Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Чельцов, Два локальных неравенства, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014, том 78, выпуск 2, 167–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7916>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 12:27:28

УДК 512.76

И. А. Чельцов

Два локальных неравенства

Доказаны два новых локальных неравенства для дивизоров на неособых поверхностях, а также рассмотрены применения полученных неравенств.

Библиография: 34 наименования.

Ключевые слова: α -инвариант Тиана, поверхность дель Пеццо, группа Кремона.

DOI: 10.4213/im7916

Памяти Василия Алексеевича Исковских (1939–2009)

§ 1. Введение

В статье все многообразия считаются проективными, нормальными и определенными над $\mathbb{C}$.

Во многих алгебро-геометрических вопросах часто возникает необходимость показать логканоничность логпары, состоящей из, возможно, особого многообразия и эффективного дивизора на нем, при определенных глобальных численных условиях, налагаемых на эффективный дивизор, который принято называть *границей* данной логпары. В отличие от кратностей пересечений эффективных дивизоров логканоничность пар плохо контролируется глобальными численными условиями. Поэтому часто необходимы локальные неравенства, связывающие локальные кратности пересечений компонент границы и логканоничность логпары. Проиллюстрируем это на одном примере.

Пусть S – поверхность, O – гладкая точка поверхности S и Δ_1, Δ_2 – кривые на поверхности S такие, что $O \in \Delta_1 \cap \Delta_2$, кривые Δ_1 и Δ_2 неприводимы и приведены, а кроме того, неособы в точке O , кривая Δ_1 пересекает кривую Δ_2 трансверсально в точке O . Пусть a_1 и a_2 – некоторые рациональные числа.

ТЕОРЕМА 1.1 [1, следствие 5.57]. Пусть D – такой эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на поверхности S , что особенности логпары $(S, D + \Delta_1)$ не являются логканоническими в точке O . Предположим, что $\Delta_1 \not\subseteq \text{Supp}(D)$. Тогда $\text{mult}_O(D \cdot \Delta_1) > 1$.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Пусть D – такой эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на поверхности S , что особенности логпары $(S, D + a_1\Delta_1 + a_2\Delta_2)$ не являются логканоническими в точке O . Предположим, что $\Delta_1 \not\subseteq \text{Supp}(D) \not\supseteq \Delta_2$, а также предположим, что выполнены неравенства $a_1 \geq 0$ и $a_2 \geq 0$. Тогда $\text{mult}_O(D \cdot \Delta_1) > 1 - a_2$ или $\text{mult}_O(D \cdot \Delta_2) > 1 - a_1$.

Следующий аналог следствия 1.2 получен в работе [2].

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть D – такой эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на поверхности S , что особенности логпары $(S, D + a_1\Delta_1 + a_2\Delta_2)$ не являются логканоническими в точке O . Предположим, что $\Delta_1 \not\subseteq \text{Supp}(D) \not\supseteq \Delta_2$, а также предположим, что выполнены неравенства $a_1 \geq 0$ и $a_2 \geq 0$. Тогда $\text{mult}_O(D \cdot \Delta_1) > 2a_1 - a_2$ или $\text{mult}_O(D \cdot \Delta_2) > \frac{3}{2}a_2 - a_1$, если выполнено неравенство $a_1 + \frac{a_2}{2} \leq 1$.

Область применений теоремы 1.3 очень ограничена. Первая цель настоящей работы – доказать следующее обобщение теоремы 1.3 и показать, как его применять.

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть D – такой эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на поверхности S , что особенности логпары $(S, D + a_1\Delta_1 + a_2\Delta_2)$ не являются логканоническими в точке O . Предположим, что $\Delta_1 \not\subseteq \text{Supp}(D) \not\supseteq \Delta_2$, а также предположим, что выполнены неравенства $a_1 \geq 0$ и $a_2 \geq 0$. Тогда $\text{mult}_O(D \cdot \Delta_1) > M + Aa_1 - a_2$ или $\text{mult}_O(D \cdot \Delta_2) > N + Ba_2 - a_1$, если выполнено неравенство $\alpha a_1 + \beta a_2 \leq 1$, где $A, B, M, N, \alpha, \beta$ – некоторые неотрицательные рациональные числа такие, что $A(B - 1) \geq 1 \geq \max(M, N)$, $\alpha(A + M - 1) \geq A^2(B + N - 1)\beta$, $\alpha(1 - M) + A\beta \geq A$, и либо $2M + AN \leq 2$, либо $\alpha(B + 1 - MB - N) + \beta(A + 1 - AN - M) \geq AB - 1$.

В бирациональной геометрии часто возникает необходимость рассматривать логпары, имеющие в качестве компонент границы подвижные линейные системы. Несмотря на некоторую абстрактность таких границ использовать их так же просто, как обычные дивизоры. Более того, для подвижных компонент границы можно оценить кратности пересечения общих элементов подвижной линейной системы в терминах логканоничности данной логпары.

ТЕОРЕМА 1.5 [3, теорема 3.1], [4, лемма 3.3]. Пусть $\mathcal{M}$ – такая линейная система на поверхности S , которая не содержит неподвижных компонент, и пусть ε – положительное рациональное число. Предположим, что особенности логпары $(S, \varepsilon\mathcal{M} + a_1\Delta_1 + a_2\Delta_2)$ не являются логтерминальными по Кавамате в точке O . Пусть M_1 и M_2 – достаточно общие кривые в линейной системе $\mathcal{M}$. Тогда

$$\text{mult}_O(M_1 \cdot M_2) \geq \begin{cases} \frac{4(1 - a_1)(1 - a_2)}{\varepsilon^2}, & \text{если } a_1 \geq 0 \text{ или } a_2 \geq 0, \\ \frac{4(1 - a_1 - a_2)}{\varepsilon^2}, & \text{если } a_1 \leq 0 \text{ и } a_2 \leq 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

а если неравенство (1.1) является равенством, то логпара $(S, \varepsilon\mathcal{M} + a_1\Delta_1 + a_2\Delta_2)$ имеет логканонические особенности, выполнено $\text{mult}_O(\mathcal{M}) = \frac{2}{\varepsilon}(a_1 - 1)$ и $a_1 = a_2 \geq 0$.

Вторая цель настоящей работы – доказать следующий аналог теоремы 1.5 и привести одно его применение.

ТЕОРЕМА 1.6. Пусть $\mathcal{M}$ – такая линейная система на поверхности S , которая не имеет неподвижных компонент, и пусть ε – положительное рациональное число. Предположим, что особенности логпары $(S, \varepsilon\mathcal{M} + a_1\Delta_1)$

не являются терминальными в точке O . Пусть M_1 и M_2 – достаточно общие кривые в линейной системе $\mathcal{M}$. Тогда

$$\text{mult}_O(M_1 \cdot M_2) \geq \begin{cases} \frac{1-2a_1}{\varepsilon^2}, & \text{если } a_1 \geq -\frac{1}{2}, \\ \frac{-4a_1}{\varepsilon^2}, & \text{если } a_1 \leq -\frac{1}{2}, \end{cases} \quad (1.2)$$

а если неравенство (1.2) является равенством, то логпара $(S, \varepsilon\mathcal{M} + a_1\Delta_1)$ имеет канонические особенности и либо $-a_1 \in \mathbb{N}$ и $\text{mult}_O(\mathcal{M}) = \frac{2}{\varepsilon}$, либо $a_1 = 0$ и $\text{mult}_O(\mathcal{M}) = \frac{1}{\varepsilon}$.

Автор признателен И. Долгачеву, В. Голышеву, Д. Косте, Ю. Прохорову и К. Шпрамову за полезные замечания и выражает свою благодарность Т. Докшитцеру за помощь в доказательстве леммы B.18 (см. приложение В в конце работы).

§ 2. Известные результаты

Пусть φ , ψ и $v_1, \dots, v_\gamma$ – некоторые ненулевые многочлены в $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ такие, что подмножество в $\mathbb{C}^n$, заданное уравнениями $v_1 = \dots = v_\gamma = 0$, имеет размерность не более чем $n - 2$, и пусть O – начало координат в $\mathbb{C}^n$. Пусть a , b и c – некоторые неотрицательные рациональные числа. Положим

$$\Omega = \frac{|\psi|^b}{|\varphi|^a(|v_1| + \dots + |v_\gamma|)^c}.$$

ВОПРОС 2.1. Когда функция Ω^2 локально интегрируема в окрестности точки O ?

Ответ на вопрос 2.1 будет дан в примере 2.8. Полагая

$$c_O(\Omega) = \sup\{\varepsilon \in \mathbb{Q} \mid \text{функция } \Omega^{2\varepsilon} \text{ локально интегрируема около точки } O \in \mathbb{C}^n\},$$

мы видим, что функция Ω^2 локально интегрируема в окрестности точки O в том и только в том случае, когда имеет место неравенство $c_O(\Omega) > 1$. Отметим, что $c_O(\Omega) \in \mathbb{Q}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$.

ПРИМЕР 2.2. Пусть $m_1, \dots, m_n$ – некоторые положительные целые числа. Тогда

$$\begin{aligned} \min\left(1, \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i}\right) &= c_0\left(\frac{1}{|\sum_{i=1}^n z_i^{m_i}|}\right) \geq c_0\left(\frac{1}{|\prod_{i=1}^n z_i^{m_i}|}\right) \\ &= \min\left(\frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2}, \dots, \frac{1}{m_n}\right). \end{aligned}$$

Пусть X – многообразие, имеющее не более чем рациональные особенности. Рассмотрим формальную линейную комбинацию $B_X = \sum_{i=1}^r a_i B_i + \sum_{i=1}^l c_i \mathcal{M}_i$, где a_i и c_i – некоторые, не обязательно положительные рациональные числа, B_i – простой дивизор Вейля на многообразии X , а $\mathcal{M}_i$ – линейная система на многообразии X , которая не имеет неподвижных компонент. Можно считать, что $B_i \neq B_j$ и $\mathcal{M}_i \neq \mathcal{M}_j$ при $i \neq j$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Пусть k – произвольно выбранное достаточно большое натуральное число. Для каждого $i \in \{1, \dots, l\}$ и каждого $j \in \{1, \dots, k\}$ пусть M_i^j – общий элемент в линейной системе $\mathcal{M}_i$. Тогда, заменяя каждую линейную систему $\mathcal{M}_i$ на дивизор

$$\frac{M_i^1 + M_i^2 + \dots + M_i^k}{k},$$

мы всегда можем рассматривать B_X как $\mathbb{Q}$ -дивизор на многообразии X .

Предположим, что дивизор $K_X + B_X$ является $\mathbb{Q}$ -дивизором Картье.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Назовем B_X *границей* логпары (X, B_X) . Будем говорить, что граница B_X *подвижна*, если $a_i = 0$ для каждого $i \in \{1, \dots, r\}$, и граница B_X *эффективна*, если $a_i \geq 0$ для каждого $i \in \{1, \dots, r\}$ и $c_j \geq 0$ для каждого $j \in \{1, \dots, l\}$.

Пусть $\pi: \bar{X} \rightarrow X$ – бирациональный морфизм такой, что многообразие $\bar{X}$ неособо. Положим

$$B_{\bar{X}} = \sum_{i=1}^r a_i \bar{B}_i + \sum_{i=1}^l c_i \bar{\mathcal{M}}_i,$$

где $\bar{B}_i$ – собственный прообраз дивизора B_i на многообразии $\bar{X}$, а $\bar{\mathcal{M}}_i$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}_i$ на многообразии $\bar{X}$. Тогда

$$K_{\bar{X}} + B_{\bar{X}} \equiv \pi^*(K_X + B_X) + \sum_{i=1}^m d_i E_i,$$

где $d_i \in \mathbb{Q}$, а E_i – исключительный дивизор бирационального морфизма π . Предположим, дополнительно, что дивизор $\sum_{i=1}^r \bar{B}_i + \sum_{i=1}^m E_i$ является дивизором с простыми нормальными пересечениями, а линейная система $\bar{\mathcal{M}}_i$ не имеет базисных точек для каждого $i \in \{1, \dots, l\}$. Положим $B^{\bar{X}} = B_{\bar{X}} - \sum_{i=1}^m d_i E_i$. Зафиксируем некоторое рациональное число ε такое, что $1 \geq \varepsilon \geq 0$. Заметим, что логпару $(\bar{X}, B^{\bar{X}})$ принято называть *логпрообразом* логпары (X, B_X) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Логпара (X, B_X) имеет ε -логканонические особенности (соответственно, ε -логтерминальные особенности), если для любых $i \in \{1, \dots, r\}$ и $j \in \{1, \dots, m\}$ выполнены неравенства $a_i \leq 1 - \varepsilon$ (соответственно, $a_i < 1 - \varepsilon$) и $d_j \geq -1 + \varepsilon$ (соответственно, $d_j > -1 + \varepsilon$).

Будем говорить, что логпара (X, B_X) имеет логканонические особенности (соответственно, логтерминальные особенности), если логпара (X, B_X) имеет 0-логканонические особенности (соответственно, 0-логтерминальные особенности).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6. Пусть P – некоторая точка многообразия X , и пусть Δ – такой эффективный дивизор на многообразии X , что $\Delta = \sum_{i=1}^r \varepsilon_i B_i \equiv B_X$, где ε_i – неотрицательное рациональное число. Предположим, что граница B_X эффективна, дивизор Δ является $\mathbb{Q}$ -дивизором Картье, логпара (X, Δ) имеет логканонические особенности в точке $P \in X$, но особенности логпары (X, B_X) не являются логканоническими в точке $P \in X$. Положим

$$\alpha = \min \left\{ \frac{a_i}{\varepsilon_i} \mid \varepsilon_i \neq 0 \right\}$$

и отметим, что число α корректно определено, так как существует $\varepsilon_i \neq 0$. Тогда $\alpha < 1$, особенности логпары

$$\left(X, \sum_{i=1}^r \frac{a_i - \alpha \varepsilon_i}{1 - \alpha} B_i + \sum_{i=1}^l c_i \mathcal{M}_i \right)$$

не являются логканоническими в точке $P \in X$, выполнена численная эквивалентность

$$\sum_{i=1}^r \frac{a_i - \alpha \varepsilon_i}{1 - \alpha} B_i + \sum_{i=1}^l c_i \mathcal{M}_i \equiv B_X \equiv \Delta$$

и существует по крайней мере одна неприводимая компонента в $\text{Supp}(\Delta)$, которая не содержится в

$$\text{Supp} \left(\sum_{i=1}^r \frac{a_i - \alpha \varepsilon_i}{1 - \alpha} B_i \right).$$

Пусть D_X – некоторая граница на многообразии X такая, что дивизор $K_X + B_X + D_X$ является $\mathbb{Q}$ -дивизором Картье. Пусть Z – некоторое замкнутое подмногообразие многообразия X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. Назовем ε -логканоническим порогом границы D_X вдоль подмногообразия Z число

$$c_Z^\varepsilon(X, B_X, D_X) = \sup \left\{ \lambda \in \mathbb{Q} \mid \begin{array}{l} \text{логпара } (X, B_X + \lambda D_X) \text{ имеет } \varepsilon\text{-логканонические} \\ \text{особенности в каждой точке подмногообразия } Z \end{array} \right\} \\ \in \mathbb{Q} \cup \{\pm\infty\}.$$

При $\varepsilon = 0$ число $c_Z^\varepsilon(X, B_X, D_X)$ играет важную роль в геометрии. Поэтому мы положим $c_Z(X, B_X, D_X) = c_Z^0(X, B_X, D_X)$ для простоты обозначений. Аналогично, мы положим $c^\varepsilon(X, B_X, D_X) = c_X^\varepsilon(X, B_X, D_X)$, а также $c(X, B_X, D_X) = c_X^0(X, B_X, D_X)$. Отметим, что равенство $c_Z^\varepsilon(X, B_X, D_X) = -\infty$ выполнено, если, например, особенности логпары (X, B_X) не являются ε -логканоническими вдоль подмногообразия Z и $D_X = 0$. Если $B_X = 0$, то мы положим $c_Z^\varepsilon(X, D_X) = c_Z^\varepsilon(X, B_X, D_X)$ для простоты обозначений. По тем же причинам мы положим $c^\varepsilon(X, D_X) = c_X^\varepsilon(X, D_X)$, $c_Z(X, D_X) = c_Z(X, B_X, D_X)$ и $c(X, D_X) = c_X(X, D_X)$.

ПРИМЕР 2.8. В работе [5] показано, что $c_O(\Omega) = c_O(\mathbb{C}^n, a(\psi = 0) - b(\varphi = 0) + c\mathcal{B})$, а следующие условия эквивалентны:

- 1) функция Ω^2 локально интегрируема в окрестности точки $O \in \mathbb{C}^n$;
- 2) логпара $(\mathbb{C}^n, a(\varphi = 0) - b(\varphi = 0) + \frac{c}{k} \sum_{i=1}^k (\sum_{j=1}^{\gamma_i} \lambda_j^i v_j = 0))$ имеет логтерминальные особенности в некоторой окрестности точки $O \in \mathbb{C}^n$, где $[\lambda_1^i : \dots : \lambda_{\gamma_i}^i]$ – достаточно общая точка в $\mathbb{P}^{\gamma_i-1}$, а k – произвольно выбранное достаточно большое натуральное число;
- 3) логпара $(\mathbb{C}^n, a(\varphi = 0) - b(\varphi = 0) + c\mathcal{B})$ имеет не более чем логтерминальные особенности в некоторой окрестности точки $O \in \mathbb{C}^n$, где $\mathcal{B}$ – линейная система, порожденная дивизорами $v_1 = 0, \dots, v_r = 0$.

Скажем, что логпара (X, B_X) имеет канонические особенности (соответственно, терминальные особенности), если логпара (X, B_X) имеет 1-логканонические особенности (соответственно, 1-логтерминальные особенности).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.9. Предположим, что граница B_X эффективна, а логпара (X, B_X) имеет канонические особенности. Тогда $a_1 = \dots = a_r = 0$.

Можно показать, что определение 2.5 не зависит от выбора бирационального морфизма π . Положим

$$\text{LCS}_\varepsilon(X, B_X) = \left(\bigcup_{a_i \geq 1-\varepsilon} B_i \right) \cup \left(\bigcup_{d_i \leq -1+\varepsilon} \pi(E_i) \right) \subsetneq X,$$

и пусть $\text{LCS}(X, B_X) = \text{LCS}_0(X, B_X)$ и $\text{CS}(X, B_X) = \text{LCS}_1(X, B_X)$. Назовем подмножества $\text{LCS}_\varepsilon(X, B_X)$, $\text{LCS}(X, B_X)$, $\text{CS}(X, B_X)$ *локусами* ε -логканонических особенностей, логканонических особенностей, канонических особенностей логпары (X, B_X) соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.10. Назовем собственное неприводимое подмногообразие $Y \subsetneq X$ *центром* ε -логканонических особенностей логпары (X, B_X) , если для некоторого выбора бирационального морфизма $\pi: \bar{X} \rightarrow X$ имеет место одно из следующих условий:

- 1) выполнено неравенство $a_i \geq 1 - \varepsilon$ и $Y = B_i$ для некоторого $i \in \{1, \dots, r\}$;
- 2) выполнено неравенство $d_i \leq -1 + \varepsilon$ и $Y = \pi(E_i)$ для некоторого $i \in \{1, \dots, m\}$.

Пусть $\text{LCS}_\varepsilon(X, B_X)$ – множество, состоящее из всех центров ε -логканонических особенностей логпары (X, B_X) . Тогда $Y \in \text{LCS}_\varepsilon(X, B_X) \implies Y \subseteq \text{LCS}_\varepsilon(X, B_X)$ и $\text{LCS}_\varepsilon(X, B_X) = \emptyset \iff \text{LCS}_\varepsilon(X, B_X) = \emptyset \iff$ логпара (X, B_X) имеет не более чем ε -логтерминальные особенности.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.11. Пусть $\mathcal{H}$ – некоторая линейная система на многообразии X , которая не имеет базисных точек, H – достаточно общий дивизор в линейной системе $\mathcal{H}$, и пусть $Y \subsetneq X$ – некоторое неприводимое подмногообразие. Положим $Y \cap H = \sum_{i=1}^k Z_i$, где Z_i – неприводимое подмногообразие многообразия H . Тогда из определения 2.10 сразу следует (см. теорему 2.17), что $Y \in \text{LCS}_\varepsilon(X, B_X)$, если и только если $\{Z_1, \dots, Z_k\} \subseteq \text{LCS}_\varepsilon(H, B_X|_H)$.

Положим $\text{LCS}(X, B_X) = \text{LCS}_0(X, B_X)$ и $\text{CS}(X, B_X) = \text{LCS}_1(X, B_X)$. Будем говорить, что элементы множества $\text{LCS}(X, B_X)$ являются центрами логканонических особенностей логпары (X, B_X) , элементы множества $\text{CS}(X, B_X)$ являются центрами канонических особенностей логпары (X, B_X) .

ПРИМЕР 2.12. Пусть $\chi: \hat{X} \rightarrow X$ – раздутие некоторой гладкой точки $P \in X$. Положим $B_{\hat{X}} = \sum_{i=1}^r a_i \hat{B}_i + \sum_{i=1}^l c_i \hat{\mathcal{M}}_i$, где $\hat{B}_i$ – собственный прообраз дивизора B_i на многообразии $\hat{X}$ и $\hat{\mathcal{M}}_i$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}_i$ на многообразии $\hat{X}$. Тогда

$$K_{\hat{X}} + B_{\hat{X}} \equiv \pi^*(K_X + B_X) + (\dim(X) - 1 - \text{mult}_P(B_X))E,$$

где E – исключительный дивизор раздутия χ и $\text{mult}_P(B_X) \in \mathbb{Q}$. Значит, логпара (X, B_X) имеет не более чем ε -логканонические особенности в окрестности точки $P \in X$, если и только если логпара

$$(\hat{X}, B_{\hat{X}} + (\text{mult}_P(B_X) - \dim(X) + 1)E)$$

имеет ε -логканонические особенности в окрестности дивизора E . В частности, если $\text{mult}_P(B_X) \geq \dim(X) - \varepsilon$, то $P \in \mathbb{LCS}_\varepsilon(X, B_X)$. Если граница B_X эффективна и $\text{mult}_P(B_X) < 1 - \varepsilon$, то $P \notin \mathbb{LCS}_\varepsilon(X, B_X)$. Если граница B_X эффективна и подвижна и выполнено неравенство $\text{mult}_P(B_X) < 1$, то $P \notin \mathbb{CS}(X, B_X)$. Если $\dim(X) = 2$, а граница B_X эффективна, то $P \in \mathbb{CS}(X, B_X)$ тогда и только тогда, когда $\text{mult}_P(B_X) \geq 1$.

Если граница B_X эффективна, то локус $\mathbb{LCS}(X, B_X) \subset X$ может быть естественным образом оснащен структурой подсхемы (см. [6]). Действительно, если граница B_X эффективна, то просто положим

$$\mathcal{I}(X, B_X) = \pi_* \left(\sum_{i=1}^m [d_i] E_i - \sum_{i=1}^r [a_i] \bar{B}_i \right).$$

Обозначим через $\mathcal{L}(X, B_X)$ подсхему, которая соответствует пучку идеалов $\mathcal{I}(X, B_X)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.13. Если граница B_X эффективна, то будем называть подсхему $\mathcal{L}(X, B_X)$ *подсхемой логканонических особенностей логпары (X, B_X)* , а пучок идеалов $\mathcal{I}(X, B_X)$ – *пучком множительных идеалов логпары (X, B_X)* .

Если граница B_X эффективна, то из конструкции подсхемы $\mathcal{L}(X, B_X)$ следует, что $\text{Supp}(\mathcal{L}(X, B_X)) = \mathbb{LCS}(X, B_X) \subset X$.

ТЕОРЕМА 2.14 [7, теорема 9.4.8]. Пусть H – некоторый численно эффективный и объемный $\mathbb{Q}$ -дивизор на многообразии X такой, что имеет место численная эквивалентность $K_X + B_X + H \equiv D$, где D – некоторый дивизор Картье на многообразии X . Предположим, дополнительно, что граница B_X эффективна. Тогда $H^i(\mathcal{I}(X, B_X) \otimes D) = 0$ для всех $i \geq 1$.

СЛЕДСТВИЕ 2.15. Предположим, что граница B_X эффективна, а дивизор $-(K_X + B_X)$ является численно эффективным и объемным. Тогда локус $\mathbb{LCS}(X, B_X)$ связан.

Утверждение следствия 2.15 является частным случаем следующего более общего результата.

ТЕОРЕМА 2.16 [6, лемма 5.7]. Пусть $\psi: X \rightarrow Z$ – некоторый сюръективный морфизм, который имеет связные слои. Предположим, что граница B_X эффективна, а дивизор $-(K_X + B_X)$ является ψ -численно эффективным и ψ -объемным. Тогда локус $\mathbb{LCS}(\bar{X}, B^{\bar{X}})$ связан в окрестности каждого слоя морфизма $\psi \circ \pi: \bar{X} \rightarrow Z$.

Применяя теорему 2.16, можно несложно получить следующий результат.

ТЕОРЕМА 2.17 [5, теорема 7.5]. Предположим, что дивизор K_X является $\mathbb{Q}$ -дивизором Картье, граница B_X эффективна, выполнено равенство $a_1 = 1$, а B_1 является дивизором Картье, многообразие B_1 имеет не более чем логтерминальные особенности. Тогда логпара (X, B_X) имеет логканонические особенности в окрестности дивизора B_1 , если и только если логпара $(B_1, \sum_{i=2}^r a_i B_i|_{B_1})$ имеет логканонические особенности.

Заметим, что теорема 1.1 является простейшим следствием теоремы 2.17.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.18. Скажем, что логпара (X, B_X) имеет *чисто логтерминальные особенности*, если выполнено неравенство $a_i \leq 1$ для каждого $i \in \{1, \dots, r\}$ и выполнено неравенство $d_j > -1$ для каждого $j \in \{1, \dots, t\}$.

ТЕОРЕМА 2.19 [5, теорема 7.5]. *Предположим, что граница B_X эффективна, выполнено равенство $a_1 = 1$, а дивизор B_1 является дивизором Картье. Тогда логпара (X, B_X) имеет чисто логтерминальные особенности в окрестности дивизора B_1 , если и только если многообразие B_1 имеет рациональные особенности, а логпара $(B_1, \sum_{i=2}^r a_i B_i|_{B_1})$ имеет не более чем логтерминальные особенности.*

Предположим, дополнительно, что граница B_X эффективна и подвижна. Таким образом, имеем $B_X = \sum_{i=1}^l c_i \mathcal{M}_i$, где c_i – неотрицательное рациональное число, а $\mathcal{M}_i$ – некоторая линейная система на многообразии X , которая не имеет неподвижных компонент.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.20. Логпара (Y, B_Y) *бirationально эквивалентна* логпаре (X, B_X) , если граница B_Y эффективна и подвижна и существует бирациональное отображение $\xi: X \dashrightarrow Y$ такое, что $B_Y = \sum_{i=1}^l c_i \xi(\mathcal{M}_i)$, где $\xi(\mathcal{M}_i)$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}_i$ на многообразии Y .

Таким образом, логпары $(\bar{X}, B_{\bar{X}})$ и (X, B_X) бирационально эквивалентны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.21. Пусть D – некоторый $\mathbb{Q}$ -дивизор Вейля на многообразии X . Мы скажем, что D является *$\mathbb{Q}$ -эффективным*, если существует натуральное число n такое, что линейная система $|nmD|$ не пуста, где m – натуральное число такое, что дивизор mD является целым дивизором Вейля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.22. Назовем *размерностью Кодайры* логпары (X, B_X) число

$$\kappa(X, B_X) = \begin{cases} \sup_{n \in \mathbb{N}} (\dim(\varphi_{|nm(K_{\bar{X}} + B_{\bar{X}})|}(X))), & \text{если } K_{\bar{X}} + B_{\bar{X}} \text{ является } \mathbb{Q}\text{-эффективным,} \\ -\infty, & \text{если } K_{\bar{X}} + B_{\bar{X}} \text{ не является } \mathbb{Q}\text{-эффективным,} \end{cases}$$

где $m \in \mathbb{N}$ такое, что дивизор $m(K_{\bar{X}} + B_{\bar{X}})$ является дивизором Картье.

Можно показать, что размерность Кодайры $\kappa(X, B_X)$ не зависит от выбора бирационального морфизма π (см. [8, лемма 1.3.6]).

