля k , определенная в [16, раздел 4].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа D определяется следующим образом. Пусть n – любое целое число, большее 1, и a – любое целое число, не делящееся на n . Тогда число $N_{K_n/k_n}(1 - \varepsilon_n^a)$ принадлежит полю k . Синнотт определяет группу круговых чисел D поля k как группу, порожденную в k^* элементом -1 и всеми элементами вида $N_{K_n/k_n}(1 - \varepsilon_n^a)$. Затем, круговые единицы C определяются равенством $C = U(k) \cap D$. Отметим, что любой элемент $x \in D$ является единицей тогда и только тогда, когда $N_{k/\mathbf{Q}}(x) = \pm 1$. Следовательно, $C/\{\pm 1\} = (D/\{\pm 1\})_0$.

ЛЕММА 9.1. *Пусть D_1 – подгруппа группы D , порожденная элементом -1 и всеми элементами вида $N_{K_n/k_n}(1 - \varepsilon_n^a)$ для $n \mid m$, а D_2 – подгруппа в $\mathbf{Q}^*$, порожденная всеми простыми числами $q \nmid m$. Тогда существует разложение в прямое произведение $D \cong D_1 \times D_2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [16] было показано, что $D \supset \mathbf{Q}^*$, следовательно, $D_2 \subset D$. Очевидно, что $D_1 \subset D$ и $D_1 \cap D_2 = \{1\}$. Зафиксируем некоторое $n = n_1 n_2$, где $(m, n_2) = 1$ и произвольное простое число p может делить n_1 только в том случае, когда $p \mid m$. Тогда $K_n = K_{n_1} \cdot K_{n_2}$ и $K_{n_2} \cap k = \mathbf{Q}$.

Если $n_1 = 1$, т.е. $(n, m) = 1$, то $k_n = \mathbf{Q}$, и, учитывая, что норма $N_{K_n/k_n}(x)$ всюду положительна для любого $x \in K_n$, мы получаем $N_{K_n/k_n}(1 - \varepsilon_n^a) \in D_2$.

Если $n_2 = 1$, то, полагая $E = K_n \cap K_m$, мы получаем $N_{K_n/k_n} = N_{E/k_n} \circ N_{K_n/E}$. Прямое вычисление показывает, что $N_{K_n/E}(1 - \varepsilon_n^a) \in P(E)$, следовательно, $N_{K_n/k}(1 - \varepsilon_n^a) \in D_1$.

Если $n_1 \neq 1$, $n_2 \neq 1$, то, рассуждая тем же образом и полагая $E = K_n \cap K_m$, мы получаем $N_{K_n/k_n}(1 - \varepsilon_n^a) = N_{E/k_n} \circ N_{K_n/E}(1 - \varepsilon_n^a)$. Поскольку в этом случае $(1 - \varepsilon_n^a)$ является единицей, мы видим, что $N_{K_n/E}(1 - \varepsilon_n^a) \in P(E)$, следовательно, $N_{K_n/k}(1 - \varepsilon_n^a) \in D_1$. Лемма доказана.

Из леммы 9.1 следует, что $(1 - e_G)(D/\{\pm 1\}) = (1 - e_G)(D_1/\{\pm 1\})$. Без труда проверяется, что группа $(1 - e_G)D_1$ порождается группами $(1 - e_n)\bar{P}_n$ для всех $n \mid m$, где P_n – группа круговых чисел поля K_n , $\bar{P}_n = P_n/\mu(K_n)$ и $e_n = |G(K_n/\mathbf{Q})|^{-1} \sum_{\sigma \in G(K_n/\mathbf{Q})} \sigma$. Согласно определению $\mathcal{T}_{K_n^+} = (1 - e_n)\bar{P}_n$. Учитывая, что мы использовали отображение $N_{K_n^+/k_n}$ в определении группы $\mathcal{T}_k^{(2)}$ и отображение $N_{K_n/k}$ в определении группы D , мы получаем, что $(\mathcal{T}_k^{(2)})^2 = (1 - e_G)(D/\{\pm 1\})$.

