Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Тахтаджян, Квантовые теории поля на алгебраических кривых. I. Аддитивные бозоны, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2013, том 77, выпуск 2, 165–196

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7923>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 14:04:36

УДК 512.626+512.772+512.815.8+530.145

Л. А. Тахтаджян

Квантовые теории поля на алгебраических кривых. I. Аддитивные бозоны

При использовании адельной интерпретации когомологий Ж.-П. Серра построено “дифференциальное и интегральное исчисление” на алгебраической кривой X над алгебраически замкнутым полем констант k характеристики нуль, определен аналог аддитивно-многозначных функций на X и доказана соответствующая обобщенная теорема о вычетах. При использовании глобальной алгебры Гейзенберга и решеточной алгебры Ли сформулированы квантовые теории поля аддитивных и заряженных бозонов на алгебраической кривой X . Эти теории естественным образом связаны с алгебраической теоремой де Рама. Доказано, что расширение глобальных симметрий – аддитивных тождеств Уорда, предложенных Э. Виттенем, – от k -векторного пространства рациональных функций на X до векторного пространства аддитивно-многозначных функций однозначно определяет квантовые теории аддитивных и заряженных бозонов.

Библиография: 18 наименований.

Ключевые слова: алгебраические кривые и алгебраические функции, адели, аддитивно-многозначные функции, аддитивные тождества Уорда, алгебра Гейзенберга, алгебра токов на алгебраической кривой, обобщенная теорема о вычетах, пространства Фока, квантовые теории свободных бозонов на алгебраической кривой, функционал математического ожидания.

DOI: 10.4213/im7923

§ 1. Введение

Классическая теория компактных римановых поверхностей имеет естественный алгебраический аналог, теорию алгебраических функций от одной переменной над произвольным полем констант, развитую Р. Дедекиндом и Г. Вебером. Введение Э. Артином и Х. Хассе дифференциалов в алгебраическую теорию, а также определение аделей и иделей, данное К. Шевалле и А. Вейлем, открыли возможность для приложения бесконечномерных методов к теории алгебраических кривых. Классическими примерами использования этих методов являются предложенная Ж.-П. Серром адельная интерпретация когомологий и теоремы Римана–Роха [1] и доказанная Дж. Тэйтом [2] общая теорема о вычетах. Э. Арбарелло, К. де Кончини и В. Кац [3] в 1987 г. предложили интерпретацию подхода Дж. Тэйта в терминах центральных расширений

Работа выполнена при финансовой поддержке Национального научного фонда (NSF, гранты № DMS-0204628, DMS-0705263 и DMS-1005769).

бесконечномерных алгебр Ли и дали новое доказательство знаменитого закона взаимности А. Вейля при помощи бесконечного клин-представления.

Д. Каждан [4] и Э. Виттен [5] в 1987 г. предложили адекватную формулировку квантовой теории поля для однокомпонентных фермионов на алгебраической кривой, а в работе [6] Виттен наметил подход к другим квантовым теориям поля. Именно, пусть X – алгебраическая кривая со спин-структурой L . Обозначим через $\mathcal{M}(L)$ бесконечномерное k -векторное пространство мероморфных сечений L над X , а через $\mathcal{M}_P$ – пополнения $\mathcal{M}(L)$ для всех точек $P \in X$. Вкратце подход [4], [5] может быть описан при помощи следующих объектов:

1) глобальной алгебры Клиффорда Cl_X на X – ограниченного прямого произведения по всем точкам $P \in X$ локальных алгебр Клиффорда Cl_P , связанных с k -векторными пространствами $\mathcal{M}_P$ при помощи отображений вычетов $\text{Res}_P(fg)$;

2) адекватного клиффордова модуля (глобального фермионного пространства Фока $\mathfrak{F}_X$), ограниченного $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -градуированного тензорного произведения локальных клиффордовых модулей $\mathfrak{F}_P$ по всем $P \in X$;

3) функционала “математического ожидания”, линейного отображения $\langle \cdot \rangle$: $\mathfrak{F}_X \rightarrow k$, удовлетворяющего условиям

$$\langle f \cdot u \rangle = 0 \quad \forall f \in \mathcal{M}(L) \subset \text{Cl}_X, \quad u \in \mathfrak{F}_X, \quad (1)$$

где векторное пространство $\mathcal{M}(L)$ диагонально вложено в глобальную алгебру Клиффорда Cl_X .

В этой чисто алгебраической формулировке однокомпонентных свободных фермионов на алгебраической кривой произведения полевых операторов в точках $P \in X$ квантовой теории поля заменяются на векторы $u = \hat{\otimes}_{P \in X} u_P \in \mathfrak{F}_X$, а линейное отображение $\langle \cdot \rangle$ является математическим способом определения корреляционных функций квантовых полей, которые на физическом уровне строгости вводятся при помощи фейнмановского континуального интеграла. Векторное пространство $\mathcal{M}(L)$ действует на $\mathfrak{F}_X$ глобальными симметриями, и инвариантность квантовой теории свободных фермионов по отношению к этим симметриям выражается при помощи квантовых законов сохранения (1), также называемых *аддитивными тождествами Уорда*. В работах [5], [6] доказано, что если спин-структура L не допускает глобальных голоморфных сечений, то аддитивные тождества Уорда однозначно определяют функционал математического ожидания $\langle \cdot \rangle$. Соотношения (1) также согласованы с теоремой о вычетах на кривой X ,

$$\sum_{P \in X} \text{Res}_P(fdg) = 0, \quad f, g \in \mathcal{M}(L).$$

Э. Виттен в [6] развил основы квантовых теорий поля, связанных с алгеброй токов на алгебраической кривой, а также указал на теории, связанные с группой петель на алгебраической кривой. Глобальные симметрии этих теорий даются соответственно рациональными отображениями алгебраической кривой X в конечномерную полупростую алгебру Ли над полем k и рациональными

отображениями X в соответствующую группу Ли. В последнем случае аналог квантовых законов сохранения (1) в работе [6] назывался *мультипликативными тождествами Уорда*. Однако, как это было отмечено в [6, § IV], в случае, когда род кривой X больше нуля, тождества Уорда даже в ли-алгебраическом случае не определяют функционал математического ожидания $\langle \cdot \rangle$ однозначно. Таким образом, важной задачей построения квантовых теорий поля на алгебраической кривой является нахождение дополнительных условий, которые однозначно определяют линейный функционал $\langle \cdot \rangle$.

Отметим, что в случае, когда X – риманова поверхность, т. е. алгебраическая кривая над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, снабженная комплексной топологией, традиционное физическое определение корреляционных функций использует фейнмановский интеграл в лагранжевой формулировке теории. Для случая, когда X – алгебраическая кривая над произвольным полем констант, такой подход более не применим и нужны другие способы определения корреляционных функций. Особый интерес представляет “интегрируемый” случай, когда функционал математического ожидания (и, следовательно, все корреляционные функции теории) однозначно определяется глобальными симметриями.

В работе [7] мы предложили подход к решению задачи об однозначном определении функционала математического ожидания для простейших скалярных теорий, когда конечномерная алгебра Ли – это абелева алгебра Ли k , а соответствующая группа Ли – мультипликативная группа $k^* = k \setminus \{0\}$. Мы называем эти квантовые теории поля *аддитивными* и *мультипликативными бозонами* соответственно. Предложенное в [7] решение состоит в том, что следует расширить глобальные симметрии, рассматривая алгебраический аналог векторного пространства аддитивно-многозначных функций на римановой поверхности – аналогов классических абелевых интегралов второго рода с нулевыми a -периодами. В то время как классическая теория абелевых интегралов на компактной римановой поверхности была развита Риманом (современное изложение см., например, в [8] и [9]), соответствующая алгебраическая теория – интегральное исчисление на алгебраических кривых – разработана не была. В настоящей работе мы частично восполняем этот пробел для случая, когда поле констант k имеет характеристику нуль, и даем явное построение квантовых теорий поля аддитивных бозонов на алгебраической кривой. Эти теории естественно связаны с алгебраической теоремой де Рама, и соответствующие глобальные симметрии образуют векторное пространство аддитивно-многозначных функций; точные формулировки даны в теоремах 6, 7. Предлагаемую конструкцию квантовых теорий поля на алгебраических кривых можно рассматривать как алгебраический аналог геометрической реализации конформных теорий поля на римановых поверхностях [10]. Для формулировки квантовой теории мультипликативных бозонов необходимо определить алгебраический аналог группы мультипликативно-многозначных функций на римановой поверхности – аналогов экспонент от абелевых интегралов третьего рода с нулевыми a -периодами. Мы планируем рассмотреть аналог этой группы и соответствующие мультипликативные тождества Уорда в отдельной работе.

Более подробное содержание работы таково. В § 2 приведены основные необходимые факты из теории алгебраических кривых. Именно, пусть X – алгебраическая кривая рода g над алгебраически замкнутым полем констант k , $F = k(X)$ – поле рациональных функций на X , а F_P – соответствующие локальные поля, пополнения поля F по отношению к регулярным нормированиям v_P , отвечающим дискретно нормированным кольцам точек $P \in X$. В п. 2.1 мы вводим кольцо аделей

$$\mathbb{A}_X = \prod_{P \in X} F_P$$

– ограниченное прямое произведение локальных полей F_P и приводим адельную интерпретацию когомологий Ж.-П. Серра. В п. 2.2 мы напоминаем определения F -модуля $\Omega_{F/k}^1$ кэлеровых дифференциалов на X , соответствующего $\mathbb{A}_X$ -модуля дифференциальных аделей Ω_X и отображений дифференциала и вычета $d: \mathbb{A}_X \rightarrow \Omega_X$ и $\text{Res}: \Omega_X \rightarrow k$. В п. 2.3 мы приводим двойственность Серра и теорему Римана–Роха.

