Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Б. Кайгородов, О δ -дифференцированиях n -арных алгебр, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2012, том 76, выпуск 6, 81–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7907>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 14:58:37

УДК 512.554

И. Б. Кайгородов

О δ -дифференцированиях n -арных алгебр

Дано описание δ -дифференцирований $(n + 1)$ -мерных n -арных алгебр Филиппова и, как следствие, простых конечномерных алгебр Филиппова над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Приведены новые примеры нетривиальных δ -дифференцирований алгебр Филиппова. Показано отсутствие нетривиальных δ -дифференцирований простой тернарной алгебры Мальцева M_8 .

Библиография: 27 наименований.

Ключевые слова: δ -дифференцирование, алгебра Филиппова, тернарная алгебра Мальцева.

§ 1. Введение

Понятие антидифференцирования алгебры, являющееся частным случаем δ -дифференцирования, т. е. (-1) -дифференцированием, рассматривалось в работах [1], [2]. В дальнейшем в работе [3] появляется определение δ -дифференцирования алгебры. Напомним, что при фиксированном δ из основного поля F под δ -дифференцированием алгебры A понимают линейное отображение φ , удовлетворяющее при произвольных элементах $x, y \in A$ условию

$$\varphi(xy) = \delta(\varphi(x)y + x\varphi(y)). \quad (1)$$

В работе [3] описаны $\frac{1}{2}$ -дифференцирования произвольной первичной алгебры Ли A ($\frac{1}{6} \in F$) с невырожденной симметрической инвариантной билинейной формой. А именно, доказано, что линейное отображение $\varphi: A \rightarrow A$ является $\frac{1}{2}$ -дифференцированием тогда и только тогда, когда $\varphi \in \Gamma(A)$, где $\Gamma(A)$ – центроид алгебры A . Отсюда следует, что если A – центральная простая алгебра Ли над полем характеристики $p \neq 2, 3$ с невырожденной симметрической инвариантной билинейной формой, то любое $\frac{1}{2}$ -дифференцирование φ имеет вид $\varphi(x) = \alpha x$ для некоторого $\alpha \in F$. В. Т. Филиппов доказал [4], что любая первичная алгебра Ли не имеет ненулевого δ -дифференцирования, если $\delta \neq -1, 0, \frac{1}{2}, 1$. В работе [4] показано, что любая первичная алгебра Ли A ($\frac{1}{6} \in \Phi$) с ненулевым антидифференцированием является 3-мерной центральной простой алгеброй над полем частных центра $Z_R(A)$ своей алгебры правых умножений $R(A)$. Также в этой работе был построен пример нетривиального $\frac{1}{2}$ -дифференцирования для алгебры Витта W_1 , т. е. такого $\frac{1}{2}$ -дифференцирования, которое не является

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-01-00938-А), ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (гос. контракт № 14.740.11.0346 на 2009–2013 гг.) и Фонда FAPESP (грант № 2011/51132-9).

элементом центроида алгебры W_1 . В [5] описаны δ -дифференцирования первичных альтернативных и нелиевых мальцевских алгебр с некоторыми ограничениями на кольцо операторов Φ . Как оказалось, алгебры из этих классов не имеют нетривиальных δ -дифференцирований.

В работе [6] было дано описание δ -дифференцирований простых конечномерных йордановых супералгебр над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. В дальнейшем, в работе [7], были описаны δ -дифференцирования классических супералгебр Ли. Работа [8] посвящена описанию δ -дифференцирований полупростых конечномерных йордановых супералгебр над произвольным полем характеристики, отличной от 2, и δ -(супер)дифференцирований простых конечномерных лиевых и йордановых супералгебр над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Для алгебр и супералгебр из работ [6]–[8] было показано отсутствие нетривиальных δ -(супер)дифференцирований. В дальнейшем результаты из [7] получили обобщение в работе [9]. П. Зусмановичем было дано описание δ -(супер)дифференцирований первичных супералгебр Ли, а именно доказано, что первичная супералгебра Ли не имеет нетривиальных δ -(супер)дифференцирований при $\delta \neq -1, 0, \frac{1}{2}, 1$. Он также показал, что для совершенной (т. е. такой, что $[A, A] = A$) супералгебры Ли A с нулевым центром и невырожденной суперсимметрической инвариантной билинейной формой пространство $\frac{1}{2}$ -(супер)дифференцирований совпадает с (супер)центроидом супералгебры A , кроме того, в случае положительной характеристики поля он дал положительный ответ на вопрос В. Т. Филиппова о существовании делителей нуля в кольце $\frac{1}{2}$ -дифференцирований первичной алгебры Ли, сформулированный в [4]. В свое время автором настоящей статьи и В. Н. Желябиным в [10] рассматривались δ -(супер)дифференцирования простых унитарных супералгебр йордановой скобки, было показано отсутствие нетривиальных δ -(супер)дифференцирований простых супералгебр йордановой скобки, не являющихся супералгебрами векторного типа, и было приведено описание δ -(супер)дифференцирований простых конечномерных унитарных йордановых супералгебр над алгебраическим замкнутым полем характеристики, отличной от 2. Как следствие, была обнаружена связь между наличием нетривиальных δ -дифференцирований простых унитарных супералгебр йордановых скобок и специальностью супералгебры. Цикл статей по описанию δ -(супер)дифференцирований простых конечномерных йордановых супералгебр заканчивается работой [11], где было дано полное описание δ -(супер)дифференцирований полупростых конечномерных йордановых супералгебр над алгебраически замкнутым полем характеристики, отличной от 2. В частности, были построены примеры нетривиальных $\frac{1}{2}$ -(супер)дифференцирований для простых неунитарных конечномерных йордановых супералгебр.

В настоящей работе рассматриваются δ -дифференцирования n -арных алгебр Филиппова, а также тернарной алгебры Мальцева M_8 . Отметим, что одним из источников возникновения алгебр Филиппова стала механика Намбу, предложенная в [12]. В настоящее время были выявлены широкие связи между задачами из теории n -арных алгебр и математической физики, в частности механики Намбу и теории Черна–Саймонса (подробнее об этой связи см. работы [13]–[19]).