ЛЕММА 2.23 [8, лемма 1.3.6]. *Пусть (Y, B_Y) – некоторая логпара, которая бирационально эквивалентна логпаре (X, B_X) . Тогда $\kappa(X, B_X) = \kappa(Y, B_Y)$.*

Если особенности логпары (X, B_X) канонические, то из [8, лемма 1.3.6] следует, что

$$\kappa(X, B_X) = \begin{cases} \sup_{n \in \mathbb{N}} (\dim(\varphi_{|nm(K_X + B_X)|}(X))), & \text{если } K_X + B_X \text{ является } \mathbb{Q}\text{-эффективным,} \\ -\infty, & \text{если } K_X + B_X \text{ не является } \mathbb{Q}\text{-эффективным,} \end{cases}$$

где $m \in \mathbb{N}$ такое, что дивизор $m(K_X + B_X)$ является дивизором Картье.

СЛЕДСТВИЕ 2.24. *Если логпара (X, B_X) имеет не более чем канонические особенности, а дивизор $K_X + B_X$ является $\mathbb{Q}$ -эффективным, то $\kappa(X, B_X) \geq 0$.*

Из определения 2.22 следует, что

$$\kappa\left(X, \sum_{i=1}^l c'_i \mathcal{M}_i\right) \geq \kappa(X, B_X) = \kappa\left(X, \sum_{i=1}^l c_i \mathcal{M}_i\right)$$

в случае, когда выполнено неравенство $c'_i \geq c_i$ для каждого $i \in \{1, \dots, l\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.25. Логпара (X, B_X) называется *канонической моделью*, если дивизор $K_X + B_X$ обилён, а логпара (X, B_X) имеет канонические особенности.

Из определения 2.22 сразу следует, что выполнено равенство $\kappa(X, B_X) = \dim(X)$ в случае, когда логпара (X, B_X) является канонической моделью.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.26. Логпара (Y, B_Y) является *канонической моделью логпары* (X, B_X) , если логпара (Y, B_Y) является канонической моделью, а логпары (Y, B_Y) и (X, B_X) бирационально эквивалентны.

Отметим, что логпара (X, B_X) не обладает канонической моделью, если выполнено неравенство $\kappa(X, B_X) < \dim(X)$.

ТЕОРЕМА 2.27 [8, теорема 1.3.20]. *Каноническая модель единственна, если она существует.*

Из работы [9] следует, что логпара (X, B_X) обладает канонической моделью в том и только в том случае, когда выполнено равенство $\kappa(X, B_X) = \dim(X)$.

§ 3. Первое неравенство

Целью настоящего параграфа является доказательство теоремы 1.4.

Пусть X – некоторая поверхность, O – произвольная гладкая точка поверхности X , и пусть Δ_1 и Δ_2 – кривые на поверхности X такие, что $O \in \Delta_1 \cap \Delta_2$, кривые Δ_1 и Δ_2 неприводимы и приведены и являются неособыми в точке O , кривая Δ_1 пересекает кривую Δ_2 трансверсально в точке O . Пусть D – некоторый эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на поверхности X , носитель которого не содержит кривых Δ_1 и Δ_2 , и пусть a_1 и a_2 – неотрицательные рациональные числа. Предположим, что особенности логпары $(X, D + a_1\Delta_1 + a_2\Delta_2)$ не являются логканоническими в точке O . Пусть $A, B, M, N, \alpha, \beta$ – неотрицательные рациональные числа такие, что:

- (i) выполнено неравенство $\alpha a_1 + \beta a_2 \leq 1$;
- (ii) выполнены неравенства $A(B - 1) \geq 1 \geq \max(M, N)$;
- (iii) выполнены неравенства $\alpha(A + M - 1) \geq A^2(B + D - 1)\beta$ и $\alpha(1 - M) + A\beta \geq A$;
- (iv) выполнено либо неравенство $2M + AN \leq 2$, либо неравенство

$$\alpha(B + 1 - MB - N) + \beta(A + 1 - AN - M) \geq AB - 1.$$

ЛЕММА 3.1. *Выполнены неравенства $A + M \geq 1$ и $B > 1$, а также*

$$\alpha(B + 1 - MB - N) + \beta(A + 1 - AN - M) \geq AB - 1,$$

$$\beta(1 - N) + B\alpha \geq B, \quad \frac{\alpha(2 - M)}{A + 1} + \frac{\beta(2 - N)}{B + 1} \geq 1,$$

$$\alpha(2 - M)B + \beta(1 - N)(A + 1) \geq B(A + 1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство $B > 1$ следует из неравенства $A(B-1) \geq 1$. Тогда

$$\frac{\alpha}{A+1} + \frac{\beta}{B+1} \geq \frac{\alpha}{A+1} + \frac{\beta}{2B} \geq \frac{1}{2},$$

так как $2B \geq B+1$. Аналогично, мы видим, что $A+M \geq 1$, так как

$$\frac{\alpha(A+M-1)}{A^2(B+D-1)} \geq \beta \geq 0$$

и $B+D-1 \geq 0$. Неравенство $\beta(1-N) + B\alpha \geq B$ следует из неравенств

$$\alpha + \frac{\beta(1-N)}{B} \geq \frac{2-M}{A+1}\alpha + \frac{\beta(1-N)}{B} \geq 1,$$

так как $A+1 \geq 2-M$.

Теперь мы покажем, что $\alpha(2-M)B + \beta(1-N)(A+1) \geq B(A+1)$, воспользовавшись неравенством $A(B-1) \geq 1$. Пусть L_1 – прямая в $\mathbb{R}^2$, заданная уравнением

$$x(2-M)B + y(1-N)(A+1) - B(A+1) = 0,$$

и пусть L_2 – прямая, заданная уравнением $x(1-M) + Ay - A = 0$, где (x, y) – координаты в $\mathbb{R}^2$. Прямая L_1 пересекает прямую $y = 0$ в точке $(\frac{A+1}{2-M}, 0)$, а прямая L_2 пересекает прямую $y = 0$ в точке $(\frac{A}{1-M}, 0)$. С другой стороны, выполнено неравенство

$$\frac{A+1}{2-M} < \frac{A}{1-M},$$

откуда следует, что неравенство $\alpha(2-M)B + \beta(1-N)(A+1) \geq B(A+1)$ выполнено, если

$$A^2\beta_0(B+N-1) \geq \alpha_0(A+M-1),$$

где (α_0, β_0) – точка пересечения прямых L_1 и L_2 . С другой стороны, имеем

$$(\alpha_0, \beta_0) = \left(\frac{A(A+1)(B+N-1)}{\Delta}, \frac{B(A-1+M)}{\Delta} \right),$$

где $\Delta = 2AB - ABM - A + AM - 1 + M + NA - NAM + N - NM$. Имеет место неравенство

$$A^2(B(A-1+M))(B+N-1) \geq (A(A+1)(B+N-1))(A+M-1),$$

так как $A(B-1) \geq 1$, откуда сразу следует, что $A^2\beta_0(B+N-1) \geq \alpha_0(A+M-1)$.

Итак, для завершения доказательства леммы нам требуется показать, что выполнено неравенство $\alpha(B+1-MB-N) + \beta(A+1-AN-M) \geq AB-1$.

Пусть L'_1 – прямая в $\mathbb{R}^2$, заданная уравнением

$$x(B+1-MB-N) + y(A+1-AN-M) - AB + 1 = 0,$$

и пусть L_2 – прямая, заданная уравнением $x(1-M) + Ay - A = 0$, где (x, y) – координаты в $\mathbb{R}^2$. Прямая L'_1 пересекает прямую $y = 0$ в точке $(\frac{AB-1}{B+1-MB-N}, 0)$, а прямая L_2 пересекает прямую $y = 0$ в точке $(\frac{A}{1-M}, 0)$. С другой стороны, имеем

$$\frac{AB-1}{B+1-MB-N} < \frac{A}{1-M},$$

откуда следует, что $\alpha(B+1-MB-N) + \beta(A+1-AN-M) \geq AB-1$, если выполнено $A^2\beta_1(B+N-1) \geq \alpha_1(A+M-1)$, где (α_1, β_1) – точка пересечения прямых L'_1 и L_2 . Отметим, что

$$(\alpha_1, \beta_1) = \left(\frac{A(AB-A-2+NA+M)}{\Delta'}, \frac{A+1-NA-M}{\Delta'} \right),$$

где $\Delta' = AB-1-ABM+AM+2M-NAM-M^2$. Итак, для завершения доказательства леммы требуется показать, что имеет место неравенство

$$A^2(A+1-NA-M)(B+N-1) \geq (A(AB-A-2+NA+M))(A+M-1),$$

однако оно эквивалентно выполнению неравенства $(2-M)(A+M-1) \geq A(AN+2M-2)(B+N-1)$, которое действительно имеет место, так как $M \leq 1$ и $AN+2M-2 \leq 0$. Лемма доказана.

Предположим, что $\text{mult}_O(D \cdot \Delta_1) \leq M + Aa_1 - a_2$ и $\text{mult}_O(D \cdot \Delta_2) \leq N + Ba_2 - a_1$. Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию, откуда будет следовать утверждение теоремы 1.4.

ЛЕММА 3.2. *Выполнены неравенства $a_1 > \frac{1-M}{A}$ и $a_2 > \frac{1-N}{B}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $a_1 > 1$, то $a_1 > \frac{1-M}{A}$ по лемме 3.1. Предположим, что $a_1 \leq 1$. Тогда особенности логпары $(X, D + \Delta_1 + a_2\Delta_2)$ не являются логканоническими в точке O . Таким образом, из теоремы 1.1 следует, что $M + Aa_1 - a_2 \geq \text{mult}_O(D \cdot \Delta_1) > 1 - a_2$, откуда следует неравенство $a_1 > \frac{1-M}{A}$. Аналогично, выполнено неравенство $a_2 > \frac{1-N}{B}$.

ЛЕММА 3.3. *Выполнены неравенства $a_1 < 1$ и $a_2 < 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 3.2 следует, что $a_1 > \frac{1-M}{A}$ и $a_2 > \frac{1-N}{B}$. С другой стороны, мы знаем, что $\alpha a_1 + \beta a_2 \leq 1$, откуда следует, что $a_1 \alpha < 1 - \beta \frac{1-N}{B}$ и $a_2 \beta < 1 - \alpha \frac{1-M}{A}$. Тогда $a_1 < 1$ и $a_2 < 1$, так как $\beta(1-N) + B\alpha \geq B$ по лемме 3.1 и $\alpha(1-M) + A\beta \geq A$ по предположению. Лемма доказана.

Положим $m_0 = \text{mult}_O(D)$. Отметим, что m_0 – положительное рациональное число.

ЛЕММА 3.4. *Выполнены неравенства $m_0 \leq M + Aa_1 - a_2$ и $m_0 \leq N + Ba_2 - a_1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое утверждение следует из неравенств $m_0 \leq \text{mult}_O(D \cdot \Delta_1)$ и $m_0 \leq \text{mult}_O(D \cdot \Delta_2)$.

ЛЕММА 3.5. *Выполнено неравенство $m_0 + a_1 + a_2 \leq 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что $m_0 + a_1 + a_2 \leq M + (A+1)a_1$ и $m_0 + a_1 + a_2 \leq N + (B+1)a_2$. Тогда

$$(m_0 + a_1 + a_2) \left(\frac{\alpha}{A+1} + \frac{\beta}{B+1} \right) \leq \alpha a_1 + \beta a_2 + \frac{\alpha M}{A+1} + \frac{\beta N}{B+1} \leq 1 + \frac{\alpha M}{A+1} + \frac{\beta N}{B+1},$$

откуда следует, что $m_0 + a_1 + a_2 \leq 2$, поскольку $\frac{\alpha(2-M)}{A+1} + \frac{\beta(2-N)}{B+1} \geq 1$ по лемме 3.1.

Пусть $\pi_1: X_1 \rightarrow X$ – раздутие точки O , и пусть F_1 – исключительная кривая бирационального морфизма π_1 . Тогда имеет место численная эквивалентность

$$K_{X_1} + D^1 + a_1\Delta_1^1 + a_2\Delta_2^1 + (m_0 + a_1 + a_2 - 1)F_1 \equiv \pi_1^*(K_X + D + a_1\Delta_1 + a_2\Delta_2),$$

где D^1 , Δ_1^1 и Δ_2^1 – собственные прообразы на поверхности X_1 дивизора D , кривой Δ_1 и кривой Δ_2 соответственно. В этом случае особенности логпары $(X_1, D^1 + a_1\Delta_1^1 + a_2\Delta_2^1 + (m_0 + a_1 + a_2 - 1)F_1)$ не являются логканоническими в некоторой точке $O_1 \in F_1$. Отметим, что $m_0 + a_1 + a_2 - 1 \geq 0$.

ЛЕММА 3.6. *Либо $O_1 = F_1 \cap \Delta_1^1$, либо $O_1 = F_1 \cap \Delta_2^1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $O_1 \notin \Delta_1^1 \cup \Delta_2^1$. Тогда особенности логпары $(X_1, D^1 + (m_0 + a_1 + a_2 - 1)F_1)$ не являются логканоническими в точке O_1 . С другой стороны, мы знаем, что $m_0 = D^1 \cdot F_1 > 1$ по теореме 1.1, так как $m_0 + a_1 + a_2 \leq 2$ по лемме 3.5. Тогда

$$m_0 \left(\frac{\beta + B\alpha}{AB - 1} + \frac{\alpha + A\beta}{AB - 1} \right) \leq (M + Aa_1 - a_2) \frac{\beta + B\alpha}{AB - 1} + (N + Ba_2 - a_1) \frac{\alpha + A\beta}{AB - 1},$$

так как $m_0 \leq M + Aa_1 - a_2$ и $m_0 \leq N + Ba_2 - a_1$. С другой стороны, имеем

$$(M + Aa_1 - a_2) \frac{\beta + B\alpha}{AB - 1} + (N + Ba_2 - a_1) \frac{\alpha + A\beta}{AB - 1} \leq 1 + \frac{M\beta + MB\alpha + N\alpha + AN\beta}{AB - 1},$$

так как $\alpha a_1 + \beta a_2 \leq 1$ и $AB - 1 > 0$. Однако мы уже показали, что $m_0 > 1$. Таким образом, мы видим, что $\beta + B\alpha + \alpha + A\beta \leq AB - 1 + M\beta + MB\alpha + N\alpha + AN\beta$, однако это невозможно по лемме 3.1.

ЛЕММА 3.7. *Выполнено неравенство $O_1 \neq F_1 \cap \Delta_1^1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $O_1 = F_1 \cap \Delta_1^1$. Тогда особенности логпары $(X_1, D^1 + a_1\Delta_1^1 + (m_0 + a_1 + a_2 - 1)F_1)$ не являются логканоническими в точке O_1 . Следовательно,

$$M + Aa_1 - a_2 - m_0 = D^1 \cdot \Delta_1^1 > 1 - (m_0 + a_1 + a_2 - 1)$$

по теореме 1.1, так как $a_1 < 1$ по лемме 3.3. Имеем $a_1 > \frac{2-M}{A+1}$. Тогда

$$\frac{2 - M\alpha}{A + 1} + \frac{\beta(1 - N)}{B} < \alpha a_1 + \beta a_2 \leq 1,$$

так как $a_2 > \frac{1-N}{B}$ по лемме 3.3. Следовательно, $\frac{2-M\alpha}{A+1} + \frac{\beta(1-N)}{B} < 1$, что невозможно по лемме 3.1. Лемма доказана.

Таким образом, мы видим, что $O_1 = F_1 \cap \Delta_2^1$. Тогда особенности логпары $(X_1, D^1 + a_1\Delta_1^1 + a_2\Delta_2^1 + (m_0 + a_1 + a_2 - 1)F_1)$ не являются логканоническими в точке O_1 . Причем известно, что $1 \geq m_0 + a_1 + a_2 - 1 \geq 0$.

Мы уже имеем раздутие $\pi_1: X_1 \rightarrow X$. Для каждого натурального числа n рассмотрим последовательность раздутий

$$X_n \xrightarrow{\pi_n} X_{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}} \dots \xrightarrow{\pi_3} X_2 \xrightarrow{\pi_2} X_1 \xrightarrow{\pi_1} X$$

такую, что π_{i+1} является раздутием точки $F_i \cap \Delta_2^i$ для каждого $i \in \{1, \dots, n-1\}$, где F_i – исключительная кривая морфизма π_i , Δ_2^i – собственный прообраз кривой Δ_2 на поверхности X_i .

Для каждого $k \in \{1, \dots, n\}$ и каждого $i \in \{1, \dots, k\}$ положим $O_k = F_k \cap \Delta_2^k$ и обозначим через D^k , Δ_1^k и F_i^k собственные прообразы на поверхности X_k дивизора D , кривой Δ_1 и кривой F_i соответственно. Тогда

$$K_{X_n} + D^n + a_1 \Delta_1^n + a_2 \Delta_2^n + \sum_{i=1}^n \left(a_1 + ia_2 - i + \sum_{j=0}^{i-1} m_j \right) F_i^n \equiv \pi^*(K_X + D + a_1 \Delta_1 + a_2 \Delta_2),$$

где $\pi = \pi_n \circ \dots \circ \pi_2 \circ \pi_1$ и $m_i = \text{mult}_{O_i}(D^i)$ для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$. Следовательно, особенности логпары

$$\left(X_n, D^n + a_1 \Delta_1^n + a_2 \Delta_2^n + \sum_{i=1}^n \left(a_1 + ia_2 - i + \sum_{j=0}^{i-1} m_j \right) F_i^n \right) \quad (3.1)$$

не являются логканоническими в некоторой точке множества $F_1^n \cup F_2^n \cup \dots \cup F_n^n$.

ЛЕММА 3.8. *Для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ выполнено $1 \geq a_1 + ia_2 - i + \sum_{j=0}^{i-1} m_j \geq 0$, а логпара (3.1) имеет логканонические особенности в каждой точке множества $(F_1^n \cup F_2^n \cup \dots \cup F_n^n) \setminus O_n$.*

Отметим, что утверждение леммы 3.8 противоречиво. Действительно, из леммы 3.8 следует, что существует натуральное число n такое, что $a_1 + na_2 - n + \sum_{j=0}^{n-1} m_j > 1$, однако это противоречит лемме 3.8. Таким образом, для завершения доказательства теоремы 1.4 достаточно доказать лемму 3.8. Проведем доказательство индукцией по $n \in \mathbb{N}$. Отметим, что случай $n = 1$ уже разобран.

По индукции можно считать, что $n \geq 2$, выполнено $1 \geq a_1 + ka_2 - k + \sum_{j=0}^{k-1} m_j \geq 0$ для каждого $k \in \{1, \dots, n-1\}$ и логпара $(X_k, D^k + a_1 \Delta_1^k + a_2 \Delta_2^k + \sum_{i=1}^k (a_1 + ia_2 - i + \sum_{j=0}^{i-1} m_j) F_i^k)$ имеет логканонические особенности в каждой точке множества $(F_1^k \cup F_2^k \cup \dots \cup F_k^k) \setminus O_k$. Значит, особенности этой логпары не являются логканоническими в точке O_k .

ЛЕММА 3.9. *Выполнено неравенство $a_2 > \frac{n-N}{B+n-1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Особенности логпары $(X_{n-1}, D^{n-1} + a_2 \Delta_2^k + (a_1 + (n-1)a_2 - (n-1) + \sum_{j=0}^{n-2} m_j) F_{n-1}^n)$ не являются логканоническими в точке O_{n-1} . Тогда

$$N - Ba_2 - a_1 - \sum_{j=0}^{n-2} m_j = D^{n-1} \cdot \Delta_2^{n-1} > 1 - \left(a_1 + (n-1)a_2 - (n-1) + \sum_{j=0}^{n-2} m_j \right)$$

по теореме 1.1, так как $a_2 < 1$ по лемме 3.3. Имеем $a_2 > \frac{n-N}{B+n-1}$, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 3.10. *Выполнены неравенства $1 \geq a_1 + na_2 - n + \sum_{j=0}^{n-1} m_j \geq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство $a_1 + na_2 - n + \sum_{j=0}^{n-1} m_j \geq 0$ легко следует из того, что особенности логпары $(X_{n-1}, D^{n-1} + a_2 \Delta_2^k + (a_1 + (n-1)a_2 - (n-1) + \sum_{j=0}^{n-2} m_j) F_{n-1})$ не являются логканоническими в точке O_{n-1} . Предположим, что $a_1 + na_2 - n + \sum_{j=0}^{n-1} m_j > 1$. Тогда $m_0 + a_2 \leq M + Aa_1$ по лемме 3.4. Таким образом, мы видим, что

$$a_1 + nM + nAa_1 - n \geq a_1 + na_2 - n + nm_0 \geq a_1 + na_2 - n + \sum_{j=0}^{n-1} m_j > 1,$$

откуда сразу следует неравенство $a_1 > \frac{n+1-Mn}{nA+1}$, но мы уже знаем, что выполнено неравенство $a_2 > \frac{n-N}{B+n-1}$ по лемме 3.9. Имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha - M}{A} + \beta \right) + \alpha \frac{A - 1 + M}{A(An + 1)} + \beta \frac{1 - B - N}{B + n - 1} \\ = \alpha \frac{n + 1 - Mn}{nA + 1} + \beta \frac{n - N}{B + n - 1} < \alpha a_1 + \beta a_2 \leq 1, \end{aligned}$$

где $\frac{\alpha(1-M)}{A} + \beta \geq 1$. Таким образом, получаем $\alpha \frac{A+M-1}{A(An+1)} < \beta \frac{B+N-1}{B+n-1}$, где $n \geq 2$. С другой стороны, из лемм 3.2, 3.3 следует, что $A + M > 1$ и $B > 1$. Таким образом, имеем $\frac{A(An+1)}{\alpha(A+M-1)} > \frac{B+n-1}{\beta(B+N-1)}$, но $A^2(B + N - 1)\beta \leq \alpha(A + M - 1)$ по предположению. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{A}{\alpha(A + M - 1)} - \frac{B - 1}{\beta(B + N - 1)} \\ \geq \left(\frac{A^2}{\alpha(A + M - 1)} - \frac{1}{\beta(B + M - 1)} \right) n + \frac{A}{\alpha(A + M - 1)} - \frac{B - 1}{\beta(B + N - 1)} > 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что $\beta A(B + N - 1) > \alpha(B - 1)(A + M - 1)$. Имеем

$$\frac{\alpha(A + M - 1)}{A} \geq \beta A(B + N - 1) > \alpha(B - 1)(A + M - 1),$$

так как $A^2(B + N - 1)\beta \leq \alpha(A + M - 1)$ по предположению. Тогда $\alpha \neq 0$ и $A(B - 1) < 1$, что является противоречием, так как $A(B - 1) \geq 1$ по предположению.

ЛЕММА 3.11. Логпара (3.1) имеет логканонические особенности в каждой точке множества $F_n \setminus ((F_n \cap F_{n-1}^n) \cup (F_n \cap \Delta_2^n))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует точка $Q \in F_n$ такая, что $F_n \cap F_{n-1}^n \neq Q \neq F_n \cap \Delta_2^n$, а особенности логпары (3.1) не являются логканоническими в точке Q . Тогда особенности логпары $(X_n, D^n + (a_1 + na_2 - n + \sum_{j=0}^{n-1} m_j) F_n)$ также не являются логканоническими в точке Q . Имеем $m_0 \geq m_{n-1} = D^n \cdot F_n > 1$ по теореме 1.1, так как $a_1 + na_2 - n + \sum_{j=0}^{n-1} m_j \leq 1$ по лемме 3.10. Тогда

$$m_0 \left(\frac{\beta + B\alpha}{AB - 1} + \frac{\alpha + A\beta}{AB - 1} \right) \leq (M + Aa_1 - a_2) \frac{\beta + B\alpha}{AB - 1} + (N + Ba_2 - a_1) \frac{\alpha + A\beta}{AB - 1},$$

так как $m_0 \leq M + Aa_1 - a_2$ и $m_0 \leq N + Ba_2 - a_1$ по лемме 3.4. Имеем

$$(M + Aa_1 - a_2) \frac{\beta + B\alpha}{AB - 1} + (N + Ba_2 - a_1) \frac{\alpha + A\beta}{AB - 1} \leq 1 + \frac{M\beta + MB\alpha + N\alpha + AN\beta}{AB - 1},$$

так как $\alpha a_1 + \beta a_2 \leq 1$ и $AB - 1 > 0$. С другой стороны, выполнено неравенство $m_0 > 1$. Таким образом, имеем $\beta + B\alpha + \alpha + A\beta \leq AB - 1 + M\beta + MB\alpha + N\alpha + AN\beta$, что невозможно по предположению.

ЛЕММА 3.12. *Логпара (3.1) имеет логканонические особенности в точке $F_n \cap F_{n-1}^n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что особенности логпары (3.1) не являются логканоническими в точке $F_n \cap F_{n-1}^n$. Тогда особенности логпары

$$\left(X_n, D^n + \left(a_1 + (n-1)a_2 - (n-1) + \sum_{j=0}^{n-2} m_j \right) F_{n-1}^n + \left(a_1 + na_2 - n + \sum_{j=0}^{n-1} m_j \right) F_n \right)$$

также не являются логканоническими в точке $F_n \cap F_{n-1}^n$. Следовательно,

$$m_{n-2} - m_{n-1} = D^n \cdot F_{n-2} > 1 - \left(a_1 + na_2 - n + \sum_{j=0}^{n-1} m_j \right)$$

по теореме 1.1, так как $a_1 + (n-1)a_2 - (n-1) + \sum_{j=0}^{n-2} m_j$. Отметим, что

$$M + Aa_1 - a_2 - m_0 \geq \text{mult}_O(D \cdot \Delta_1) - m_0 \geq D \cdot \Delta_1 - m_0 = D^1 \cdot \Delta_1^1 \geq 0,$$

откуда следует, что $m_0 + a_2 \leq Aa_1 + M$. Тогда

$$\begin{aligned} nM + nAa_1 - na_2 &\geq nm_0 \geq (n+1)m_0 - m_{n-1} \\ &\geq m_{n-2} - m_{n-1} + \sum_{j=0}^{n-1} m_j > n+1 - a_1 - na_2, \end{aligned}$$

откуда следует, что $a_1 > \frac{n+1-nM}{An+1}$. Теперь, рассуждая так же, как при доказательстве леммы 3.10, мы сразу получаем противоречие. Лемма доказана.

Итак, утверждение леммы 3.8 доказано, что завершает доказательство теоремы 1.4.

§ 4. Второе неравенство

Целью в данном параграфе является доказательство теоремы 1.6.

Пусть X – поверхность, O – гладкая точка поверхности X , $\mathcal{M}$ – линейная система на поверхности X , которая не имеет неподвижных компонент, и пусть Δ_1 – неприводимая и приведенная кривая на поверхности X такая, что

$O \in \Delta_1 \setminus \text{Sign}(\Delta_1)$. Пусть ε и a_1 – некоторые рациональные числа такие, что $\varepsilon > 0$ и $a_1 \leq 0$. Предположим, что особенности логпары $(X, \varepsilon\mathcal{M} + a_1\Delta_1)$ не являются терминальными в точке O . Тогда существует бирациональный морфизм $\pi: \bar{X} \rightarrow X$ такой, что он является композицией раздутий неособых точек, стягивает m неприводимых кривых $E_1, E_2, \dots, E_m$ в точку O и индуцирует изоморфизм $\bar{X} \setminus \bigcup_{i=1}^m E_i \cong X \setminus O$. Для некоторых рациональных чисел $d_1, d_2, \dots, d_m$ выполнена эквивалентность

$$K_{\bar{X}} + \varepsilon\bar{\mathcal{M}} + a_1\bar{\Delta}_1 \equiv \pi^*(K_X + \varepsilon\mathcal{M} + a_1\Delta_1) + \sum_{i=1}^m d_i E_i,$$

где $\bar{\mathcal{M}}$ и $\bar{\Delta}_1$ – собственные прообразы на поверхности $\bar{X}$ линейной системы $\mathcal{M}$ и кривой Δ_1 соответственно, выполнено неравенство $d_m \leq 0$ и имеет место либо равенство $m = 1$, либо неравенства $m \geq 2$ и $d_i > 0$ для каждого $i \in \{1, \dots, m-1\}$.

ЛЕММА 4.1. *Предположим, что $a_1 \geq 0$. Тогда $m = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое утверждение хорошо известно, а его доказательство элементарно.