Чтобы доказать последнее утверждение предложения, заметим, что включение $C_k^{(2)} \subseteq C/\{\pm 1\} = (D/\{\pm 1\})_0$ очевидно. Предположим, что $x \in D$ и $x \bmod \{\pm 1\} \in (D/\{\pm 1\})_0$. Тогда x можно представить в виде $x = u \cdot \prod_{p \mid m} A_p$, где $u \in C_k^{(2)}$ и A_p определяются следующим образом. Пусть p^e – максимальная степень p , делящая m . Для $1 \leq j \leq e$ положим $K(j) = K_{p^j}$ и $k(j) = k_{p^j}$. Тогда A_p имеет вид $A_p = \prod_{j=1}^e B_j$, где $B_j = N_{K(j)/k(j)}(b_j)$ для некоторых $b_j \in P(K(j))$. Поскольку элементы A_p взаимно просты в k , мы получаем, что x является единицей тогда и только тогда, когда A_p является единицей для любого $p \mid m$. Группа $G(k_{p^e}/\mathbf{Q})$ циклическая (группа $G(k_{p^e}^+/\mathbf{Q})$ циклическая в случае $p = 2$), поэтому, учитывая, что p^e – точная степень p , делящая кондуктор поля k , мы получаем, что степень $[K_{p^j} : k_{p^j}]$ не зависит от j для $1 \leq j \leq e$. Следовательно, для любого $a \in K_{p^e}$ мы имеем

$$N_{k(e)/k(j)} \circ N_{K(e)/k(e)}(a) = N_{K(j)/k(j)} \circ N_{K(e)/K(j)}(a).$$

Норма $N_{K(e)/K(j)}$ отображает $P(K_{p^e})$ на $P(K_{p^j})$. Следовательно, A_p имеет вид $A_p = N_{K(e)/k(e)}(c_p)$ для некоторого $c_p \in P(K_{p^e})$. Очевидно, что A_p является единицей тогда и только тогда, когда c_p является единицей, т.е. когда $c_p \in C(K_{p^e})$. Следовательно, $A_p \in C_k^{(2)}$. Это доказывает включение $C_k^{(2)} \supseteq C/\{\pm 1\}$. Предложение доказано.

Для $\varphi \in \Phi$ положим $d = |G| = [k : \mathbf{Q}]$ и $d_\varphi = \dim_{\mathbf{Q}_\ell} \varphi = \dim_{\mathbf{Q}_\ell} \mathbf{Q}_\ell[G]_\varphi$, где $G = G(k/\mathbf{Q})$. Положим $d_{\varphi_0} = d_0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.5. Группа $C_k^{(2)}$ имеет конечный индекс в $\mathcal{T}_k^{(2)}$, и для лю-

бого $\varphi \in \Phi$ мы имеем

$$[\mathcal{T}_k^{(2)} : C_k^{(2)}] = 2^{d-1} \prod_{p|m} [k_{p^e} : \mathbf{Q}],$$

$$[\mathcal{T}_{k,\varphi}^{(2)} : C_{k,\varphi}^{(2)}] = \begin{cases} 2^{d_\varphi} & \text{для } \varphi \neq \varphi_0, \\ 2^{d_0-1} \prod_{p|m} [k_{p^e} : \mathbf{Q}] & \text{для } \varphi = \varphi_0, \end{cases}$$

где произведение берется по всем простым p , делящим кондуктор m поля k . Для любого такого p p^e означает максимальную степень p , делящую m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [16, предложение 4.1] было доказано, что для некоторой определенной там группы $T \cong D/\{\pm 1\}$ мы имеем

$$[(1 - e_G)T : T_0] = \prod_{p|m} [k_{p^e} : \mathbf{Q}].$$

Из предложения 9.4 следует, что

$$[(\mathcal{T}_k^{(2)})_\varphi^2 : C_{k,\varphi}^{(2)}] = [(1 - e_G)T_\varphi : T_{0,\varphi}],$$

где $T \cong D/\{\pm 1\}$. Тогда утверждение нашего предложения следует из того факта, что

$$[\mathcal{T}_{k,\varphi}^{(2)} : (\mathcal{T}_k^{(2)})_\varphi^2] = \begin{cases} 2^{d_\varphi} & \text{при } \varphi \neq \varphi_0, \\ 2^{d_0-1} & \text{при } \varphi = \varphi_0. \end{cases}$$

Предложение доказано.