В § 3, предполагая, что поле констант k имеет характеристику нуль, мы напоминаем основы дифференциального исчисления на алгебраической кривой X (структуру k -векторного пространства кэлеровых дифференциалов $\Omega_{F/k}^1$ на X) и разрабатываем основы соответствующего интегрального исчисления. Именно, в п. 3.1, следуя работам [11] и [12], на k -векторном пространстве $\Omega^{(2\text{nd})}$ дифференциалов второго рода – дифференциалов на X с нулевыми вычетами – мы вводим кососимметрическую билинейную форму

$$(\omega_1, \omega_2)_X = \sum_{P \in X} \text{Res}_P(d^{-1}\omega_1 \omega_2), \quad \omega_1, \omega_2 \in \Omega^{(2\text{nd})}.$$

Основной результат дифференциального исчисления дается теоремой 4, имеющей смысл алгебраического варианта теоремы де Рама. Теорема 4 восходит к работам Шевалле и Эйхлера, и для алгебраической кривой X рода $g \geq 1$ утверждает¹, что $2g$ -мерное k -векторное пространство $\Omega^{(2\text{nd})}/dF$ является симплектическим векторным пространством с симплектической формой $(\cdot, \cdot)_X$. Более того, для каждого неспециального эффективного дивизора $D = P_1 + \dots + P_g$ степени g на X , вместе с выбором локальных координат t_i в точках P_i , имеет место изоморфизм

$$\Omega^{(2\text{nd})}/dF \simeq \Omega^{(2\text{nd})} \cap \Omega_{F/k}^1(2D).$$

Пространство $\Omega^{(2\text{nd})} \cap \Omega_{F/k}^1(2D)$ имеет естественный симплектический базис $\{\theta_i, \omega_i\}_{i=1}^g$, состоящий из дифференциалов первого рода θ_i и второго рода ω_i со следующими свойствами. Дифференциалы θ_i имеют нули во всех точках P_j , $j \neq i$, и $\theta_i = (1 + O(t_i))dt_i$ в P_i , в то время как дифференциалы ω_i регулярны во всех точках P_j , $j \neq i$, и $\omega_i = (t_i^{-2} + O(t_i))dt_i$ в P_i . Дифференциалы θ_i и ω_i являются алгебраическими аналогами соответственно дифференциалов первого рода на компактной римановой поверхности с нормализованными a -периодами и дифференциалов второго рода с полюсами второго порядка, нулевыми a -периодами и нормализованными b -периодами. Алгебраически

¹Случай $g = 0$ тривиален.

a -периоды $\omega \in \Omega^{(2\text{nd})}$ определяются как $(\omega, \omega_i)_X$, $i = 1, \dots, g$; и через $\Omega_0^{(2\text{nd})}$ мы обозначаем изотропное подпространство $\Omega^{(2\text{nd})}$, состоящее из дифференциалов второго рода с нулевыми a -периодами. Согласно предложению 1 имеем

$$\Omega_0^{(2\text{nd})} = k \cdot \omega_1 \oplus \dots \oplus k \cdot \omega_g \oplus dF. \quad (2)$$

В п. 3.1 мы вводим алгебраическое понятие аддитивно-многозначных функций на X . По определению k -векторное пространство аддитивно-многозначных функций – это подпространство $\mathcal{A}(X)$ кольца аделей $\mathbb{A}_X$, удовлетворяющее условиям $F \subset \mathcal{A}(X)$ и $d\mathcal{A}(X) \subset \Omega_{F/k}^1$, а также дополнительному свойству: если $a \in \mathcal{A}(X)$ таково, что $da = 0$, то $a = c \in k$. Основным результатом интегрального исчисления для дифференциалов второго рода с нулевыми a -периодами является приведенная в примере 1 явная конструкция векторного пространства $\mathcal{A}(X, D)$, играющего фундаментальную роль в теории аддитивных бозонов. Это пространство параметризуется неспециальным дивизором $D = P_1 + \dots + P_g$ степени g на X , локальными параметрами t_i в точках P_i и решениями в $\mathbb{A}_X$ уравнений $d\eta_i = \omega_i$ (с произвольным выбором локальных аддитивных констант), определяется следующим образом:

$$\mathcal{A}(X; D) = k \cdot \eta_1 \oplus \dots \oplus k \cdot \eta_g \oplus F \subset \mathbb{A}_X,$$

и обладает свойством $d(\mathcal{A}(X; D)) = \Omega_0^{(2\text{nd})}$. Наконец, мы вводим аддитивно-многозначные функции $\eta_P^{(n)} \in \mathcal{A}(X; D)$ с единственным полюсом $P \in X$ произвольного порядка n и в лемме 1 доказываем, что каждая рациональная функция $f \in F$ допускает единственное разложение на простые дроби, задаваемые $\eta_P^{(n)}$. Мы также объясняем трудности, возникающие при определении алгебраических аналогов мультипликативно-многозначных функций.

В § 4 мы формулируем локальные квантовые теории аддитивных и заряженных бозонов. Локальная теория аддитивных бозонов связана с теорией представлений локальной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{g}_P$ – одномерного центрального расширения абелевой алгебры Ли F_P , $P \in X$, при помощи 2-коцикла $c_P(f, g) = -\text{Res}_P(fdg)$. В п. 4.1 мы описываем представление ρ со старшим весом алгебры Ли $\mathfrak{g}_P$ в локальном пространстве Фока $\mathcal{F}_P$ и определяем соответствующее контраградиентное представление $\rho^\vee$ в двойственном локальном пространстве Фока $\mathcal{F}_P^\vee$. В п. 4.2 мы вводим локальную решеточную алгебру $\wr_P$ как полупрямую сумму локальной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{g}_P$ и абелевой алгебры Ли $k[\mathbb{Z}]$, групповой алгебры $\mathbb{Z}$. Соответствующий неприводимый $\wr_P$ -модуль со старшим весом дается локальным пространством Фока $\mathcal{B}_P$ “заряженных бозонов” – тензорным произведением $k[\mathbb{Z}]$ и $\mathcal{F}_P$. Материал из пп. 4.1, 4.2, в основном, является стандартным (см. [13], [14]).

Наконец, в § 5 мы формулируем глобальные квантовые теории поля, начиная с теории аддитивных бозонов на алгебраической кривой X в п. 5.1. Эта теория естественно связана с глобальной алгеброй Гейзенберга $\mathfrak{g}_X$ – одномерно-центрального расширения абелевой алгебры Ли $\mathfrak{gl}_1(\mathbb{A}_X) = \mathbb{A}_X$ при помощи

2-коцикла $c_X = \sum_{P \in X} c_P$. Поскольку $\Omega_0^{(2\text{nd})}$ изотропно по отношению к билинейной форме $(\cdot, \cdot)_X$, мы имеем

$$c_X(a_1, a_2) = 0 \quad \forall a_1, a_2 \in \mathcal{A}(X, D) \subset \mathbb{A}_X, \quad (3)$$

что можно рассматривать как обобщенную теорему о вычетах для аддитивно-многозначных функций. Неприводимый модуль со старшим весом глобальной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{g}_X$ – это глобальное пространство Фока $\mathcal{F}_X$ – ограниченное тензорное произведение локальных пространств Фока $\mathcal{F}_P$ по всем точкам $P \in X$. Глобальное пространство Фока можно рассматривать как пространство наблюдаемых квантовой теории аддитивных бозонов на алгебраической кривой. В теореме 6 мы доказываем существование и единственность нормализованного функционала математического ожидания $\langle \cdot \rangle: \mathcal{F}_X \rightarrow k$, однозначно определяемого глобальными симметриями

$$\langle \rho(a)v \rangle = 0 \quad \forall a \in \mathcal{A}(X; D), \quad v \in \mathcal{F}_X. \quad (4)$$

Здесь $\mathcal{A}(X; D) \subset \mathbb{A}_X$ – векторное пространство аддитивно-многозначных функций на X , введенное в п. 3.1, а $\rho: \mathfrak{g}_X \rightarrow \text{End } \mathcal{F}_X$ – соответствующее представление глобальной алгебры Гейзенберга. Именно, в теореме 6 показано, что

$$\langle v \rangle = (\Omega_X, v) \quad \forall v \in \mathcal{F}_X,$$

где $\Omega_X \in \mathcal{F}_X^\vee$ – вектор в двойственном пространстве к $\mathcal{F}_X$, удовлетворяющий бесконечной системе уравнений

$$\Omega_X \cdot \rho^\vee(a) = 0 \quad \forall a \in \mathcal{A}(X, D). \quad (5)$$

Вектор Ω_X задается явной формулой (см. теорему 6), которая содержит в себе аналоги всех корреляционных функций квантовых аддитивных бозонов на алгебраической кривой X . Совместность системы уравнений (5) основана на законе взаимности для дифференциалов второго рода с нулевыми a -периодами, доказанном в лемме 1.

Аддитивные тождества Уорда (4) также совместны с обобщенной теоремой о вычетах. Именно, поскольку $[\rho(x), \rho(y)] = c_X(x, y)\mathbf{I}$ для $x, y \in \mathbb{A}_X$, где $\mathbf{I}$ – тождественный оператор в $\mathcal{F}_X$, из (4) для $a_1, a_2 \in \mathcal{A}(X, D)$ получаем

$$0 = \langle (\rho(a_1)\rho(a_2) - \rho(a_2)\rho(a_1))v \rangle = c_X(a_1, a_2)\langle v \rangle \quad \forall v \in \mathcal{F}_X,$$

что и является (3).