§ 2. Новые примеры нетривиальных δ -дифференцирований алгебр Филиппова

Алгеброй Филиппова называется алгебра L с одной антикоммутативной n -арной операцией $[x_1, \dots, x_n]$, удовлетворяющей тождеству

$$[[x_1, \dots, x_n], y_2, \dots, y_n] = \sum_{i=1}^n [x_1, \dots, [x_i, y_2, \dots, y_n], \dots, x_n].$$

Дифференцированием n -арной алгебры L называется линейное отображение D , удовлетворяющее условию

$$D[x_1, \dots, x_n] = \sum_{i=1}^n [x_1, \dots, D(x_i), \dots, x_n]. \quad (2)$$

По аналогии с δ -дифференцированием бинарных алгебр, изучению которых посвящены работы [3]–[11], мы можем определить δ -дифференцирование n -арной алгебры как линейное отображение φ для фиксированного элемента основного поля δ , удовлетворяющее условию

$$\varphi[x_1, \dots, x_n] = \delta \sum_{i=1}^n [x_1, \dots, \varphi(x_i), \dots, x_n]. \quad (3)$$

Пусть

$$\Gamma(L) = \{\psi \in \text{End}(A) \mid \psi([x_1, \dots, x_n]) = [x_1, \dots, \psi(x_i), \dots, x_n]\}$$

– центроид алгебры L . Ясно, что в случае n -арной алгебры L каждый элемент $\Gamma(L)$ будет являться $\frac{1}{n}$ -дифференцированием. Ненулевое δ -дифференцирование φ будем считать нетривиальным, если $\delta \neq 0, 1$ и $\varphi \notin \Gamma(L)$. Случаи $\delta = 0, 1$ тривиальны, поэтому далее мы их не рассматриваем.

В. Т. Филиппов в [20] дал описание n -арных алгебр, впоследствии названных алгебрами Филиппова, размерности $n + 1$. Пусть A – n -арная алгебра Филиппова, $\dim(A) = n + 1$ и $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ – базис алгебры A . Через $\hat{x}_i$ мы будем обозначать отсутствующий элемент x_i . Например, $[x_1, x_2, \hat{x}_3, x_4] = [x_1, x_2, x_4]$.

Согласно классификации В. Т. Филиппова n -арные алгебры Филиппова размерности $n + 1$ над алгебраически замкнутым полем F характеристики, отличной от 2, исчерпываются $n + 4$ сериями алгебр:

- (A₁) $[e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1}] = 0$ для $1 \leq i \leq n + 1$;
- (B₁) $[e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1}] = 0$ для $1 < i \leq n + 1$, $[e_2, \dots, e_{n+1}] = e_1$;
- (B₂) $[e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1}] = 0$ для $1 \leq i \leq n$, $[e_1, \dots, e_n] = e_1$;
- (C₁) $[e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1}] = 0$ для $1 \leq i \leq n - 1$, $[e_1, \dots, \hat{e}_n, e_{n+1}] = e_n$, $[e_1, \dots, e_n] = \alpha e_{n+1}$, $\alpha \neq 0$;
- (C₂) $[e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1}] = 0$ для $1 \leq i \leq n - 1$, $[e_1, \dots, \hat{e}_n, e_{n+1}] = e_n + \beta e_{n+1}$, $[e_1, \dots, e_n] = e_{n+1}$, $\beta \neq 0$;
- (D_r) $[e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1}] = e_i$ для $3 \leq r \leq n + 1$ и $1 \leq i \leq r$, $[e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1}] = 0$ для $r + 1 \leq i \leq n + 1$.

В дальнейшем мы будем рассматривать алгебры над полями характеристики нуль, но, как нетрудно заметить, некоторые результаты могут быть перенесены на поля положительной характеристики.

Пусть φ – δ -дифференцирование алгебры A ; тогда через $[\varphi]$ будем обозначать матрицу линейного отображения φ в базисе $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$. Таким образом, $[\varphi(x)] = [x][\varphi]$, где $[x]$ – вектор-строка, составленная из координат вектора x в базисе $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$. Через $\{\varphi\}$ и $|\{\varphi\}|$ будем обозначать соответственно множество, составленное из диагональных элементов матрицы $[\varphi]$, и его мощность.

Легко заметить, что для алгебр типа (A_1) любой эндоморфизм будет являться δ -дифференцированием для любого $\delta \in F$.

ЛЕММА 1. Пусть A – алгебра типа (B_1) и φ – нетривиальное δ -дифференцирование алгебры A . Тогда $|\{\varphi\}| \geq 2$ и

$$\varphi(e_1) = \delta \sum_{k=2}^{n+1} \beta_{kk} e_1, \quad \varphi(e_i) = \sum_{j=1}^{n+1} \beta_{ij} e_j, \quad i \geq 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi(e_i) = \sum_{j=1}^{n+1} \beta_{ij} e_j$, $\beta_{ij} \in F$. Заметим, что

$$\varphi(e_1) = \varphi[e_2, \dots, e_{n+1}] = \delta \sum_{k=2}^{n+1} [e_2, \dots, \varphi(e_k), \dots, e_{n+1}] = \delta \sum_{k=2}^{n+1} \beta_{kk} e_1.$$

Легко видеть, что отображение, заданное по правилу

$$\varphi(e_1) = \delta \sum_{k=2}^{n+1} \beta_{kk} e_1, \quad \varphi(e_i) = \sum_{j=1}^{n+1} \beta_{ij} e_j, \quad i \geq 2,$$