Сопоставляя теорему 9.1, предложение 9.2 и предложение 9.5, мы получаем следующий результат, являющийся уточнением теоремы 4.1 из [16].

ТЕОРЕМА 9.2 (теорема 2 введения). *Для любого вещественного абелева k мы имеем*

$$\nu_\ell([\overline{U}(k)[\ell] : C_k^{(2)})] = \nu_\ell\left(|\text{Cl}(k)_\ell| 2^{d-1} \frac{\prod_{p|m} [k_{p^e} : \mathbf{Q}]}{[k : \mathbf{Q}]} [\mathcal{R}_k : \mathcal{U}_k]\right).$$

Для любого $\varphi \in \Phi$ мы имеем

$$\begin{aligned} & \nu_\ell([\overline{U}(k)[\ell]_\varphi : C_{k,\varphi}]) \\ &= \begin{cases} \nu_\ell(|\text{Cl}(k)_{\ell,\varphi}| 2^{d_\varphi} [\mathcal{R}_{k,\varphi} : \mathcal{U}_{k,\varphi}]) & \text{при } \varphi \neq \varphi_0, \\ \nu_\ell(|\text{Cl}(k)_{\ell,\varphi_0}| 2^{d_0-1} \frac{\prod_{p|m} [k_{p^e} : \mathbf{Q}]}{[k : \mathbf{Q}]} [\mathcal{R}_{k,\varphi_0} : \mathcal{U}_{k,\varphi_0}]) & \text{при } \varphi = \varphi_0. \end{cases} \end{aligned}$$

В случае, когда $i = 1, 3$, автор не сумел полностью вычислить индекс $[\mathcal{T}_{k,\varphi}^{(i)} : C_{k,\varphi}^{(i)}]$. Тем не менее, в случае $i = 3$ мы имеем следующий тривиальный результат (случай $i = 1$ может быть рассмотрен аналогичным образом, но этот последний случай не ведет ни к каким интересным следствиям).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.6. *Пусть k – вещественное абелево поле с кондуктором m . Если $i = 3$ и $\ell \neq 2$, то для любого $\varphi \in \Phi$ мы имеем*

$$[\mathcal{T}_k^{(3)} : C_k^{(3)}] = \ell^r,$$

$$[\mathcal{T}_{k,\varphi}^{(3)} : C_{k,\varphi}^{(3)}] = \begin{cases} 1 & \text{при } \varphi \neq \varphi_0, \\ \ell^r & \text{при } \varphi = \varphi_0, \end{cases}$$

где ℓ^r – некоторая степень ℓ , делящая порядок группы $\mathcal{G} = G(K_m/\mathbf{Q})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $K_m = K$. Тогда $\mathcal{T}_{K^+}^H / C_{K^+}^H \subseteq \mathcal{T}_{K^+} / C_{K^+}$. Заметим, что при $\ell \neq 2$ справедливы равенства $C_{K^+} = \overline{C}(K)[\ell]$ и $C_{K^+}^H = C_k^{(3)}$. Таким образом, предложение непосредственно следует из леммы 8.7.

ТЕОРЕМА 9.3. *Для любого вещественного абелева поля k и для $\ell \neq 2$ мы имеем*

$$|\mathrm{Cl}(k)_\ell| = (\mathcal{R}_k : \mathcal{U}_k^{(3)})^{-1} \ell^{r-c} [\overline{U}(k)[\ell] : C_k^{(3)}],$$

где $c = \nu_\ell([k : \mathbf{Q}])$ и ℓ^r делит степень $[K : \mathbf{Q}]$.

Для любого $\varphi \in \Phi$ мы имеем

$$|\mathrm{Cl}(k)_{\ell, \varphi}| = \begin{cases} A_\varphi & \text{при } \varphi \neq \varphi_0, \\ \ell^{r-c} A_\varphi & \text{при } \varphi = \varphi_0, \end{cases} \quad (9.3)$$

где $A_\varphi = (\mathcal{R}_{k, \varphi} : \mathcal{U}_{k, \varphi}^{(3)})^{-1} [\overline{U}(k)[\ell]_\varphi : C_{k, \varphi}^{(3)}]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из теоремы 9.1 и предложений 9.2 и 9.6.