В п. 5.2 мы определяем глобальную решеточную алгебру $\mathfrak{l}_X$ как полупрямую сумму глобальной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{g}_X$ и абелевой алгебры Ли $k[\text{Div}_0(X)]$ с генераторами e_D , $D \in \text{Div}_0(X)$, где $k[\text{Div}_0(X)]$ – групповая алгебра аддитивной группы $\text{Div}_0(X)$ дивизоров степени 0 на X . Соответствующий неприводимый модуль со старшим весом – это глобальное пространство Фока $\mathcal{B}_X$ заряженных бозонов, являющееся тензорным произведением групповой алгебры $k[\text{Div}_0(X)]$ и пространства Фока $\mathcal{F}_X$ для аддитивных бозонов. Основной

результат п. 5.2 дается теоремой 7. Именно, утверждается, что существует единственный функционал математического ожидания $\langle \cdot \rangle: \mathcal{B}_X \rightarrow k$, нормализованный по отношению к действию групповой алгебры $k[\text{Div}_0(X)]$ и удовлетворяющий аддитивным тождествам Уорда (4) для действия глобальных симметрий – пространства аддитивно-многозначных функций $\mathcal{A}(X, D)$ – в глобальном пространстве Фока $\mathcal{B}_X$. Он имеет вид $\langle v \rangle = (\hat{\Omega}_X, v)$, где $\hat{\Omega}_X \in \mathcal{B}_X^\vee$ – вектор в двойственном пространстве к $\mathcal{B}_X$, задаваемый явной формулой (см. теорему 7), которая содержит в себе все корреляционные функции квантовых заряженных аддитивных бозонов на алгебраической кривой X . И наконец, в п. 5.3, следуя предложению рецензента, мы приводим инвариантную формулировку теоремы 6.

Я выражаю благодарность рецензенту за внимательное прочтение рукописи, конструктивную критику и замечания, а также за ценные предложения.

§ 2. Основные факты

Здесь мы напоминаем необходимые для дальнейшего основные факты из теории алгебраических кривых. Излагаемый материал является, в основном, стандартным (см. [1], [8], [11]).

2.1. Определения. Алгебраическая кривая X над алгебраически замкнутым полем k – это неприводимое несингулярное одномерное проективное многообразие над k , снабженное топологией Зарисского. Поле $F = k(X)$ рациональных функций на X – это конечно порожденное расширение поля k степени трансцендентности 1. Обратно, каждое конечно порожденное трансцендентное расширение поля k степени 1 однозначно (с точностью до изоморфизма) соответствует алгебраической кривой над k . Замкнутые точки P на X отвечают дискретно нормированным кольцам $\mathcal{O}_P$, подкольцам поля F . Кольца $\mathcal{O}_P$ для всех $P \in X$ образуют пучок колец на X – структурный пучок $\mathcal{O}_X$, подпучок постоянного пучка $\underline{F}$.

Для каждой точки $P \in X$ обозначим через v_P регулярное дискретное нормирование поля F над k , отвечающее дискретно нормированному кольцу $\mathcal{O}_P$. Пополнение поля F по отношению к v_P – это замкнуто-полное поле F_P с кольцом нормирования $\mathcal{O}_P$, являющееся пополненным локальным кольцом в P с простым идеалом $\mathfrak{p}$ и полем вычетов $k = \mathcal{O}_P/\mathfrak{p}$. Кольцо аделей $\mathbb{A}_X$ алгебраической кривой X ,

$$\mathbb{A}_X = \prod_{P \in X} F_P,$$

задается прямым произведением локальных полей F_P по всем точкам $P \in X$, ограниченным по отношению к локальным кольцам $\mathcal{O}_P$. По определению

$$x = \{x_P\}_{P \in X} \in \mathbb{A}_X,$$

если $x_P \in \mathcal{O}_P$ для всех, кроме конечного числа, $P \in X$. Поле F содержится во всех локальных полях F_P и диагонально вкладывается в $\mathbb{A}_X$,

$$F \ni f \mapsto \{f|_P\}_{P \in X} \in \mathbb{A}_X.$$

Группа дивизоров $\text{Div}(X)$ кривой X – это свободная абелева группа, порожденная точками $P \in X$. По определению

$$D = \sum_{P \in X} n_P \cdot P \in \text{Div}(X),$$

если $n_P = v_P(D) \in \mathbb{Z}$ и $n_P = 0$ для всех, кроме конечного числа, $P \in X$. Дивизоры вида

$$(f) = \sum_{P \in X} v_P(f) \cdot P \in \text{Div}(X),$$

где $f \in F^* = F \setminus \{0\}$, называются *главными дивизорами*. Главные дивизоры образуют подгруппу $\text{PDiv}(X) \simeq F^*/k^*$ группы дивизоров $\text{Div}(X)$. Степень дивизора D – это

$$\deg D = \sum_{P \in X} n_P = \sum_{P \in X} v_P(D) \in \mathbb{Z},$$

и $\deg(f) = 0$, если $f \in F^*$. Дивизор D называется *эффективным*, если $v_P(D) \geq 0$ для всех $P \in X$. По определению D_1 и D_2 линейно эквивалентны, $D_1 \sim D_2$, если $D_1 - D_2 = (f)$, $f \in F^*$. Классы эквивалентности дивизоров образуют группу классов дивизоров $\text{Cl}(X) = \text{Div}(X)/\text{PDiv}(X)$.

Для каждого дивизора D подпространство $\mathbb{A}_X(D)$ k -векторного пространства $\mathbb{A}_X$ определяется следующим образом:

$$\mathbb{A}_X(D) = \{x \in \mathbb{A}_X : v_P(x) \geq -v_P(D) \forall P \in X\}.$$

Кольцо аделей $\mathbb{A}_X$ является топологическим кольцом с тихоновской топологией. База системы окрестностей нуля задается подпространствами $\mathbb{A}_X(D)$, $D \in \text{Div}(X)$, и $\mathbb{A}_X$ – это k -векторное пространство с линейной топологией в смысле С. Лефшеца [15, гл. II, § 6]. Подпространства $\mathbb{A}_X(D)$ линейно компактны, так что $\mathbb{A}_X$ локально линейно компактно. Соответственно, k -векторное пространство $F = k(X)$ дискретно в $\mathbb{A}_X$, а факторпространство $\mathbb{A}_X/F$ линейно компактно [8, приложение, § 3].

Каждому дивизору D отвечает алгебраический когерентный пучок $\mathcal{O}_X(D)$ на X со слоями в каждой точке $P \in X$:

$$\mathcal{O}_X(D)_P = \{f \in F : v_P(f) \geq -v_P(D)\}.$$

Линейно эквивалентным дивизорам отвечают изоморфные пучки. Обозначим через $H^i(X, \mathcal{O}_X(D))$ группы когомологий Чеха пучка $\mathcal{O}_X(D)$ – конечномерные векторные пространства над k , тривиальные для $i > 1$, и положим $h^i(D) = \dim_k H^i(X, \mathcal{O}_X(D))$. Нулевому дивизору $D = 0$ отвечает структурный пучок $\mathcal{O}_X$. В этом случае $h^0(0) = 1$ и $h^1(0) = g$ – арифметический род кривой X . Имеем

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) = \mathbb{A}_X(D) \cap F, \quad H^1(X, \mathcal{O}_X(D)) \simeq \mathbb{A}_X/(\mathbb{A}_X(D) + F),$$

что является адельной интерпретацией когомологий Ж.-П. Серра [1, гл. II, § 5].

2.2. Дифференциалы и вычеты. Пусть R – кольцо над полем k . Модуль кэлеровых дифференциалов $\Omega_{R/k}^1$ кольца R – это универсальный R -модуль с таким свойством, что существует k -линейное отображение $d: R \rightarrow \Omega_{R/k}^1$, удовлетворяющее правилу Лейбница

$$d(fg) = fdg + gdf, \quad f, g \in R.$$

Когда $R = F$ – поле $k(X)$ рациональных функций на алгебраической кривой X , модуль $\Omega_{F/k}^1$ является одномерным векторным пространством над F . Пусть $t \in F$ – локальная координата точки P в топологии Зарисского, т. е. рациональная функция на X , удовлетворяющая $v_P(t) = 1$. Тогда dt является базисом F -векторного пространства $\Omega_{F/k}^1$, т. е. любой кэлеров дифференциал может быть записан в виде $\omega = fdt$ для некоторого $f \in F$. Порядок $\omega \in \Omega_{F/k}^1$ в точке P определяется формулой

$$v_P(\omega) = v_P(f).$$

Порядок не зависит от выбора локальной координаты в точке P и задает нормирование на $\Omega_{F/k}^1$.