будет являться δ -дифференцированием. Отметим, что если $|\{\varphi\}| = 1$, то все β_{ii} равны между собой и $\delta = \frac{1}{n}$. В этом случае легко показать, что $\varphi \in \Gamma(A)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть A – алгебра типа (B_2) и φ – нетривиальное δ -дифференцирование алгебры A . Тогда $|\{\varphi\} \setminus \{\beta_{n+1, n+1}\}| \geq 2$ и

$$\begin{aligned} \varphi(e_1) &= \frac{\delta}{1-\delta} \sum_{k=2}^n \beta_{kk} e_1, & \varphi(e_{n+1}) &= \beta_{n+1, n+1} e_{n+1}, \\ \varphi(e_i) &= \sum_{j=1}^{n+1} \beta_{ij} e_j, & 2 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi(e_i) = \sum_{j=1}^{n+1} \beta_{ij} e_j$, $\beta_{ij} \in F$. Заметим, что

$$\varphi(e_1) = \varphi[e_1, \dots, e_n] = \delta \sum_{k=1}^n [e_1, \dots, \varphi(e_k), \dots, e_n] = \delta \sum_{k=1}^n \beta_{kk} e_1,$$

откуда $\beta_{11} = \frac{\delta}{1-\delta} \sum_{k=2}^n \beta_{kk}$. Отметим, что

$$0 = \varphi[e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1}] = \delta[e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n, \beta_{n+1,i}e_i],$$

что влечет $\beta_{n+1,i} = 0$, $i \neq n+1$. Легко видеть, что отображение, заданное по правилу

$$\begin{aligned} \varphi(e_1) &= \frac{\delta}{1-\delta} \sum_{k=2}^n \beta_{kk}e_1, & \varphi(e_{n+1}) &= \beta_{n+1,n+1}e_{n+1}, \\ \varphi(e_i) &= \sum_{j=1}^{n+1} \beta_{ij}e_j, & 2 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

является δ -дифференцированием. Отметим, что если $|\{\varphi\} \setminus \{\beta_{n+1,n+1}\}| = 1$, то все β_{ii} , $i \neq n+1$, равны между собой и $\delta = \frac{1}{n}$. В этом случае легко показать, что $\varphi \in \Gamma(A)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть A – алгебра типа (C_1) и φ – нетривиальное δ -дифференцирование алгебры A . Тогда $[\varphi] = \begin{pmatrix} A & C \\ G & B \end{pmatrix}$, где $A \in M_{n-1}$, $B \in M_2$, $C \in M_{n-1,2}$, $G = \mathbf{0} \in M_{2,n-1}$, $|\{\varphi\}| \geq 2$ и при $w = \frac{\delta}{1-\delta} \sum_{k=1}^{n-1} \beta_{kk}$ верно

$$B = \begin{pmatrix} w & \beta_{n,n+1} \\ \frac{\delta}{\alpha}\beta_{n,n+1} & w \end{pmatrix},$$

где $\beta_{n,n+1} = 0$, если $\delta \neq -1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi(e_i) = \sum_{j=1}^{n+1} \beta_{ij}e_j$, $\beta_{ij} \in F$. Заметим, что

$$\alpha\varphi(e_{n+1}) = \delta \sum_{k=1}^n [e_1, \dots, \varphi(e_k), \dots, e_n] = \alpha\delta \sum_{k=1}^n \beta_{kk}e_{n+1} + \delta\beta_{n,n+1}e_n,$$

откуда

$$\varphi(e_{n+1}) = \delta \sum_{k=1}^n \beta_{kk}e_{n+1} + \frac{\delta}{\alpha}\beta_{n,n+1}e_n.$$

Легко видеть, что

$$\varphi(e_n) = \varphi[e_1, \dots, e_{n-1}, e_{n+1}] = \delta \sum_{k=1}^{n-1} \beta_{kk}e_n + \delta^2 \sum_{k=1}^n \beta_{kk}e_n + \delta^2\beta_{n,n+1}e_{n+1},$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} \beta_{nn} &= \frac{\delta}{1-\delta} \sum_{k=1}^{n-1} \beta_{kk}, \\ \beta_{n+1,n+1} &= \delta \sum_{k=1}^n \beta_{kk} = \delta \left(\sum_{k=1}^{n-1} \beta_{kk} + \frac{\delta}{1-\delta} \sum_{k=1}^{n-1} \beta_{kk} \right) = \frac{\delta}{1-\delta} \sum_{k=1}^{n-1} \beta_{kk}. \end{aligned}$$

Также мы видим, что $\beta_{n,n+1} = \delta^2\beta_{n,n+1}$, т. е. $\beta_{n,n+1} \neq 0$ только при $\delta = -1$.

Положим $w = \frac{\delta}{1-\delta} \sum_{k=1}^{n-1} \beta_{kk}$. Легко видеть, что отображение φ , определенное формулами

$$\begin{aligned} \varphi(e_i) &= \sum_{j=1}^{n+1} \beta_{ij} e_j, \quad i < n, \quad \varphi(e_n) = w e_n + \beta_{n,n+1} e_{n+1}, \\ \varphi(e_{n+1}) &= \frac{\delta}{\alpha} \beta_{n,n+1} e_n + w e_{n+1}, \end{aligned}$$

где $\beta_{n,n+1} = 0$, если $\delta \neq -1$, является δ -дифференцированием. Отметим, что если $|\{\varphi\}| = 1$, то все β_{ii} равны между собой и $\delta = \frac{1}{n}$. В данном случае легко видеть, что $\varphi \in \Gamma(A)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть A – алгебра типа (C_2) и φ – нетривиальное δ -дифференцирование алгебры A . Тогда $[\varphi] = \begin{pmatrix} A & C \\ G & B \end{pmatrix}$, где $A \in M_{n-1}$, $B \in M_2$, $C \in M_{n-1,2}$, $G = \mathbf{0} \in M_{2,n-1}$, $|\{\varphi\}| \geq 2$ и

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\delta \operatorname{tr}(A)}{1-\delta} - \frac{\beta\delta}{1+\delta} \gamma & \gamma \\ \delta\gamma & \frac{\delta \operatorname{tr}(A)}{1-\delta} + \frac{\beta\delta}{1+\delta} \gamma \end{pmatrix},$$