Пусть $\chi: \hat{X} \rightarrow X$ – раздутие точки O , и пусть E – исключительная кривая бирационального морфизма χ . Тогда

$$K_{\hat{X}} + \varepsilon\hat{\mathcal{M}} + a_1\hat{\Delta}_1 + (\varepsilon \text{mult}_O(\mathcal{M}) + a_1 - 1)E \equiv \pi^*(K_X + \varepsilon\mathcal{M} + a_1\Delta_1),$$

где $\hat{\mathcal{M}}$ и $\hat{\Delta}_1$ – собственные прообразы на поверхности $\hat{X}$ линейной системы $\mathcal{M}$ и кривой Δ_1 соответственно.

ЛЕММА 4.2. *Предположим, что $m = 1$. Тогда выполнено неравенство (1.2). Более того, если неравенство (1.2) является равенством, то либо $-a_1 \in \mathbb{N}$ и $\text{mult}_O(\mathcal{M}) = \frac{2}{\varepsilon}$, либо $a_1 = 0$ и $\text{mult}_O(\mathcal{M}) = \frac{1}{\varepsilon}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $\pi = \chi$ и $d_1 = 1 - \varepsilon \text{mult}_O(\mathcal{M}) - a_1 \leq 0$. Имеем

$$\text{mult}_O(M_1 \cdot M_1) \geq \text{mult}_P^2(\mathcal{M}) \geq \frac{(1 - a_1)^2}{\varepsilon^2} \geq \max\left(\frac{1 - 2a_1}{\varepsilon^2}, \frac{-4a_1}{\varepsilon^2}\right),$$

откуда сразу следует неравенство (1.2). Более того, если неравенство (1.2) является равенством, то мы видим, что либо $a_1 = -1$ и $\text{mult}_O(\mathcal{M}) = \frac{2}{\varepsilon}$, либо $a_1 = 0$ и $\text{mult}_O(\mathcal{M}) = \frac{1}{\varepsilon}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.6 проведем индукцией по m . Можно считать, что $m \geq 2$. В этом случае выполнено неравенство $a_1 < 0$, а особенности логпары $(\hat{X}, a_1\hat{\Delta}_1 + \varepsilon\hat{\mathcal{M}} + (\varepsilon \text{mult}_O(\mathcal{M}) + a_1 - 1)E)$ не являются терминальными в некоторой точке $Q \in E$. Отметим, что имеет место равенство $d_1 = 1 - \varepsilon \text{mult}_O(\mathcal{M}) - a_1$.

Пусть $\hat{M}_1$ и $\hat{M}_2$ – собственные прообразы на поверхности $\hat{X}$ кривых M_1 и M_2 соответственно. Тогда имеет место неравенство

$$\text{mult}_O(M_1 \cdot M_2) \geq \text{mult}_P^2(\mathcal{M}) + \text{mult}_Q(\hat{M}_1 \cdot \hat{M}_2),$$

где $\text{mult}_O(\mathcal{M}) \geq \frac{1}{\varepsilon}$. С другой стороны, $d_1 = 1 - \varepsilon \text{mult}_O(\mathcal{M}) - a_1 \leq 0$, а особенности логпары $(\widehat{X}, \varepsilon \widehat{\mathcal{M}} + (\varepsilon \text{mult}_O(\mathcal{M}) + a_1 - 1)E)$ также не являются терминальными в точке Q . По индукции имеем

$$\text{mult}_Q(\widehat{M}_1 \cdot \widehat{M}_2) \geq \begin{cases} \frac{3 - 2\varepsilon \text{mult}_O(\mathcal{M}) - 2a_1}{\varepsilon^2}, & \text{если } \varepsilon \text{mult}_O(\mathcal{M}) + a_1 \geq \frac{1}{2}, \\ \frac{4 - 4\varepsilon \text{mult}_O(\mathcal{M}) - 4a_1}{\varepsilon^2}, & \text{если } \varepsilon \text{mult}_O(\mathcal{M}) + a_1 \leq \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (4.1)$$

а если неравенство (4.1) является равенством, то либо $-a_1 - \varepsilon \text{mult}_O(\mathcal{M}) + 1 \in \mathbb{N}$ и $\text{mult}_Q(\widehat{M}_1) = \text{mult}_Q(\widehat{M}_2) = \frac{2}{\varepsilon}$, либо $\varepsilon \text{mult}_O(\mathcal{M}) + a_1 = 1$ и $\text{mult}_Q(\widehat{M}_1) = \text{mult}_Q(\widehat{M}_2) = \frac{1}{\varepsilon}$.

ЛЕММА 4.3. *Предположим, что $\varepsilon \text{mult}_O(\mathcal{M}) + a_1 \leq \frac{1}{2}$. Тогда выполнено неравенство (1.2). Более того, если неравенство (1.2) является равенством, то либо $-a_1 \in \mathbb{N}$ и $\text{mult}_O(\mathcal{M}) = \frac{2}{\varepsilon}$, либо $a_1 = 0$ и $\text{mult}_O(\mathcal{M}) = \frac{1}{\varepsilon}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $a_1 \leq \frac{1}{2} - \varepsilon \text{mult}_O(\mathcal{M}) \leq -\frac{1}{2}$ и

$$\begin{aligned} \text{mult}_O(M_1 \cdot M_2) &\geq \text{mult}_P^2(\mathcal{M}) + \frac{4 - 4\varepsilon \text{mult}_O(\mathcal{M}) - 4a_1}{\varepsilon^2} \\ &= -\frac{4a_1}{\varepsilon^2} + \left(\text{mult}_O(\mathcal{M}) - \frac{2}{\varepsilon} \right)^2 \geq -\frac{4a_1}{\varepsilon^2}, \end{aligned}$$

получаем неравенство (1.2). Более того, если неравенство (1.2) является равенством, то мы видим, что выполнено равенство $\text{mult}_O(\mathcal{M}) = \frac{2}{\varepsilon}$, откуда следует, что неравенство (4.1) также является равенством. По индукции имеем $-a_1 - 1 = -a_1 - \varepsilon \text{mult}_O(\mathcal{M}) + 1 \in \mathbb{N}$, откуда следует, что $-a_1 \in \mathbb{N}$.

Таким образом, для завершения доказательства теоремы можно считать, что выполнено неравенство $\varepsilon \text{mult}_O(\mathcal{M}) + a_1 \geq \frac{1}{2}$.

ЛЕММА 4.4. *Предположим, что $a_1 \geq -\frac{1}{2}$. Тогда выполнено неравенство (1.2), но неравенство (1.2) не является равенством.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенств $\varepsilon \text{mult}_O(\mathcal{M}) + a_1 \geq \frac{1}{2}$ и $a_1 \geq -\frac{1}{2}$ следует, что

$$\text{mult}_O(M_1 \cdot M_1) \geq \text{mult}_P^2(\mathcal{M}) + \frac{3 - 2\varepsilon \text{mult}_O(\mathcal{M}) - 2a_1}{\varepsilon^2} \geq \frac{2 - 2a_1}{\varepsilon^2},$$

откуда сразу следуют все требуемые нам утверждения.

Таким образом, для завершения доказательства теоремы можно считать, что выполнено неравенство $a_1 \leq -\frac{1}{2}$. В этом случае из неравенства $\text{mult}_O(\mathcal{M}) \geq \frac{1/2 - a_1}{\varepsilon}$ следует, что

$$\text{mult}_O(M_1 \cdot M_1) \geq \text{mult}_P^2(\mathcal{M}) + \frac{3 - 2\varepsilon \text{mult}_O(\mathcal{M}) - 2a_1}{\varepsilon^2} \geq \frac{9/4 - a_1 + a_1^2}{\varepsilon^2} \geq \frac{-4a_1}{\varepsilon^2},$$

откуда сразу следует неравенство (1.2).

ЛЕММА 4.5. *Неравенство (1.2) не является равенством.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что неравенство (1.2) является равенством. Тогда имеют место равенства $a_1 = -\frac{3}{2}$ и $\text{mult}_O(\mathcal{M}) = \frac{1/2 - a_1}{\varepsilon}$, откуда следует, что $\text{mult}_O(\mathcal{M}) = \frac{2}{\varepsilon}$. Таким образом, неравенство (4.1) также должно быть равенством. В этом случае мы видим, что $\frac{1}{2} = \varepsilon \text{mult}_O(\mathcal{M}) + a_1 = 1$ по индукции. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Утверждение теоремы 1.6 полностью доказано.

§ 5. Орбифолды дель Пеццо

Цель настоящего параграфа – показать, как применять теорему 1.4. Все результаты, доказанные в данном параграфе, хорошо известны специалистам. Однако использование теоремы 1.4 позволило существенно упростить их доказательство.

Пусть X – некоторое многообразие Фано такое, что X имеет не более чем факторособенности. Назовем вещественное число

$$\text{lct}(X) = \sup \left\{ \lambda \in \mathbb{Q} \mid \begin{array}{l} \text{логпара } (X, \lambda D) \text{ имеет логканонические особенности} \\ \text{для каждого эффективного } \mathbb{Q}\text{-дивизора } D \equiv -K_X \text{ на } X \end{array} \right\}$$

глобальным логканоническим порогом многообразия Фано X (см. определение A.22 в приложении A).

ТЕОРЕМА 5.1 [10]–[12, приложение A]. *Многообразие X обладает орбифолдной метрикой Кэлера–Эйнштейна, если $\text{lct}(X) > \frac{\dim(X)}{\dim(X)+1}$.*

Покажем, как применить теорему 1.4 вместе с теоремой 5.1 для доказательства существования орбифолдных метрик Кэлера–Эйнштейна на некоторых орбифолдах Фано.

ТЕОРЕМА 5.2 [2]. *Пусть X – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$ степени 6. Тогда $\text{lct}(X) \geq \frac{5}{6}$, если множество $\text{Sign}(X)$ состоит из дювалевских особых точек типа $\mathbb{A}_3$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что множество $\text{Sign}(X)$ состоит из дювалевских особых точек типа $\mathbb{A}_3$. Положим $\omega = \frac{5}{6}$. Предположим, что $\text{lct}(X) < \omega$. Тогда существует эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор D на поверхности X такой, что $D \equiv -K_X$, а особенности логпары $(X, \omega D)$ не являются логканоническими в некоторой точке $P \in X$.

Пусть C – кривая в линейной системе $| -K_X |$ такая, что $P \in C$. Тогда кривая C неприводима, а логпара $(X, \omega C)$ имеет логканонические особенности. Согласно замечанию 2.6 мы можем считать, что $C \not\subset \text{Supp}(D)$.

Отметим, что поверхность X должна быть особой в точке P , поскольку в противном случае мы сразу получаем противоречие:

$$1 = K_X^2 = C \cdot D \geq \text{mult}_P(D) > \frac{1}{\omega} = \frac{6}{5} > 1.$$

Пусть $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ – бирациональный морфизм такой, что он стягивает три неприводимые кривые E_1 , E_2 и E_3 в точку $P \in X$ и индуцирует изоморфизм $\tilde{X} \setminus (E_1 \cup E_2 \cup E_3) \cong X \setminus P$; поверхность $\tilde{X}$ неособа вдоль кривых E_1 , E_2 , E_3 .

Отметим, что имеют место равенства $E_1^2 = E_2^2 = E_3^2 = -2$. Без ограничения общности можно считать, что $E_1 \cdot E_3 = 0$ и $E_1 \cdot E_2 = E_2 \cdot E_3 = 1$.

Пусть $\bar{C}$ – собственный прообраз кривой C на поверхности $\bar{X}$. Тогда $\bar{C} \equiv \pi^*(C) - E_1 - E_2 - E_3$. Пусть $\bar{D}$ – собственный прообраз дивизора D на поверхности $\bar{X}$. Тогда $\bar{D} \equiv \pi^*(D) - a_1 E_1 - a_2 E_2 - a_3 E_3$, где a_1, a_2 и a_3 – некоторые положительные рациональные числа. Тогда

$$\begin{aligned} 1 - a_1 - a_3 = \bar{D} \cdot \bar{C} &\geq 0, & 2a_1 - a_2 = \bar{D} \cdot E_1 &\geq 0, \\ 2a_2 - a_1 - a_3 = \bar{D} \cdot E_2 &\geq 0, & 2a_3 - a_2 = \bar{D} \cdot E_3 &\geq 0, \end{aligned}$$

откуда легко следует, что выполнены неравенства $1 \geq a_1 + a_3$, $2a_1 \geq a_2$, $3a_2 \geq 2a_3$, $2a_3 \geq a_2$, $3a_2 \geq 2a_1$, $a_1 \leq \frac{3}{4}$, $a_2 \leq 1$, $a_3 \leq \frac{3}{4}$. Заметим, что из численной эквивалентности

$$K_{\bar{X}} + \bar{D} + a_1 E_1 + a_2 E_2 + a_3 E_3 \equiv \pi^*(K_X + D)$$

следует, что существует точка $Q \in E_1 \cup E_2 \cup E_3$ такая, что особенности логпары $(\bar{X}, \bar{D} + a_1 E_1 + a_2 E_2 + a_3 E_3)$ не являются логканоническими в точке Q , так как особенности логпары (X, D) не являются логканоническими в точке $P \in X$.

Предположим, что $Q \in E_1$ и $Q \notin E_2$. Тогда особенности логпары $(\bar{X}, \bar{D} + E_1)$ также не являются логканоническими в точке Q . Следовательно,

$$2a_1 - a_2 = \bar{D} \cdot E_1 \geq \text{mult}_Q(\bar{D} \cdot E_1) > 1$$

по теореме 1.1. Таким образом, имеем $1 \geq \frac{4}{3}a_1 \geq 2a_1 - \frac{2}{3}a_1 \geq 2a_1 - a_2 > 1$. Противоречие.

Предположим, что $Q \in E_2$ и $Q \notin E_1 \cup E_3$. Тогда особенности логпары $(\bar{X}, \bar{D} + E_2)$ не являются логканоническими в точке Q . Следовательно,

$$2a_2 - a_1 - a_3 = \bar{D} \cdot E_2 \geq \text{mult}_Q(\bar{D} \cdot E_2) > 1$$

по теореме 1.1. Таким образом, имеем $1 \geq a_2 = 2a_2 - \frac{a_2}{2} - \frac{a_2}{2} \geq 2a_2 - a_1 - a_3 > 1$. Противоречие.

Без ограничения общности можно считать, что $Q = E_1 \cap E_2$. Тогда особенности логпары $(\bar{X}, \bar{D} + a_1 E_1 + a_2 E_2)$ не являются логканоническими в точке Q . С другой стороны, выполнены неравенства $a_1 + \frac{a_2}{2} \leq a_1 + a_3 \leq 1$, так как $2a_3 \geq a_2$. Значит, мы можем применить теорему 1.4 к логпаре $(\bar{X}, \bar{D} + a_1 E_1 + a_2 E_2)$, полагая при этом $M = N = 0$, $A = 2$, $B = \frac{3}{2}$, $\alpha = 1$ и $\beta = \frac{1}{2}$. Таким образом, имеем

$$2a_2 - a_1 - a_3 = \text{mult}_O(\bar{D} \cdot E_2) > \frac{3}{2}a_2 - a_1,$$

так как $\bar{D} \cdot E_1 = 2a_1 - a_2$. Тогда $a_2 > 2a_3$, что является противоречием, так как $2a_3 \geq a_2$.

ТЕОРЕМА 5.3 [2]. Пусть X – особая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$ степени 6 такая, что множество $\text{Sign}(X)$ состоит из дювалевских особых точек типа $\mathbb{A}_4$. Тогда $\text{lct}(X) = \frac{4}{5}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть P – особая точка поверхности X и $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ – бирациональный морфизм такой, что он стягивает четыре неприводимые кривые E_1, E_2, E_3, E_4 в точку $P \in X$ и индуцирует изоморфизм $\bar{X} \setminus (E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4) \cong X \setminus P$; поверхность $\bar{X}$ неособа вдоль кривых E_1, E_2, E_3, E_4 . Имеем $E_1^2 = E_2^2 = E_3^2 = E_4^2 = -2$. Можно считать, что $E_1 \cdot E_3 = E_1 \cdot E_4 = E_2 \cdot E_4 = 0$ и $E_1 \cdot E_2 = E_2 \cdot E_3 = E_3 \cdot E_4 = 1$.

Покажем, что существует единственная неособая неприводимая кривая $\bar{Z} \subset \bar{X}$ такая, что $\pi(\bar{Z}) \sim -2K_X$ и $E_2 \cap E_3 \in Z$. Положим $\omega = \frac{4}{5}$ и $Z = \pi(\bar{Z})$. Тогда $Z \sim \pi^*(-2K_X) - E_1 - 2E_2 - 2E_3 - E_4$, откуда следует, что особенности логпары $(X, \omega Z)$ являются логканоническими, но не являются логтерминальными. В частности, мы видим, что $\text{lct}(X) \leq \omega$.

Предположим, что $\text{lct}(X) < \omega$. Тогда существует такой эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор D на поверхности X , что $D \equiv -K_X$, а особенности логпары $(X, \omega D)$ не являются логканоническими в некоторой точке $O \in X$. Из замечания 2.6 следует, что мы можем считать, что $Z \not\subset \text{Supp}(D)$, так как кривая Z неприводима. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 5.2, мы видим, что можно считать $O = P$.

Пусть $\bar{D}$ – собственный прообраз дивизора D на поверхности $\bar{X}$. Тогда $\bar{D} \equiv \pi^*(D) - a_1 E_1 - a_2 E_2 - a_3 E_3 - a_4 E_4$, где a_1, a_2, a_3 и a_4 – положительные рациональные числа. В этом случае из численной эквивалентности

$$K_{\bar{X}} + \bar{D} + \sum_{i=1}^4 a_i E_i \equiv \pi^*(K_X + D)$$

следует, что существует точка $Q \in E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$ такая, что особенности логпары $(\bar{X}, \bar{D} + a_1 E_1 + a_2 E_2 + a_3 E_3 + a_4 E_4)$ не являются логканоническими в точке Q , так как особенности логпары (X, D) не являются логканоническими в точке $P \in X$.

Пусть C – кривая в линейной системе $| -K_X |$ такая, что $P \in C$. Тогда кривая C неприводима, а логпара $(X, \omega C)$ имеет логканонические особенности. Согласно замечанию 2.6 мы можем считать, что $C \not\subset \text{Supp}(D)$. Пусть $\bar{C}$ является собственным прообразом кривой C на поверхности $\bar{X}$. Тогда $\bar{C} \equiv \pi^*(C) - E_1 - E_2 - E_3 - E_4$ и выполнено неравенство $\bar{D} \cdot \bar{C} \geq 0$. Таким образом, имеем $1 - a_1 - a_4 = \bar{D} \cdot \bar{C} \geq 0$, откуда следует, что $a_1 + a_4 \leq 1$. Аналогично имеем

$$\begin{aligned} 2a_1 - a_2 = \bar{D} \cdot E_1 &\geq 0, & 2a_2 - a_1 - a_3 = \bar{D} \cdot E_2 &\geq 0, \\ 2a_3 - a_2 - a_4 = \bar{D} \cdot E_3 &\geq 0, & 2a_4 - a_3 = \bar{D} \cdot E_4 &\geq 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что $a_1 \leq \frac{4}{5}$, $a_2 \leq \frac{6}{5}$, $a_3 \leq \frac{6}{5}$ и $a_4 \leq \frac{4}{5}$. Из теоремы 2.16 следует, что $\mathbb{LCS}(\bar{X}, \bar{D} + a_1 E_1 + a_2 E_2 + a_3 E_3 + a_4 E_4) = \{Q\}$, поскольку $\omega < \frac{5}{6}$. Аналогично имеем $\frac{4}{5}a_1 + \frac{2}{5}a_2 = \omega a_1 + \frac{\omega a_2}{2} \leq 1$.

Предположим, что $Q \in E_1$ и $Q \notin E_2$. Тогда особенности логпары $(\bar{X}, \bar{D} + E_1)$ не являются логканоническими в точке Q . Следовательно, $2a_1 - a_2 = \bar{D} \cdot E_1 \geq \text{mult}_Q(\bar{D} \cdot E_1) > 1$ по теореме 1.1. Имеем $1 \geq \frac{5}{4}a_1 \geq 2a_1 - \frac{3}{4}a_1 \geq 2a_1 - a_2 > 1$, что является противоречием.

Предположим теперь, что $Q \in E_2$ и $Q \notin E_1 \cup E_3$. Тогда $2a_2 - a_1 - a_3 = \bar{D} \cdot E_2 \geq \text{mult}_Q(\bar{D} \cdot E_2) > 1$ по теореме 1.1. Таким образом, имеем $1 \geq \frac{5}{6}a_2 \geq 2a_2 - \frac{a_2}{2} - \frac{2}{3}a_2 \geq 2a_2 - a_1 - a_3 > 1$, что является противоречием.

Предположим, что $Q = E_1 \cap E_2$. В этом случае мы можем применить теорему 1.4 к логпаре $(\bar{X}, \omega\bar{D} + \omega a_1 E_1 + \omega a_2 E_2)$, полагая при этом $M = N = 0$, $A = 2$, $B = \frac{3}{2}$, $\alpha = 1$ и $\beta = \frac{1}{2}$. Имеем $2a_2 - a_1 - a_3 = \text{mult}_Q(\bar{D} \cdot E_2) > \frac{3}{2}a_2 - a_1$, так как $\bar{D} \cdot E_1 = 2a_1 - a_2$. Тогда $a_2 > 2a_3$, что легко приводит к противоречию.

Для завершения доказательства теоремы можно считать, что $Q = E_2 \cap E_3$. Тогда логпара $(\bar{X}, \omega\bar{D} + \omega a_2 E_2 + \omega a_3 E_3)$ не является логканонической в точке Q . Следовательно,

$$2a_2 - \frac{1}{2}a_2 - a_3 \geq 2a_2 - a_1 - a_3 = \bar{D} \cdot E_2 \geq \text{mult}_Q(\bar{D} \cdot E_2) > \frac{5}{4} - a_3$$

по теореме 1.1. Аналогично имеем

$$2a_3 - a_2 - a_4 = \bar{D} \cdot E_3 \geq \text{mult}_Q(\bar{D} \cdot E_3) > \frac{5}{4} - a_2,$$

откуда следует, что $a_2 > \frac{5}{6}$ и $a_3 > \frac{5}{6}$.

Пусть $\xi: \tilde{X} \rightarrow \bar{X}$ – раздутие точки Q , E – исключительная кривая раздутия ξ , и пусть $\tilde{D}$ – собственный прообраз дивизора $\bar{D}$ на поверхности $\tilde{X}$. Положим $m = \text{mult}_Q(\bar{D})$. Тогда выполнена численная эквивалентность $\tilde{D} \equiv \xi^*(\bar{D}) - mE$. Пусть $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{E}_3$ и $\tilde{E}_4$ – собственные прообразы на поверхности $\tilde{X}$ кривых E_1, E_2, E_3 и E_4 соответственно. Тогда

$$K_{\tilde{X}} + \omega\tilde{D} + \omega a_2 \tilde{E}_2 + \omega a_3 \tilde{E}_3 + (\omega a_2 + \omega a_3 + \omega m - 1)E \equiv \xi^*(K_{\bar{X}} + \omega\bar{D} + \omega a_2 E_2 + \omega a_3 E_3),$$

откуда следует, что существует точка $R \in E$ такая, что особенности логпары $(\tilde{X}, \omega\tilde{D} + \omega a_2 \tilde{E}_2 + \omega a_3 \tilde{E}_3 + (\omega a_2 + \omega a_3 + \omega \text{mult}_Q(\bar{D}) - 1)E)$ не являются логканоническими в точке R .

Пусть $\tilde{Z}$ – собственный прообраз кривой $\bar{Z}$ на поверхности $\tilde{X}$. Тогда

$$0 \leq \tilde{Z} \cdot \tilde{D} = 2 - a_2 - a_3 - \text{mult}_Q(\bar{D}) = 2 - a_2 - a_3 - m,$$

откуда следует, что $m + a_2 + a_3 \leq 2$. В частности, видно, что выполнены неравенства $\omega a_2 + \omega a_3 + \omega m - 1 \leq 2\omega - 1 \leq \frac{3}{5}$, откуда следует, что $\mathbb{LCS}(\tilde{X}, \omega\tilde{D} + \omega a_2 \tilde{E}_2 + \omega a_3 \tilde{E}_3 + (\omega a_2 + \omega a_3 + \omega \text{mult}_Q(\bar{D}) - 1)E) = \{R\}$ по теореме 2.16. Аналогично имеем

$$2a_3 - a_2 - a_4 - m = \tilde{E}_3 \cdot \tilde{D} \geq 0,$$

$$2a_2 - a_1 - a_3 - m = \tilde{E}_2 \cdot \tilde{D} \geq 0,$$

откуда следует, что $E \cdot \tilde{D} = m \leq \frac{1}{2}$.

Предположим, что $Q \notin E_2 \cup E_3$. Тогда особенности логпары $(\tilde{X}, \omega\tilde{D} + (\omega a_2 + \omega a_3 + \omega \text{mult}_Q(\bar{D}) - 1)E)$ не являются логканоническими в точке R . Следовательно,

$$\frac{5}{4} > \frac{1}{2} \geq m = \tilde{D} \cdot E \geq \text{mult}_R(\tilde{D} \cdot E) > \frac{5}{4}$$

по теореме 1.1. Полученное противоречие показывает, что либо $R = \tilde{E}_2 \cap E$, либо $R = \tilde{E}_3 \cap E$.

Без ограничения общности можно считать, что $R = \tilde{E}_2 \cap E$. Тогда особенности логпары $(\tilde{X}, \omega\tilde{D} + \omega a_2 \tilde{E}_2 + (\omega a_2 + \omega a_3 + \omega \text{mult}_Q(\tilde{D}) - 1)E)$ не являются логканоническими в точке R . Теперь, применяя теорему 1.1, имеем

$$\frac{5}{4} - a_2 > \frac{6}{5} - a_2 = 2 - \frac{4}{5} - a_2 \geq 2 - a_2 - a_3 \geq m = \tilde{D} \cdot E \geq \text{mult}_R(\tilde{D} \cdot E) > \frac{5}{4} - a_2,$$

поскольку $m + a_2 + a_3 \leq 2$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

ТЕОРЕМА 5.4 [13]. Пусть X – квазигладкая гиперповерхность во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}(11, 21, 29, 37)$ степени 95. Тогда $\text{lct}(X) = \frac{11}{4}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что поверхность X задана квазиоднородным уравнением

$$t^2 y + t z^2 + x y^4 + x^6 z = 0 \subset \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t]),$$

где $\text{wt}(x) = 11$, $\text{wt}(y) = 21$, $\text{wt}(z) = 29$, $\text{wt}(t) = 37$. Пусть O_x – точка на поверхности X , которая задана уравнениями $y = z = t = 0$. Определим особые точки O_y , O_z и O_t поверхности X аналогичным образом. Тогда точки O_x , O_y , O_z и O_t являются особыми точками поверхности X типов $\frac{1}{11}(5, 2)$, $\frac{1}{21}(1, 2)$, $\frac{1}{29}(11, 21)$, $\frac{1}{37}(11, 29)$ соответственно.