Семейство $\mathcal{O}_P$ -модулей $\Omega_{\mathcal{O}_P/k}^1$ для всех точек $P \in X$ задает алгебраический когерентный пучок $\underline{\Omega}$ – подпучок постоянного пучка $\underline{\Omega_{F/k}^1}$. Более того,

$$\Omega_{F/k}^1 = \Omega_{\mathcal{O}_P/k}^1 \otimes_{\mathcal{O}_P} F.$$

В случае поля k характеристики нуль F_P -модуль $\Omega_{F_P/k}^1$ для каждой точки $P \in X$ – это бесконечномерное векторное пространство над F_P (отображение d не является непрерывным в $\mathfrak{p}$ -адической топологии на F_P). Следуя [1, гл. II, § 11], определим

$$\tilde{\Omega}_{F_P/k}^1 = \Omega_{F_P/k}^1 / \mathcal{Q},$$

где $\mathcal{Q} = \bigcap_{n \geq 0} \mathfrak{p}^n d(\mathcal{O}_P)$, так что $\dim_{F_P} \tilde{\Omega}_{F_P/k}^1 = 1$. Таким образом определенный F_P -модуль $\tilde{\Omega}_{F_P/k}^1$ является пополнением F -модуля $\Omega_{F/k}^1$ по отношению к нормированию v_P . Пополнение $\mathcal{O}_P$ -модуля $\Omega_{\mathcal{O}_P/k}^1$ – это $\mathcal{O}_P$ -модуль $\tilde{\Omega}_{\mathcal{O}_P/k}^1$ и

$$\tilde{\Omega}_{F_P/k}^1 = \tilde{\Omega}_{\mathcal{O}_P/k}^1 \otimes_{\mathcal{O}_P} F_P.$$

Определим Ω_X , $\mathbb{A}_X$ -модуль дифференциальных аделей пучка $\underline{\Omega}$, формулой

$$\Omega_X = \prod_{P \in X} \tilde{\Omega}_{F_P/k}^1,$$

т. е. как прямое произведение по всем точкам $P \in X$ F_P -модулей $\tilde{\Omega}_{F_P/k}^1$, ограниченное по отношению к $\mathcal{O}_P$ -модулям $\tilde{\Omega}_{\mathcal{O}_P/k}^1$. Модуль $\Omega_{F/k}^1$ содержится во всех F_P -модулях $\tilde{\Omega}_{F_P/k}^1$ и диагонально вкладывается в Ω_X :

$$\Omega_{F/k}^1 \ni \omega \mapsto \{\omega|_P\}_{P \in X} \in \Omega_X.$$

Пространство Ω_X будучи k -векторным имеет линейную топологию с базисом окрестностей нуля, задаваемым подпространствами $\Omega_X(D)$ для всех $D \in \text{Div}(X)$:

$$\Omega_X(D) = \{\omega = \{\omega_P\}_{P \in X} \in \Omega_X : v_P(\omega_P) \geq -v_P(D) \forall P \in X\},$$

и является локально линейно компактным. Отображения $d: F_P \rightarrow \tilde{\Omega}_{F_P/k}^1$ для всех $P \in X$ определяют непрерывное отображение $d: \mathbb{A}_X \rightarrow \Omega_X$, удовлетворяющее правилу Лейбница.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. По существу $\mathbb{A}_X$ -модуль Ω_X – это множество “систем главных частей степени 1” на X в смысле Эйхлера (см. [12, гл. III, § 5.2]).

Пусть $\omega \in \tilde{\Omega}_{F_P/k}^1$, а t – локальный параметр поля F_P , так что dt – это базис $\mathcal{O}_P$ -модуля $\tilde{\Omega}_{\mathcal{O}_P/k}^1$. Отображение вычета $\text{Res}_P: \tilde{\Omega}_{F_P/k}^1 \rightarrow k$ определяется следующим образом:

$$\text{Res}_P(\omega) = c_{-1}, \quad \text{где} \quad \omega = \sum_{n \gg -\infty}^{+\infty} c_n t^n dt,$$

и запись $n \gg -\infty$ указывает на то, что суммирование ведется по конечному множеству отрицательных значений n . Определение вычета не зависит от выбора локального параметра, и отображение вычета непрерывно по отношению к $\mathfrak{p}$ -адической топологии на $\tilde{\Omega}_{F_P/k}^1$ и дискретной топологии на k . Локальные отображения вычетов Res_P объединяются в глобальное отображение вычета $\text{Res}: \Omega_X \rightarrow k$,

$$\text{Res} \omega = \sum_{P \in X} \text{Res}_P(\omega_P), \quad \omega = \{\omega_P\}_{P \in X} \in \Omega_X.$$

Глобальное отображение вычета корректно определено, непрерывно и обладает следующим фундаментальным свойством.

ТЕОРЕМА 1 (формула вычетов). *Для каждого $\omega \in \Omega_{F/k}^1$*

$$\text{Res} \omega = \sum_{P \in X} \text{Res}_P(\omega|_P) = 0.$$

2.3. Двойственность Серра и теорема Римана–Роха. Положим

$$\Omega_{F/k}^1(D) = \Omega_{F/k}^1 \cap \Omega_X(D) = \{\omega \in \Omega_{F/k}^1 : v_P(\omega) \geq -v_P(D) \forall P \in X\}$$

и определим спаривание вычета $(,): \Omega_X \otimes_K \mathbb{A}_X \rightarrow k$ формулой

$$(\omega, x) = \sum_{P \in X} \text{Res}_P(x_P \omega_P), \quad \text{где} \quad \omega \in \Omega_X, \quad x \in \mathbb{A}_X.$$

Спаривание вычета обладает следующими свойствами:

- P1) $(\omega, x) = 0$, если $\omega \in \Omega_{F/k}^1$ и $x \in F$;
- P2) $(\omega, x) = 0$, если $\omega \in \Omega_X(-D)$ и $x \in \mathbb{A}_X(D)$.

Как вытекает из P1), P2), формула $\iota(\omega)(x) = (\omega, x)$ задает для каждого $D \in \text{Div}(X)$ k -линейное отображение

$$\iota: \Omega_{F/k}^1(-D) \rightarrow (\mathbb{A}_X/(\mathbb{A}_X(D) + F))^\vee,$$

где $V^\vee = \text{Hom}(V, k)$ – топологическое двойственное пространство к k -векторному пространству V с линейной топологией.

ТЕОРЕМА 2 (двойственность Серра). *Для каждого $D \in \text{Div}(X)$ отображение ι – это изоморфизм, т. е. конечномерные k -векторные пространства $\Omega_{F/k}^1(-D)$ и $\mathbb{A}_X/(\mathbb{A}_X(D) + F)$ двойственны по отношению к спариванию вычета.*

СЛЕДСТВИЕ 1 (сильная теорема о вычетах). *Справедливы следующие утверждения:*

(i) *адель $x \in \mathbb{A}_X$ отвечает рациональной функции на X при вложении $F \hookrightarrow \mathbb{A}_X$, если и только если $(\omega, x) = 0$ для всех $\omega \in \Omega_{F/k}^1$;*

(ii) *дифференциальный адель $\omega \in \Omega_X$ отвечает кэлеровому дифференциалу на X при вложении $\Omega_{F/k}^1 \hookrightarrow \Omega_X$, если и только если $(\omega, f) = 0$ для всех $f \in F$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что выполнено утверждение (i). Из двойственности Серра следует, что $x \in \mathbb{A}_X(D) + F$ для всех $D \in \text{Div}(X)$, и так как $F \cap \mathbb{A}_X(D) = 0$ для $D < 0$, то $x \in F$. Докажем утверждение (ii); пусть $\omega_0 \in \Omega_{F/k}^1$, $\omega_0 \neq 0$. Полагая $x = \omega/\omega_0 \in \mathbb{A}_X$, мы получаем, что $0 = (\omega, f) = (f\omega_0, x)$ для всех $f \in F$, так что $x \in F$ по утверждению (i).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В несколько другой форме сильная теорема о вычетах приведена в [12, гл. III, § 5.3].

Для $\omega \in \Omega_{F/k}^1$ положим

$$(\omega) = \sum_{P \in X} v_P(\omega) \cdot P \in \text{Div}(X).$$

Поскольку $\dim_F \Omega_{F/k}^1 = 1$, дивизоры (ω) линейно эквивалентны и определяют класс дивизоров $K \in \text{Cl}(X)$, канонический класс кривой X . Следующий результат получается соединением формулы Римана–Роха для эйлеровой характеристики дивизора D :

$$\chi(D) = h^0(D) - h^1(D) = \deg D + 1 - g,$$

с двойственностью Серра и адельной интерпретацией когомологий.

ТЕОРЕМА 3 (теорема Римана–Роха). *Для всех $D \in \text{Div}(X)$ имеем*

$$h^0(D) - h^0(K - D) = \deg D + 1 - g.$$

Эффективный дивизор D на X называется *неспециальным*, если $h^0(K - D) = 0$. Из теоремы Римана–Роха следует, что эффективный дивизор D степени g неспециален, если и только если $h^0(D) = 1$. Другими словами, рациональная функция с полюсами в эффективном неспециальном дивизоре степени g – это константа.

§ 3. Дифференциальное и интегральное исчисление

Начиная с этого параграфа, мы предполагаем, что алгебраически замкнутое поле k имеет характеристику нуль, а алгебраическая кривая X имеет род $g \geq 1$.

3.1. Дифференциалы второго рода и “аддитивные функции”. Следуя классической терминологии, назовем кэлеров дифференциал $\omega \in \Omega_{F/k}^1$ *дифференциалом второго рода*, если $\text{Res}_P \omega = 0$ для всех $P \in X$. Векторное пространство $\Omega^{(2\text{nd})}$ над k , образованное дифференциалами второго рода на X , снабжено канонической кососимметрической билинейной формой $(,)_X$, определяемой следующим образом. Для каждого $\omega \in \Omega^{(2\text{nd})}$ пусть $x = \{x_P\}_{P \in X} \in \mathbb{A}_X$ – адель, удовлетворяющий равенству

$$dx_P = \omega|_P \quad \forall P \in X.$$

Для каждого $P \in X$ соответствующий элемент $x_P \in F_P$ существует, однозначно определен с точностью до аддитивной константы из k , и $x_P \in \mathcal{O}_P$ для всех, кроме конечного числа, $P \in X$. Обозначим $x = d^{-1}\omega$ и положим

$$(\omega_1, \omega_2)_X = \sum_{P \in X} \text{Res}_P(d^{-1}\omega_1 \omega_2), \quad \omega_1, \omega_2 \in \Omega^{(2\text{nd})}.$$

Билинейная форма $(,)_X$ не зависит от выбора аддитивных констант в определении d^{-1} и кососимметрична. Когда X – риманова поверхность, билинейная форма $(,)_X$ соответствует стандартному спариванию в когомологиях при изоморфизме $\Omega^{(2\text{nd})}/dF \simeq H_{\text{dR}}^1(X)$ (см. [16, гл. III, § 5]).