где $\gamma \neq 0$, если $\delta \neq \frac{-\beta^2 - 2 \pm \sqrt{\beta^4 + 4\beta^2}}{2}$ либо $\delta = -1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi(e_i) = \sum_{j=1}^{n+1} \beta_{ij} e_j$, $\beta_{ij} \in F$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \varphi(e_{n+1}) &= \varphi[e_1, \dots, e_n] = \delta \left(\sum_{i=1}^n \beta_{ii} e_{n+1} + \beta_{n,n+1} (e_n + \beta e_{n+1}) \right) \\ &= \beta_{n+1,n} e_n + \beta_{n+1,n+1} e_{n+1}. \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} \varphi(e_n) + \beta \beta_{n+1,n} e_n + \beta \beta_{n+1,n+1} e_{n+1} &= \varphi(e_n + \beta e_{n+1}) = \varphi[e_1, \dots, \hat{e}_n, e_{n+1}] \\ &= \delta \left(\sum_{i=1}^{n-1} \beta_{ii} (e_n + \beta e_{n+1}) + \beta_{n+1,n} e_{n+1} + \beta_{n+1,n+1} (e_n + \beta e_{n+1}) \right). \end{aligned}$$

Отсюда, введя новое обозначение $\theta = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_{ii}$, находим

$$\beta_{nn} = \delta\theta + \delta\beta_{n+1,n+1} - \beta\beta_{n+1,n}, \quad (4)$$

$$\beta_{n,n+1} = \delta\theta\beta + \delta\beta_{n+1,n} + \delta\beta\beta_{n+1,n+1} - \beta\beta_{n+1,n+1}, \quad (5)$$

$$\beta_{n+1,n} = \delta\beta_{n,n+1}, \quad (6)$$

$$\beta_{n+1,n+1} = \delta\theta + \delta\beta_{nn} + \delta\beta\beta_{n,n+1}. \quad (7)$$

Складывая и вычитая (4) и (7), мы получаем

$$(1-\delta)(\beta_{nn} + \beta_{n+1,n+1}) = 2\delta\theta, \quad (8)$$

$$(1+\delta)(\beta_{nn} - \beta_{n+1,n+1}) = -2\delta\beta\beta_{n,n+1}. \quad (9)$$

Из (8) и (9) легко следует, что при $\delta \neq -1$ верно

$$\beta_{nn} = \frac{\delta\theta}{1-\delta} - \frac{\beta\delta}{1+\delta}\beta_{n,n+1}, \quad (10)$$

$$\beta_{n+1,n+1} = \frac{\delta\theta}{1-\delta} + \frac{\beta\delta}{1+\delta}\beta_{n,n+1}, \quad (11)$$

а при $\delta = -1$ имеем $\beta_{n+1,n} = \beta_{n,n+1} = 0$ и $\beta_{nn} = \beta_{n+1,n+1} = -\frac{\theta}{2}$.

Выражения для $\beta_{n+1,n+1}$ и $\beta_{n+1,n}$ из равенств (11) и (6) подставим в (5) и в результате получим

$$(1 - \delta^2)\beta_{n,n+1} = \frac{\beta^2\delta(\delta - 1)}{1 + \delta}\beta_{n,n+1},$$

т.е. $\beta_{n,n+1} \neq 0$ только при $\delta = \frac{-\beta^2 - 2 \pm \sqrt{\beta^4 + 4\beta^2}}{2}$. Таким образом, мы получили, что отображение φ имеет вид, описанный в формулировке теоремы. Ясно, что отображение, заданное таким образом, будет являться δ -дифференцированием. Отметим, что если $|\{\varphi\}| = 1$, то все β_{ii} равны между собой и $\delta = \frac{1}{n}$, т.е. $\varphi \in \Gamma(A)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть A – алгебра типа (D_r) и φ – нетривиальное δ -дифференцирование алгебры A . Тогда $[\varphi] = \begin{pmatrix} A & C \\ G & B \end{pmatrix}$, где $A \in M_r$, $B \in M_{n+1-r}$, $C \in M_{r,n+1-r}$, $G = \mathbf{0} \in M_{n+1-r,r}$, кроме того:

- 1) если $\delta = -1$, то $A = (a_{ij})$, где $a_{ij} = (-1)^{i-j}a_{ji}$, $i \neq j$, и $\text{tr}(A) = -\text{tr}(B)$;
- 2) если $\delta = \frac{1}{r-1}$, то $\text{tr}(B) = 0$ и $A = \beta E$, $\beta \in F$;
- 3) если $\delta \neq \frac{1}{r-1}, -1$, то $A = \frac{\delta}{1+\delta-r\delta} \text{tr}(B)E$;
- 4) одновременно не выполняются $C = \mathbf{0}$ и $|\{\varphi\}| = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi(e_i) = \sum_{j=1}^{n+1} \beta_{ij}e_j$, $\beta_{ij} \in F$. Заметим, что для $i \leq r$ верно

$$\begin{aligned} \varphi(e_i) &= \varphi[e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1}] = \delta \sum_{j \neq i} [e_1, \dots, \varphi(e_j), \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1}] \\ &= \delta \sum_{j \neq i} \beta_{jj}e_i + \delta \sum_{j \leq r, j \neq i} (-1)^{i-j+1} \beta_{ji}e_j. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при $j, i \leq r$ верно

$$\beta_{ii} = \delta \sum_{k \neq i} \beta_{kk}, \quad \beta_{ij} = (-1)^{i-j+1} \delta \beta_{ji} = \delta^2 \beta_{ij},$$

т.е. при $i, j \leq r$, $i \neq j$, имеем либо $\beta_{ij} = (-1)^{i-j} \beta_{ji}$ и $\delta = -1$, либо $\beta_{ij} = 0$ и $\delta \neq -1$. Также получим, что при $i \leq r$ верно

$$(1 + \delta)\beta_{ii} = \delta \sum_{j=1}^{n+1} \beta_{jj},$$

т.е. либо $\beta_{ii} = \beta$ при $\delta \neq -1$, либо $\sum_{j=1}^{n+1} \beta_{jj} = 0$ при $\delta = -1$. Отсюда видим, что выполнено утверждение 1).