Пусть C_x – кривая, которая высекается на поверхности X уравнением $x = 0$. Тогда $C_x = L_{xt} + R_x$, где L_{xt} и R_x – неприводимые и приведенные кривые на поверхности X такие, что кривая L_{xt} задается уравнениями $x = t = 0$, а кривая R_x задается уравнениями $x = y t + z^2 = 0$. Имеем $\text{lct}(X, \frac{3}{11}C_x) = \frac{11}{4}$, откуда следует, что $\text{lct}(X) \leq \frac{11}{4}$. Пусть C_y – кривая, которая высекается на поверхности X уравнением $y = 0$. Тогда $C_y = L_{yz} + R_y$, где L_{yz} и R_y – неприводимые и приведенные кривые на поверхности X такие, что кривая L_{yz} задается уравнениями $y = z = 0$, а кривая R_y задается уравнениями $y = z t + x^6 = 0$. Пусть C_z – кривая, которая высекается на поверхности X уравнением $z = 0$. Тогда $C_z = L_{yz} + R_z$, где R_z – неприводимая и приведенная кривая, задаваемая уравнениями $z = x y^3 + t^2 = 0$. Пусть C_t – кривая, которая высекается на поверхности X уравнением $t = 0$. Тогда $C_t = L_{xt} + R_t$, где R_t – неприводимая и приведенная кривая, задаваемая уравнениями $t = y^4 + x^5 z = 0$. Численные пересечения дивизоров D , L_{xt} , L_{yz} , R_x , R_y , R_z , R_t на поверхности X определяются несложно. А именно, можно показать, что

$$\begin{aligned} D \cdot L_{xt} &= \frac{1}{7 \cdot 29}, & D \cdot R_x &= \frac{2}{7 \cdot 37}, & D \cdot R_y &= \frac{18}{29 \cdot 37}, \\ D \cdot L_{yz} &= \frac{3}{11 \cdot 37}, & D \cdot R_z &= \frac{2}{7 \cdot 11}, & D \cdot R_t &= \frac{12}{11 \cdot 29}, \\ L_{xt} \cdot R_x &= \frac{2}{21}, & L_{yz} \cdot R_y &= \frac{6}{37}, & L_{yz} \cdot R_z &= \frac{2}{11}, & L_{xt} \cdot R_t &= \frac{4}{29}, \\ R_x^2 &= -\frac{52}{21 \cdot 37}, & L_{xt}^2 &= -\frac{47}{21 \cdot 29}, & R_y^2 &= -\frac{48}{29 \cdot 37}, \\ L_{yz}^2 &= -\frac{45}{11 \cdot 37}, & R_z^2 &= \frac{16}{11 \cdot 21}, & R_t^2 &= \frac{104}{11 \cdot 29}. \end{aligned}$$

Имеем $L_{xt} \cap R_x = \{O_y\}$, $L_{yz} \cap R_y = \{O_t\}$, $L_{yz} \cap R_z = \{O_x\}$, $L_{xt} \cap R_t = \{O_z\}$, а также

$$\min\left(\text{lct}\left(X, \frac{3}{21}C_y\right), \text{lct}\left(X, \frac{3}{29}C_z\right), \text{lct}\left(X, \frac{3}{37}C_t\right)\right) \geq \frac{11}{4}.$$

Положим $\omega = \frac{11}{4}$. Пусть $\text{lct}(X) < \omega$. Тогда существует такой эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор D на поверхности X , что $D \equiv -K_X$, а особенности логпары $(X, \omega D)$ не являются логканоническими в некоторой точке $P \in X$.

Из замечания 2.6 следует, что мы можем считать, что носитель дивизора D не содержит по крайней мере одной неприводимой компоненты каждого дивизора C_x , C_y , C_z и C_t . В этом случае из равенств $D \cdot L_{xt} = \frac{3}{29 \cdot 21}$ и $D \cdot R_x = \frac{6}{37 \cdot 21}$ сразу следует, что $P \neq O_y$. Аналогично имеем $P \neq O_x$. Из равенств $D \cdot L_{xt} = \frac{1}{7 \cdot 29}$ и $D \cdot R_t = \frac{12}{11 \cdot 29}$ следует, что $P \neq O_z$, так как кривая R_t особа в точке O_z и ее орбифолдная кратность в точке O_z равна 4.

Положим $D = mL_{xt} + \Omega$, где m – неотрицательное рациональное число, а Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор, носитель которого не содержит кривую L_{xt} . Тогда $m \leq \frac{4}{11}$, так как логпара $(X, \omega D)$ имеет логканонические особенности в точке O_y . Следовательно,

$$(D - mL_{xt}) \cdot L_{xt} = \frac{3 + 47m}{21 \cdot 29} \leq \frac{4}{11},$$

откуда $P \in L_{xt}$ по теореме 1.1. Аналогично имеем либо $P = O_t$, либо $P \notin C_x \cup C_y \cup C_z \cup C_t$.

Предположим теперь, что $P \neq O_t$. Пусть $\mathcal{L}$ – пучок, который высекается на поверхности X уравнением $\lambda yt + \mu z^2 = 0$, где $[\lambda : \mu] \in \mathbb{P}^1$. Тогда базисное множество пучка $\mathcal{L}$ состоит из кривой L_{yz} и точки O_y . Пусть E – единственная кривая в пучке $\mathcal{L}$, которая проходит через точку P . Тогда кривая E высекается на поверхности X уравнением $z^2 = \alpha yt$ для некоторого ненулевого числа $\alpha \in \mathbb{C}$, так как $P \notin C_x \cup C_y \cup C_z \cup C_t$.

Предположим, что $\alpha \neq -1$. В этом случае кривая E изоморфна кривой, которая задается уравнениями $yt - z^2 = t^2y + xy^4 + x^6z = 0$, откуда следует, что кривая E неособа в точке P . Отметим, что $E = L_{yz} + C$, где C – неприводимая и приведенная кривая, причем известно, что $P \in C$. Имеем $D \cdot C = D \cdot E - D \cdot L_{yz} = \frac{169}{7 \cdot 11 \cdot 37}$ и $C \cdot C > 0$. Теперь мы уже можем легко получить противоречие с теоремой 1.1.

Предположим, что $\alpha = -1$. В этом случае $E = L_{yz} + R_x + M$, где M – неприводимая и приведенная кривая, которая содержит точку P . Легко видеть, что кривая M неособа в точке P . Имеем $D \cdot M = D \cdot E - D \cdot L_{yz} - D \cdot R_x = \frac{147}{7 \cdot 11 \cdot 37}$ и $M \cdot M > 0$. Теперь, как и в предыдущем случае, мы можем легко получить противоречие с теоремой 1.1.

Таким образом, мы видим, что $P = O_t$. Положим $D = \Delta + aL_{yz} + bR_x$, где a и b – неотрицательные рациональные числа, а Δ – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор, носитель которого не содержит кривую L_{yz} и не содержит кривую R_x . Тогда $a > 0$, поскольку в противном случае мы сразу получаем следующее противоречие: $\frac{3}{11} = 37D \cdot L_{yz} \geq \text{mult}_{O_t}(D) > \frac{4}{11}$.

Отметим, что $R_y \not\subset \text{Supp}(\Delta)$, так как $a > 0$. Если $b > 0$, то L_{xt} не содержится в носителе дивизора D , откуда следует, что $\frac{3}{21 \cdot 29} = D \cdot L_{xt} \geq b(R_x \cdot L_{xt}) = \frac{2b}{21}$,

откуда, в свою очередь, следует, что $b \leq \frac{3}{58}$. Аналогично имеем

$$\frac{18}{29 \cdot 37} = D \cdot R_y \geq \frac{6a}{37} + \frac{b}{37} + \frac{\text{mult}_{O_t}(D) - a - b}{37} > \frac{5a}{37} + \frac{4}{11 \cdot 37},$$

отсюда получаем, что $a < \frac{82}{1595}$. Несложно показать, что выполнено равенство $\Delta \cdot L_{yz} = \frac{3}{11 \cdot 37} + a \frac{45}{11 \cdot 37} - \frac{b}{37}$, а также выполнено равенство $\Delta \cdot R_x = \frac{2}{7 \cdot 37} + b \frac{52}{21 \cdot 37} - \frac{a}{37}$. Применим теорему 1.4 к логпаре $(X, \omega\Delta + \omega a L_{yz} + \omega b R_x)$, полагая при этом $M = \frac{3}{11}$, $N = \frac{2}{7}$, $A = \frac{45}{11}$, $B = \frac{52}{21}$, $\alpha = \frac{675}{197}$ и $\beta = \frac{77}{197}$. Получим, что $\frac{24681}{45704} \geq \alpha\omega a + \beta\omega b > 1$. Противоречие.

ТЕОРЕМА 5.5 [13]. Пусть X – квазигладкая гиперповерхность во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}(13, 14, 23, 33)$ степени 79. Тогда $\text{lct}(X) = \frac{65}{32}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поверхность X может быть определена квазиоднородным уравнением

$$z^2t + y^4z + xt^2 + x^5y = 0 \subset \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t]),$$

где $\text{wt}(x) = 13$, $\text{wt}(y) = 14$, $\text{wt}(z) = 23$, $\text{wt}(t) = 33$. Пусть O_x – точка на поверхности X , которая задана уравнениями $y = z = t = 0$. Определим особые точки O_y , O_z и O_t поверхности X аналогичным образом. Тогда точки O_x , O_y , O_z , O_t являются особыми точками поверхности X типов $\frac{1}{13}(1, 2)$, $\frac{1}{14}(13, 5)$, $\frac{1}{23}(13, 14)$, $\frac{1}{33}(14, 23)$ соответственно.

Пусть C_x – кривая, которая высекается на поверхности X уравнением $x = 0$. Тогда $C_x = L_{xz} + R_x$, где L_{xz} и R_x – неприводимые и приведенные кривые на поверхности X такие, что кривая L_{xt} задается уравнениями $x = z = 0$, а кривая R_x задается уравнениями $x = y^4 + zt = 0$. Пусть C_y – кривая, которая высекается на поверхности X уравнением $y = 0$. Тогда $C_y = L_{yt} + R_y$, где L_{yt} и R_y – неприводимые и приведенные кривые на поверхности X такие, что кривая L_{yt} задается уравнениями $y = t = 0$, а кривая R_y задается уравнениями $y = z^2 + xt = 0$. Пусть C_z – кривая, которая высекается на поверхности X уравнением $z = 0$. Тогда $C_z = L_{xz} + R_z$, где R_z – неприводимая и приведенная кривая, задаваемая уравнениями $z = x^4y + t^2 = 0$. Пусть C_t – кривая, которая высекается на поверхности X уравнением $t = 0$. Тогда $C_t = L_{yt} + R_t$, где R_t – неприводимая и приведенная кривая, задаваемая уравнениями $t = x^5 + y^3z = 0$. Численные пересечения дивизоров D , L_{xz} , L_{yt} , R_x , R_y , R_z и R_t на поверхности X легко вычислить. А именно, можно показать, что

$$\begin{aligned} L_{xz}^2 &= -\frac{43}{14 \cdot 33}, & R_x^2 &= -\frac{40}{23 \cdot 33}, & L_{xz} \cdot R_x &= \frac{4}{33}, \\ D \cdot L_{xz} &= \frac{4}{14 \cdot 33}, & D \cdot R_x &= \frac{16}{23 \cdot 33}, \\ L_{yt}^2 &= -\frac{32}{13 \cdot 23}, & R_y^2 &= -\frac{38}{13 \cdot 33}, & L_{yt} \cdot R_y &= \frac{2}{13}, \\ D \cdot L_{yt} &= \frac{4}{13 \cdot 23}, & D \cdot R_y &= \frac{8}{13 \cdot 33}, \\ R_z^2 &= \frac{20}{13 \cdot 14}, & L_{xz} \cdot R_z &= \frac{2}{14}, & D \cdot R_z &= \frac{8}{13 \cdot 14}, & R_t^2 &= \frac{95}{14 \cdot 13}, \\ L_{yt} \cdot R_t &= \frac{5}{23}, & D \cdot R_t &= \frac{20}{14 \cdot 23}, & R_y \cdot R_x &= L_{xz} \cdot R_y = \frac{1}{33}, & R_x \cdot L_{yt} &= \frac{1}{23}. \end{aligned}$$

Имеем $L_{xz} \cap R_x = \{O_t\}$, $L_{xz} \cap R_z = \{O_y\}$, $L_{yt} \cap R_y = \{O_x\}$, $L_{yt} \cap R_t = \{O_z\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{lct}\left(X, \frac{4}{13}C_x\right) &= \frac{65}{32} < \text{lct}\left(X, \frac{4}{14}C_y\right) \\ &= \frac{21}{8} < \text{lct}\left(X, \frac{4}{25}C_t\right) = \frac{33}{10} < \text{lct}\left(X, \frac{4}{23}C_z\right) = \frac{69}{20}, \end{aligned}$$

откуда, в частности, следует, что $\text{lct}(X) \leq \frac{65}{32}$.

Положим $\omega = \frac{65}{32}$. Пусть $\text{lct}(X) < \omega$. Тогда существует такой эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор D на поверхности X , что $D \equiv -K_X$, а особенности логпары $(X, \omega D)$ не являются логканоническими в некоторой точке $P \in X$.

Из замечания 2.6 следует, что для завершения доказательства теоремы мы можем считать, что $\text{Supp}(D)$ не содержит по крайней мере одну неприводимую компоненту каждой кривой C_x , C_y , C_z и C_t . Рассуждая, как при доказательстве теоремы 5.7, мы видим, что $P = O_t$ (см. [13]). Отметим, что кривая L_{xz} должна содержаться в $\text{Supp}(D)$, так как в противном случае $\text{mult}_{O_t}(D) \leq 33(D \cdot L_{xz}) = \frac{2}{7} < \frac{32}{65}$, что является противоречием. Таким образом, мы видим, что $R_x \not\subset \text{Supp}(D)$. Положим $D = \Delta + aL_{xz} + bR_y$, где a и b – неотрицательные рациональные числа, а Δ – такой эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на поверхности X , что носитель дивизора Δ не содержит кривых L_{xz} и R_y . Тогда

$$\frac{16}{23 \cdot 33} = D \cdot R_x \geq a(L_{xz} \cdot R_x) + \frac{\text{mult}_{O_t}(D) - a}{33} > \frac{3a}{33} + \frac{32}{33 \cdot 65},$$

откуда следует, что $a < \frac{304}{4485}$. Если $b \neq 0$, то $L_{yt} \not\subset \text{Supp}(D)$, откуда следует, что $\frac{4}{13 \cdot 23} = D \cdot L_{yt} \geq b(R_y \cdot L_{yt}) = \frac{2b}{13}$, откуда, в свою очередь, следует, что $b \leq \frac{2}{23}$. Легко видеть, что $33(\Delta \cdot L_{xz}) = \frac{4}{14} + a\frac{43}{14} - b$ и $33(\Delta \cdot R_y) = \frac{8}{13} + b\frac{38}{23} - a$. Положим $M = \frac{4}{14}$, $N = \frac{8}{13}$, $A = \frac{43}{14}$, $B = \frac{38}{23}$, $\alpha = \frac{700771}{301108}$ и $\beta = \frac{69069}{150554}$, а затем применим теорему 1.4 к логпаре $(X, \omega\Delta + \omega aL_{xz} + \omega bR_y)$. Тогда $\frac{66727051}{166211616} \geq \alpha\omega a + \beta\omega b > 1$. Противоречие.

ТЕОРЕМА 5.6. Пусть X – квазигладкая гиперповерхность в $\mathbb{P}(11, 17, 24, 31)$ степени 79. Тогда $\text{lct}(X) = \frac{33}{16}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поверхность X может быть задана посредством квази-однородного уравнения

$$t^2y + tz^2 + xy^4 + x^5z = 0 \subset \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t]),$$

где $\text{wt}(x) = 11$, $\text{wt}(y) = 17$, $\text{wt}(z) = 24$, $\text{wt}(t) = 31$. Определим точки O_x , O_y , O_z , O_t так же, как в доказательстве теоремы 5.7. Тогда точки O_x , O_y , O_z , O_t являются особыми точками поверхности X типов $\frac{1}{11}(2, 3)$, $\frac{1}{17}(1, 2)$, $\frac{1}{24}(11, 17)$, $\frac{1}{31}(11, 24)$ соответственно.

Пусть C_x – кривая, которая высекается на поверхности X уравнением $x = 0$. Тогда $C_x = L_{xt} + R_x$, где L_{xt} и R_x – неприводимые и приведенные кривые на поверхности X такие, что кривая L_{xt} задается уравнениями $x = t = 0$, а кривая R_x задается уравнениями $x = yt + z^2 = 0$. Пусть C_y – кривая, которая высекается на поверхности X уравнением $y = 0$. Тогда $C_y = L_{yz} + R_y$, где L_{yz} и

R_y – неприводимые и приведенные кривые на поверхности X такие, что кривая L_{yz} задается уравнениями $y = z = 0$, а кривая R_y задается уравнениями $y = zt + x^5 = 0$. Пусть C_z – кривая, которая высекается на поверхности X уравнением $z = 0$. Тогда $C_z = L_{yz} + R_z$, где R_z – неприводимая и приведенная кривая, задаваемая уравнениями $z = xy^3 + t^2 = 0$. Пусть C_t – кривая, которая высекается на поверхности X уравнением $t = 0$. Тогда $C_t = L_{xt} + R_t$, где R_t – неприводимая и приведенная кривая, задаваемая уравнениями $t = y^4 + x^4z = 0$. Численные пересечения дивизоров $D, L_{xt}, L_{yz}, R_x, R_y, R_z, R_t$ на поверхности X легко вычислить. А именно, можно показать, что

$$\begin{aligned} D \cdot L_{xt} &= \frac{1}{6 \cdot 17}, & D \cdot R_x &= \frac{8}{17 \cdot 31}, & D \cdot R_y &= \frac{5}{6 \cdot 31}, \\ D \cdot L_{yz} &= \frac{4}{11 \cdot 31}, & D \cdot R_z &= \frac{8}{11 \cdot 17}, \\ D \cdot R_t &= \frac{2}{3 \cdot 11}, & L_{xt} \cdot R_x &= \frac{2}{17}, & L_{yz} \cdot R_y &= \frac{5}{31}, \\ L_{yz} \cdot R_z &= \frac{2}{11}, & L_{xt} \cdot R_t &= \frac{1}{6}, & L_{xt}^2 &= -\frac{37}{17 \cdot 24}, \\ R_x^2 &= -\frac{40}{17 \cdot 31}, & R_y^2 &= -\frac{35}{24 \cdot 31}, & L_{yz}^2 &= -\frac{38}{11 \cdot 31}, \\ R_z^2 &= \frac{14}{11 \cdot 17}, & R_t^2 &= \frac{10}{3 \cdot 11}. \end{aligned}$$

Имеем $L_{xt} \cap R_x = \{O_y\}$, $L_{yz} \cap R_y = \{O_t\}$, $L_{yz} \cap R_z = \{O_x\}$, $L_{xt} \cap R_t = \{O_z\}$. Тогда

$$\text{lct}\left(X, \frac{4}{11}C_x\right) = \frac{33}{16} < \min\left(\text{lct}\left(X, \frac{4}{17}C_y\right), \text{lct}\left(X, \frac{4}{24}C_z\right), \text{lct}\left(X, \frac{4}{31}C_t\right)\right),$$

откуда, в частности, следует, что $\text{lct}(X) \leq \frac{33}{16}$.

Положим $\omega = \frac{33}{16}$. Пусть $\text{lct}(X) < \omega$. Тогда существует такой эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор D на поверхности X , что $D \equiv -K_X$, а особенности логпары $(X, \omega D)$ не являются логканоническими в некоторой точке $P \in X$.

Из замечания 2.6 следует, что для завершения доказательства теоремы мы можем считать, что $\text{Supp}(D)$ не содержит по крайней мере одну неприводимую компоненту каждой кривой C_x, C_y, C_z и C_t . В этом случае можно несложно показать, что $P = O_t$, воспользовавшись при этом аргументами доказательства теоремы 5.7 (см. [13]).

Заметим, что кривая L_{yz} содержится в $\text{Supp}(D)$, так как в противном случае $31(D \cdot L_{yz}) = \frac{4}{11} < \frac{16}{33}$, что является противоречием. Таким образом, мы видим, что $R_y \not\subset \text{Supp}(D)$. Положим $D = \Delta + aL_{yz} + bR_x$, где a и b – неотрицательные рациональные числа, а Δ – эффективный дивизор, носитель которого не содержит кривых L_{yz} и R_x . Тогда $\frac{1}{6 \cdot 17} = D \cdot L_{xt} \geq b(R_x \cdot L_{xt}) = \frac{2b}{17}$, откуда следует, что $b \leq \frac{1}{12}$. С другой стороны, имеем

$$\frac{5}{6 \cdot 31} = D \cdot R_y \geq \frac{5a}{31} + \frac{b}{31} + \frac{\text{mult}_{O_t}(D) - a - b}{31} > \frac{4a}{31} + \frac{16}{31 \cdot 33},$$

откуда следует, что $a < \frac{23}{264}$. Известно, что $31(\Delta \cdot L_{yz}) = \frac{4}{11} + a\frac{38}{11} - b$ и $31(\Delta \cdot R_x) = \frac{8}{17} + b\frac{40}{17} - a$, откуда следует, что мы можем применить теорему 1.4 к логпаре

$(X, \omega\Delta + \omega aL_{yz} + \omega bR_x)$, полагая при этом $M = \frac{4}{11}$, $N = \frac{8}{17}$, $A = \frac{38}{11}$, $B = \frac{40}{17}$, $\alpha = \frac{1444}{453}$ и $\beta = \frac{187}{453}$. Имеем $\frac{6221}{9664} \geq \alpha\omega a + \beta\omega b > 1$, что является противоречием.

ТЕОРЕМА 5.7 [13]. Пусть X – квазигладкая гиперповерхность во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}(13, 17, 27, 41)$ степени 95. Тогда $\text{lct}(X) = \frac{65}{24}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поверхность X может быть задана квазиоднородным уравнением

$$z^2t + y^4z + xt^2 + x^6y = 0 \subset \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t]),$$

где $\text{wt}(x) = 13$, $\text{wt}(y) = 17$, $\text{wt}(z) = 27$, $\text{wt}(t) = 41$.

Определим точки O_x, O_y, O_z, O_t так же, как при доказательстве теоремы 5.7. В этом случае данные точки являются особыми точками поверхностей X типов $\frac{1}{13}(1, 2)$, $\frac{1}{17}(13, 7)$, $\frac{1}{27}(13, 17)$, $\frac{1}{41}(17, 27)$ соответственно.

Пусть C_x – кривая, которая высекается на поверхности X уравнением $x = 0$. Тогда $C_x = L_{xz} + R_x$, где L_{xz} и R_x – неприводимые и приведенные кривые на поверхности X такие, что кривая L_{xt} задается уравнениями $x = z = 0$, а кривая R_x задается уравнениями $x = y^4 + zt = 0$. Пусть C_y – кривая, которая высекается на поверхности X уравнением $y = 0$. Тогда $C_y = L_{yt} + R_y$, где L_{yt} и R_y – неприводимые и приведенные кривые на поверхности X такие, что кривая L_{yt} задается уравнениями $y = t = 0$, а кривая R_y задается уравнениями $y = z^2 + xt = 0$. Пусть C_z – кривая, которая высекается на поверхности X уравнением $z = 0$. Тогда $C_z = L_{xz} + R_z$, где R_z – неприводимая и приведенная кривая, задаваемая уравнениями $z = t^2 + x^5y = 0$. Пусть C_t – кривая, которая высекается на поверхности X уравнением $t = 0$. Тогда $C_t = L_{yt} + R_t$, где R_t – неприводимая и приведенная кривая, задаваемая уравнениями $t = x^6 + y^3z = 0$. Численные пересечения дивизоров $D, L_{xz}, L_{yt}, R_x, R_y, R_z, R_t$ на поверхности X легко вычислить. А именно, можно показать, что

$$\begin{aligned} D \cdot L_{xz} &= \frac{3}{17 \cdot 41}, & D \cdot L_{yt} &= \frac{1}{9 \cdot 13}, & D \cdot R_x &= \frac{4}{9 \cdot 41}, \\ D \cdot R_y &= \frac{6}{13 \cdot 41}, & D \cdot R_z &= \frac{6}{13 \cdot 17}, \\ D \cdot R_t &= \frac{2}{3 \cdot 17}, & L_{xz}^2 &= -\frac{55}{17 \cdot 41}, & L_{yt}^2 &= -\frac{37}{13 \cdot 27}, \\ R_x^2 &= -\frac{56}{27 \cdot 41}, & R_y^2 &= -\frac{48}{13 \cdot 41}, \\ R_z^2 &= \frac{28}{13 \cdot 17}, & R_t^2 &= \frac{16}{3 \cdot 17}, & L_{xz} \cdot R_x &= \frac{4}{41}, \\ L_{yt} \cdot R_y &= \frac{2}{13}, & L_{xz} \cdot R_z &= \frac{2}{17}, & L_{yt} \cdot R_t &= \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Имеем $L_{xz} \cap R_x = \{O_t\}$, $L_{xz} \cap R_z = \{O_y\}$, $L_{yt} \cap R_y = \{O_x\}$, $L_{yt} \cap R_t = \{O_z\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{65}{24} &= \text{lct}\left(X, \frac{3}{13}C_x\right) < \frac{51}{12} \\ &= \text{lct}\left(X, \frac{3}{17}C_y\right) < \frac{41}{8} = \text{lct}\left(X, \frac{3}{41}C_t\right) < \frac{21}{4} = \text{lct}\left(X, \frac{3}{27}C_z\right), \end{aligned}$$

откуда следует, что $\text{lct}(X) \leq \frac{65}{24}$.

Положим $\omega = \frac{65}{24}$. Пусть $\text{lct}(X) < \omega$. Тогда существует такой эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор D на поверхности X , что $D \equiv -K_X$, а особенности логпары $(X, \omega D)$ не являются логканоническими в некоторой точке $P \in X$.

Из замечания 2.6 следует, что мы можем считать, что $\text{Supp}(D)$ не содержит по крайней мере одну неприводимую компоненту каждой кривой C_x, C_y, C_z и C_t . Рассуждая, как при доказательстве теоремы 5.7, имеем $P = O_t$ (см. [13]). Если $L_{xz} \not\subseteq \text{Supp}(D)$, то $\frac{24}{65} < \text{mult}_{O_t}(D) \leq 41(D \cdot L_{xz}) = \frac{3}{17} < \frac{24}{65}$, что является противоречием. Таким образом, имеем $L_{xz} \subseteq \text{Supp}(D)$, откуда следует, что $R_x \not\subseteq \text{Supp}(D)$. Положим $D = aL_{xz} + bR_y + \Delta$, где a и b – неотрицательные рациональные числа, а Δ – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор, носитель которого не содержит кривых L_{xz} и R_y . Тогда

$$\frac{4}{9 \cdot 41} = D \cdot R_x \geq a(L_{xz} \cdot R_x) + \frac{\text{mult}_{O_t}(D) - a}{41} > \frac{3a}{41} + \frac{24}{41 \cdot 65},$$

откуда следует, что выполнено неравенство $a \leq \frac{44}{585}$. Если $b \neq 0$, то $\frac{1}{9 \cdot 13} = D \cdot L_{yt} \geq b(R_y \cdot L_{yt}) = \frac{2b}{13}$, откуда следует, что выполнено неравенство $b \leq \frac{1}{18}$. С другой стороны, $41(\Delta \cdot L_{xz}) = \frac{3}{17} + a\frac{55}{17} - b$ и $41(\Delta \cdot R_y) = \frac{6}{13} + b\frac{48}{41} - a$, откуда следует, что можно применить теорему 1.4 к логпаре $(X, \omega\Delta + \omega aL_{xz} + \omega bR_y)$, полагая $M = \frac{6}{13}$, $N = \frac{3}{17}$, $A = \frac{48}{41}$, $B = \frac{55}{17}$, $\alpha = \frac{29952}{19505}$, $\beta = \frac{5729}{19505}$. Тогда

$$\frac{306379}{1053270} \geq \alpha\omega b + \beta\omega a > 1,$$

что является противоречием.

ТЕОРЕМА 5.8 [13]. Пусть X – квазигладкая гиперповерхность во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}(14, 17, 29, 41)$ степени 99. Тогда $\text{lct}(X) = \frac{51}{10}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поверхность X может быть задана квазиоднородным уравнением

$$t^2y + tz^2 + xy^5 + x^5z = 0 \subset \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t]),$$

где $\text{wt}(x) = 14$, $\text{wt}(y) = 17$, $\text{wt}(z) = 29$, $\text{wt}(t) = 41$.

Определим точки O_x, O_y, O_z, O_t так же, как в доказательстве теоремы 5.7. Точки O_x, O_y, O_z, O_t являются особыми точками поверхностей X типов $\frac{1}{14}(3, 13)$, $\frac{1}{17}(12, 7)$, $\frac{1}{29}(11, 17)$, $\frac{1}{41}(14, 29)$ соответственно.