Бесконечномерное k -векторное пространство $\Omega^{(2\text{nd})}$ имеет g -мерное подпространство $\Omega^{(1\text{st})} = \Omega_{F/k}^1(0)$, образованное дифференциалами первого рода. Бесконечномерное подпространство $\Omega^{(1\text{st})} \oplus dF$ пространства $\Omega^{(2\text{nd})}$ является изотропным по отношению к билинейной форме $(,)_X$. Поскольку дополнительное к $\Omega^{(1\text{st})} \oplus dF$ подпространство в $\Omega^{(2\text{nd})}$ не определено канонически, точная последовательность

$$0 \rightarrow \Omega^{(1\text{st})} \oplus dF \rightarrow \Omega^{(2\text{nd})} \rightarrow \Omega^{(2\text{nd})}/(\Omega^{(1\text{st})} \oplus dF) \rightarrow 0$$

канонически не расщепляется. Тем не менее, имеет место следующий фундаментальный результат (см. [11, гл. VI, § 8] и [12, гл. III, § 5.3, 5.4]), который можно рассматривать как алгебраический аналог теоремы де Рама.

ТЕОРЕМА 4. *Справедливы следующие утверждения:*

(i) *ограничение билинейной формы $(,)_X$ на $\Omega^{(2\text{nd})}/dF$ невырожденно и*

$$\dim_k \Omega^{(2\text{nd})}/dF = 2g;$$

(ii) *каждому эффективному неспециальному дивизору D на X степени g отвечает изоморфизм*

$$\Omega^{(2\text{nd})}/dF \simeq \Omega^{(2\text{nd})} \cap \Omega_{F/k}^1(2D);$$

(iii) пусть $D = P_1 + \dots + P_g$ – неспециальный дивизор с различными точками, каждому выбору локальных параметров t_i в точках P_i отвечает симплектический базис $\{\theta_i, \omega_i\}_{i=1}^g$ k -векторного пространства $\Omega^{(2nd)} \cap \Omega_{F/k}^1(2D)$ по отношению к симплектической форме $(\cdot, \cdot)_X$,

$$(\theta_i, \theta_j)_X = (\omega_i, \omega_j)_X = 0, \quad (\theta_i, \omega_j)_X = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, g,$$

этот базис состоит из дифференциалов первого рода θ_i и дифференциалов второго рода ω_i , однозначно определяемых условиями

$$v_{P_i}(\theta_j - \delta_{ij} dt_i) > 0 \quad \text{и} \quad v_{P_i}(\omega_j - \delta_{ij} t_i^{-2} dt_i) > 0,$$

где $i, j = 1, \dots, g$;

(iv) подпространство $k \cdot \omega_1 \oplus \dots \oplus k \cdot \omega_g$ – это дополнительное изотропное подпространство к $\Omega^{(1st)} \oplus dF$ в $\Omega^{(2nd)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(\omega)_\infty = n_1 Q_1 + \dots + n_l Q_l$ – дивизор полюсов $\omega \in \Omega^{(2nd)}$. Поскольку $\text{char } k = 0$, для каждого Q_i существует $f_i \in F$ такое, что $v_{Q_i}(\omega - df_i) \geq 0$. Определим $x = \{x_P\}_{P \in X} \in \mathbb{A}_X$ формулами

$$x_P = \begin{cases} f_i|_{Q_i}, & P = Q_i, \quad i = 1, \dots, l, \\ 0, & P \neq Q_i, \quad i = 1, \dots, l. \end{cases}$$

Поскольку дивизор D степени g неспециальный, то $\Omega_{F/k}^1(D) = \{0\}$ и по двойственности Серра $\mathbb{A}_X(D) + F = \mathbb{A}_X$. Таким образом, существует $f \in F$ со свойством $v_P(f - x) \geq -v_P(D)$ для всех $P \in X$, так что $(\omega - df) \geq -2D$. Так как дивизор D неспециальный, то такой элемент f единственный, что и доказывает утверждение (ii).

Чтобы доказать утверждение (i), заметим, что из теоремы Римана–Роха вытекает

$$\dim_k \Omega_{F/k}^1(2D) = 3g - 1, \quad \dim_k \Omega_{F/k}^1(D) = 2g - 1.$$

Обозначим через $\Omega^{(3rd)}$ k -векторное пространство дифференциалов третьего рода – подпространство в $\Omega_{F/k}^1$, образованное дифференциалами, имеющими только простые полюсы. Поскольку $\Omega^{(2nd)} \cap \Omega^{(3rd)} = \Omega^{(1st)}$ и $\Omega^{(3rd)} \cap \Omega_{F/k}^1(2D) = \Omega_{F/k}^1(D)$, мы заключаем, что

$$\dim_k \Omega^{(2nd)} \cap \Omega_{F/k}^1(2D) + \dim_k \Omega_{F/k}^1(D) = \dim_k \Omega_{F/k}^1(2D) + \dim_k \Omega^{(1st)},$$

и, используя (ii), имеем

$$\dim_k \Omega^{(2nd)} / dF = (3g - 1) - (2g - 1) + g = 2g.$$

Для окончания доказательства рассмотрим k -линейное отображение

$$L: \Omega^{(2nd)} \cap \Omega_{F/k}^1(2D) \rightarrow k^{2g},$$

определяемое как $L(\omega) = (\alpha_1(\omega), \dots, \alpha_g(\omega), \beta_1(\omega), \dots, \beta_g(\omega))$, где

$$v_{P_i}(\omega - (\alpha_i(\omega) t_i^{-2} + \beta_i(\omega) dt_i)) > 0, \quad i = 1, \dots, g.$$

Поскольку дивизор D неспециальный, отображение L инъективно и, следовательно, является изоморфизмом. Дифференциалы ω_i и θ_i получаются соответственно следующим выбором отличных от нуля компонент L : $\alpha_i = 1$ и $\beta_i = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Выбор неспециального эффективного дивизора $D = P_1 + \dots + P_g$ на X с различными точками P_i и локальных параметров t_i можно рассматривать как алгебраический аналог выбора a -циклов на компактной римановой поверхности рода $g \geq 1$. Соответственно, дифференциалы θ_i – это аналоги дифференциалов первого рода с нормализованными a -периодами, а дифференциалы ω_i – это аналоги дифференциалов второго рода с полюсами второго порядка, нулевыми a -периодами и нормализованными b -периодами. Симплектичность базиса $\{\theta_i, \omega_i\}_{i=1}^g$ – это аналог закона взаимности для дифференциалов первого рода и дифференциалов второго рода (см. [8, гл. 5, § 1] и [9, гл. VI, § 3]).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Условие того, что все точки эффективного неспециального дивизора D степени g различны, не является существенным. Утверждение теоремы 4, как и все другие результаты, приведенные в работе, легко допускают обобщение в случае дивизоров с кратными точками.

Говорят, что дифференциал второго рода ω имеет нулевые a -периоды, если

$$(\omega, \omega_i)_X = 0, \quad i = 1, \dots, g.$$

Из теоремы 4 следует, что дифференциал первого рода с нулевыми a -периодами – это нулевой дифференциал. Векторное пространство $\Omega_0^{(2\text{nd})}$ дифференциалов второго рода с нулевыми a -периодами обладает следующими свойствами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Справедливы следующие утверждения:*

(i) *изотропное k -векторное пространство $\Omega_0^{(2\text{nd})}$ является дополнительным подпространством к $\Omega^{(1\text{st})}$ в $\Omega^{(2\text{nd})}$ и*

$$\Omega_0^{(2\text{nd})} = k \cdot \omega_1 \oplus \dots \oplus k \cdot \omega_g \oplus dF;$$

(ii) *для каждого $P \in X$ k -векторное пространство $\Omega_0(*P)$ дифференциалов второго рода с нулевыми a -периодами и единственным полюсом в P обладает естественной фильтрацией*

$$\{0\} = \Omega_0(P) \subset \Omega_0(2P) \subset \dots \subset \Omega_0(nP) \subset \dots, \\ \dim_k \Omega_0(nP) = n - 1;$$

(iii) *имеет место следующее разложение в прямую сумму:*

$$\Omega_0^{(2\text{nd})} = \bigoplus_{P \in X} \Omega_0(*P);$$

(iv) *каждый дифференциал $\omega \in \Omega_0(nP)$ допускает единственное разложение вида*

$$\omega = df + \sum_{i=1}^g c_i \omega_i,$$

где $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D + (n-1)P))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) следует из теоремы 4, так как дивизор D неспециален. Поскольку $\dim_k \Omega_{F/k}^1(nP) = n - 1 + g$, утверждение (ii) вытекает из разложения

$$\Omega_{F/k}^1(nP) = \Omega_0(nP) \oplus \Omega^{(1st)}.$$

Так как каждый дифференциал $\omega \in \Omega_0^{(2nd)}$ допускает единственное представление в виде суммы главных частей, утверждение (iii) следует из (ii). Поскольку дивизор $D = P_1 + \dots + P_g$ неспециальный, то $h^0(D + (n - 1)P) = n$ и утверждение (iv) также вытекает из теоремы 4.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пространство *аддитивно-многозначных функций* X (сокращенно – аддитивных функций) – это подпространство $\mathcal{A}(X) \subset \mathbb{A}_X$ со следующими свойствами:

AF1) $F \subseteq \mathcal{A}(X)$;

AF2) $da = \omega \in \Omega_{F/k}^1$ (и, следовательно, $\omega \in \Omega^{(2nd)}$) для всех $a \in \mathcal{A}(X)$;

AF3) если $a \in \mathcal{A}(X)$ удовлетворяет $da = 0$, то $a = c \in k$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Для каждого дифференциала $\omega \in \Omega^{(2nd)}$ соответствующий адель $a = \{a_P\}_{P \in X} = d^{-1}\omega$ определен однозначно с точностью до выбора аддитивных констант для каждого $P \in X$. Условие AF3) гарантирует, что для всех $f \in F$ эти константы согласованы с уравнением $f = d^{-1}(df) + c$, где $c \in k$.