Если $\delta \neq -1$ и $i \leq r$, то

$$\beta_{ii} = \frac{\delta}{1+\delta} \operatorname{tr}[\varphi] = \frac{r\delta}{1+\delta} \beta_{ii} + \frac{\delta}{1+\delta} \operatorname{tr}(B),$$

т. е. либо $\beta_{ii} = \frac{\delta}{1+\delta-r\delta} \operatorname{tr}(B)$ и $\delta \neq \frac{1}{r-1}$, либо $\operatorname{tr}(B) = 0$ и $\delta = \frac{1}{r-1}$.

Если $i > r$, то стандартными операциями можем получить

$$0 = \varphi[e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1}] = \delta \sum_{j \leq r} \beta_{ji} e_j,$$

т. е. $\beta_{ji} = 0$, если $i > r$ и $j \leq r$, следовательно, имеем $G = \mathbf{0}$.

Легко видеть, что отображение φ , определенное, как в условии леммы, является δ -дифференцированием.

Отметим, что при $C \neq \mathbf{0}$ отображение φ не будет являться элементом центроида алгебры. Действительно, если β_{ij} – ненулевая компонента матрицы C , то

$$\varphi(e_i) \neq [e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, \varphi(e_{n+1})].$$

Отсюда следует, что выполняется утверждение 4). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 6. *Каждая непростая $(n+1)$ -мерная n -арная алгебра Филиппова над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль имеет нетривиальное δ -дифференцирование при произвольном $\delta \neq 0, 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно классификации $(n+1)$ -мерных n -арных алгебр Филиппова [20] все такие алгебры, не являющиеся простыми, исчерпываются следующими типами алгебр: (A_1) , (B_1) , (B_2) , (C_1) , (C_2) , (D_r) , $r \neq n+1$. Таким образом, доказательство теоремы следует из приведенной классификации алгебр и лемм 1–5. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 7. *Каждая простая конечномерная алгебра Филиппова над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль имеет нетривиальные антидифференцирования и не имеет нетривиальных δ -дифференцирований, отличных от антидифференцирований.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [21] каждая простая конечномерная n -арная алгебра Филиппова над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль изоморфна простой n -арной алгебре Филиппова типа (D_{n+1}) , впервые описанной В. Т. Филипповым в [20]. Таким образом, утверждение теоремы следует из леммы 5. Теорема доказана.

Отметим, что n -арные алгебры Филиппова типа (D_{n+1}) являются обобщением (на случай n -арной операции умножения) известной простой алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ и при $n = 2$ совпадают с ней. В свое время Н. С. Хопкинс исследовала антидифференцирования простых конечномерных алгебр Ли в работе [1], где ею были построены примеры нетривиальных антидифференцирований для алгебры $\mathfrak{sl}_2$. Полученные результаты согласуются с результатами из [1] и [3], [4] относительно антидифференцирований и δ -дифференцирований простой алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$. Заметим, что дифференцирования простых конечномерных алгебр Филиппова над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль были описаны в [20].

§ 3. δ -дифференцирования тернарной алгебры Мальцева M_8

Класс n -арных алгебр Мальцева был определен в [22] как некоторый естественный класс n -арных алгебр, содержащий класс n -арных алгебр векторного произведения. К настоящему времени единственным известным примером простой n -арной алгебры Мальцева, не являющейся алгеброй Филиппова, служит простая тернарная алгебра Мальцева M_8 , возникающая на 8-мерной композиционной алгебре. В свое время дифференцирования тернарной алгебры M_8 были описаны в работе [23], а в работе [24] было построено ее корневое разложение и введена структура $\mathbb{Z}_3$ -градуировки.

n -арным якобианом мы называем следующую функцию, определенную на n -арной алгебре:

$$J(x_1, \dots, x_n; y_2, \dots, y_n) = [x_1, \dots, x_n], y_2, \dots, y_n] - \sum_{i=1}^n [x_1, \dots, [x_i, y_2, \dots, y_n], \dots, x_n].$$

Из определения следует, что если A – n -арная алгебра Филиппова, то

$$J(x_1, \dots, x_n; y_2, \dots, y_n) = 0$$

для всех $x_1, \dots, x_n, y_2, \dots, y_n \in A$.

n -арной алгеброй Мальцева ($n \geq 3$) мы называем алгебру L с одной антикоммутативной n -арной операцией $[x_1, \dots, x_n]$, удовлетворяющей тождеству

$$-J(zR_x, x_2, \dots, x_n; y_2, \dots, y_n) = J(z, x_2, \dots, x_n; y_2, \dots, y_n)R_x,$$

где $R_x = R_{x_2, \dots, x_n}$ – оператор правого умножения: $zR_x = [z, x_2, \dots, x_n]$.

Далее полагаем, что F – поле характеристики, отличной от 2, 3, и обозначаем через A композиционную алгебру над F с инволюцией $a \rightarrow \bar{a}$ и единицей 1 (см., например, [25]). Симметрическую билинейную форму $(x, y) = \frac{1}{2}(x\bar{y} + y\bar{x})$, определенную на A , предполагаем невырожденной и через $n(a)$ обозначаем норму элемента $a \in A$. Определим на A тернарную операцию умножения $[\cdot, \cdot, \cdot]$ правилом

$$[x, y, z] = x\bar{y}z - (y, z)x + (x, z)y - (x, y)z.$$

Тогда A становится тернарной алгеброй Мальцева [22], которая обозначается через $M(A)$, а если $\dim(A) = 8$, то – через M_8 .