Теорема 9.3 приводит к следующему интересному результату.

ТЕОРЕМА 9.4. *Пусть $K = K_m$ и $k = (K^+)^H$, где H – циклическая подгруппа группы $G(K^+/\mathbf{Q})$ такая, что $H \cap T_r = \{1\}$ для любого $r \mid \overline{m}$, $r \neq \overline{m}$, где T_r имеет тот же смысл, что и в теореме 8.1. Пусть $g \geq 2$ – число различных простых делителей m . Для $\ell \neq 2$ положим $t = \nu_\ell(|H|)$. Тогда*

$$|\mathrm{Cl}(k)_\ell| \equiv |\mathrm{Cl}(k)_{\ell, \varphi_0}| \equiv 0 \pmod{\ell^{t(2^{g-2}-1)}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы имеем разложение $\mathcal{U}_m = \mathcal{U}_m^+ \oplus \mathcal{U}_m^-$. Согласно лемме 8.3 группа $\mathcal{U}_m^-$ является когомологически тривиальным H -модулем. Тогда из теоремы 8.1 следует, что $\nu_\ell((\mathcal{U}_k^{(3)} : \mathcal{R}_k)) = \nu_\ell((\mathcal{U}_{k, \varphi_0}^{(3)} : \mathcal{R}_{k, \varphi_0})) = \nu_\ell((\mathcal{U}_m^+)^H : \mathcal{R}_k) = 2^{g-2}t$. Мы знаем, что ℓ^{r-c} делит $|H|$. Таким образом, теорема следует из (9.3) и того факта, что индекс $[\overline{U}(k)[\ell]_\varphi : C_{k, \varphi}^{(3)}]$ является целым числом.

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть k_0 – максимальное ℓ -расширение поля $\mathbf{Q}$, содержащееся в k , где k имеет тот же смысл, что и в теореме 9.4. Тогда*

$$|\mathrm{Cl}(k_0)_\ell| \equiv 0 \pmod{\ell^{t(2^{g-2}-1)}}.$$

Действительно, в этом случае $|\mathrm{Cl}(k_0)_\ell| = |\mathrm{Cl}(k)_{\ell, \varphi_0}|$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.7. *Пусть задано некоторое натуральное t . Предположим, что для любого простого $p \mid m$ справедливо сравнение $\varphi(p^e) \equiv 0 \pmod{\ell^t}$, где ℓ – нечетное простое число и $\varphi(p^e)$ – функция Эйлера, т.е. $p \equiv 1 \pmod{\ell^t}$ при $p \neq \ell$ и $e \geq t+1$ при $p = \ell$. Тогда существует циклическая подгруппа $H \subset G(K_m/\mathbf{Q})$ порядка ℓ^t такая, что $H \cap T_r = \{1\}$ для любого $r \mid \overline{m}$, $r \neq \overline{m}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $p \mid m$ выберем элемент $\sigma_p \in T_p$, имеющий порядок в точности ℓ^t , и положим $H = \langle \sigma \rangle$, где $\sigma = \prod_{p \mid m} \sigma_p$.

ТЕОРЕМА 9.5. Пусть $K = K_m$ – круговое поле такое, что при некотором заданном t выполняется сравнение $\varphi(p^e) \equiv 0 \pmod{\ell^t}$ для любого $p \mid m$, где p^e – максимальная степень p , делящая m . Тогда

$$|\mathrm{Cl}(K_m^+)_{\ell}| \equiv |\mathrm{Cl}(K_m^+)_{\ell, \varphi_0}| \equiv 0 \pmod{\ell^{t(2^{g-2}-2)}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 9.7 можно найти подполе $k \subset K_m^+$ такое, что группа $H = G(K_m^+/k)$ имеет порядок ℓ^t и удовлетворяет всем условиям теоремы 9.4. Если порядок группы $\mathrm{Cl}(k)_{\varphi_0}$ делится на ℓ^a для некоторого a , то существует абелево неразветвленное ℓ -расширение M/k , степень которого делится на ℓ^a , и такое, что M является расширением Галуа поля $\mathbf{Q}$, причем $G(M/k) = G(M/k)_{\varphi_0}$. Тогда степень расширения MK_m^+/K_m^+ делит ℓ^{a-t} . Следовательно,

$$|\mathrm{Cl}(K_m^+)| \equiv |\mathrm{Cl}(K_m^+)_{\varphi_0}| \equiv 0 \pmod{\ell^{a-t}}.$$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть ℓ – нечетное простое число. Если число g различных простых делителей m больше или равно 4, то поле K_m^+ имеет нетривиальную ℓ -группу классов. Пусть K_0 – максимальное ℓ -расширение поля $\mathbf{Q}$, содержащееся в K_m^+ . Тогда поле K_0 имеет нетривиальную ℓ -группу классов.