ПРИМЕР 1. С каждым неспециальным эффективным дивизором $D = P_1 + \dots + P_g$ степени g на X с различными точками P_i и выбором локальных параметров t_i в P_i ассоциировано пространство аддитивных функций с нулевыми a -периодами $\mathcal{A}(X; D)$, определяемое следующим образом. Пусть $\eta_i \in \mathbb{A}_X$ – решения уравнений

$$d\eta_i = \omega_i, \quad i = 1, \dots, g,$$

с произвольным выбором аддитивных констант для всех точек $P \in X$. Поскольку дивизор D неспециален, подпространства $k \cdot \eta_1 \oplus \dots \oplus k \cdot \eta_g$ и F в k -векторном пространстве $\mathbb{A}_X$ имеют нулевое пересечение. Их прямая сумма, подпространство

$$\mathcal{A}(X; D) = k \cdot \eta_1 \oplus \dots \oplus k \cdot \eta_g \oplus F \subset \mathbb{A}_X, \quad (6)$$

удовлетворяет свойствам AF1)–AF3), а отображение $d: \mathcal{A}(X; D) \rightarrow \Omega_0^{(2nd)}$ является сюръективным. Именно, согласно предложению 1 каждый дифференциал $\omega \in \Omega_0^{(2nd)}$ допускает единственное разложение

$$\omega = df + \sum_{i=1}^g c_i \omega_i, \quad (7)$$

и, таким образом,

$$a = d^{-1}\omega = f + \sum_{i=1}^g c_i \eta_i + c \in \mathcal{A}(X; D). \quad (8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Аддитивные функции $a = d^{-1}\omega \in \mathcal{A}(X, D)$ – это алгебраические аналоги абелевых интегралов второго рода с нулевыми a -периодами на компактной римановой поверхности рода g (см., например, [8, гл. V, § 2]), и мы определяем

$$\int_P^Q \omega = a(Q) - a(P),$$

где $a(P) = a_P \bmod \mathfrak{p} \in k$ для всех $P \in X$.

Примечательно, что, используя аддитивные функции из примера 1, можно естественным образом определить локальные параметры t_P во всех точках $P \in X$. Они однозначно определяются следующими данными: выбором неспециального дивизора $D = P_1 + \dots + P_g$ с различными точками, локальными параметрами t_i в P_i и аддитивными функциями $\eta_1, \dots, \eta_g$. Именно, для каждого $P \in X$ пусть $\omega_P^{(2)} \in \Omega_0(2P)$ – дифференциал второго рода с единственным полюсом второго порядка в P и нулевыми a -периодами, однозначно определяемый условием

$$\sum_{i=1}^g (\theta_i, \omega_P^{(2)})_X = 1. \quad (9)$$

В частности, $\omega_{P_i}^{(2)} = \omega_i$ для $i = 1, \dots, g$. Пусть $\eta_P = d^{-1}\omega_P^{(2)} \in \mathcal{A}(X; D)$ – аддитивная функция с единственным простым полюсом в $P \in X$. Согласно (8) функция η_P определена с точностью до общей аддитивной константы, которую мы определяем тем условием, что сумма постоянных членов $\eta_P|_{P_i} \in k((t_i))$ по всем $i = 1, \dots, g$ равна нулю. В частности, $\eta_{P_i} = \eta_i + c_i$ для некоторых $c_i \in k$. Теперь для каждого $P \in X$ локальный параметр t_P определяется следующим образом:

$$t_P = -\frac{1}{\eta_P} \Big|_P,$$

и для $\omega_P^{(2)} = d\eta_P$ мы имеем

$$\omega_P^{(2)}|_P = t_P^{-2} dt_P, \quad P \in X.$$

Далее, для каждого $P \in X$ мы выбираем базис $\{\omega_P^{(n+1)}\}_{n=1}^\infty$ подпространства $\Omega_0(*P)$, состоящий из дифференциалов второго рода с единственным полюсом в P порядка $n+1$ и нулевыми a -периодами, где дифференциалы $\omega_P^{(2)}$ фиксированы при помощи (9). Пусть $\eta_P^{(n)} = d^{-1}\omega_P^{(n+1)} \in \mathcal{A}(X; D)$ – аддитивные функции с единственным полюсом в $P \in X$ порядка n и со следующим выбором общих аддитивных констант в (8). Положим $\eta_P^{(1)} = \eta_P$ и для $\eta_P^{(n)}$ с $n > 1$ наложим такое условие, что постоянный член $\eta_P^{(n)}|_P \in k((t_P))$ обращается в нуль. Вводя для каждого $P \in X$ подпространства $\mathcal{A}_P(X, D)$ – k -линейную оболочку $\eta_P^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, получаем разложение

$$\mathcal{A}(X, D) = \left(\bigoplus_{P \in X} \mathcal{A}_P(X, D) \right) \oplus k. \quad (10)$$

Условие, что $\Omega_0^{(2\text{nd})} = d\mathcal{A}(X; D)$ – изотропное подпространство, и условие AF3) могут быть переформулированы следующим образом.

ЛЕММА 1. *Справедливы следующие утверждения:*

(i) *для всех $P, Q \in X$ и $m, n \in \mathbb{N}$*

$$\text{Res}_P(\eta_P^{(m)} d\eta_Q^{(n)}) = \text{Res}_Q(\eta_Q^{(n)} d\eta_P^{(m)});$$

(ii) *каждая рациональная функция $f \in F$ допускает единственное разложение на “простые дроби”:*

$$f = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{n_i} c_{ij} \eta_{Q_i}^{(j)} + c,$$

где $n_1 Q_1 + \dots + n_l Q_l = (f)_\infty$ – дивизор полюсов f , а $c, c_{ij} \in k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\text{Res}_Q(da) = 0$ для всех $a \in \mathbb{A}_X$, то для $P \neq Q$ имеем

$$\begin{aligned} 0 &= (\omega_P^{(m+1)}, \omega_Q^{(n+1)})_X = \text{Res}_P(\eta_P^{(m)} d\eta_Q^{(n)}) + \text{Res}_Q(\eta_P^{(m)} d\eta_Q^{(n)}) \\ &= \text{Res}_P(\eta_P^{(m)} d\eta_Q^{(n)}) - \text{Res}_Q(\eta_Q^{(n)} d\eta_P^{(m)}). \end{aligned}$$

Для $P = Q$ имеем $0 = (\omega_P^{(m+1)}, \omega_P^{(n+1)})_X = \text{Res}_P(\eta_P^{(m)} d\eta_P^{(n)})$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$.

Утверждение (ii) непосредственно вытекает из AF3), поскольку найдутся $c_{ij} \in k$ такие, что

$$df - \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{n_i} c_{ij} \omega_{Q_i}^{(j+1)} \in \Omega_0^{(2\text{nd})} \cap \Omega^{(1\text{st})} = \{0\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Утверждение (i) леммы 1 – это алгебраический аналог классического закона взаимности для дифференциалов второго рода с нулевыми a -периодами на компактной римановой поверхности (см. например, [8, гл. V, § 1] и [9, гл. VI, § 3]).