Напомним, что дифференцированием тернарной алгебры называются линейные отображения D , удовлетворяющие равенству (2) при $n = 3$. В работе [23] были описаны дифференцирования тернарной алгебры Мальцева M_8 и было показано, что каждое дифференцирование является внутренним, т. е.

$$\text{Der}(M_8) = \langle [R_{x,y}, R_{x,z}] + R_{x,[y,x,z]} \mid x, y, z \in M_8 \rangle.$$

Под δ -дифференцированием тернарной алгебры мы подразумеваем линейные отображения φ , удовлетворяющие равенству (3) при $n = 3$. Ясно, что

в случае тернарной алгебры L каждый элемент центроида $\Gamma(L)$ будет являться $\frac{1}{3}$ -дифференцированием. Ненулевое δ -дифференцирование φ будем считать нетривиальным, если $\delta \neq 0, 1$ и $\varphi \notin \Gamma(L)$.

Пусть U – подпространство в V и $x \in V$. Через $x|_U$ обозначим проекцию вектора x на подпространство U .

ТЕОРЕМА 8. *Тернарная алгебра M_8 не имеет нетривиальных δ -дифференцирований.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $1, a, b, c$ – ортонормированные векторы из A . Выберем следующий базис в A :

$$\{e_1 = 1, e_2 = a, e_3 = b, e_4 = ab, e_5 = c, e_6 = ac, e_7 = bc, e_8 = abc\}.$$

Оператор правого умножения $R_{x,y}$ называется *регулярным*, если в фиттинговом разложении $M = M_0 \oplus M_1$ относительно $R_{x,y}$ размерность M_0 минимальна [24]. Согласно [24, теорема 1] мы имеем корневое разложение алгебры M_8 : $M = M_0 \oplus M_\alpha \oplus M_{-\alpha}$, где $\alpha \in F$ такое, что $vR_{x,y} = \pm\alpha v$ для любого $v \in M_{\pm\alpha}$. Из [24, лемма 3] известно, что на тернарной алгебре M_8 существует нетривиальная градуировка. Если мы обозначим $M_{\pm\alpha}$ через $M_{\pm 1}$, то

$$[M_i, M_j, M_k] \subseteq M_{i+j+k \pmod{3}}.$$

Пусть $v \in M_\alpha$; тогда

$$\alpha\varphi(v) = \varphi(vR_{x,y}) = \delta([\varphi(v), x, y] + [v, \varphi(x), y] + [v, x, \varphi(y)]). \quad (12)$$

Будем считать, что

$$\varphi(v)|_{M_\alpha} = w_\alpha, \quad \varphi(x)|_{M_0} = \alpha_x x + \beta_y y, \quad \varphi(y)|_{M_0} = \alpha_y x + \beta_y y.$$

Учитывая данные соотношения в равенстве (12), мы получаем $w_\alpha = \frac{\alpha_x + \beta_y}{1 - \delta} \delta v$. Заметим, что согласно [24, лемма 1] операторы $R_{e_i, e_i + e_j}$ и $R_{e_j, e_i + e_j}$ при $i \neq j$ являются регулярными. Следовательно, мы можем заключить, что

$$\frac{\alpha_{e_i} + \beta_{e_i + e_j}}{1 - \delta} \delta v = \frac{\alpha_{e_j} + \beta_{e_i + e_j}}{1 - \delta} \delta v,$$

откуда $\alpha_{e_i} = \alpha_{e_j}$. Также отметим, что верно $\frac{2\alpha_{e_i}}{1 - \delta} \delta = \alpha_{e_i}$. Последнее нам дает либо $\delta = \frac{1}{3}$, либо $\alpha_{e_i} = 0$.

Для каждого $i \in \{2, \dots, 8\}$ возможно выбрать j, k, l, m, s, t , зависящие от i и такие, что

$$e_i = e_j e_k = e_l e_m = e_s e_t, \quad (13)$$

$$e_j = e_s e_m = e_k e_i = e_t e_l, \quad (14)$$

$$e_k = e_i e_j = e_m e_t = e_s e_l, \quad (15)$$

$$e_l = e_m e_i = e_k e_s = e_j e_t, \quad (16)$$

$$e_m = e_i e_l = e_t e_k = e_j e_s, \quad (17)$$

$$e_s = e_l e_k = e_t e_i = e_m e_j, \quad (18)$$

$$e_t = e_i e_s = e_k e_m = e_l e_j. \quad (19)$$

Мы можем считать, что $\varphi(e_q) = \sum_{p=1}^8 a_{qp} e_p$. Нам уже известно, что $a_{qq} = a_{pp}$, а при $\delta \neq \frac{1}{3}$ выполняется $a_{pp} = 0$. Согласно тому, что

$$\varphi(e_s) = \varphi([e_i, e_j, e_l]) = \delta([\varphi(e_i), e_j, e_l] + [e_i, \varphi(e_j), e_l] + [e_i, e_j, \varphi(e_l)]),$$

выполнив соответствующие операции умножений, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^8 a_{sp} e_p &= \delta(-a_{it} e_1 + a_{ik} e_m - a_{im} e_k + a_{i1} e_t - a_{is} e_i - a_{jm} e_1 + a_{j1} e_m \\ &\quad + a_{jt} e_k - a_{jk} e_t - a_{js} e_j + a_{lk} e_1 + a_{lt} e_m - a_{l1} e_k - a_{lm} e_t - a_{ls} e_l). \end{aligned}$$

(Например, $[e_i, e_l, e_k] = (e_i \bar{e_l}) e_k = (e_l e_i) e_k = -e_m e_k = e_k e_m = e_t$.) Следовательно, $a_{sp} = -\delta a_{ps}$, где $p \in \{i, j, l\}$. Произвольность индекса i и соотношения (13)–(19) позволяют нам сделать вывод, что $a_{pq} = -\delta a_{qp}$ для всех $p, q \in \{1, \dots, 8\}$. Используя полученное соотношение, мы можем заключить, что $a_{pq} = -\delta a_{qp} = \delta^2 a_{pq}$, откуда имеем $\delta = -1$ и $a_{pq} = a_{qp}$ либо тривиальность φ . Покажем, что алгебра M_8 не имеет нетривиальных антидифференцирований. В дальнейшем мы пользуемся приведенной схемой рассуждения и учитываем то, что $\delta = -1$.