Пусть C_x – кривая, которая высекается на поверхности X уравнением $x = 0$. Тогда $C_x = L_{xt} + R_x$, где L_{xt} и R_x – неприводимые и приведенные кривые на поверхности X такие, что кривая L_{xt} задается уравнениями $x = t = 0$, а кривая R_x задается уравнениями $x = yt + z^2 = 0$. Пусть C_y – кривая, которая высекается на поверхности X уравнением $y = 0$. Тогда $C_y = L_{yz} + R_y$, где L_{yz} и R_y – неприводимые и приведенные кривые на поверхности X такие, что кривая L_{yz} задается уравнениями $y = z = 0$, а кривая R_y задается уравнениями $y = zt + x^5 = 0$. Пусть C_z – кривая, которая высекается на поверхности X уравнением $z = 0$. Тогда $C_z = L_{yz} + R_z$, где R_z – неприводимая и приведенная кривая, заданная уравнениями $z = xy^4 + t^2 = 0$. Пусть C_t – кривая, которая высекается на поверхности X уравнением $t = 0$. Тогда $C_t = L_{xt} + R_t$, где R_t – неприводимая и приведенная кривая, заданная уравнениями $t = y^5 + x^4z = 0$. Численные пересечения дивизоров $D, L_{xt}, L_{yz}, R_x, R_y, R_z, R_t$ на поверхности X

легко вычислить. А именно, можно показать, что

$$\begin{aligned} D \cdot L_{xt} &= \frac{2}{17 \cdot 29}, & D \cdot R_x &= \frac{4}{17 \cdot 41}, & D \cdot R_y &= \frac{10}{29 \cdot 41}, \\ D \cdot L_{yz} &= \frac{1}{7 \cdot 41}, & D \cdot R_z &= \frac{2}{7 \cdot 17}, \\ D \cdot R_t &= \frac{5}{7 \cdot 29}, & L_{xt} \cdot R_x &= \frac{2}{17}, & L_{yz} \cdot R_y &= \frac{5}{41}, \\ L_{yz} \cdot R_z &= \frac{1}{7}, & L_{xt} \cdot R_t &= \frac{5}{29}, & L_{xt}^2 &= -\frac{44}{17 \cdot 29}, \\ R_x^2 &= -\frac{54}{17 \cdot 41}, & R_y^2 &= -\frac{60}{29 \cdot 41}, & L_{yz}^2 &= -\frac{53}{14 \cdot 41}, \\ R_z^2 &= \frac{12}{7 \cdot 17}, & R_t^2 &= \frac{135}{14 \cdot 29}. \end{aligned}$$

Имеем $L_{xt} \cap R_x = \{O_y\}$, $L_{yz} \cap R_y = \{O_t\}$, $L_{yz} \cap R_z = \{O_x\}$, $L_{xt} \cap R_t = \{O_z\}$. Тогда

$$\text{lct}\left(X, \frac{2}{17}C_y\right) = \frac{51}{10} < \min\left(\text{lct}\left(X, \frac{1}{7}C_x\right), \text{lct}\left(X, \frac{2}{29}C_z\right), \text{lct}\left(X, \frac{2}{41}C_t\right)\right),$$

откуда следует, что $\text{lct}(X) \leq \frac{51}{10}$.

Положим $\omega = \frac{51}{10}$. Пусть $\text{lct}(X) < \omega$. Тогда существует такой эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор D на поверхности X , что $D \equiv -K_X$, а особенности логпары $(X, \omega D)$ не являются логканоническими в некоторой точке $P \in X$.

Из замечания 2.6 следует, что для завершения доказательства теоремы мы можем считать, что носитель дивизора D не содержит по крайней мере одну компоненту каждой кривой C_x , C_y , C_z и C_t . Теперь, рассуждая, как при доказательстве теоремы 5.7, мы видим, что $P = O_t$. Положим $D = aL_{yz} + bR_x + \Delta$, где a и b – неотрицательные рациональные числа, а Δ – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор, носитель которого не содержит кривых L_{yz} и R_x . Если $a = 0$, то $\frac{1}{7} = 41(D \cdot L_{yz}) \geq \text{mult}_{O_t}(D) > \frac{10}{51}$, что является противоречием. Значит, выполнено неравенство $a > 0$. Тогда $R_y \notin \text{Supp}(\Delta)$. Если $b > 0$, то $\frac{2}{17 \cdot 29} = D \cdot L_{xt} \geq b(R_x \cdot L_{xt}) = \frac{2b}{17}$, откуда следует, что $b \leq \frac{1}{19}$. Аналогично имеем

$$\frac{10}{29 \cdot 41} = D \cdot R_y \geq \frac{5a}{41} + \frac{b}{41} + \frac{\text{mult}_{O_t}(D) - a - b}{41} > \frac{4a}{41} + \frac{4}{21 \cdot 41},$$

откуда следует, что $a < \frac{47}{1218}$. Имеем равенства $41(\Delta \cdot L_{yz}) = \frac{2}{14} + a\frac{53}{14} - b$ и $41(\Delta \cdot R_x) = \frac{4}{17} + b\frac{54}{17} - a$. Полагая $M = \frac{1}{7}$, $N = \frac{4}{17}$, $A = \frac{53}{14}$, $B = \frac{54}{17}$, $\alpha = \frac{2809}{874}$, $\beta = \frac{119}{437}$ и применяя теорему 1.4 к логпаре $(X, \omega\Delta + \omega aL_{yz} + \omega bR_x)$, получаем

$$\frac{2414323}{3548440} \geq \alpha\omega a + \beta\omega b > 1.$$

Противоречие.

Отметим, что поверхность дель Пеццо, которая удовлетворяет условиям любой из теорем 5.2–5.8, обладает орбифолдной метрикой Кэлера–Эйнштейна согласно теореме 5.1.

§ 6. Группа икосаэдра

Цель данного параграфа – привести одно применение теоремы 1.6.

Зафиксируем вложение групп $\mathbb{A}_5 \cong G_1 \subset \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$, $\mathbb{A}_5 \cong G_2 \subset \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ и индуцируемое вложение

$$\mathbb{A}_5 \times \mathbb{A}_5 \cong G_1 \times G_2 \subset \text{Aut}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2) \cong \text{PSL}(2, \mathbb{C}) \times \text{PSL}(3, \mathbb{C}).$$

Положим $G = G_1 \times G_2$ и $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$. Пусть $\pi_1: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ и $\pi_2: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ – естественные проекции. Тогда $\mathcal{P}(X, G) \supseteq \{\pi_1, \pi_2\}$, где через $\mathcal{P}(X, G)$ обозначена G -гибкость многообразия X (см. определение A.9). Основная цель – доказать следующий результат.

ТЕОРЕМА 6.1. *Имеет место равенство $\mathcal{P}(X, G) = \{\pi_1, \pi_2\}$.*

СЛЕДСТВИЕ 6.2. *Пусть $\gamma: X \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ – произвольное бирациональное отображение. Тогда подгруппа $\gamma \circ G \circ \gamma^{-1} \subset \text{Bir}(\mathbb{P}^3)$ не сопряжена никакой подгруппе в $\text{PSL}(3, \mathbb{C}) \cong \text{Aut}(\mathbb{P}^3) \subset \text{Bir}(\mathbb{P}^3)$.*

ТЕОРЕМА 6.3. *Имеет место изоморфизм групп $\text{Bir}^G(X) \cong \mathbb{A}_5 \times \mathbb{S}_5$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ξ – произвольный G -эквивариантный бирациональный автоморфизм многообразия X . Воспользуемся обозначениями доказательства теоремы 6.1, положив при этом $\bar{X} = X$, $\bar{\pi} = \pi_1$ и $\nu = \xi$. Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 6.1 (см. далее), мы видим, что существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad \xi \quad} & X \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{\quad \sigma \quad} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

где $\sigma \in \text{Aut}^{G_1}(\mathbb{P}^1)$. Тогда из замечания A.26 и теоремы B.10 следует, что либо ξ индуцирует изоморфизм общего слоя расслоения π_1 , либо $\xi \circ \tau$ индуцирует изоморфизм общего слоя расслоения π_1 для некоторого бирационального автоморфизма $\tau \in \text{Bir}^{G_2}(\mathbb{P}^2)$. Теперь несложно показать, что либо отображение ξ является бирегулярным, либо отображение $\xi \circ \tau$ является бирегулярным (см. [14, теорема 1.5] и [15, пример 5.4]). Тогда

$$\text{Bir}^G(X) \cong \text{Aut}^{G_1}(\mathbb{P}^1) \times \text{Bir}^{G_2}(\mathbb{P}^2),$$

однако $\text{Aut}^{G_1}(\mathbb{P}^1) \cong \mathbb{A}_5$, а из теоремы B.10 следует, что $\text{Bir}^{G_2}(\mathbb{P}^2) \cong \mathbb{S}_5$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.1. Предположим, что $\mathcal{P}(X, G) \neq \{\pi_1, \pi_2\}$. Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию. Существует некоторое G -расслоение Мори $\bar{\pi}: \bar{X} \rightarrow \bar{S}$, которое не является бирационально эквивалентным над базой расслоениям π_1 и π_2 , но существует G -эквивариантное бирациональное отображение $\nu: \bar{X} \dashrightarrow X$. Положим $\mathcal{M}_{\bar{X}} = |\bar{\pi}^*(D)|$ для некоторого очень обильного дивизора D на многообразии $\bar{S}$ в случае, когда $\dim(\bar{S}) \neq 0$. Положим $\mathcal{M}_{\bar{X}} = |-mK_{\bar{X}}|$ для достаточно большого и достаточно делимого натурального числа m в случае, когда $\dim(\bar{S}) = 0$. Пусть $\mathcal{M}_X = \nu(\mathcal{M}_{\bar{X}})$.

ЛЕММА 6.4. Для каждого $i \in \{1, 2\}$ существует $\lambda_i \in \mathbb{Q}$ такое, что $\lambda_i > 0$ и $K_X + \lambda_i \mathcal{M}_X \equiv \pi_i^*(H_i)$, где H_i – некоторый $\mathbb{Q}$ -дивизор на $\mathbb{P}^i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование положительных рациональных чисел λ_1 и λ_2 очевидно в случае, когда $\dim(\bar{S}) = 0$. Итак, можно считать, что либо $\bar{S} \cong \mathbb{P}^1$, либо $\dim(\bar{S}) = 2$.

Расслоение $\bar{\pi}$ не является бирационально эквивалентным над базой расслоению π_1 . Таким образом, существование числа λ_1 очевидно. Расслоение $\bar{\pi}$ не является бирационально эквивалентным над базой расслоению π_2 , откуда сразу следует существование числа λ_2 в случае, когда выполнено равенство $\dim(\bar{S}) = 2$. Значит, для завершения доказательства леммы мы можем считать, что $\bar{S} \cong \mathbb{P}^1$.

Предположим, что число λ_2 не существует. В этом случае имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \bar{X} & \xrightarrow{\quad \nu \quad} & X \\ \bar{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ \mathbb{P}^1 & \xleftarrow{\quad \zeta \quad} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

где ζ – некоторое рациональное доминантное отображение. Отметим, что нормализация общего слоя рационального отображения ζ является рациональной кривой, так как общий слой морфизма $\bar{\pi}$ является рациональной поверхностью. С другой стороны, отображение ζ является G_2 -эquivариантным, что противоречит теореме B.10, в которой показано, что $\mathbb{P}^2$ является G_2 -бirationально жесткой поверхностью. Лемма доказана.

Пусть D – общий слой расслоения π_1 . Тогда из теорем A.15, B.10 следует, что либо логпара $(D, \lambda_1 \mathcal{M}_X|_D)$ имеет канонические особенности, либо существует бирациональная инволюция $\tau \in \text{Bir}^G(X)$ такая, что логпара $(D, \lambda'_1 \tau(\mathcal{M}_X)|_D)$ имеет канонические особенности, где $\lambda'_1 \in \mathbb{Q}$ такое, что $K_X + \lambda'_1 \tau(\mathcal{M}_X) \equiv \pi_1^*(H'_1)$ для некоторого $\mathbb{Q}$ -дивизора H'_1 на $\mathbb{P}^1$.

СЛЕДСТВИЕ 6.5. Можно считать, что логпара $(D, \lambda_1 \mathcal{M}_X|_D)$ имеет канонические особенности.

Заметим, что существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ X & \xleftarrow{\quad \nu \quad} & \bar{X} \end{array}$$

где α и β – G -equivариантные бирациональные морфизмы, а W – неособое многообразие. Пусть $\mathcal{M}_W$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}_{\bar{X}}$ на многообразии W и ε – некоторое рациональное число. Тогда

$$\alpha^*(K_X + \varepsilon \mathcal{M}_X) + \sum_{i=1}^k a_i^\varepsilon F_i \equiv K_W + \varepsilon \mathcal{M}_W \equiv \beta^*(K_{\bar{X}} + \varepsilon \mathcal{M}_{\bar{X}}) + \sum_{i=1}^r b_i^\varepsilon E_i,$$

где a_i^ε – некоторое рациональное число, b_i^ε – положительное рациональное число, F_i – простой исключительный дивизор морфизма α , а E_i – простой исключительный дивизор морфизма β .

ЛЕММА 6.6. *Имеет место неравенство $\lambda_1 > \lambda_2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\lambda_2 \geq \lambda_1$. Тогда дивизор H_2 является $\mathbb{Q}$ -эффективным и численно эффективным. Согласно леммам A.13, A.14 мы можем считать, что существует $l \in \{1, \dots, k\}$ такое, что дивизоры $F_1, \dots, F_l$ являются всеми α -исключительными дивизорами такими, что $F_1, \dots, F_l$ не являются исключительными дивизорами морфизма β , а все рациональные числа $a_1^{\lambda_2}, \dots, a_l^{\lambda_2}$ отрицательные. Положим $Z_i = \alpha(F_i)$ для каждого $i \in \{1, \dots, r\}$. Тогда подмногообразие $\pi_2(Z_i)$ является либо неприводимой кривой, либо замкнутой точкой.

Предположим, что $\dim(\pi_2(Z_i)) = 1$. Пусть Γ_i – слой расслоения π_2 над общей точкой подмногообразия $\pi_2(Z_i)$. Тогда

$$2 = \lambda_2 \mathcal{M}_X \cdot \Gamma_i \geq \lambda_2 \text{mult}_{Z_i}(\mathcal{M}_X) |Z_i \cap \Gamma_i| \geq 12 \lambda_2 \text{mult}_{Z_i}(\mathcal{M}_X),$$

так как любая G_1 -орбита в $\mathbb{P}^1$ состоит из по крайней мере 12 точек (см. [16]). Тогда $i > l$.

Итак, показано, что $\pi_2(Z_i)$ – замкнутая точка для каждого $i \in \{1, \dots, l\}$. Из [17, предложение 1] следует, что существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 & U & \xrightarrow{\delta} & W & \\
 \gamma \swarrow & & & \searrow \alpha & \searrow \beta \\
 \mathbb{P}^1 \times S & \xrightarrow{v} & X & \xleftarrow{\nu} & \bar{X} \\
 \downarrow \iota & & \downarrow \pi_2 & & \\
 S & \xrightarrow{\omega} & \mathbb{P}^2 & &
 \end{array}$$

такая, что S – гладкая поверхность, ω – G_2 -инвариантный бирациональный морфизм, v – индуцированный бирациональный морфизм, U – гладкое трехмерное многообразие, γ и δ – G -инвариантные бирациональные морфизмы и $\dim(\iota \circ \gamma(\bar{F}_i)) = 1$ для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$, где $\bar{F}_i$ – собственный прообраз дивизора F_i на многообразии U . Положим $V = \mathbb{P}^1 \times S$.

Пусть $\mathcal{M}_U$ и $\mathcal{M}_V$ – собственные прообразы линейной системы $\mathcal{M}_X$ на многообразиях U и V соответственно. Тогда

$$K_U + \lambda_2 \mathcal{M}_U \equiv \gamma^*(K_V + \lambda_2 \mathcal{M}_V) + \sum_{i=1}^k c_i^{\lambda_2} \bar{F}_i + \sum_{i=1}^s d_i^{\lambda_2} B_i,$$

где $c_i^{\lambda_2}$ и $d_i^{\lambda_2}$ – некоторые рациональные числа, а B_i – исключительный дивизор бирационального морфизма δ . Отметим, что дивизор $\bar{F}_i$ не обязательно является исключительным дивизором бирационального морфизма γ . А именно, если $\bar{F}_i$ не является исключительным дивизором бирационального морфизма γ , то выполнено равенство $c_i^{\lambda_2} = 0$.

Возьмем такой G_2 -инвариантный дивизор R на поверхности S , что $K_V + \lambda_2 \mathcal{M}_V \equiv \iota^*(R)$. Имеем $D \cong \mathbb{P}^2$. Отождествим поверхность S с собственным прообразом дивизора D на многообразии V . В этом случае имеет место численная эквивалентность $R \equiv K_S + \lambda_2 \mathcal{M}_V|_S$, а линейная система $\mathcal{M}_V|_S$ является собственным прообразом линейной системы $\mathcal{M}_X|_D$. С другой стороны, имеет место неравенство $\kappa(D, \lambda_2 \mathcal{M}_X|_D) \geq 0$, поскольку логпара $(D, \lambda_1 \mathcal{M}_X|_D)$ имеет не более чем канонические особенности и выполнено неравенство $\lambda_2 \geq \lambda_1$. Мы видим, что дивизор R является $\mathbb{Q}$ -эффективным.

Из лемм A.13, A.14 следует, что $c_t^{\lambda_2} < 0$ для некоторого $t \in \{1, \dots, l\}$. С другой стороны, имеет место равенство $\dim(\iota \circ \gamma(\bar{F}_t)) = 1$, откуда мы сразу можем вывести противоречие, рассуждая точно так же, как и при исключении случая $\dim(\pi_2(Z_i)) = 1$. Лемма доказана.

Таким образом, выполнена численная эквивалентность $H_1 \equiv rF$ для некоторого положительного рационального числа r , так как $\lambda_2 < \lambda_1$. Тогда

$$K_W + \lambda_1 \mathcal{M}_W \equiv \alpha^*(rD) + \sum_{i=1}^k a_i^{\lambda_1} F_i.$$

Положим $a_i = a_i^{\lambda_1}$ для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$, и пусть

$$\mathcal{J} = \{P \in \mathbb{P}^1 \mid \exists i \in \{1, \dots, k\}: P \in \pi_1 \circ \alpha(F_i), \pi_1 \circ \alpha(F_i) \neq \mathbb{P}^1, a_i < 0\}$$

и D_λ – слой морфизма π_1 над точкой $\lambda \in \mathbb{P}^1$. Тогда $D_\lambda \cong \mathbb{P}^2$ и имеет место численная эквивалентность $\alpha^*(D_\lambda) \equiv \bar{D}_\lambda + \sum_{i=1}^k b_i^\lambda F_i$, где $\bar{D}_\lambda$ – собственный прообраз поверхности D_λ на многообразии W , а b_i^λ – некоторое неотрицательное целое число. Отметим, что $b_i^\lambda \neq 0$ в том и только в том случае, когда существует $\lambda \in \mathcal{J}$ такое, что $\alpha(F_i) \subset D_\lambda$. Отметим также, что $\mathcal{J} \neq \emptyset$ по следствию 6.5 и леммам A.13, A.14. Для каждого $\lambda \in \mathcal{J}$ положим

$$\delta_\lambda = \max \left\{ -\frac{a_i}{b_i^\lambda} \mid \alpha(F_i) \subset D_\lambda, a_i < 0 \right\} > 0$$

и $\delta_\lambda = 0$ для каждого $\lambda \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathcal{J}$. Тогда из определения 2.7 и следствия 6.5 следует, что $\delta_\lambda = -c_{D_\lambda}^1(X, \lambda_1 \mathcal{M}_X, D_\lambda)$.

ЛЕММА 6.7. *Выполнено неравенство $\sum_{\lambda \in \mathcal{J}} \delta_\lambda \geq r$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что выполнено строгое неравенство $\sum_{\lambda \in \mathcal{J}} \delta_\lambda < r$. Тогда

$$K_W + \lambda_1 \mathcal{M}_W \equiv \alpha^* \left(\left(r - \sum_{\lambda \in \mathcal{J}} \delta_\lambda \right) D \right) + \sum_{\lambda \in \mathcal{J}} \delta_\lambda \bar{D}_\lambda + \sum_{i=1}^k (a_i + \delta_\lambda b_i^\lambda) F_i,$$

где $a_i + \delta_\lambda b_i^\lambda \geq 0$ для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$. Отсюда получаем $\kappa(\bar{X}, \lambda_1 \mathcal{M}_{\bar{X}}) = \kappa(X, \lambda_1 \mathcal{M}_X) = \kappa(W, \lambda_1 \mathcal{M}_W) = 1$, что является противоречием, поскольку выполнено либо $\kappa(\bar{X}, \lambda_1 \mathcal{M}_{\bar{X}}) \leq 0$, либо $\kappa(\bar{X}, \lambda_1 \mathcal{M}_{\bar{X}}) = 3$.

СЛЕДСТВИЕ 6.8. *Для каждого подмножества рациональных чисел $\{c_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{J}}$ такого, что выполнено неравенство $\sum_{\lambda \in \mathcal{J}} c_\lambda \leq r$, имеем $\mathbb{CS}(X, \lambda_1 \mathcal{M}_X - \sum_{\lambda \in \mathcal{J}} c_\lambda D_\lambda) \neq \emptyset$.*

Пусть $Z \cong \mathbb{P}^1$ – некоторый слой расслоения π_2 , и пусть C – прямая в $D \cong \mathbb{P}^2$. Тогда $\text{NE}(X) = \mathbb{R}_{\geq 0}Z \oplus \mathbb{R}_{\geq 0}C$ и $K_X^2 \equiv 9Z + 12C$. Пусть M_1 и M_2 – общие дивизоры в линейной системе $\mathcal{M}_X$. Положим $T_0 = \lambda_1^2 M_1 \cdot M_2$. Тогда

$$T_0 = Z_X + \sum_{\lambda \in \mathbb{P}^1} C_\lambda \equiv 9Z + (12 + 6r)C,$$

где C_λ – эффективный цикл, компоненты которого содержатся в слое морфизма π_1 над точкой $\lambda \in \mathbb{P}^1$, а Z_X – эффективный цикл такой, что каждая компонента цикла Z_X не содержится ни в каком слое расслоения π_1 . Однако $12 + 6r \leq 12 + 6 \sum_{\lambda \in \mathcal{J}} \delta_\lambda$ по лемме 6.7. Возьмем $\beta_\lambda \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ такое, что $C_\lambda \equiv \beta_\lambda C$. Тогда

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{J}} \beta_\lambda \leq \sum_{\lambda \in \mathbb{P}^1} \beta_\lambda \leq 12 + 6r \leq 12 + 6 \sum_{\lambda \in \mathcal{J}} \delta_\lambda,$$

так как кривые Z и C порождают конус эффективных циклов $\text{NE}(X)$.

Обозначим G_1 -орбиту точки $\lambda \in \mathbb{P}^1$ через O_λ^1 . Тогда

$$\sum_{O_\lambda^1, \lambda \in \mathcal{J}} \beta_\lambda |O_\lambda^1| \leq 12 + 6r \leq 12 + 6 \sum_{O_\lambda^1, \lambda \in \mathcal{J}} \delta_\lambda |O_\lambda^1|,$$

откуда следует, что существует точка $\omega \in \mathbb{P}^1$ такая, что $\beta_\omega |O_\omega^1| \leq 12 + 6\delta_\omega |O_\omega^1|$, где $|O_\omega^1| \geq 12$ (см. [16]).

СЛЕДСТВИЕ 6.9. *Существует $t \in \{1, \dots, k\}$ такое, что $\alpha(F_t) \subset D_\omega$ и $\beta_\omega \leq 1 - 6 \frac{a_t}{b_t^\omega}$, где*

$$\frac{a_t}{b_t^\omega} = -\delta_\omega = \min \left\{ \frac{a_i}{b_i^\omega} \mid \alpha(F_i) \subset D_\omega, a_i < 0 \right\} = c_{D_\omega}^1(X, \lambda_1 \mathcal{M}_X, D_\omega),$$

логпара $(X, \lambda_1 \mathcal{M}_X - \delta_\omega D_\omega)$ имеет канонические особенности вдоль D_ω , но $\alpha(F_t) \in \mathbb{CS}(X, \lambda_1 \mathcal{M}_X + \delta_\omega D_\omega)$.

Из доказательства леммы B.13 следует, что не существует G_2 -инвариантных кривых на $D_\omega \cong \mathbb{P}^2$ степеней 1, 3 и 5, существует единственная G_2 -инвариантная коника $\Gamma_2 \subset D_\omega \cong \mathbb{P}^2$, коника Γ_2 неособа и неприводима, действие группы G_2 на кривой $\Gamma_2 \cong \mathbb{P}^1$ индуцирует вложение $G_2 \subset \text{Aut}(\Gamma_2) \cong \mathbb{PGL}(2, \mathbb{C})$, каждая G_2 -орбита в $D_\omega \cong \mathbb{P}^2$ состоит из не менее чем шести точек, каждая G_2 -орбита в Γ_2 состоит из не менее чем 12 точек (см. [16]).

ЛЕММА 6.10. *Имеет место равенство $\dim(\alpha(F_t)) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что подмногообразие $\alpha(F_t)$ является неприводимой кривой. Положим $\Lambda = \alpha(F_t)$. В этом случае имеет место неравенство $\text{mult}_\Lambda(\mathcal{M}_X) > \frac{1}{\lambda_1}$, и, заменяя, если нужно, дивизор F_t на его G -орбиту, мы можем считать, что подмногообразие Λ является G_2 -инвариантной кривой. Пусть L – общая прямая в $D_\omega \cong \mathbb{P}^2$. Тогда

$$\frac{3}{\lambda_1} = L \cdot \mathcal{M}_X > \frac{L \cdot \Lambda}{\lambda_1},$$

откуда следует, что $\Lambda = \Gamma_2$. Положим $C_\omega = m\Lambda + \Delta$, где Δ – эффективный цикл такой, что $\Lambda \not\subseteq \text{Supp}(\Delta)$. Тогда

$$m \geq \begin{cases} 1 + 2\delta_\omega, & \text{если } \delta_\omega \leq \frac{1}{2}, \\ 4\delta_\omega, & \text{если } \delta_\omega \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

согласно теореме 1.6. С другой стороны, ранее было показано, что выполнены неравенства $\beta_\omega \geq 2m$ и $\beta_\omega \leq 1 + 6\delta_\omega$ (см. следствие 6.9). Имеем

$$\frac{1}{2} + 3\delta_\omega \geq \begin{cases} 1 + 2\delta_\omega, & \text{если } \delta_\omega \leq \frac{1}{2}, \\ 4\delta_\omega, & \text{если } \delta_\omega \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

откуда следует, что $\delta_\omega = \frac{1}{2}$ и $m = 2$, но это невозможно по теореме 1.6. Лемма доказана.

Положим $P = \alpha(F_t)$. Обозначим G_2 -орбиту точки $P \in D_\omega$ через O_P^2 .

ЛЕММА 6.11. *Выполнены неравенства $\text{mult}_P(Z_X) \leq \frac{3}{2}$ и $\text{mult}_P(C_\omega) \leq \frac{\beta_\omega}{2}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $r = |O_P^2|$. Тогда $r \geq 6$. Имеем

$$\begin{aligned} 9 &= \left(Z_X + \sum_{\lambda \in \mathbb{P}^1} C_\lambda \right) \cdot D_\omega = Z_X \cdot D_\omega \geq \sum_{Q \in O_P^2} \text{mult}_Q(Z_X) \\ &= r \text{mult}_P(Z_X) \geq 6 \text{mult}_P(Z_X), \end{aligned}$$

откуда следует, что $\text{mult}_P(Z_X) \leq \frac{3}{2}$. Покажем, что $\text{mult}_P(C_\omega) \leq \frac{\beta_\omega}{2}$.

Рассмотрим кривую C_ω как эффективный G_2 -инвариантный $\mathbb{Q}$ -дивизор на поверхности $\mathbb{P}^2 \cong D_\omega$ степени β_ω . Тогда $C_\omega = m\Gamma_2 + \Delta$, где $m \in \mathbb{Q}$ такое, что $\frac{\beta_\omega}{2} \geq m \geq 0$, а Δ – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор, носитель которого не содержит кривую Γ_2 .

Предположим, что $P \in \Gamma_2$. Тогда

$$2(\beta_\omega - 2m) = \Gamma_2 \cdot \Delta \geq \sum_{Q \in O_P} \text{mult}_Q(\Delta) = r(\text{mult}_P(C_\omega) - m) \geq r(\text{mult}_P(C_\omega) - m)$$

и выполнено неравенство $r \geq 12$ (см. [16]). Таким образом, имеем

$$\text{mult}_P(C_\omega) \leq \frac{2\beta_\omega + (r-4)m}{r} \leq \frac{2\beta_\omega + (r-4)\beta_\omega/2}{r} = \frac{\beta_\omega}{2},$$

так как $r \geq 4$. Значит, для завершения доказательства мы можем считать, что $P \notin \Gamma_2$.

Пусть $\text{mult}_P(C_\omega) > \frac{\beta_\omega}{2}$. Тогда $\text{mult}_P(\Delta) > \frac{\beta_\omega}{2}$ и существует такое рациональное число μ , что имеют место неравенства $\text{mult}_P(\mu\Delta) \geq 2$ и $\mu < \frac{4}{\beta_\omega}$. В частности, мы видим, что $O_P^2 \subseteq \text{LCS}(\mathbb{P}^2, \mu\Delta)$.