ЗАМЕЧАНИЕ 8. В случае кривой рода 0 имеем $X = \mathbb{P}_k^1 = k \cup \{\infty\}$, $F = k(z)$ и, кроме того,

$$\omega_P^{(n+1)} = \begin{cases} \frac{dz}{(z-P)^{n+1}} & \text{для } P \in k, \\ -z^{n-1} dz & \text{для } P = \infty. \end{cases}$$

Соответственно,

$$\eta_P^{(n)}(z) = \begin{cases} -\frac{1}{n(z-P)^n} & \text{для } P \in k, \\ -\frac{z^n}{n} & \text{для } P = \infty. \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Положим $\mathbb{O}_X = \mathbb{A}_X(0) = \prod_{P \in X} \mathcal{O}_X$. Из леммы 1 имеем

$$\mathbb{A}_X = \mathcal{A}(X, D_{\text{ns}}) + \mathbb{O}_X,$$

в то время как согласно адельной интерпретации когомологий Ж.-П. Серра

$$\mathbb{A}_X/(F + \mathbb{O}_X) = H^1(X, \mathcal{O}_X).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Условие того, что поле констант k алгебраически замкнуто, не является необходимым, и все результаты этого параграфа справедливы для произвольного поля констант нулевой характеристики. Достаточно лишь заменить поле k полем вычетов $k(P) = \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$ и использовать отображение следа $\text{Tr}_{k(P)/k}: k(P) \rightarrow k$. Так, например, для билинейной формы $(\ , \)_X$ имеем

$$(\omega_1, \omega_2)_X = \sum_{P \in X} \text{Tr}_{k(P)/k} \text{Res}_P(d^{-1}\omega_1 \omega_2).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Мультипликативным аналогом k -векторного пространства $\mathcal{A}(X)$ аддитивно-многозначных функций является группа $\mathcal{M}(X)$ мультипликативно-многозначных функций на X – подгруппа группы обратимых элементов кольца аделей $\mathbb{A}_X$, определяемая следующим образом. Она содержит F^* в качестве подгруппы, удовлетворяет условию $d \log m = m^{-1} dm = \omega \in \Omega_{F/k}^1$ для всех $m \in \mathcal{M}(X)$, а также дополнительному свойству: если $m \in \mathcal{M}(X)$ таково, что $d \log m = 0$, то $m = c \in k^*$. Кроме того, представляется естественным предположить, как это было сделано в первоначальном варианте настоящей работы, что имеет место следующий мультипликативный аналог леммы 1. Именно, каждая рациональная функция $f \in F^*$ единственным образом разлагается в произведение мультипликативно-многозначных функций с одним нулем и одним полюсом, которые удовлетворяют естественному обобщенному закону взаимности А. Вейля на X (см. [1], [17]). Однако, как это было указано рецензентом, последнее утверждение противоречит нетривиальности бирасширения Пуанкаре над квадратом якобиана кривой X [18].

§ 4. Локальная теория

Пусть K – замкнуто-полное поле, т. е. полное дискретно нормированное поле с кольцом нормирования $\mathcal{O}_K$, максимальным идеалом $\mathfrak{p}$ и алгебраически замкнутым полем вычетов $k = \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$. Каждый локальный параметр t определяет изоморфизм $K \simeq k((t))$, так что K можно интерпретировать как “геометрическую алгебру петель” над полем k . Основным примером замкнуто-полного поля является поле $K = F_P$, где P – точка на алгебраической кривой X над k .

Здесь мы опишем бесконечномерные алгебры Ли, естественно ассоциированные с полем K , и определим соответствующие неприводимые модули со старшим весом. В случае $K = F_P$ эти объекты определяют локальные квантовые теории поля в $P \in X$. Именно, мы рассмотрим следующие локальные квантовые теории поля (КТП):

1) “КТП аддитивных бозонов”, соответствующая гейзенберговской алгебре Ли $\mathfrak{g}$ – одномерному центральному расширению геометрической алгебры петель $\mathfrak{gl}_1(K) = K$;

2) “КТП заряженных бозонов”, соответствующая решеточной алгебре Ли $\mathfrak{l}$, ассоциированной с гейзенберговской алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и решеткой $\mathbb{Z}$.

4.1. Алгебра Гейзенберга. Пусть $\Omega_{K/k}^1$ – K -модуль кэлеровых дифференциалов и $\tilde{\Omega}_{K/k}^1 = \Omega_{K/k}^1 / \mathcal{Q}$, где $\mathcal{Q} = \bigcap_{n \geq 0} \mathfrak{p}^n d(\mathcal{O})$ (см. п. 2.2). Абелева алгебра $\mathfrak{gl}_1(K) = K$ над полем k снабжена естественной билинейной кососимметрической формой $c: \wedge^2 K \rightarrow k$,

$$c(f, g) = -\text{Res}(fdg), \quad f, g \in K,$$

где $dg \in \tilde{\Omega}_{K/k}^1$. Билинейная форма c непрерывна по отношению к $\mathfrak{p}$ -адической топологии на K и дискретной топологии на k , т. е. $c \in H_c^2(K, k) \simeq \text{Hom}_c(\wedge^2 K, k)$, где $\text{Hom}_c(\wedge^2 K, k)$ – группа непрерывных 2-коциклов на K со значениями в k .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Алгебра Ли–Гейзенберга $\mathfrak{g}$ – это одномерное центральное расширение K

$$0 \rightarrow k \cdot C \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow K \rightarrow 0$$

с 2-коциклом c .

Обозначая через $[\cdot, \cdot]$ скобку Ли в $\mathfrak{g} = K \oplus k \cdot C$, имеем

$$[f + aC, g + bC] = c(f, g)C, \quad f, g \in K, \quad a, b \in k.$$

Подалгебра Ли $\mathfrak{g}_+ = \mathcal{O}_K \oplus k \cdot C$ – это максимальная абелева подалгебра $\mathfrak{g}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Пусть $\text{Aut } \mathcal{O} = \{u \in \mathcal{O} : v(u) = 1\}$ – группа непрерывных автоморфизмов кольца нормирования $\mathcal{O} = k[[t]]$ (см. [14]). Несложно показать, что каждое непрерывное линейное отображение $l: k((t)) \otimes_k k((t)) \rightarrow k$, удовлетворяющее соотношению

$$l(f \circ u, g \circ u) = l(f, g)$$

для всех $f, g \in k((t))$ и $u \in \text{Aut } \mathcal{O}$, пропорционально c . Это объясняет естественную роль 2-коцикла c для K . В частности, каждая $\text{Aut } \mathcal{O}$ -инвариантная билинейная форма l с необходимостью кососимметрична, что можно рассматривать как простой алгебраический аналог теоремы о связи спина со статистикой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Модулем алгебры Гейзенберга $\mathfrak{g}$ называется k -векторное пространство V с дискретной топологией, снабженное гомоморфизмом k -алгебр $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End } V$ таким, что соответствующее действие $\mathfrak{g}$ на V непрерывно и $\rho(C) = \mathbf{I}$ – тождественный эндоморфизм V .

Эквивалентным образом, для каждого $v \in V$ существует открытое подпространство U в K , соизмеримое с $\mathfrak{p}$ и аннулирующее v : $\rho(U)v = 0$. Полагая $\mathbf{f} = \rho(f) \in \text{End } V$ для всех $f \in K$, имеем

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = c(f, g)\mathbf{I}$$

– проективное представление абелевой алгебры Ли K .

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Выбор локального параметра t для K определяет изоморфизм $K \simeq k((t))$ и базис $\{t^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ в K . Обозначая $\alpha_n = \rho(t^n)$ и используя $c(t^m, t^n) = m\delta_{m, -n}$, получаем коммутационные соотношения “осцилляторной алгебры”

$$[\alpha_m, \alpha_n] = m\delta_{m, -n}\mathbf{I},$$

характеризующие свободные бозоны в двумерной КТП.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Неприводимый модуль со старшим весом для алгебры Гейзенберга $\mathfrak{g}$* – это неприводимый $\mathfrak{g}$ -модуль с вектором $\mathbf{1} \in V$, аннигилируемым абелевой подалгеброй $\mathcal{O}_K \oplus \{0\}$.

Следующий результат хорошо известен (см., например, [13, лемма 9.13]).

ТЕОРЕМА 5. *Все неприводимые модули со старшим весом алгебры Гейзенберга $\mathfrak{g}$ – это тривиальный одномерный модуль $k = k \cdot \mathbf{1}$ со старшим вектором $\mathbf{1} = 1 \in k$, и модуль Фока*

$$\mathcal{F} = \text{ind}_{\mathfrak{g}_+}^{\mathfrak{g}} k,$$

индуцированный с одномерного $\mathfrak{g}_+$ -модуля k .

ЗАМЕЧАНИЕ 14. Пусть $U\mathfrak{g}$ – универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$. По определению

$$\mathcal{F} = U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{g}_+} k,$$

где $U\mathfrak{g}$ рассматривается как правый $U\mathfrak{g}_+$ -модуль. Эквивалентным образом,

$$\mathcal{F} = \mathcal{W} / \mathcal{D}, \quad (11)$$

где $\mathcal{W}$ – алгебра Вейля $\mathfrak{g}$, т.е. фактор $U\mathfrak{g}$ по идеалу, порожденному $C - \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ теперь обозначает единицу в $U\mathfrak{g}$, а $\mathcal{D}$ – левый идеал в $\mathcal{W}$, порожденный $\mathcal{O}_K \oplus \{0\}$.

Явная реализация модуля Фока $\mathcal{F}$ – бозонное пространство Фока – зависит от разложения K в прямую сумму изотропных подпространств по отношению к билинейной форме c :

$$K = K_+ \oplus K_-, \quad (12)$$

где подпространство $K_+ = \mathcal{O}_K$ определено канонически. В этом случае

$$\mathcal{F} \simeq \text{Sym}^\bullet K_- \quad (13)$$

– симметрическая алгебра k -векторного пространства K_- . Пространство Фока $\mathcal{F}$ – это $\mathbb{Z}$ -градуированная коммутативная алгебра:

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}^{(n)},$$

где $\mathcal{F}^{(n)} \simeq \text{Sym}^n K_-$, $\mathcal{F}^{(0)} = k \cdot \mathbf{1}$ и $\mathcal{F}^{(n)} = \{0\}$ для $n < 0$. Для каждого $f = f_+ + f_- \in K$ оператор $\mathbf{f} = \rho(f) \in \text{End } \mathcal{F}$ определяется формулой

$$\mathbf{f} \cdot v = f_- \odot v + \sum_{i=1}^k c(f, v_i) v^i = f_- \odot v - \sum_{i=1}^k \text{Res}(f_+ dv_i) v^i, \quad (14)$$

где $v = v_1 \odot \cdots \odot v_k \in \mathcal{F}^{(k)}$ и $v^i = v_1 \odot \cdots \odot \widehat{v}_i \odot \cdots \odot v_k \in \mathcal{F}^{(k-1)}$, $i = 1, \dots, k$, а через $\odot$ обозначено произведение в $\text{Sym}^\bullet K_-$. В частности,

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{1} = f_-.$$

Пространство Фока $\mathcal{F}$ снабжено линейной топологией, определяемой фильтрацией, связанной с $\mathbb{Z}$ -градуировкой и не зависящей от разложения (12).