Пусть $-\varphi(e_t) = \varphi([e_i, e_k, e_l])$. Тогда

$$\begin{aligned} -\sum_{p=1}^8 a_{tp} e_p &= -(a_{i1} e_s - a_{ij} e_m + a_{im} e_j - a_{is} e_1 + a_{it} e_i + a_{k1} e_m + a_{kj} e_s \\ &\quad - a_{km} e_1 - a_{ks} e_j + a_{kt} e_k + a_{l1} e_j - a_{lj} e_1 - a_{lm} e_s + a_{ls} e_m + a_{lt} e_l), \end{aligned}$$

откуда получаем

$$a_{ts} = a_{i1} + a_{jk} - a_{ml}. \quad (20)$$

Пусть $\varphi(e_m) = \varphi([e_i, e_j, e_t])$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^8 a_{mp} e_p &= -(a_{i1} e_l - a_{ik} e_s - a_{il} e_1 + a_{im} e_i - a_{is} e_k + a_{j1} e_s - a_{jk} e_l \\ &\quad + a_{jl} e_k + a_{jm} e_j - a_{js} e_1 + a_{t1} e_k - a_{tk} e_1 - a_{tl} e_s + a_{tm} e_t + a_{ts} e_l), \end{aligned}$$

откуда получаем

$$a_{ml} = a_{i1} - a_{jk} + a_{ts}. \quad (21)$$

Пусть $-\varphi(e_t) = \varphi([e_i, e_j, e_m])$. Тогда

$$\begin{aligned} -\sum_{p=1}^8 a_{tp} e_p &= -(a_{i1} e_s - a_{ik} e_l + a_{il} e_k - a_{is} e_1 + a_{it} e_i - a_{j1} e_l - a_{jk} e_s \\ &\quad + a_{jl} e_1 + a_{js} e_k + a_{jt} e_j - a_{m1} e_k + a_{mk} e_1 + a_{ml} e_s - a_{ms} e_l + a_{mt} e_m), \end{aligned}$$

откуда получаем

$$a_{ts} = a_{i1} - a_{jk} + a_{ml}. \quad (22)$$

Пусть $-\varphi(e_s) = \varphi([e_i, e_k, e_m])$. Тогда

$$-\sum_{p=1}^8 a_{sp} e_p = -(-a_{i1} e_t + a_{ij} e_l + a_{is} e_i + a_{it} e_1 - a_{il} e_j - a_{k1} e_l - a_{kj} e_t + a_{ks} e_k + a_{kt} e_j + a_{kl} e_1 + a_{m1} e_j - a_{mj} e_1 + a_{ms} e_m + a_{mt} e_l - a_{ml} e_t),$$

откуда получаем

$$a_{st} = -a_{i1} - a_{jk} - a_{ml}. \quad (23)$$

Заметим, что из равенств (20) и (21) вытекает

$$a_{kj} = a_{st}, \quad a_{ml} = a_{i1}, \quad (24)$$

из формул (20) и (22) вытекает

$$a_{i1} = a_{st}, \quad a_{ml} = a_{kj} \quad (25)$$

и из соотношений (23) и (24) вытекает

$$a_{st} = -a_{ml}. \quad (26)$$

Анализируя равенства (24)–(26), получаем

$$a_{i1} = a_{st} = a_{ml} = a_{kj} = 0.$$

Исходя из произвольности индекса i и соотношений (13)–(19) мы получаем тривиальность отображения φ . Теорема доказана.

Из теоремы 8 вытекает существование простой n -арной алгебры Мальцева, не являющейся n -арной алгеброй Филиппова, над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль, которая, в отличие от n -арных алгебр Филиппова над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль, не имеет нетривиальных δ -дифференцирований. Отметим, что данные результаты согласуются с результатами В. Т. Филиппова [5] об отсутствии нетривиальных δ -дифференцирований на первичных бинарных нелиевых алгебрах Мальцева.

Следует заметить, что частичное обобщение результатов настоящей статьи было анонсировано в [26], а в работе [27] приведен подробный обзор основных результатов по исследованию δ -дифференциальных алгебр и супералгебр.

В заключение автор выражает благодарность профессору А. П. Пожидаеву за внимание к работе и конструктивные замечания.

Список литературы

1. N. C. Hopkins, “Generalized derivations of nonassociative algebras”, *Nova J. Math. Game Theory Algebra*, **5:3** (1996), 215–224.
2. В. Т. Филиппов, “Об алгебрах Ли, удовлетворяющих тождеству 5-й степени”, *Алгебра и логика*, **34:6** (1995), 681–705; англ. пер.: V. T. Filippov, “Lie algebras satisfying identities of degree 5”, *Algebra and Logic*, **34:6** (1995), 379–394.
3. В. Т. Филиппов, “О δ -дифференцированиях алгебр Ли”, *Сиб. матем. журн.*, **39:6** (1998), 1409–1422; англ. пер.: V. T. Filippov, “On δ -derivations of Lie algebras”, *Siberian Math. J.*, **39:6** (1998), 1218–1230.