§10. Заключительные замечания

Группу $T_{\ell}(k_{\infty})_{(0)}$ можно рассматривать как аналог ℓ -группы классов функционального поля. Таким образом, встает

ВОПРОС 1. Конечна ли группа $\prod_{\ell} T_{\ell}(k_{\infty})_{(0)}$ для вещественного абелева поля k , другими словами, верно ли, что группы $T_{\ell}(k_{\infty})$ для заданного k тривиальны для всех, кроме конечного числа, ℓ ?

Отметим, что доказательство теоремы 3.2, данное в § 3, кажется довольно сложным. Представляется, что его можно упростить, используя подход Кольвагина [6], [12]. С другой стороны, в [3] Гринберг предположил, что модуль $T_{\ell}(k_{\infty})$ конечен для любого вполне вещественного поля k . Если эта гипотеза справедлива, то теорему 3 можно вывести непосредственно из предложения 4.3. Более того, справедлива

ТЕОРЕМА 10.1. Предположим, что для расширения k_{∞}/k справедлива гипотеза Гринберга. Тогда при достаточно большом n для любого промежуточного подполя k_n , $k_{\infty} \supset k_n \supset k$, мы имеем

$$T_{\ell}(k_{\infty})_{(n)} \cong \widehat{U}_S(k_n)/C_S(k_n).$$

В связи с гипотезой Гринберга мы докажем одно утверждение, являющееся простым следствием предложения 4.3. Для вещественного абелева поля k мы определим число $i(k)$ как минимальное значение индекса n такое, что группа Галуа $\Gamma_n = G(k_{\infty}/k_n)$ действует тривиально на $T_{\ell}(k_{\infty})$, т.е. $T_{\ell}(k_{\infty})^{\Gamma_n} = T_{\ell}(k_{\infty})$, где k_{∞} – круговое $\mathbf{Z}_{\ell}$ -расширение поля k . Если модуль $T_{\ell}(k_{\infty})$ бесконечен, то такого n нет, и в этом случае мы полагаем $i(k) = \infty$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.1. Пусть k – циклическое вещественное поле алгебраических чисел степени ℓ такое, что в k разветвлены t простых чисел $p_1, \dots, p_t$, причем ℓ остается инертным в k . Тогда

$$i(k) \geq \frac{t-1}{\ell} - 1 \quad \text{при} \quad \ell \neq 2, \quad i(k) \geq \frac{t}{2} - 2 \quad \text{при} \quad \ell = 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если модуль $T_\ell(k_\infty)$ бесконечен, то $i(k) = \infty$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $T_\ell(k_\infty)$ конечен. Пусть c (соответственно d) – минимальное число образующих $T_\ell(k_\infty)$ (соответственно $\widehat{U}_S(k)/C_S(k)$) как абелевой ℓ -группы.

Из теории родов следует, что $c \geq t-1$ при $\ell \neq 2$ и $c \geq t-2$ при $\ell = 2$. Поскольку $d \leq \text{rk } \widehat{U}_S(k) = \ell$, наше предположение вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 10.1. Пусть G – циклическая группа порядка ℓ^n , A – конечная абелева ℓ -группа, являющаяся G -модулем, и a (соответственно b) – минимальное число образующих группы $A_G = H_0(G, A)$ (соответственно A^G). Тогда

$$n \geq \frac{a}{b} - 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $|A_G| = |A^G|$. Пусть $\alpha: A_G \rightarrow A^G$ – отображение, индуцированное нормальным отображением $N_G: A \rightarrow A$. Тогда $|\text{Ker } \alpha| \geq \ell^{a-b}$. Поскольку $|\text{Ker } \alpha| = |\text{Coker } \alpha|$ и группа $\text{Coker } \alpha = H^0(G, A)$ имеет не более b образующих, мы получаем, что показатель группы $H^0(G, A)$ больше или равен $\ell^{\frac{a-b}{b}}$.