Предположим, что существует G_2 -инвариантная приведенная кривая $\Omega \subset \mathbb{P}^2$ такая, что $\mu\Delta = v\Omega + \Upsilon$, где $v \geq 1$, а Υ – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор такой, что $\Omega \not\subseteq \text{Supp}(\Upsilon)$. Тогда

$$4 > \mu\beta_\omega - 2m\mu = \mu\Delta \cdot H = (v\Omega + \Upsilon) \cdot H \geq v\Omega \cdot H \geq \Omega \cdot H,$$

где H – общая прямая в $\mathbb{P}^2$. Итак, мы видим, что $\Omega = \Gamma_2$. Противоречие.

Показано, что схема $\mathcal{L}(\mathbb{P}^2, \mu\Delta)$ нульмерна, а ее носитель содержит множество O_P^2 . Из теоремы 2.14 следует существование точной последовательности групп

$$\mathbb{C}^3 \cong H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}(\mathbb{P}^2, \mu\Delta)}) \longrightarrow 0,$$

откуда следует, что $r \leq 3$. С другой стороны, ранее мы показали, что выполнено неравенство $r \geq 6$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

ЛЕММА 6.12. *Имеет место неравенство $\text{mult}_P(\mathcal{M}_X) < \frac{2+\delta_\omega}{\lambda_1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\text{mult}_P(\mathcal{M}_X) \geq \frac{2+\delta_\omega}{\lambda_1}$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\beta_\omega}{2} &\geq \text{mult}_P(C_\omega) \geq \lambda_1^2 \text{mult}_P(M_1 \cdot M_2) - \text{mult}_P(Z_X) \geq \lambda_1^2 \text{mult}_P^2(\mathcal{M}_X) - \frac{3}{2} \\ &\geq \delta_\omega^2 + 2\delta_\omega + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

по лемме 6.11, но $\beta_\omega \leq 1 + 6\delta_\omega$ по следствию 6.9, что является противоречием.

Положим $X_0 = X$ и $\Theta_0 = P$. В этом случае существуют натуральные числа N и K такие, что $N \geq K \geq 2$, и существует последовательность раздутий

$$X_N \xrightarrow{\psi_{N,N-1}} X_{N-1} \xrightarrow{\psi_{N-1,N-2}} \cdots \xrightarrow{\psi_{3,2}} X_2 \xrightarrow{\psi_{2,1}} X_1 \xrightarrow{\psi_{1,0}} X_0$$

такая, что выполнены следующие условия: морфизм $\psi_{1,0}$ является раздутием точки Θ_0 ; для каждого $i \in \{2, \dots, K\}$ морфизм $\psi_{i,i-1}$ является раздутием точки $\Theta_{i-1} \in G_{i-1} \cong \mathbb{P}^2$, где G_{i-1} — исключительный дивизор бирационального морфизма $\psi_{i-1,i-2}$; морфизм $\psi_{K+1,K}$ является раздутием неприводимой кривой $\Theta_K \subset G_K \cong \mathbb{P}^2$; для каждого $i \in \{K+2, \dots, N\}$ морфизм $\psi_{i,i-1}$ является раздутием некоторой неприводимой кривой $\Theta_{i-1} \subset G_{i-1}$ такой, что $\psi_{i-1,i-2}(\Theta_{i-1}) = \Theta_{i-1}$, где G_{i-1} — исключительный дивизор бирационального морфизма $\psi_{i-1,i-2}$; дивизоры G_N и F_t задают одно и то же дискретное нормирование поля рациональных функций многообразия X . При $N \geq j \geq i \geq 0$ обозначим через G_i^j , $\mathcal{M}_{X_j}$ и D_ω^j собственные прообразы на многообразии X_j дивизора G_i , линейной системы $\mathcal{M}_X$ и поверхности D_ω соответственно и положим $\psi_{j,i} = \psi_{i+1,i} \circ \cdots \circ \psi_{j,j-1}$, подразумевая при этом, что $\psi_{j,j} = \text{id}_{X_j}$. Тогда

$$K_{X_N} + \lambda_1 \mathcal{M}_{X_N} \equiv \psi_{N,0}^*(rD_\omega) + \sum_{i=1}^N c_i G_i^N,$$

где $c_i \in \mathbb{Q}$ и $c_N = a_t$. Аналогично получаем $\psi_{N,0}^*(D_\omega) \equiv D_\omega^N + \sum_{i=1}^N d_i G_i^N$, где $d_i \in \mathbb{N}$ и $d_N = b_t^\omega$. Имеем $c_N < 0$ и $\delta_\omega = -\frac{c_N}{d_N}$. Можно считать, что $-\delta_\omega = \frac{a_t}{b_t^\omega} = \frac{c_N}{d_N} < \frac{c_i}{d_i}$ при каждом $i < N$. Отметим, что при $i \geq K$ подмногообразие Θ_i априори может быть особой кривой. Однако из леммы 6.12 легко следует, что кривая Θ_K является прямой в $G_K \cong \mathbb{P}^2$, а при $i > K$ кривая Θ_i является сечением морфизма $\psi_{i-1,i-2}|_{G_{i-1}}: G_{i-1} \rightarrow \Theta_{i-2} \cong \mathbb{P}^1$, откуда имеем, в частности, что $\Theta_i \cong \mathbb{P}^1$ для $i \geq K$.

Пусть Γ – ориентируемый граф, множество вершин которого состоит из исключительных поверхностей $G_1, \dots, G_N$, а множество ребер графа Γ определено соотношением

$$(G_j, G_i) \in \Gamma \iff j > i, \quad \Theta_{j-1} \subset G_i^{j-1} \subset X_{j-1},$$

где (G_j, G_i) – ребро от вершины G_j к вершине G_i . Пусть P_i – число ориентуемых путей в графе Γ , которые идут от вершины G_N к вершине G_i . Тогда

$$c_N = \sum_{i=1}^K P_i(2 - \nu_i) + \sum_{i=K+1}^N P_i(1 - \nu_i),$$

где $\nu_i = \lambda_1 \text{mult}_{P_{i-1}}(\mathcal{M}_{X_{i-1}})$. Отметим, что $(G_i, G_{i-1}) \in \Gamma$ для каждого $i \in \{1, \dots, N\}$. Положим $\Sigma_0 = \sum_{i=1}^K P_i$ и $\Sigma_1 = \sum_{i=K+1}^N P_i$. Пусть M – наибольшее натуральное число такое, что $M \leq K$ и $P_{M-1} \in F_\omega^{M-1}$. Положим $\Sigma'_0 = \sum_{i=1}^M P_i$. Тогда

$$\text{mult}_P(Z_X)\Sigma_0 + \text{mult}_P(C_\omega)\Sigma'_0 \geq \frac{(2\Sigma_0 + \Sigma_1 - c_N)^2}{\Sigma_0 + \Sigma_1}$$

согласно работе [18]. Отметим, что $d_N \geq \Sigma'_0 \leq \Sigma_0$. С другой стороны, имеем

$$\text{mult}_P(C_\omega) \leq \frac{\beta_\omega}{2} \leq \frac{1}{2} + 3\delta_\omega = \frac{1}{2} - 3\frac{c_N}{d_N}$$

по лемме 6.11 и следствию 6.9. Таким образом, мы видим, что

$$\left(\text{mult}_P(Z_X) + \frac{1}{2}\right)\Sigma_0 - 3c_N \geq \frac{(2\Sigma_0 + \Sigma_1 - c_N)^2}{\Sigma_0 + \Sigma_1},$$

где $c_N < 0$ и $\text{mult}_P(Z_X) \leq \frac{3}{2}$. Значит, выполнено неравенство $2\Sigma_0 - 3c_N \geq \frac{(2\Sigma_0 + \Sigma_1 - c_N)^2}{\Sigma_0 + \Sigma_1}$.

ЛЕММА 6.13. *Имеет место неравенство $\text{mult}_P(Z_X) \leq \frac{3}{4}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку особенности логпары $(X, \lambda_1 \mathcal{M}_X)$ не являются каноническими в точке $P \in D_\omega$, то особенности логпары $(X, \lambda_1 \mathcal{M}_X + D_\omega)$ не являются логканоническими в точке P . Значит, из теоремы 2.17 следует, что особенности логпары $(D_\omega, \lambda_1 \mathcal{M}_X|_{D_\omega})$ также не являются логканоническими в точке P . Рассмотрим рациональное число μ такое, что имеют место неравенства $0 < \mu < \lambda_1$, а особенности логпары $(D_\omega, \mu \mathcal{M}_X|_{D_\omega})$ не являются логканоническими в точке P . Тогда локус $\text{LCS}(D_\omega, \mu \mathcal{M}_X|_{D_\omega})$ связан по теореме 2.16. Рассуждая, как при доказательстве леммы 6.11, мы видим, что либо подсхема $\mathcal{L}(D_\omega, \lambda_1 \mathcal{M}_X|_{D_\omega})$ нульмерна, либо $P \in \Gamma_2$. Если подсхема $\mathcal{L}(D_\omega, \lambda_1 \mathcal{M}_X|_{D_\omega})$ нульмерна, то $|O_P^2| = 1$, что невозможно, поскольку $|O_P^2| \geq 6$. Таким образом, мы видим, что $P \in \Gamma_2$. Тогда $|O_P^2| \geq 12$ (см. [16]). Имеем

$$\begin{aligned} 9 &= \left(Z_X + \sum_{\lambda \in \mathbb{P}^1} C_\lambda\right) \cdot D_\omega \\ &= Z_X \cdot D_\omega \geq \sum_{Q \in O_P^2} \text{mult}_Q(Z_X) = |O_P^2| \text{mult}_P(Z_X) \geq 12 \text{mult}_P(Z_X), \end{aligned}$$

откуда следует, что $\text{mult}_P(Z_X) \leq \frac{3}{4}$.

Итак, показано, что $c_N < 0$, $\Sigma_0 \geq 1$, $\Sigma_1 \geq 1$ и

$$\frac{5}{4}\Sigma_0 - 3c_N \geq \frac{(2\Sigma_0 + \Sigma_1 - c_N)^2}{\Sigma_0 + \Sigma_1},$$

что, как легко видеть, является противоречием. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 6.1.

Приложение А. Нерациональность

Пусть X – многообразие, $\pi: X \rightarrow S$ – морфизм, G – некоторая конечная подгруппа группы $\text{Aut}(X)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ А.1. Морфизм π называется *G -расслоением Мори*, если выполнены следующие условия: морфизм π является G -эquivariantным, многообразие X имеет терминальные особенности, каждый G -инвариантный дивизор Вейля на X является $\mathbb{Q}$ -дивизором Картье, морфизм π сюръективен и $\pi_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_S$, дивизор $-K_X$ является π -обильным, выполнены неравенство $\dim(S) < \dim(X)$ и равенство $\dim_{\mathbb{Q}}(\text{Pic}^G(X/S) \otimes \mathbb{Q}) = 1$.

Предположим, что морфизм π является G -расслоением Мори. В этом случае многообразие X является рационально связным в том и только в том случае, когда многообразие S является рационально связным (см. [19], [20]).

ЗАМЕЧАНИЕ А.2. Группа G естественным образом действует на многообразии S , хотя это действие не обязательно точное. Можно показать, что каждый G -инвариантный дивизор Вейля на многообразии S является $\mathbb{Q}$ -дивизором Картье (см. [21]).

Предположим, дополнительно, что X является рационально связным. Тогда

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\text{Pic}^G(X) \otimes \mathbb{Q}) = \dim_{\mathbb{Q}}(\text{Pic}^G(S) \otimes \mathbb{Q}) + 1.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ А.3. Расслоение π является *G -бirationально жестким*, если для любого G -эquivariantного бирационального отображения $\xi: X \dashrightarrow X'$ такого, что существует G -расслоение Мори $\pi': X' \rightarrow S'$, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\quad \rho \quad} & X & \xrightarrow{\quad \xi \quad} & X' \\ \pi \downarrow & & & & \downarrow \pi' \\ S & \xrightarrow{\quad \sigma \quad} & S & \xrightarrow{\quad \sigma \quad} & S' \end{array}$$

где σ – бирациональное отображение и $\rho \in \text{Bir}^G(X)$ такое, что рациональное отображение $\xi \circ \rho$ индуцирует изоморфизм общих слоев G -расслоений Мори π и π' .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ А.4. Расслоение π является *G -бirationально сверхжестким*, если для любого G -эquivariantного бирационального отображения ξ :

$X \dashrightarrow X'$ такого, что существует G -расслоение Мори $\pi': X' \rightarrow S'$, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \dashrightarrow^{\xi} & X' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ S & \dashrightarrow_{\sigma} & S' \end{array}$$

где σ – бирациональное отображение, а бирациональное отображение ξ индуцирует изоморфизм общих слоев G -расслоений Мори π и π' .

Для простоты мы будем говорить, что X является *G -бирационально жестким* (соответственно, *G -бирационально сверхжестким*), если $\dim(S) = 0$, а расслоение $\pi: X \rightarrow S$ является G -бирационально жестким (соответственно, G -бирационально сверхжестким).

ЗАМЕЧАНИЕ А.5. Предположим, что $\dim(S) = 0$. Тогда X является G -бирационально сверхжестким, если и только если X является G -бирационально жестким и $\mathrm{Bir}^G(X) = \mathrm{Aut}^G(X)$.

Мы также будем говорить, что расслоение $\pi: X \rightarrow S$ является бирационально жестким (соответственно, бирационально сверхжестким), если группа G тривиальна, а расслоение $\pi: X \rightarrow S$ является G -бирационально жестким (соответственно, G -бирационально сверхжестким).

ПРИМЕР А.6. В работе [18] показано, что расслоение $\pi: X \rightarrow S$ является бирационально жестким, если выполнены следующие условия: многообразие X неособо, $\dim(X) = 3$, $\dim(S) = 1$, цикл K_X^2 не является внутренней точкой замыкания конуса эффективных циклов на многообразии X и $K_X^2 \cdot F \leq 2$, где F – общий слой расслоения π .

Наконец, мы будем говорить, что X является *бирационально жестким* (соответственно, *бирационально сверхжестким*), если $\dim(S) = 0$, а расслоение $\pi: X \rightarrow S$ является бирационально жестким (соответственно, бирационально сверхжестким).

ПРИМЕР А.7. В работе [22] показано, что общая гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$ степени $n \geq 4$ является бирационально сверхжесткой.

Отметим, что из определения А.3 следует, что если G -расслоение Мори $\pi: X \rightarrow S$ является G -бирационально жестким и $X \not\cong \mathbb{P}^n$, то не существует никакого G -эquivариантного бирационального отображения $X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$, где $n = \dim(X)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ А.8. Расслоение π *бирационально эквивалентно над базой* G -расслоению Мори $\pi': X' \rightarrow S'$, если существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \dashrightarrow^{\xi} & X' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ S & \dashrightarrow_{\sigma} & S' \end{array}$$

где σ – бирациональное отображение, а ξ – некоторое G -эквивариантное бирациональное отображение, которое индуцирует изоморфизм общих слоев G -расслоений Мори π и π' .

Следующее определение было введено в работе [23].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ А.9. Пусть V – некоторое многообразие, и пусть Γ – конечная подгруппа группы $\text{Aut}(V)$. Тогда множество

$$\mathcal{P}(V, G) = \left\{ \tau: Y \rightarrow T \mid \begin{array}{l} \text{существует } G\text{-эквивариантное бира-} \\ \text{циональное отображение } Y \dashrightarrow V \end{array} \right\} / \star$$

где τ – G -расслоение Мори, называется G -гибкостью многообразия V ; здесь $\star$ – отношение эквивалентности, заданное бирациональной эквивалентностью над базой G -расслоений Мори.

Положим $\mathcal{P}(V) = \mathcal{P}(V, G)$ в случае, когда группа G тривиальна. Отметим, что следующие условия эквивалентны: расслоение $\pi: X \rightarrow S$ является G -бирационально жестким, множество $\mathcal{P}(X, G)$ состоит из расслоения $\pi: X \rightarrow S$, выполнено равенство $|\mathcal{P}(X, G)| = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ А.10. Воспользуемся обозначениями и предположениями определения А.9. В этом случае из работы [9] вытекает, что следующие условия эквивалентны: $\mathcal{P}(V, \Gamma) \neq \emptyset$, дивизор $-K_V$ не является псевдоэффективным, многообразие V является унилинейчатым.

ПРИМЕР А.11. Пусть X – кватрика в $\mathbb{P}^4$, которая может быть задана уравнением

$$w^2x^2 + wyz + xg_3(y, z, t, w) + g_4(y, z, t, w) = 0 \subset \mathbb{P}^4 \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где g_i – общий однородный многочлен степени i . В работе [23] показано, что $|\mathcal{P}(X)| = 2$.

Пусть $\bar{\pi}: \bar{X} \rightarrow \bar{S}$ – некоторое G -расслоение Мори такое, что существует G -эквивариантное бирациональное отображение $\nu: \bar{X} \dashrightarrow X$. Если $\dim(\bar{S}) \neq 0$, то положим $\mathcal{M}_{\bar{X}} = |\bar{\pi}^*(D)|$ для произвольного очень обильного дивизора D (класс которого в $\text{Pic}(\bar{S})$ G -инвариантен) на многообразии $\bar{S}$. Если $\dim(\bar{S}) = 0$, то положим $\mathcal{M}_{\bar{X}} = |-mK_{\bar{X}}|$ для достаточно большого и достаточно делимого натурального числа m . Пусть $\mathcal{M}_X = \nu(\mathcal{M}_{\bar{X}})$.

ЛЕММА А.12. Предположим, что $\dim(\bar{S}) \neq 0$. Тогда либо существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \bar{X} & \xrightarrow{\quad \nu \quad} & X \\ \bar{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\ \bar{S} & \xleftarrow{\quad \zeta \quad} & S \end{array} \quad (\text{A.1})$$

где ζ – доминантное рациональное отображение, либо существует $\lambda \in \mathbb{Q}$ такое, что $K_X + \lambda \mathcal{M}_X \equiv \pi^*(H)$, где H – некоторый G -инвариантный $\mathbb{Q}$ -дивизор на S такой, что либо особенности логпары $(X, \lambda \mathcal{M}_X)$ не являются каноническими, либо дивизор H не является $\mathbb{Q}$ -эффективным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что коммутативная диаграмма (A.1) существует в том и только в том случае, когда линейная система $\mathcal{M}_X$ лежит в слоях расслоения π . Поэтому можно считать, что линейная система $\mathcal{M}_X$ не лежит в слоях расслоения π . Тогда существует $\lambda \in \mathbb{Q}$ такое, что $K_X + \lambda \mathcal{M}_X \equiv \pi^*(H)$, где H – некоторый G -инвариантный $\mathbb{Q}$ -дивизор на многообразии S . Из леммы 2.23 следует, что $\kappa(K_X + \lambda \mathcal{M}_X) = -\infty$, но $\kappa(K_X + \lambda \mathcal{M}_X) = 0$ в случае, когда особенности логпары $(X, \lambda \mathcal{M}_X)$ являются каноническими, а дивизор H является $\mathbb{Q}$ -эффektivным (см. следствие 2.24). Лемма доказана.

Пусть ε – некоторое положительное рациональное число. Существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ X & \xleftarrow{\nu} & \bar{X} \end{array}$$

где α и β – некоторые G -эquivariantные бирациональные морфизмы, а W – гладкое многообразие. Пусть $\mathcal{M}_W$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}_{\bar{X}}$ на многообразии W . Тогда

$$\alpha^*(K_X + \varepsilon \mathcal{M}_X) + \sum_{i=1}^k a_i^\varepsilon F_i \equiv K_W + \varepsilon \mathcal{M}_W \equiv \beta^*(K_{\bar{X}} + \varepsilon \mathcal{M}_{\bar{X}}) + \sum_{i=1}^r b_i^\varepsilon E_i,$$

где a_i^ε – рациональное число, b_i^ε – положительное рациональное число, а через F_i и E_i обозначены G -орбиты исключительных неприводимых дивизоров морфизмов α и β соответственно.

ЛЕММА A.13. *Предположим, что $\dim(\bar{S}) \neq 0$. Тогда либо существует коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \bar{X} & \xleftarrow{\nu} & X \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \bar{S} & \xleftarrow{\zeta} & S \end{array}$$

где ζ – рациональное доминантное отображение, либо существует $\lambda \in \mathbb{Q}$ такое, что $K_X + \lambda \mathcal{M}_X \equiv \pi^*(H)$, где H – некоторый G -инвариантный $\mathbb{Q}$ -дивизор на многообразии S такой, что либо существует $i \in \{1, \dots, k\}$, при котором выполнено неравенство $a_i^\lambda < 0$, а дивизор F_i не является β -исключительным, либо дивизор H не является $\mathbb{Q}$ -эффektivным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно аргументам доказательства леммы A.12 можно считать, что существует $\lambda \in \mathbb{Q}$ такое, что $K_X + \lambda \mathcal{M}_X \equiv \pi^*(H)$, где H – некоторый G -инвариантный $\mathbb{Q}$ -дивизор на многообразии S . Предположим, что дивизор H не является $\mathbb{Q}$ -эффektivным, но выполнено неравенство $a_i^\lambda \geq 0$ для всех $i \in \{1, \dots, k\}$ таких, что дивизор F_i не является β -исключительным. Тогда

$$\beta\left((\pi \circ \alpha)^*(H) + \sum_{i=1}^k a_i^\lambda F_i\right) \equiv \beta\left((\pi \circ \alpha)^*(H) + \sum_{a_i^\lambda \geq 0} a_i^\lambda F_i\right) \equiv K_{\bar{X}} + \lambda \mathcal{M}_{\bar{X}}, \quad (\text{A.2})$$

откуда следует, что дивизор $K_{\bar{X}} + \lambda \mathcal{M}_{\bar{X}}$ является $\mathbb{Q}$ -эффективным. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Заметим, что утверждение леммы A.13 является непосредственным аналогом предложения 2 из [17].

ЛЕММА A.14. *Предположим, что $\dim(\bar{S}) = 0$. В этом случае существует такое $\lambda \in \mathbb{Q}$, что $K_X + \lambda \mathcal{M}_X \equiv \pi^*(H)$, где H – некоторый G -инвариантный $\mathbb{Q}$ -дивизор (класс которого в $\text{Pic}(S)$ G -инвариантен) на многообразии S . Тогда либо $\dim(S) = 0$ и ν является изоморфизмом, либо существует $i \in \{1, \dots, k\}$ такое, что $a_i^\lambda < 0$ и F_i не является β -исключительным, либо дивизор H не является $\mathbb{Q}$ -эффективным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что $\mathcal{M}_{\bar{X}} = |-mK_{\bar{X}}|$, где m – достаточно большое и достаточно делимое натуральное число. Очевидно, что $\mathcal{M}_X$ не лежит в слоях расслоения π . В частности, существует $\lambda \in \mathbb{Q}$ такое, что $K_X + \lambda \mathcal{M}_X \equiv \pi^*(H)$, где H – некоторый G -инвариантный $\mathbb{Q}$ -дивизор на многообразии S . Тогда

$$\dim(S) \geq \kappa(X, \lambda \mathcal{M}_X) = \kappa(\bar{X}, \lambda \mathcal{M}_{\bar{X}}) = \begin{cases} \dim(\bar{X}), & \text{если } \lambda > \frac{1}{m}, \\ 0, & \text{если } \lambda = \frac{1}{m}, \\ -\infty, & \text{если } \lambda < \frac{1}{m}, \end{cases}$$

по лемме 2.23. Таким образом, мы видим, что $\lambda \leq \frac{1}{m}$.

Предположим, что дивизор H является $\mathbb{Q}$ -эффективным и выполнено неравенство $a_i^\lambda \geq 0$ для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$ такого, что дивизор F_i не является β -исключительным. Тогда выполнена численная эквивалентность (A.2), откуда следует, что дивизор $K_{\bar{X}} + \lambda \mathcal{M}_{\bar{X}}$ также является $\mathbb{Q}$ -эффективным. Таким образом, мы видим, что имеет место равенство $\lambda = \frac{1}{m}$, откуда следует, что

$$(\pi \circ \alpha)^*(H) + \sum_{i=1}^k a_i^\lambda F_i \equiv \sum_{i=1}^r b_i^\lambda E_i.$$

Предположим, что $\dim(S) = 0$. Тогда из [24, лемма 2.19] следует, что $\sum_{i=1}^k a_i^\lambda F_i = \sum_{i=1}^r b_i^\lambda E_i$, откуда, в свою очередь, следует, что особенности логпары $(X, \lambda \mathcal{M}_X)$ являются терминальными. В этом случае отображение ν является изоморфизмом по теореме 2.27.

Для завершения доказательства можно считать, что $\dim(S) \neq 0$. Тогда

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\text{Pic}^G(\bar{S}) \otimes \mathbb{Q}) + 1 + k = \dim_{\mathbb{Q}}(\text{Pic}^G(X) \otimes \mathbb{Q}) + k = \dim_{\mathbb{Q}}(\text{Pic}^G(W) \otimes \mathbb{Q}) = 1 + r,$$

откуда следует, что $k \leq r - 1$. Отметим, что для каждого $i \in \{1, \dots, r\}$ либо E_i является исключительным дивизором морфизма α , либо $\alpha(E_i)$ является дивизором, который лежит в слоях морфизма π .

Предположим, что дивизор F_1 не является β -исключительным. Тогда $\langle F_1, E_1, \dots, E_r \rangle = \text{Pic}^G(W) \otimes \mathbb{Q}$, где $\langle F_1, E_1, \dots, E_r \rangle$ – линейная оболочка дивизоров $F_1, E_1, \dots, E_r$. Следовательно, $\dim_{\mathbb{Q}}(\langle E_1, \dots, E_r \rangle \cap \langle F_1, \dots, F_k \rangle) = k - 1$, поскольку дивизоры $F_1, \dots, F_k$ линейно независимы в группе $\text{Pic}^G(\bar{W}) \otimes \mathbb{Q}$. Таким образом, имеем

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\langle \alpha(E_1), \dots, \alpha(E_r) \rangle) = r - k + 1 = \dim_{\mathbb{Q}}(\text{Pic}^G(X) \otimes \mathbb{Q}),$$

где мы полагаем $\alpha(E_i) = 0$ в случае, когда дивизор E_i является α -исключительным. С другой стороны, $\langle \alpha(E_1), \dots, \alpha(E_r) \rangle \neq \text{Pic}^G(X) \otimes \mathbb{Q}$, так как подмногообразие $\alpha(E_i)$ лежит в слоях расслоения π в случае, когда дивизор E_i не является α -исключительным.

Итак, мы видим, что дивизор F_1 является β -исключительным. Аналогично, все дивизоры $F_1, \dots, F_k$ являются β -исключительными. Без ограничения общности можно считать, что имеет место равенство $F_i = E_i$ для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$. Тогда $\dim_{\mathbb{Q}}(\langle \alpha(E_{k+1}), \dots, \alpha(E_r) \rangle) = r - k = \dim_{\mathbb{Q}}(\text{Pic}^G(S) \otimes \mathbb{Q})$, а все подмногообразия $\alpha(E_{k+1}), \dots, \alpha(E_r)$ лежат в слоях расслоения π .

Пусть M – общий очень обильный дивизор на многообразии S , и пусть N – собственный прообраз дивизора M на многообразии W . Тогда $\pi^*(M) \in \langle \alpha(E_{k+1}), \dots, \alpha(E_r) \rangle$ и имеет место эквивалентность $N \sim (\pi \circ \alpha)^*(M)$. Отметим, что дивизор N не является β -исключительным. С другой стороны, имеем $(\pi \circ \alpha)^*(M) \in \langle E_1, \dots, E_r \rangle$, что является противоречием. Утверждение леммы доказано.

Предположим, дополнительно, что $\dim(S) = 0$.