4. В. Т. Филиппов, “ δ -Дифференцирования первичных алгебр Ли”, *Сиб. матем. журн.*, **40**:1 (1999), 201–213; англ. пер.: V. T. Filippov, “ δ -derivations of prime Lie algebras”, *Siberian Math. J.*, **40**:1 (1999), 174–184.
5. В. Т. Филиппов, “О δ -дифференцированиях первичных альтернативных и мальцевских алгебр”, *Алгебра и логика*, **39**:5 (2000), 618–625; англ. пер.: V. T. Filippov, “ δ -derivations of prime alternative and Mal'tsev algebras”, *Algebra and Logic*, **39**:5 (2000), 354–358.
6. И. Б. Кайгородов, “О δ -дифференцированиях простых конечномерных йордановых супералгебр”, *Алгебра и логика*, **46**:5 (2007), 585–605; англ. пер.: N. B. Kaygorodov, “ δ -Derivations of simple finite-dimensional Jordan superalgebras”, *Algebra and Logic*, **46**:5 (2007), 318–329.
7. И. Б. Кайгородов, “О δ -дифференцированиях классических супералгебр Ли”, *Сиб. матем. журн.*, **50**:3 (2009), 547–565; англ. пер.: N. B. Kaygorodov, “ δ -derivations of classical Lie superalgebras”, *Siberian Math. J.*, **50**:3 (2009), 434–449.
8. И. Б. Кайгородов, “О δ -супердифференцированиях простых конечномерных йордановых и лиевых супералгебр”, *Алгебра и логика*, **49**:2 (2010), 195–215; англ. пер.: N. B. Kaygorodov, “ δ -Superderivations of simple finite-dimensional Jordan and Lie superalgebras”, *Algebra and Logic*, **49**:2 (2010), 130–144.
9. P. Zusmanovich, “On δ -derivations of Lie algebras and superalgebras”, *J. Algebra*, **324**:12 (2010), 3470–3486.
10. В. Н. Желябин, И. Б. Кайгородов, “О δ -супердифференцированиях простых супералгебр йордановых скобок”, *Алгебра и анализ*, **23**:4 (2011), 40–58; англ. пер.: V. N. Zhelyabin, N. B. Kaygorodov, “On δ -superderivations of simple superalgebras of Jordan brackets”, *St. Petersburg Math. J.*, **23**:4 (2012), 665–677.
11. И. Б. Кайгородов, “О δ -супердифференцированиях полупростых конечномерных йордановых супералгебр”, *Матем. заметки*, **91**:2 (2012), 200–213; англ. пер.: N. B. Kaygorodov, “ δ -Superderivations of semisimple finite-dimensional Jordan superalgebras”, *Math. Notes*, **91**:2 (2012), 187–197.
12. Y. Nambu, “Generalized Hamiltonian dynamics”, *Phys. Rev. D* (3), **7**:8 (1973), 2405–2412.
13. N. G. Pletnev, “Filippov–Nambu n -algebras relevant to physics”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **6** (2009), 272–311.
14. J. A. de Azcárraga, J. M. Izquierdo, “ n -ary algebras: a review with applications”, *J. Phys. A*, **43**:29 (2010), ID 293001.
15. J. Bagger, N. Lambert, “Three-algebras and $N = 6$ Chern–Simons gauge theories”, *Phys. Rev. D*, **79**:2 (2009), 025002.
16. J. Bagger, G. Bruhn, *Three-algebras in $N = 5, 6$ superconformal Chern–Simons theories: representations and relations*, arXiv: 1006.0040.
17. D. Gaiotto, E. Witten, “Janus configurations, Chern–Simons couplings, and the θ -angle in $N = 4$ super Yang–Mills theory”, *J. High Energy Phys.*, 2010, № 6, 97.
18. N. Cantarini, V. G. Кас, “Classification of linearly compact simple algebraic $N = 6$ 3-algebras”, *Transform. Groups*, **16**:3 (2011), 649–671.
19. P. de Medeiros, J. Figueroa-O’Farrill, E. Méndez-Escobar, P. Ritter, “On the Lie-algebraic origin of metric 3-algebras”, *Comm. Math. Phys.*, **290**:3 (2009), 871–902.
20. В. Т. Филиппов, “ n -лиевы алгебры”, *Сиб. матем. журн.*, **26**:6 (1985), 126–140; англ. пер.: V. T. Filippov, “ n -Lie algebras”, *Siberian Math. J.*, **26**:6 (1985), 879–891.
21. W. Ling, *On the structure of n -Lie algebras*, Thesis, Siegen University-GHS-Siegen, 1993.
22. А. П. Пожидаев, “ n -арные алгебры Мальцева”, *Алгебра и логика*, **40**:3 (2001), 309–329; англ. пер.: A. P. Pozhidaev, “ n -ary Mal'tsev algebras”, *Algebra and Logic*, **40**:3 (2001), 170–182.

23. A. P. Pozhidaev, P. Saraiva, “On derivations of the ternary Malcev algebra M_8 ”, *Comm. Algebra*, **34**:10 (2006), 3593–3608.
24. А. П. Пожидаев, “Корневое разложение тернарной алгебры Мальцева M_8 ”, *Сиб. матем. журн.*, **46**:4 (2005), 901–906; англ. пер.: A. P. Pozhidaev, “Root decomposition of the ternary Malcev algebra M_8 ”, *Siberian Math. J.*, **46**:4 (2005), 717–721.
25. К. А. Жевлаков, А. М. Слинько, И. П. Шестаков, А. И. Ширшов, *Кольца, близкие к ассоциативным*, Наука, М., 1978.
26. И. Б. Кайгородов, “ $(n + 1)$ -арные дифференцирования простых n -арных алгебр”, *Алгебра и логика*, **50**:5 (2011), 689–691; англ. пер.: I. B. Kaygorodov, “ $(n + 1)$ -Ary derivations of simple n -ary algebras”, *Algebra and Logic*, **50**:5 (2011), 470–471.
27. I. Kaygorodov, “ δ -derivations of algebras and superalgebras”, *Proceedings of the International Conference on Algebra 2010, Advances in Algebraic Structures* (Gadjah Mada University, Indonesia, 2010), World Scientific, Hackensack, NJ, 2012, 374–380.

И. Б. КАЙГОРОДОВ (I. B. KAYGORODOV)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск;
Новосибирский государственный университет;
Instituto de Matemática e Estatística,
Universidade de São Paulo, Brazil
E-mail: kib@math.nsc.ru

Поступило в редакцию
23.08.2011