ВОПРОС 2. Справедлива ли теорема 10.1 для произвольного вещественного абелева поля k ?

ВОПРОС 3. Можно ли обобщить теорему 6.1 на случай относительных абелевых расширений?

Отметим, что такое обобщение, если оно существует, предполагает обобщение понятия гауссовых сумм g_χ .

Следует отметить, что теорема 7.1 вместе с приведенным доказательством остается справедливой для любого вполне вещественного поля k .

ВОПРОС 4. Можно ли обобщить теорему 7.1 на случай произвольного поля алгебраических чисел?

Отметим, что мы доказали теоремы 9.4 и 9.5, используя вычисления некоторых групп когомологий модуля U . Можно спросить, существуют ли другие интересные примеры подгрупп $H \subset G(K_m/\mathbf{Q})$, приводящие к каким-либо другим нетривиальным условиям делимости для групп классов круговых полей?

Наконец, отметим, что наиболее интересна задача обобщения результатов настоящей работы на другие типы полей, обладающих системами специальных единиц. Например, для абелевых расширений мнимых квадратичных полей.

Список литературы

1. Cornell G. Exponential growth of the ℓ -rank of the class group of the maximal real subfield of cyclotomic fields // Bull. Amer. Math. Soc. 1983. V. 8. № 1. P. 55–58.
2. Gras G. Classes d'ideaux des corps abéliens et nombres de Bernoulli généralisés // Ann. Inst. Fourier. 1977. V. 27. P. 1–66.
3. Greenberg R. On the Iwasawa invariants of totally real number fields // Amer. J. Math. 1976. V. 98. № 1. P. 263–284.
4. Greither C. Class groups of abelian fields, and the main conjecture // Ann. Inst. Fourier. 1992. V. 42. P. 449–499.
5. Iwasawa K. Lectures on p -adic L -functions. Princeton: Princeton Univ. Press and Univ. of Tokyo Press, 1972.
6. Kolyvagin V.A. Euler systems // The Grothendieck Festschrift. V. 2. P. 435–483. Birkhäuser Verlag, 1990.

7. *Kubert D.S.* The universal ordinary distribution // Bull. Soc. math. France. 1979. V. 107. P. 179–202.
8. *Kubert D.S.* The $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ cohomology of the universal ordinary distribution // Bull. Soc. math. France. 1979. V. 107. P. 203–224.
9. *Кузьмин Л.В.* Модуль Тэйта полей алгебраических чисел // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1972. Т. 36. № 2. С. 267–327.
10. *Кузьмин Л.В.* Некоторые теоремы двойственности для круговых Γ -расширений полей алгебраических чисел CM-типа // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 3. С. 483–546.
11. *Кузьмин Л.В.* Некоторые явные вычисления в локальных и глобальных круговых полях // Тр. Матем. ин-та РАН. 1995. Т. 208. С. 202–223.
12. *Lang S.* Cyclotomic fields I, II, combined 2-nd edition Grad. Texts in Math. V. 121. New York: Springer-Verlag, 1990.
13. *Mazur B., Wiles A.* Class fields of abelian extensions of $\mathbf{Q}$ // Invent. math. 1984. V. 76. P. 179–330.
14. *Rubin K.* Global units and ideal class groups // Invent. Math. 1987. V. 89. P. 511–526.
15. *Sinnott W.* On the Stickelberger ideal and the circular units of a cyclotomic field // Ann. of Math. 1978. V. 108. P. 107–134.
16. *Sinnott W.* On the Stickelberger ideal and the circular units of an abelian field // Invent. math. 1980. V. 62. P. 181–234.
17. *Wiles A.* The Iwasawa conjecture for totally real fields // Ann. of Math. 1990. V. 131. P. 493–540.

Российский научный центр “Курчатовский институт”
Институт Информационных технологий
Москва 123182, Россия
E-mail: kuzmin@ofnpn.kiae.su

Поступило в редакцию
14.XI.1995