ТЕОРЕМА А.15 [12, теорема 1.26] (см. леммы А.13, А.14). *Следующие условия эквивалентны: многообразие Фано X является G -бirationально жестким, для каждой G -инвариантной линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии X , которая не имеет неподвижных компонент, существует G -эквивариантный бирациональный автоморфизм $\xi \in \text{Bir}^G(X)$ такой, что логпара $(X, \lambda\xi(\mathcal{M}))$ имеет канонические особенности, где $\lambda \in \mathbb{Q}$ такое, что $K_X + \lambda\xi(\mathcal{M}) \equiv 0$.*

СЛЕДСТВИЕ А.16. *Следующие условия эквивалентны: многообразие Фано X является G -бirationально жестким, для каждой G -инвариантной линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии X , которая не имеет неподвижных компонент, существует G -эквивариантный бирациональный автоморфизм $\xi \in \text{Bir}^G(X)$ такой, что $\kappa(X, \lambda\xi(\mathcal{M})) \geq 0$, где $\lambda \in \mathbb{Q}$ такое, что $K_X + \lambda\xi(\mathcal{M}) \equiv 0$.*

СЛЕДСТВИЕ А.17. *Следующие условия эквивалентны: многообразие Фано X является G -бirationально сверхжестким, для каждой G -инвариантной линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии X , которая не имеет неподвижных компонент, логпара $(X, \lambda\mathcal{M})$ имеет канонические особенности, где $\lambda \in \mathbb{Q}$ такое, что $K_X + \lambda\mathcal{M} \equiv 0$.*

Приведем одно элементарное применение следствия А.17.

ЛЕММА А.18. *Предположим, что X является неособой поверхностью дель Пеццо такой, что выполнено неравенство $|\Sigma| \geq K_X^2$ для каждой G -орбиты $\Sigma \subset X$. Тогда поверхность X является G -бirationально сверхжесткой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что поверхность X не является G -бirationально сверхжесткой. В этом случае из следствия А.17 следует существование такой G -инвариантной линейной системы $\mathcal{M}$ на поверхности X , что линейная система $\mathcal{M}$ не имеет неподвижных компонент, а особенности логпары $(X, \lambda\mathcal{M})$ не являются каноническими в некоторой точке $O \in X$, где $\lambda \in \mathbb{Q}$ такое, что $K_X + \lambda\mathcal{M} \equiv 0$.

Обозначим G -орбиту точки O через Σ . Имеем неравенство $\text{mult}_P(\mathcal{M}) > \frac{1}{\lambda}$ для каждой точки $P \in \Sigma$. Тогда

$$\frac{K_X^2}{\lambda^2} = M_1 \cdot M_2 \geq \sum_{P \in \Sigma} \text{mult}_P(M_1 \cdot M_2) \geq \sum_{P \in \Sigma} \text{mult}_P^2(\mathcal{M}) > \frac{|\Sigma|}{\lambda^2} \geq \frac{K_X^2}{\lambda^2},$$

где M_1 и M_2 – достаточно общие кривые в $\mathcal{M}$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Покажем, как применять лемму A.18.

ТЕОРЕМА A.19. Пусть G – такая конечная подгруппа в группе $\text{Aut}(\mathbb{P}^2) \cong \text{PGL}(3, \mathbb{C})$, что $G \cong \mathbb{A}_6$. Тогда поверхность $\mathbb{P}^2$ является G -бirationально сверхжесткой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Σ – произвольная G -орбита в $\mathbb{P}^2$. Тогда из работы [25] следует, что выполнено неравенство $|\Sigma| \geq 12$, откуда, в свою очередь, следует, что поверхность $\mathbb{P}^2$ является G -бirationально сверхжесткой по лемме A.18.

Пусть Γ – некоторое подмножество группы $\text{Bir}^G(X)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ A.20. Подмножество Γ откручивает все G -максимальные особенности, если для каждой G -инвариантной линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии X , которая не имеет неподвижных компонент, существует $\xi \in \Gamma$ такой, что логпара $(X, \lambda\xi(\mathcal{M}))$ имеет канонические особенности, где λ – рациональное число такое, что $K_X + \lambda\xi(\mathcal{M}) \equiv 0$.

Применяя леммы A.13, A.14, мы сразу получаем

СЛЕДСТВИЕ A.21. Предположим, что подмножество Γ откручивает все G -максимальные особенности. Тогда многообразие X является G -бirationально жестким, а группа $\text{Bir}^G(X)$ порождена подмножеством Γ и подгруппой $\text{Aut}^G(X)$.

Отметим, что из теоремы A.15 следует, что X является G -бirationально жестким, если и только если группа $\text{Bir}^G(X)$ откручивает все G -максимальные особенности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ A.22. Глобальным G -инвариантным логканоническим порогом многообразия X называется число

$$\text{lct}(X, G) = \sup \left\{ \lambda \in \mathbb{Q} \left| \begin{array}{l} \text{логпара } (X, \lambda D) \text{ имеет логканонические особенности} \\ \text{для каждого } G\text{-инвариантного эффективного } \mathbb{Q}\text{-дивизора } D \equiv -K_X \end{array} \right. \right\}.$$

Приведем пример, показывающий, как можно найти число $\text{lct}(X, G)$ (см. [15, лемма 5.7]).

ТЕОРЕМА A.23. Пусть X – неособая поверхность дель Пеццо такая, что $K_X^2 = 5$. Тогда $\text{Aut}(X) \cong \mathbb{S}_5$, выполнено равенство $\text{lct}(X, \mathbb{A}_5) = 2$, а поверхность X является $\mathbb{A}_5$ -бirationально сверхжесткой, где $\text{Pic}^{\mathbb{A}_5}(X) \cong \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что существование изоморфизмов $\text{Aut}(X) \cong \mathbb{S}_5$ и $\text{Pic}^{\mathbb{A}_5}(X) \cong \mathbb{Z}$ хорошо известно (см. [26], [27]). Пусть P – некоторая точка поверхности X , и пусть H – подгруппа группы $\mathbb{A}_5$, которая является стабилизатором точки P . Обозначим $\mathbb{A}_5$ -орбиту точки P через Σ . Тогда $|H| = \frac{|\mathbb{A}_5|}{|\Sigma|} = \frac{60}{|\Sigma|}$, а группа H точно действует на касательном пространстве к поверхности X в точке P . Таким образом, имеем $|\Sigma| \neq 5$, так как группа $\mathbb{A}_4$ не имеет точных двумерных представлений. Имеем $|\Sigma| \geq 6$, поскольку группа $\mathbb{A}_5$ проста. В частности, поверхность X является G -бirationально сверхжесткой по лемме A.18, что также следует из работы [28] или [29].

Известно, что поверхность X содержит 10 неособых рациональных кривых $L_1, L_2, \dots, L_{10}$ таких, что имеют место равенства $L_1 \cdot L_1 = L_2 \cdot L_2 = \dots = L_{10} \cdot L_{10} = -1$ и $\sum_{i=1}^{10} L_i \sim -2K_X$. В частности, имеем $\text{lct}(X, \mathbb{A}_5) \leq 2$, так как дивизор $\sum_{i=1}^{10} L_i$ является $\mathbb{A}_5$ -инвариантным.

В [30] показано, что существует бирациональный морфизм $\chi: X \rightarrow \mathbb{P}^2$, который является раздутием четырех особых точек кривой $W \subset \mathbb{P}^2$, заданной уравнением

$$x^6 + y^6 + z^6 + (x^2 + y^2 + z^2)(x^4 + y^4 + z^4) = 12x^2y^2z^2 \subset \mathbb{P}^2 \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z]).$$

Пусть Z – собственный прообраз кривой W на поверхности X . Тогда $Z \sim 2K_X$, а кривые Z и $\sum_{i=1}^{10} L_i$ являются единственными $\mathbb{S}_5$ -инвариантными кривыми в линейной системе $|-2K_X|$. Пусть $\mathcal{P}$ – пучок на многообразии X , который порожден кривыми Z и $\sum_{i=1}^{10} L_i$. Тогда каждая кривая пучка $\mathcal{P}$ является $\mathbb{A}_5$ -инвариантной (см. [30]).

Предположим, дополнительно, что $|\Sigma| = 6$. Пусть T – некоторая кривая в пучке $\mathcal{P}$ такая, что $\Sigma \cap T \neq \emptyset$. Тогда $\Sigma \subset \text{Sign}(T)$, так как группа H не имеет точных одномерных представлений, поскольку группа H не является абелевой. В работе [30] показано, что пучок $\mathcal{P}$ содержит ровно пять особых кривых. А именно, особые кривые пучка $\mathcal{P}$ следующие: кривая $\sum_{i=1}^{10} L_i$, две неприводимые рациональные кривые R_1 и R_2 , которые имеют шесть подалых особенностей, две приведенные кривые F_1 и F_2 , каждая из которых состоит из пяти неособых рациональных кривых. Таким образом, мы видим, что либо $\Sigma = \text{Sign}(R_1)$, либо $\Sigma = \text{Sign}(R_2)$.

Известно, что шестимерное представление группы $\mathbb{A}_5$, индуцированное действием группы $\mathbb{A}_5$ на элементах линейной системы $|-K_X|$, является прямой суммой двух трехмерных неизоморфных между собой неприводимых представлений группы $\mathbb{A}_5$ (см. [26]), которые задают две $\mathbb{A}_5$ -эквивариантные проекции $\varphi: X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ и $\psi: X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ соответственно. В работе [26] показано, что рациональные отображения φ и ψ являются морфизмами степени 5, действия группы $\mathbb{A}_5$ на $\mathbb{P}^2$, которые индуцированы проекциями φ и ψ , совпадают с действиями группы $\mathbb{A}_5$, индуцированными двумя неизоморфными трехмерными неприводимыми представлениями группы $\mathbb{A}_5$ (см. доказательство леммы B.13) соответственно.

Предположим, что $\text{lct}(X, \mathbb{A}_5) \neq 2$. Тогда существует такой эффективный $\mathbb{A}_5$ -инвариантный $\mathbb{Q}$ -дивизор D на поверхности X , что $\mathbb{LCS}(X, \lambda D) \neq \emptyset$, и выполнена эквивалентность $D \equiv -K_X$, где λ – положительное рациональное число такое, что $\lambda < 2$. Тогда $h^1(\mathcal{O}_X(-K_X) \otimes \mathcal{I}(X, \lambda D)) = 0$ по теореме 2.14, где

$\mathcal{I}(X, \lambda D)$ – соответствующий множительный пучок идеалов логпары $(X, \lambda D)$ (см. определение 2.13).

Предположим, что поверхность X содержит $\mathbb{A}_5$ -инвариантную приведенную кривую C такую, что $\lambda D = \mu C + \Omega$, где μ – некоторое положительное рациональное число такое, что $\mu \geq 1$, а Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на поверхности X , носитель которого не содержит ни одной компоненты кривой C . Тогда $C \sim -mK_X$, где m – некоторое натуральное число. Таким образом, имеем $5 = -K_X \cdot D \geq \frac{5\mu}{\lambda} > \frac{5m}{2}$, откуда следует, что $m = 1$. С другой стороны, равенство $m = 1$ невозможно.

Таким образом, множество $\text{LCS}(X, \lambda D)$ не содержит кривых (см. определение 2.10). В этом случае из равенства $h^1(\mathcal{O}_X(-K_X) \otimes \mathcal{I}(X, \lambda D)) = 0$ следует, что имеет место неравенство $|\text{LCS}(X, \lambda D)| \leq 6$, но множество $\text{LCS}(X, \lambda D)$ является $\mathbb{A}_5$ -инвариантным. В частности, имеем либо $\text{LCS}(X, \lambda D) = \text{Sign}(R_1)$, либо $\text{LCS}(X, \lambda D) = \text{Sign}(R_2)$.

Для завершения доказательства можно считать, что $\text{Supp}(D)$ не содержит кривых R_1 и R_2 (см. замечание 2.6). Аналогично, можно также считать, что $\text{LCS}(X, \lambda D) = \text{Sign}(R_1) = \Sigma$. Положим $\text{Sign}(R_1) = \{O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6\}$, где O_i – особая точка кривой R_1 . Пусть $P = O_1$. Тогда

$$10 = R_1 \cdot D \geq \sum_{i=1}^6 \text{mult}_{O_i}(D) \text{mult}_{O_i}(R_1) \geq 12 \text{mult}_P(D),$$

откуда следует, что $\text{mult}_P(D) \leq \frac{5}{6}$.

Пусть $\pi: U \rightarrow X$ – раздутие точек $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6$. Тогда

$$K_U + \lambda \bar{D} + \sum_{i=1}^6 (\lambda \text{mult}_{O_i}(D) - 1) E_i \equiv \pi^*(K_X + \lambda D),$$

где E_i – исключительная кривая раздутия π такая, что $\pi(E_i) = O_i$, а $\bar{D}$ – собственный прообраз дивизора D на поверхности U . Более того, особенности логпары $(U, \lambda \bar{D} + \sum_{i=1}^6 (\lambda \text{mult}_{O_i}(D) - 1) E_i)$ не являются логканоническими в некоторой точке $Q \in E_1$. С другой стороны, из теоремы 2.16 следует

$$\text{LCS}\left(U, \lambda \bar{D} + \sum_{i=1}^6 (\lambda \text{mult}_{O_i}(D) - 1) E_i\right) \cap E_1 = Q,$$

что является противоречием, так как $\mathbb{A}_5$ -орбита точки Q содержит по крайней мере две точки исключительной кривой E_1 , поскольку стабилизатор H действует точно на касательном пространстве к поверхности X в точке P . Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Отметим, что глобальный логканонический порог $\text{lct}(X, G)$ играет важную роль в геометрии (см. теоремы 5.1). Для простоты мы положим $\text{lct}(X) = \text{lct}(X, G)$ в случае, когда группа G тривиальна. Тогда $\text{lct}(\mathbb{P}^n) = \frac{1}{n+1}$ (см. [12]).

ПРИМЕР А.24. Пусть X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$ степени $n \geq 6$. В работе [17] показано, что $\text{lct}(X) = 1$.

Отметим, что определение А.3 также имеет смысл в случае, когда многообразие X определено над произвольным, не обязательно алгебраически замкнутым, совершенным полем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ A.25. Многообразие X является *универсально G -бirationально жестким*, если многообразие $X \otimes \text{Spec}(\mathbb{C}(U))$ является G -бirationально жестким для любого многообразия U , где мы отождествляем группу G с подгруппой группы $\text{Aut}(X \otimes \text{Spec}(\mathbb{C}(U)))$, а через $\mathbb{C}(U)$ обозначено поле рациональных функций многообразия U .

Заметим, что из определения A.4 следует, что если многообразие X является G -бirationально сверхжестким, то X также является универсально G -бirationально жестким, поскольку для любого многообразия U многообразие $X \otimes \text{Spec}(\mathbb{C}(U))$ является G -бirationально сверхжестким.

ЗАМЕЧАНИЕ A.26. Предположим, что $\dim(X) \neq 1$, а многообразие X является G -бirationально жестким. Тогда группа $\text{Aut}^G(X)$ конечна (см. [31]), а многообразие X является универсально G -бirationально жестким, если, например, группа $\text{Bir}^G(X)$ состоит из счетного числа элементов (см. [32]).

Зафиксируем натуральное число r такое, что $r \geq 2$. Для каждого $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ пусть X_i – некоторое многообразие Фано, G_i – некоторая конечная подгруппа группы $\text{Aut}(X_i)$ такая, что $\dim_{\mathbb{Q}}(\text{Pic}^{G_i}(X_i) \otimes \mathbb{Q}) = 1$, а каждый G_i -инвариантный дивизор Вейля на многообразии X_i является $\mathbb{Q}$ -дивизором Картье. Предположим, что многообразие X_i имеет не более чем терминальные особенности и, более того, является G_i -бirationально жестким. Положим $\mathcal{X} = X_1 \times \dots \times X_r$ и $\mathcal{G} = G_1 \times \dots \times G_r$, $\mathcal{S}_1 = X_2 \times \dots \times X_r$, $\mathcal{S}_r = X_1 \times \dots \times X_r$ и $\mathcal{S}_i = X_1 \times \dots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \dots \times X_r$ для каждого $i \in \{2, \dots, r-1\}$.

Пусть $\pi_i: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}_i$ – естественная проекция. Тогда π_i является $\mathcal{G}$ -расслоением Мори. В частности, имеем $\{\pi_1, \dots, \pi_r\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{X}, \mathcal{G})$, где через $\mathcal{P}(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ обозначена $\mathcal{G}$ -гибкость многообразия $\mathcal{X}$ (см. определение A.9).

ТЕОРЕМА A.27. Предположим, что многообразие X_i является универсально G_i -бirationально жестким и $\text{lct}(X_i, G_i) \geq 1$ для каждого $i \in \{1, 2, \dots, r\}$. Тогда $\mathcal{P}(\mathcal{X}, \mathcal{G}) = \{\pi_1, \dots, \pi_r\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует некоторое $\mathcal{G}$ -расслоение Мори $\bar{\pi}: \bar{X} \rightarrow \bar{S}$ такое, что существует $\mathcal{G}$ -эквивариантное бирациональное отображение $\nu: \bar{X} \dashrightarrow \mathcal{X}$. Для завершения доказательства требуется показать, что существует $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ такое, что имеет место равенство $\dim(\bar{S}) = \dim(\mathcal{S}_i)$ и существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \bar{X} & \xrightarrow{\nu} & \mathcal{X} \xrightarrow{\rho} \mathcal{X} \\ \bar{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi_i \\ \bar{S} & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{S}_i \end{array} \quad (\text{A.3})$$

где ρ – некоторый $\mathcal{G}$ -эквивариантный бирациональный автоморфизм, а σ – некоторое бирациональное отображение. Используя аргументы доказательств из [17, теорема 1] и [33, теорема 6.5] и при этом лемму A.14 вместо [17, предложение 2], мы видим, что $\dim(\bar{S}) \neq 0$ (см. доказательство теоремы 6.1). Используя аргументы доказательств из [17, теорема 1] и [33, теорема 6.5] и при этом лемму A.13 вместо [17, предложение 2], мы получаем существование коммутативной диаграммы (A.3).

Приведем несколько применений теоремы A.27 (см. примеры A.7, A.24).

ПРИМЕР A.28. Известно, что простая группа $\mathbb{A}_6$ является группой автоморфизмов кривой

$$10x^3y^3 + 9zx^5 + 9zy^5 + 27z^6 = 45x^2y^2z^2 + 135xyz^4 \subset \mathbb{P}^2 \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z]),$$

откуда следует существование мономорфизма $\mathbb{A}_6 \times \mathbb{A}_6 \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2)$, который, в свою очередь, индуцирует некоторый мономорфизм $\varphi: \mathbb{A}_6 \times \mathbb{A}_6 \rightarrow \text{Bir}(\mathbb{P}^4)$, поскольку многообразие $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ является рациональным. Более того, из теоремы A.27 следует, что подгруппа $\varphi(\mathbb{A}_6 \times \mathbb{A}_6)$ не сопряжена никакой подгруппе в $\text{Aut}(\mathbb{P}^4)$, поскольку поверхность $\mathbb{P}^2$ является $\mathbb{A}_6$ -бirationально сверхжесткой по теореме A.19 и имеет место равенство $\text{lct}(\mathbb{P}^2, \mathbb{A}_6) = 2$ (см. [15]).

Отметим, что достаточно много применений теоремы A.27 приведено в работах [17] и [33].

Приложение В. Группа Кремоны

Пусть G – некоторая конечная группа. Положим $\text{Cr}_2(\mathbb{C}) = \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$. Предположим, дополнительно, что существует мономорфизм $\varphi: G \rightarrow \text{Cr}_2(\mathbb{C})$.

ЗАДАЧА В.1. Найти с точностью до сопряжения все подгруппы группы $\text{Cr}_2(\mathbb{C})$, которые изоморфны группе $\varphi(G)$.

В настоящем приложении мы приведем полное решение задачи B.1 в случае, когда G является простой неабелевой подгруппой группы $\text{Cr}_2(\mathbb{C})$ (см. теорему B.7).

ТЕОРЕМА В.2. *С точностью до сопряжения группа $\text{Cr}_2(\mathbb{C})$ содержит ровно 3, 1, 2 такие подгруппы, которые изоморфны группам $\mathbb{A}_5$, $\mathbb{A}_6$, $\text{PSL}(2, \mathbb{F}_7)$ соответственно. Явное описание этих подгрупп следует из теорем B.8–B.10.*

Пусть $\varphi': G \rightarrow \text{Cr}_2(\mathbb{C})$ – некоторый мономорфизм. Заметим, что если $\varphi(G) = \varphi'(G)$, то существует автоморфизм $\chi \in \text{Aut}(G)$ такой, что $\varphi' = \varphi \circ \chi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ В.3. Пары (G, φ) и (G, φ') сопряжены, если существует бирациональный автоморфизм $\varepsilon \in \text{Cr}_2(\mathbb{C})$ такой, что существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & G & \\ \varphi \swarrow & & \searrow \varphi' \\ \text{Cr}_2(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\omega_\varepsilon} & \text{Cr}_2(\mathbb{C}) \end{array}$$

где ω_ε – внутренний автоморфизм такой, что $\omega_\varepsilon(g) = \varepsilon \circ g \circ \varepsilon^{-1}$ для каждого $g \in \text{Cr}_2(\mathbb{C})$.

Отметим, что если $\varphi' = \varphi \circ \chi$ для некоторого внутреннего автоморфизма $\chi \in \text{Aut}(G)$, то пары (G, φ) и (G, φ') сопряжены.

ЗАДАЧА В.4. Для каждого $\sigma \in \text{Aut}(G)$ определить, сопряжены ли пары (G, φ) и $(G, \varphi \circ \sigma)$ или не сопряжены.

Согласно [27, лемма 3.5] существуют гладкая рациональная поверхность X , мономорфизм $v: G \rightarrow \text{Aut}(X)$ и бирациональное отображение $\xi: X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ такие, что $\varphi(g) = \xi \circ v(g) \circ \xi^{-1} \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ для каждого $g \in G$. Заметим, что тройка (X, ξ, v) не определяется однозначно парой (G, φ) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ В.5. Назовем тройку (X, ξ, v) *регуляризацией* пары (G, φ) .

Пусть (X', ξ', v') – некоторая регуляризация пары (G, φ') .

ТЕОРЕМА В.6 [27, лемма 3.4]. *Пары (G, φ) и (G, φ') сопряжены, если и только если существует бирациональное отображение $\rho: X \dashrightarrow X'$ такое, что $v'(g) = \rho \circ v(g) \circ \rho^{-1} \in \text{Aut}(X')$ для каждого $g \in G$.*

В частности, из теоремы В.6 следует, что для решения задач В.1, В.4 мы можем считать, что существует морфизм $\pi: X \rightarrow S$, который является $v(G)$ -расслоением Мори. Отметим, что либо $S \cong \mathbb{P}^1$, либо S является точкой.

ТЕОРЕМА В.7 [27]. *Предположим, что G – простая неабелева группа. Тогда G изоморфна одной из следующих групп: A_5 , A_6 или $\text{PSL}(2, \mathbb{F}_7)$.*

Отождествим подгруппу $v(G)$ группы $\text{Aut}(X)$ с группой G .

ТЕОРЕМА В.8. *Предположим, что $G \cong \text{PSL}(2, \mathbb{F}_7)$. Тогда многообразие S является точкой, а поверхность X является G -бирационально сверхжесткой. Более того, либо $X \cong \mathbb{P}^2$, а группа G сопряжена подгруппе группы $\text{Aut}(X)$, которая оставляет инвариантной неособую кривую, заданную уравнением*

$$x^3y + y^3z + z^3x = 0 \subset \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z]) \cong \mathbb{P}^2, \quad (\text{В.4})$$

либо поверхность X может быть получена двойным накрытием $\mathbb{P}^2$, которое разветвлено вдоль кривой (В.4). Для каждого $\sigma \in \text{Aut}(G)$ пары (G, φ) и $(G, \varphi \circ \sigma)$ сопряжены, если и только если автоморфизм σ является внутренним.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Несложно видеть, что S является точкой и либо $X \cong \mathbb{P}^2$, а группа G сопряжена подгруппе группы $\text{Aut}(X)$, которая оставляет инвариантной кривую (В.4), либо поверхность X может быть получена как двулистное накрытие $\mathbb{P}^2$, которое разветвлено вдоль кривой (В.4).

Отметим, что G -орбита любой точки поверхности X состоит из по крайней мере двух точек. Действительно, группа G проста, откуда следует, что она не имеет точных двумерных представлений и не имеет подгрупп индекса два. Если $X \cong \mathbb{P}^2$, то хорошо известно, что G -орбита любой точки поверхности X содержит не менее чем 12 точек (см. [16], [25]). В частности, мы видим, что поверхность X является G -бирационально сверхжесткой по лемме А.18.

Рассмотрим произвольный автоморфизм $\sigma \in \text{Aut}(G)$ такой, что пары (G, φ) и $(G, \varphi \circ \sigma)$ сопряжены. Тогда существует бирациональное отображение $\rho: X \dashrightarrow X$ такое, что $v \circ \sigma(g) = \rho \circ v(g) \circ \rho^{-1}$ для каждого $g \in G$ по теореме В.6. Следовательно, $\rho \in \text{Aut}(X)$, поскольку поверхность X является G -бирационально сверхжесткой. Положим $\hat{G} = \langle G, \rho \rangle$, где, как уже отмечалось ранее, мы отождествляем подгруппу $v(G)$ группы $\text{Aut}(X)$ с группой G . Тогда $\hat{G}$ является конечной подгруппой группы $\text{Aut}^G(X)$, откуда следует, что $\hat{G} = G$, поскольку $\text{Aut}^G(X) = G$, если $X \cong \mathbb{P}^2$, и $\text{Aut}(X) = \text{Aut}^G(X) \cong \text{PSL}(2, \mathbb{F}_7) \times \mathbb{Z}_2$, если $X \not\cong \mathbb{P}^2$. В частности, мы видим, что $\rho \in G$, откуда следует, что σ – внутренний автоморфизм группы G .

ТЕОРЕМА В.9. *Предположим, что $G \cong \mathbb{A}_6$. Тогда $X \cong \mathbb{P}^2$, а поверхность X является G -бirationально сверхжесткой. Для каждого автоморфизма $\sigma \in \text{Aut}(G)$ пары (G, φ) и $(G, \varphi \circ \sigma)$ сопряжены, если и только если изоморфизм σ является внутренним автоморфизмом. Подгруппа G сопряжена подгруппе группы $\text{Aut}(X)$, которая оставляет инвариантной неособую кривую, заданную уравнением*

$$10x^3y^3 + 9zx^5 + 9zy^5 + 27z^6 = 45x^2y^2z^2 + 135xyz^4 \subset \mathbb{P}^2 \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z]). \quad (\text{B.5})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим кривую (B.4) через C . Рассуждая, как при доказательстве теоремы B.8, мы видим, что $X \cong \mathbb{P}^2$, а группа G сопряжена подгруппе, которая оставляет инвариантной кривую C . Можно считать, что кривая C является G -инвариантной. В теореме A.19 показано, что поверхность X является G -бirationально сверхжесткой.

Пусть ρ – элемент группы $\text{Aut}^G(X)$, и пусть g – элемент группы G . Тогда $g(\rho(C)) = \rho(g'(C)) = \rho(C)$ для некоторого $g' \in G$. С другой стороны, кривая C является единственной G -инвариантной кривой в $\mathbb{P}^2$ степени шесть. Таким образом, мы видим, что $\rho(C) = C$, откуда следует, что $\rho \in G$, так как $G \cong \text{Aut}(C)$. Теперь для завершения доказательства достаточно воспользоваться аргументами доказательства теоремы B.8.

ТЕОРЕМА В.10. *Предположим, что $G \cong \mathbb{A}_5$. Тогда для каждого $\sigma \in \text{Aut}(G)$ пары (G, φ) и $(G, \varphi \circ \sigma)$ сопряжены. Имеет место одна из следующих возможностей:*

1) *поверхность X является раздутием $\mathbb{P}^2$ в любых четырех точках, находящихся в общем положении, многообразие S является точкой, поверхность X является G -бirationально сверхжесткой и имеет место изоморфизм $\text{Aut}(X) \cong S_5$;*

2) *$X \cong \mathbb{P}^2$, поверхность X является G -бirationально жесткой и*

$$\mathbb{A}_5 \cong \text{Aut}^{\mathbb{A}_5}(\mathbb{P}^2) \subsetneq \text{Bir}^{\mathbb{A}_5}(\mathbb{P}^2) \cong S_5;$$

3) *$X \cong \mathbb{F}_n$, где $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, n четное, существует бирациональное отображение $\rho: X \dashrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, которое индуцирует мономорфизм групп $\bar{v}: G \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ такой, что $\bar{v}(g) = \rho \circ v(g) \circ \rho^{-1}$ для каждого $g \in G$, а мономорфизм групп $\bar{v}$ индуцирован естественным действием $\mathbb{A}_5 \times \text{id}_{\mathbb{P}^1}$ на поверхности $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.*

Отметим, что утверждения теорем B.8–B.10 полностью решают задачи B.1 и B.4 в случае, когда $G \in \{\mathbb{A}_5, \mathbb{A}_6, \text{PSL}(2, \mathbb{F}_7)\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ B.10. Предположим, что $G \cong \mathbb{A}_5$.

ЛЕММА В.11. *Если S является точкой, то либо $K_X^2 = 5$, либо $X \cong \mathbb{P}^2$. Если S не является точкой, то $S \cong \mathbb{P}^1$ и $X \cong \mathbb{F}_n$, где $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если многообразие S является точкой, то хорошо известно (см. [27]), что либо $K_X^2 = 5$, либо $X \cong \mathbb{P}^2$. Если $S \cong \mathbb{P}^1$, то $X \cong \mathbb{F}_n$ согласно [27, лемма 5.6], где $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Отметим, что если выполнено равенство $K_X^2 = 5$ и многообразие S является точкой, то хорошо известно (см. [26], [27]), что $\text{Aut}(X) \cong S_5$, а поверхность X

является раздутием $\mathbb{P}^2$ в любых четырех точках, никакие три из которых не лежат на одной прямой.

ЛЕММА В.12. *Предположим, что $K_X^2 = 5$, а S является точкой. Тогда поверхность X является G -бirationально сверхжесткой. Более того, для каждого $\sigma \in \text{Aut}(G)$ пары (G, φ) и $(G, \varphi \circ \sigma)$ сопряжены.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поверхность X является G -бirationально сверхжесткой по теореме А.23. Хорошо известно, что $\text{Aut}(G) \cong \mathbb{S}_5$, а каждый автоморфизм в $\text{Aut}(G)$ индуцирован внутренним автоморфизмом группы $\mathbb{S}_5$, откуда следует, что пары (G, φ) и $(G, \varphi \circ \sigma)$ сопряжены для каждого $\sigma \in \text{Aut}(G)$.

Отметим, что если $X \cong \mathbb{P}^2$, то вложение $\mathbb{A}_5 \cong G \subset \text{Aut}(X) \cong \text{PSL}(3, \mathbb{C})$ индуцировано трехмерным неприводимым представлением группы $\mathbb{A}_5$.

ЛЕММА В.13. *Предположим, что $X \cong \mathbb{P}^2$. Тогда $\mathbb{A}_5 \cong \text{Aut}^G(X) \subsetneq \text{Bir}^G(X) \cong \mathbb{S}_5$, а поверхность X является G -бirationально жесткой. Более того, для каждого $\sigma \in \text{Aut}(G)$ пары (G, φ) и $(G, \varphi \circ \sigma)$ сопряжены.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно работе [25] не существует G -инвариантных кривых в $\mathbb{P}^2$ степеней 1, 3 и 5. С другой стороны, хорошо известно, что существует единственная G -инвариантная коника в $\mathbb{P}^2$. Обозначим эту конику через C . Отметим, что C неприводима. Действие группы $G \cong \mathbb{A}_5$ на кривой $C \cong \mathbb{P}^1$ индуцирует вложение $C \subset \text{Aut}(C)$.

Известно, что существует единственная G -инвариантная кривая в $\mathbb{P}^2$, являющаяся объединением шести различных прямых. Обозначим эти прямые через $L_1, \dots, L_6$. Тогда $C \cap (L_1 \cup \dots \cup L_6)$ является единственной G -орбитой в $\mathbb{P}^2$, которая содержится в кривой C и состоит ровно из 12 точек (см. [16]). Также хорошо известно, что каждая G -орбита в $\mathbb{P}^2$ состоит по крайней мере из шести точек, а G -орбита из шести точек единственна.

Пусть σ – произвольный элемент группы $\text{Aut}(G)$. Автоморфизм σ индуцирован внутренним автоморфизмом группы $\mathbb{S}_5$. Таким образом, если $\text{Bir}^G(X) \cong \mathbb{S}_5$, то пары (G, φ) и $(G, \varphi \circ \sigma)$ сопряжены.

Пусть ρ – произвольный элемент группы $\text{Aut}^G(X)$, и пусть g – произвольный элемент группы G . Тогда $g \circ \rho = \rho \circ g'$ для некоторого $g' \in G$. Следовательно, $g(\rho(C)) = \rho(g'(C)) = \rho(C)$, откуда имеем $\rho(C) = C$. Пусть Λ – единственная G -орбита в $\mathbb{P}^2$, которая содержится в кривой C и состоит ровно из 12 точек. Тогда $g(\rho(\Lambda)) = \rho(g'(\Lambda)) = \rho(\Lambda)$, откуда следует, что $\rho(\Lambda) = \Lambda$. Заметим, что подгруппа группы $\text{Aut}(C)$, которая оставляет инвариантным множество Λ , конечна. Таким образом, имеем $\rho \in G$. Итак, показано, что $\text{Aut}^G(X) = G$.

Для завершения доказательства покажем, что поверхность X является G -бirationально жесткой и имеет место изоморфизм групп $\text{Bir}^G(X) \cong \mathbb{S}_5$.

Пусть Σ – подмножество в $\mathbb{P}^2$, которое является G -орбитой некоторой точки. Предположим, что выполнено неравенство $|\Sigma| \leq 9$. Тогда из работы [16] или [25] следует, что $\Sigma \cap C = \emptyset$ и $|\Sigma| = 6$ (см. § 6). Отметим, что G -орбита Σ однозначно определена равенством $|\Sigma| = 6$.

Пусть $\gamma: W \rightarrow X$ – раздутие всех точек множества Σ . Тогда из [34, предложение 1] следует, что $\text{Aut}(W) \cong \mathbb{S}_5$, а поверхность W изоморфна кубической поверхности Клебша (см. [27]). Положим $\tau = \gamma \circ \theta \circ \gamma^{-1}$, где θ – некоторая нечетная инволюция в группе $\text{Aut}(W) \cong \mathbb{S}_5$. Тогда $\tau \notin \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$. Отметим, что инволюция τ индуцирует мономорфизм $v': G \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ такой, что

$v'(g) = \tau \circ v(g) \circ \tau^{-1}$ для каждого $g \in G$. В этом случае мономорфизм v' индуцирован трехмерным неприводимым представлением группы $\mathbb{A}_5$, не изоморфным представлению, которое индуцирует мономорфизм v (см. [27, § 9]).

Пусть E – приведенный γ -исключительный дивизор такой, что $\gamma(E) = \Sigma$. Тогда существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ \gamma \swarrow & & \searrow \psi \\ \mathbb{P}^2 & \dashrightarrow \tau & \dashrightarrow \mathbb{P}^2 \end{array}$$

где ψ – сдутье кривой $\theta(E)$ в множество Σ (см. доказательство теоремы A.23). Если группа, порожденная инволюцией τ , откручивает все G -максимальные особенности (см. определение A.20), то $\text{Bir}^G(X) = \langle \text{Aut}^G(X), \tau \rangle \cong \mathbb{S}_5$ согласно следствию A.21, а поверхность X является G -бirationально жесткой по следствию A.16. Таким образом, для завершения доказательства леммы достаточно показать, что группа, порожденная инволюцией τ , откручивает все G -максимальные особенности.

Пусть $\mathcal{M}$ – произвольная G -инвариантная линейная система на поверхности X такая, что линейная система $\mathcal{M}$ не имеет неподвижных кривых, особенности логпары $(X, \mu\mathcal{M})$ не являются каноническими в некоторой точке $O \in X$, где $\mu \in \mathbb{Q}$ такое, что $K_X + \mu\mathcal{M} \equiv 0$. Обозначим G -орбиту точки O через Δ . Тогда $\text{mult}_P(\mathcal{M}) > \frac{1}{\mu}$ для каждой точки $P \in \Delta$. Пусть M_1 и M_2 – общие кривые в линейной системе $\mathcal{M}$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{9}{\mu^2} &= \frac{K_X^2}{\mu^2} = M_1 \cdot M_2 \geq \sum_{P \in \Delta} \text{mult}_P(M_1 \cdot M_2) \\ &\geq \sum_{P \in \Delta} \text{mult}_P(M_1) \text{mult}_P(M_2) = \sum_{P \in \Delta} \text{mult}_P^2(\mathcal{M}) > \frac{|\Delta|}{\mu^2}, \end{aligned}$$

откуда следует, что $|\Delta| < 9$. Тогда $\Delta = \Sigma$. Положим $H = \gamma^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$. Имеем

$$\theta^*(H) \sim 5H - 2E, \quad \theta^*(E) \sim 12H - 5E, \quad (\text{B.6})$$

так как инволюция θ нетривиально действует на группе $\text{Pic}(W)$. Положим $\mathcal{M}' = \tau(\mathcal{M})$. Тогда $K_X + \mu'\mathcal{M}' \equiv 0$ для некоторого положительного рационального числа μ' . Следовательно, из эквивалентности (B.6) несложно получаем равенство

$$\mu' = \frac{3}{15/\mu - 12 \text{mult}_O(\mathcal{M})},$$

откуда имеем $\mu' > \mu$. Аналогично, из эквивалентности (B.6) следует, что $\text{mult}_P(\mathcal{M}') = \frac{6}{\mu} - 5 \text{mult}_O(\mathcal{M})$ для каждой точки $P \in \Sigma$. Итак, показано, что логпара $(X, \mu'\mathcal{M}')$ имеет канонические особенности в каждой точке множества Σ . Рассуждая так же, как в начале доказательства леммы, мы видим, что логпара $(X, \mu'\mathcal{M}')$ имеет канонические особенности, откуда следует, что группа, порожденная инволюцией τ , откручивает все G -максимальные особенности. Лемма доказана.

Итак, для завершения доказательства теоремы B.10 можно считать, что $X \cong \mathbb{F}_n$, где $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

ЛЕММА В.14. Пусть существуют мономорфизм $\iota: G \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$, внешний автоморфизм $\nu \in \text{Aut}(G)$ и бирациональное отображение $\chi: X \dashrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ такие, что

$$\chi \circ \nu(g) \circ \chi^{-1}(a, b) = (\iota(g)(a), \iota \circ \nu(g)(b))$$

для каждого элемента $g \in G$ и каждой точки $(a, b) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Тогда пары (G, φ) и $(G, \varphi \circ \sigma)$ сопряжены для каждого $\sigma \in \text{Aut}(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение χ индуцирует мономорфизм $\dot{\nu}: G \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ такой, что имеет место равенство $\dot{\nu}(g) = \chi \circ \nu(g) \circ \chi^{-1}$ для каждого $g \in G$. В этом случае мономорфизм $\dot{\nu}$ индуцирован скрученным диагональным действием группы $\mathbb{A}_5$ на поверхности $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. отождествим подгруппу $\dot{\nu}(G)$ с группой G .

Пусть τ – некоторый автоморфизм поверхности $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ такой, что $\tau(a, b) = (b, a)$ для каждой точки $(a, b) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Тогда $\langle G, \tau \rangle \cong S_5$, откуда следует, что пары (G, φ) и $(G, \varphi \circ \sigma)$ сопряжены для любого $\sigma \in \text{Aut}(G)$, поскольку каждый автоморфизм группы $\mathbb{A}_5$ индуцирован внутренним автоморфизмом группы S_5 . Лемма доказана.

Таким образом, для завершения доказательства теоремы B.10 мы можем игнорировать различия между мономорфизмами v и $v \circ \sigma$, где $\sigma \in \text{Aut}(G)$.

ЛЕММА В.15. Предположим, что $n \neq 0$. Тогда n чётно и существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad \rho \quad} & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \\ \pi \downarrow & & \downarrow \bar{\pi} \\ \mathbb{P}^1 & \xlongequal{\quad} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

где ρ – бирациональное отображение, индуцирующее мономорфизм $\bar{\nu}: G \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ такой, что $\bar{\nu}(g) = \rho \circ \nu(g) \circ \rho^{-1}$ для каждого $g \in G$, и $\bar{\nu}$ индуцирован естественным действием группы $\mathbb{A}_5 \times \text{id}_{\mathbb{P}^1}$ на поверхности $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Z – единственное сечение расслоения π такое, что выполнено равенство $Z^2 = -n$. Тогда Z является G -инвариантной кривой. Известно, что кривая Z содержит G -орбиты, состоящие из 12, 20 и 30 точек (см. [16]).

Пусть Σ – некоторая G -орбита такая, что $\Sigma \subset Z$ и $|\Sigma| = 30$. Тогда существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ X & \xrightarrow{\quad \psi \quad} & X_1 \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ \mathbb{P}^1 & \xlongequal{\quad} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

где ψ – бирациональное отображение, π_1 – морфизм, являющийся $\mathbb{P}^1$ -расслоением, α – раздутие множества Σ , а β – сдвиг собственных прообразов всех слоев расслоения π , каждый из которых содержит некоторую точку множества Σ .

Бирациональное отображение ψ индуцирует мономорфизм $v_1: G \rightarrow \text{Aut}(X_1)$ такой, что $v_1(g) = \psi \circ v(g) \circ \psi^{-1}$ для каждого $g \in G$. отождествим подгруппу $v_1(G)$ с группой G . Положим $Z_1 = \psi(Z)$. Тогда

$$Z_1 \cdot Z_1 = Z \cdot Z - 30 = -n - 30 < 0,$$

откуда следует, что $X_1 \cong \mathbb{F}_{n+30}$, а сечение Z_1 является G -инвариантной кривой. Кривая Z_1 содержит G -орбиты, состоящие из 12, 20 и 30 точек (см. [16]).

Пусть Σ_1 – некоторая G -орбита такая, что $\Sigma_1 \subset Z_1$ и $|\Sigma_1| = 20$, P_1 – точка в Σ_1 , H_1 – стабилизатор в G точки P_1 . Тогда $H_1 \cong \mathbb{Z}_3$. Пусть L_1 – слой расслоения π_1 такой, что $P_1 \in L_1$. Тогда $h_1(L_1) = L_1$ для каждого $h_1 \in H_1$. В этом случае существует точка $Q_1 \in L_1 \setminus P_1$ такая, что $h_1(Q_1) = Q_1$ для каждого $h_1 \in H_1$.

Обозначим G -орбиту точки Q_1 через Λ_1 . Тогда $|\Lambda_1| = 20$ и $\Lambda_1 \cap Z_1 = \emptyset$, поскольку кривая Z_1 является G -инвариантной и $Q_1 \notin Z_1$. Таким образом, существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & U_1 & \\ \alpha_1 \swarrow & & \searrow \beta_1 \\ X_1 & \overset{\psi_1}{\dashrightarrow} & X_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ \mathbb{P}^1 & \xlongequal{\quad} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

где ψ_1 – бирациональное отображение, π_2 – морфизм, являющийся $\mathbb{P}^1$ -расслоением, α_1 – раздутие множества Λ_1 , а β_1 – сдвиг собственных прообразов слоев расслоения π_1 , каждый из которых содержит некоторую точку множества Λ_1 .

Бирациональное отображение ψ_1 индуцирует мономорфизм $v_2: G \rightarrow \text{Aut}(X_2)$ такой, что $v_2(g) = \psi_1 \circ v_1(g) \circ \psi_1^{-1}$ для каждого $g \in G$. отождествим подгруппу $v_2(G)$ с группой G . Положим $Z_2 = \psi_1(Z_1)$. Тогда

$$Z_2 \cdot Z_2 = -n - 10 < 0,$$

откуда следует, что $X_2 \cong \mathbb{F}_{n+10}$, а кривая Z_2 является G -инвариантной. Кривая Z_2 содержит G -орбиты, состоящие из 12, 20 и 30 точек (см. [16]).

Пусть Σ_2 – единственная G -орбита такая, что $\Sigma_2 \subset Z_2$ и $|\Sigma_2| = 12$, пусть P_2 – точка множества Σ_2 и H_2 – стабилизатор в G точки P_2 . Тогда $H_2 \cong \mathbb{Z}_5$. Пусть L_2 – слой расслоения π_2 такой, что $P_2 \in L_2$. Тогда $h_2(L_2) = L_2$ для каждого $h_2 \in H_2$. Следовательно, существует точка $Q_2 \in L_2 \setminus P_2$ такая, что $h_2(Q_2) = Q_2$ для каждого $h_2 \in H_2$.

Обозначим G -орбиту точки Q_2 через Λ_2 . Тогда $|\Lambda_2| = 12$ и $\Lambda_2 \cap Z_2 = \emptyset$, так как кривая Z_2 является G -инвариантной и $Q_2 \notin Z_2$. Таким образом, существует

коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 & U_2 & \\
 \alpha_2 \swarrow & & \searrow \beta_2 \\
 X_2 & \overset{\psi_2}{\dashrightarrow} & X' \\
 \pi_2 \downarrow & & \downarrow \pi' \\
 \mathbb{P}^1 & \xlongequal{\quad} & \mathbb{P}^1
 \end{array}$$

где ψ_2 – бирациональное отображение, π' – морфизм, который является $\mathbb{P}^1$ -расслоением, α_2 – раздутие множества Λ_2 , а β_2 – сдутие собственных прообразов слоев расслоения π_2 , каждый из которых содержит некоторую точку множества Λ_2 .

Бирациональное отображение ψ_2 индуцирует мономорфизм $v': G \rightarrow \text{Aut}(X')$ такой, что $v'(g) = \psi_2 \circ v_3(g) \circ \psi_2^{-1}$ для каждого $g \in G$. Отождествим подгруппу $v'(G)$ с группой G . Положим $Z' = \psi_2(Z_2)$. Тогда $Z' \cdot Z' = -n + 2 \leq 0$, а кривая Z' является G -инвариантным сечением расслоения π' . Отметим, что $X' \cong \mathbb{F}_{n-2}$.

Положим $\nu = \psi_2 \circ \psi_1 \circ \psi$. Тогда тройка $(X', \xi \circ \nu, v')$ является еще одной регуляризацией пары (G, φ) . Итак, мы построили коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 X & \overset{\nu}{\dashrightarrow} & X' \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\
 \mathbb{P}^1 & \xlongequal{\quad} & \mathbb{P}^1
 \end{array}$$

где ν – бирациональное отображение, π' – морфизм, который является $\mathbb{P}^1$ -расслоением, $X' \cong \mathbb{F}_{n-2}$, существует сечение Z' расслоения π' такое, что $Z' \cdot Z' = -n + 2$, а кривая Z' является G -инвариантной. Если $n = 2$, то доказательство закончено. Аналогично получаем, что $n \neq 3$. Тогда $n \geq 4$. Повторяя приведенную конструкцию $\lfloor n/2 \rfloor$ раз, мы получим требуемое утверждение.

Для завершения доказательства теоремы В.10 можно положить $X \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и считать, что морфизм $\pi: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ является проекцией на первый фактор.

ЛЕММА В.16. *Предположим, что существует G -инвариантное сечение Z расслоения π . Тогда существует коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc}
 X & \overset{\rho}{\dashrightarrow} & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \bar{\pi} \\
 \mathbb{P}^1 & \xlongequal{\quad} & \mathbb{P}^1
 \end{array}$$

где ρ – бирациональное отображение, индуцирующее мономорфизм $\bar{v}: G \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ такой, что $\bar{v}(g) = \rho \circ v(g) \circ \rho^{-1}$ для каждого $g \in G$, а $\bar{v}$ индуцирован естественным действием группы $\mathbb{A}_5 \times \text{id}_{\mathbb{P}^1}$ на поверхности $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Σ – некоторая G -орбита такая, что $\Sigma \subset Z$, и выполнено равенство $|\Sigma| = 60$. Тогда существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 & U & \\
 \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\
 X & \xrightarrow{\psi} & X' \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\
 \mathbb{P}^1 & \xlongequal{\quad} & \mathbb{P}^1
 \end{array}$$

где ψ – бирациональное отображение, π' – морфизм, являющийся $\mathbb{P}^1$ -расслоением, α – раздутие множества Σ , а β – сдутие собственных прообразов слоев расслоения π , каждый из которых проходит через некоторую точку множества Σ . Бирациональное отображение ψ индуцирует мономорфизм $v': G \rightarrow \text{Aut}(X')$ такой, что $v'(g) = \psi \circ v(g) \circ \psi^{-1}$ для каждого $g \in G$. отождествим подгруппу $v'(G)$ с группой G . Положим $Z' = \psi(Z)$. Тогда $Z' \cdot Z' = Z \cdot Z - 60$, а кривая Z' является G -инвариантным сечением расслоения π' . Положим $m = -Z' \cdot Z'$. Если $m \geq 0$, то $X' \cong \mathbb{F}_m$ и все необходимые нам утверждения следуют из леммы B.15. Если $m < 0$, то мы можем завершить доказательство повторением приведенной конструкции $\lceil m/60 \rceil$ раз. Лемма доказана.

Пусть τ – бирегулярная инволюция поверхности $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ такая, что $\tau(a, b) = (b, a)$ для каждой точки $(a, b) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Тогда τ индуцирует мономорфизм $v': G \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ такой, что $v'(g) = \tau \circ v(g) \circ \tau$ для каждого $g \in G$. Тогда тройка $(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \xi \circ \tau, v')$ является регуляризацией пары (G, φ) .

ЛЕММА В.17. *Мономорфизм v индуцирован естественным действием группы $\text{id}_{\mathbb{P}^1} \times \mathbb{A}_5$, если и только если мономорфизм v' индуцирован естественным действием группы $\mathbb{A}_5 \times \text{id}_{\mathbb{P}^1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

Зафиксируем некоторый мономорфизм групп $\iota: G \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ и некоторый внешний автоморфизм $\nu \in \text{Aut}(G)$. Из лемм B.14, B.16, B.17 следует, что мы можем считать, что $v(g)(a, b) = (\iota(g)(a), \iota \circ \nu(g)(b))$ для каждого элемента $g \in G$ и каждой точки $(a, b) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

ЛЕММА В.18. *Существует G -инвариантное сечение расслоения π .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из несложных вычислений следует, что существует G -инвариантная кривая $Z \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ такая, что

$$Z \sim \pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(7)) \otimes (\pi \circ \tau)^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)),$$

откуда следует, в частности, что Z является G -инвариантным сечением проекции π .

Утверждение теоремы B.10 доказано.

Список литературы

1. J. Kollár, Sh. Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Math., **134**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.
2. D. Kosta, *Del Pezzo surfaces with Du Val singularities*, Ph. D. thesis, University of Edinburgh, 2009; arXiv: abs/0904.0943.
3. A. Corti, “Singularities of linear systems and 3-fold birational geometry”, *Explicit birational geometry of 3-folds*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **281**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, 259–312.
4. В. А. Исковских, “Бирациональная жесткость гиперповерхностей Фано в рамках теории Мориа”, *УМН*, **56**:2 (2001), 3–86; англ. пер.: V. A. Iskovskikh, “Birational rigidity of Fano hypersurfaces in the framework of Mori theory”, *Russian Math. Surveys*, **56**:2 (2001), 207–291.
5. J. Kollár, “Singularities of pairs”, *Algebraic geometry* (Santa Cruz, 1995), Proc. Sympos. Pure Math., **62**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 221–287.
6. В. В. Шокуров, “Трехмерные логперестройки”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **56**:1 (1992), 105–203; англ. пер.: V. V. Shokurov, “3-fold log flips”, *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **40**:1 (1993), 95–202.
7. R. Lazarsfeld, *Positivity in algebraic geometry*, v. II, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), **49**, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
8. И. А. Чельцов, “Бирационально жесткие многообразия Фано”, *УМН*, **60**:5 (2005), 71–160; англ. пер.: I. A. Cheltsov, “Birationally rigid Fano varieties”, *Russian Math. Surveys*, **60**:5 (2005), 875–965.
9. C. Birkar, P. Cascini, C. D. Hacon, J. McKernan, “Existence of minimal models for varieties of log general type”, *J. Amer. Math. Soc.*, **23**:2 (2010), 405–468.
10. G. Tian, “On Kähler–Einstein metrics on certain Kahler manifolds with $C_1(M) > 0$ ”, *Invent. Math.*, **89**:2 (1987), 225–246.
11. J.-P. Demailly, J. Kollár, “Semi-continuity of complex singularity exponents and Kähler–Einstein metrics on Fano orbifolds”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **34**:4 (2001), 525–556.
12. И. А. Чельцов, К. А. Шрамов, “Логканонические пороги неособых трехмерных многообразий Фано”, *УМН*, **63**:5 (2008), 73–180; англ. пер.: I. A. Cheltsov, C. A. Shramov, “Log canonical thresholds of smooth Fano threefolds”, *Russian Math. Surveys*, **63**:5 (2008), 859–958.
13. I. Cheltsov, J. Park, C. Shramov, “Exceptional del Pezzo hypersurfaces”, *J. Geom. Anal.*, **20**:4 (2010), 787–816.
14. I. Cheltsov, “On singular cubic surfaces”, *Asian J. Math.*, **13**:2 (2009), 191–214.
15. I. Cheltsov, “Log canonical thresholds of del Pezzo surfaces”, *Geom. Funct. Anal.*, **18**:4 (2008), 1118–1144.
16. T. A. Springer, *Invariant theory*, Lecture Notes in Math., **585**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1977.
17. А. В. Пухликов, “Бирациональная геометрия прямых произведений Фано”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:6 (2005), 153–186; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, “Birational geometry of Fano direct products”, *Izv. Math.*, **69**:6 (2005), 1225–1255.
18. А. В. Пухликов, “Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий с пучком поверхностей дель Пеццо”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:1 (1998), 123–164; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, “Birational automorphisms of algebraic threefolds with a pencil of Del Pezzo surfaces”, *Izv. Math.*, **62**:1 (1998), 115–155.
19. Q. Zhang, “Rational connectedness of log $\mathbb{Q}$ -Fano varieties”, *J. Reine Angew. Math.*, **590** (2006), 131–142.
20. T. Graber, J. Harris, J. Starr, “Families of rationally connected varieties”, *J. Amer. Math. Soc.*, **16**:1 (2003), 57–67.

21. Yu. Kawamata, K. Matsuda, K. Matsuki, “Introduction to the minimal model problem”, *Algebraic geometry* (Sendai, 1985), Adv. Stud. Pure Math., **10**, North-Holland, Amsterdam, 1987, 283–360.
22. A. V. Pukhlikov, “Birational automorphisms of Fano hypersurfaces”, *Invent. Math.*, **134** (1998), 401–426.
23. A. Corti, M. Mella, “Birational geometry of terminal quartic 3-folds. I”, *Amer. J. Math.*, **126**:4 (2004), 739–761.
24. J. Kollár, *Flips and abundance for algebraic threefolds* (Salt Lake City, Utah, 1991), Astérisque, **211**, Soc. Math. de France, Paris, 1992.
25. S. S.-T. Yau, Y. Yu, *Gorenstein quotient singularities in dimension three*, Mem. Amer. Math. Soc., **105**, no. 505, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
26. J. Rauschnig, P. Slodowy, “An aspect of icosahedral symmetry”, *Canad. Math. Bull.*, **45**:4 (2005), 686–696.
27. I. V. Dolgachev, V. A. Iskovskikh, “Finite subgroups of the plane Cremona group”, *Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin*, v. I, Progr. Math., **269**, Birkhäuser, Boston, MA, 2009, 443–548.
28. J. Blanc, “Sous-groupes algébriques du groupe de Cremona”, *Transform. Group*, **14**:2 (2009), 249–285.
29. S. Bannai, H. Tokunaga, “A note on embeddings of S_4 and A_5 into the two-dimensional Cremona group and versal Galois covers”, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **43**:4 (2007), 1111–1123.
30. W. L. Edge, “A pencil of four-nodal plane sextics”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **89**:3 (1981), 413–421.
31. M. Rosenlicht, “Some basic theorems on algebraic groups”, *Amer. J. Math.*, **78** (1956), 401–443.
32. J. Kollár, “Birational rigidity of Fano varieties and field extensions”, *Многомерная алгебраическая геометрия*, Тр. МИАН, **264**, МАИК, М., 2009, 103–108; J. Kollár, “Birational rigidity of Fano varieties and field extensions”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **264** (2009), 96–101.
33. I. Cheltsov, “Fano varieties with many selfmaps”, *Adv. Math.*, **217**:1 (2008), 97–124.
34. N. Hitchin, “Spherical harmonics and the icosahedron”, *Groups and symmetries*, CRM Proc. Lecture Notes., **47**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, 215–231.

ИВАН АНАТОЛЬЕВИЧ ЧЕЛЬЦОВ
 (IVAN A. CHELTISOV)
 School Mathematics University of Edinburgh, UK
 E-mail: I.Cheltsov@ed.ac.uk

Поступило в редакцию
 19.09.2011
 09.05.2013