ЗАМЕЧАНИЕ 15. Каждый выбор локального параметра t определяет изоморфизм $K \simeq k((t))$, так что можно положить $K_- = t^{-1}k[t^{-1}]$. Отображение

$$\mathcal{F}^{(n)} \ni v = t^{-m_1} \odot \cdots \odot t^{-m_n} \mapsto x_{m_1} \cdots x_{m_n} \in k[x_1, x_2, \dots]$$

осуществляет изоморфизм $\mathcal{F} \simeq k[x_1, x_2, \dots]$ между бозонным пространством Фока и кольцом многочленов от бесконечного числа образующих $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. При этом отображении имеем $\alpha_n \mapsto n\partial/\partial x_n$, $\alpha_{-n} \mapsto x_n$, $n > 0$, – операторы умножения на x_n , а $\alpha_0 \mapsto 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 16. Для произвольного замкнуто-полного поля K не существует канонического выбора изотропного подпространства K_- , дополнительного к $K_+ = \mathcal{O}_K$. Однако каждый выбор эффективного неспециального дивизора $D = P_1 + \cdots + P_g$ степени g на алгебраической кривой X и локальных параметров t_i в P_i определяет изотропные подпространства K_- для всех полей $K = F_P$, $P \in X$. Именно, пусть $\mathcal{A}(X, D)$ – k -векторное пространство аддитивных функций, определенное в примере 1, а $\mathcal{A}_P(X, D)$ – подпространство аддитивных функций с единственным полюсом в P . Положим

$$K_- = \mathcal{A}_P(X, D)|_P \subset K.$$

Согласно утверждению (i) леммы 1 подпространство K_- изотропно по отношению к билинейной форме s и имеет место разложение (12). Подпространство K_- натянуто на элементы $v_P^{(n)} = \eta_P^{(n)}|_P$, $n \in \mathbb{N}$, и $dK_- = \Omega_0(*P)|_P$.

Билинейная форма s имеет одномерное ядро k . Поскольку $\mathcal{O}_K/k = \mathfrak{p}$, форма s задает невырожденное непрерывное спаривание $s: \mathfrak{p} \otimes K_- \rightarrow k$, так что $\mathfrak{p} = K_-^\vee = \text{Hom}(K_-, k)$ – топологически двойственное пространство к k -векторному пространству K_- . Соответственно, топологически двойственное к бозонному пространству Фока $\mathcal{F}$ – это k -векторное пространство $\mathcal{F}^\vee = \overline{\text{Sym}^\bullet \mathfrak{p}}$, являющееся пополнением $\text{Sym}^\bullet \mathfrak{p}$ по отношению к линейной топологии, задаваемой фильтрацией $\{F^n \text{Sym}^\bullet \mathfrak{p}\}_{n=0}^\infty$,

$$F^n \text{Sym}^\bullet \mathfrak{p} = \bigoplus_{i=0}^n \text{Sym}^i \mathfrak{p}.$$

Непрерывное спаривание $(\ , \) : \mathcal{F}^\vee \otimes \mathcal{F} \rightarrow k$ однозначно определяется спариванием между $\text{Sym}^\bullet \mathfrak{p}$ и $\mathcal{F} = \text{Sym}^\bullet K_-$ и индуктивно определяется формулой

$$(u, v) = \delta_{kl} \sum_{i=1}^l c(u_1, v_i)(u^1, v^i), \quad (15)$$

где $u = u_1 \odot \cdots \odot u_k = u_1 \odot u^1 \in \text{Sym}^k \mathfrak{p}$ и $v = v_1 \odot \cdots \odot v_l = v_i \odot v^i \in \mathcal{F}^{(l)}$. Двойственное бозонное пространство Фока $\mathcal{F}^\vee$ – это правый $\mathfrak{g}$ -модуль с младшим вектором $\mathbf{1}^\vee$, аннулируемым подпространством $K_- \oplus k$.

Представление ρ алгебры Гейзенберга $\mathfrak{g}$ в $\mathcal{F}$ определяет контраградиентное представление $\rho^\vee$ алгебры Гейзенберга $\mathfrak{g}$ в $\mathcal{F}^\vee$, явным образом задаваемое как

$$(u \cdot \rho^\vee(f), v) = (u, \rho(f) \cdot v) \quad \forall u \in \mathcal{F}^\vee, v \in \mathcal{F}.$$

Именно, положим $f = \tilde{f}_+ + \tilde{f}_- \in K$, где теперь $\tilde{f}_+ \in \mathfrak{p}$ и $\tilde{f}_- \in K_- \oplus k$. Как следует из (14) и (15), оператор $\mathbf{f} = \rho^\vee(f) \in \text{End } \mathcal{F}^\vee$ задается формулой

$$u \cdot \mathbf{f} = \tilde{f}_+ \odot u + \sum_{i=1}^k c(u_i, f) u^i = \tilde{f}_+ \odot u + \sum_{i=1}^k \text{Res}(\tilde{f}_- du_i) u^i; \quad (16)$$

здесь $u = u_1 \odot \cdots \odot u_k \in \text{Sym}^k \mathfrak{p}$ и $u^i = u_1 \odot \cdots \odot \hat{u}_i \odot \cdots \odot u_k \in \text{Sym}^{k-1} \mathfrak{p}$.

4.2. Решеточная алгебра. Пусть $k[\mathbb{Z}]$ – групповая алгебра аддитивной группы $\mathbb{Z}$. Как k -векторное пространство алгебра $k[\mathbb{Z}]$ имеет базис $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $e_m e_n = e_{m+n}$. Для каждого разложения (12) определим “постоянный член” элемента $f \in K$ как $f(0) = f_+ \bmod \mathfrak{p} \in k$, так что для $f \in K_-$ имеем $f(0) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 17. Если $K = F_P$ и $K_- = \mathcal{A}_P(X, D)|_P$, то $f(0)$ – постоянный член в разложении Лорана элемента $f \in k((t_P))$ по отношению к локальному параметру t_P для K , определенному в п. 3.1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Решеточная алгебра Ли $\mathfrak{l}$, ассоциированная с разложением (12), это полупрямая сумма алгебры Гейзенберга $\mathfrak{g}$ и абелевой алгебры Ли $k[\mathbb{Z}]$ со скобкой Ли

$$[f + aC + \alpha e_m, g + bC + \beta e_n] = c(f, g)C + m\alpha g(0)e_m - n\beta f(0)e_n,$$

где $f + aC, g + bC \in \mathfrak{g}$.

Соответствующий неприводимый модуль со старшим весом $\mathcal{B}$ решеточной алгебры $\mathfrak{l}$ имеет вид

$$\mathcal{B} = k[\mathbb{Z}] \otimes \mathcal{F},$$

где $k[\mathbb{Z}]$ действует умножением, а K действует следующим образом:

$$\mathbf{f}(e_n \otimes v) = -nf(0)e_n \otimes v + e_n \otimes (\mathbf{f} \cdot v), \quad f \in K, \quad v \in \mathcal{F}.$$

Модуль $\mathcal{B}$ – пространство Фока “заряженных бозонов” – это $\mathbb{Z}$ -градуированная коммутативная алгебра,

$$\mathcal{B} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{B}^{(n)}, \quad \mathcal{B}^{(n)} = k \cdot e_n \otimes \mathcal{F}.$$

Элементы $e_n, n \in \mathbb{Z}$, отвечают операторам сдвига $\mathbf{e}_n = \mathbf{e}^n$ в $\mathcal{B}$,

$$\mathbf{e}(e_n \otimes v) = e_{n+1} \otimes v, \quad v \in \mathcal{F}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 18. Используя канонический изоморфизм $K^*/\mathcal{O}_K^* \simeq \mathbb{Z}$, задаваемый отображением нормирования $v: K^* \rightarrow \mathbb{Z}$, пространство Фока $\mathcal{B}$ также может быть определено как пространство функций

$$F: K^*/\mathcal{O}_K^* \rightarrow \mathcal{F}$$

с конечным носителем.

ЗАМЕЧАНИЕ 19. Для каждого выбора локального параметра t для K отображение

$$\mathcal{B}^{(n)} \ni e_n \otimes (t^{-m_1} \odot \dots \odot t^{-m_l}) \mapsto e^{n x_0} x_{m_1} \dots x_{m_l} \in e^{n x_0} k[x_1, x_2, \dots]$$

устанавливает изоморфизм $\mathcal{B} \simeq k[e^{x_0}, e^{-x_0}, x_1, x_2, \dots]$. При этом $\alpha_n \mapsto n\partial/\partial x_n$, $\alpha_{-n} \mapsto x_n$, $n > 0$, $\alpha_0 \mapsto -\partial/\partial x_0$ и $\mathbf{e} \mapsto e^{x_0}$ – оператор умножения на переменную e^{x_0} .

Топологически двойственное к $\mathcal{B}$ – это k -векторное пространство

$$\mathcal{B}^\vee = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} k \cdot q^n \otimes \mathcal{F}^\vee,$$

где $\{q^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ – базис в $k[\mathbb{Z}]^\vee$, двойственный к базису $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Непрерывное спаривание $(\cdot, \cdot): \mathcal{B}^\vee \otimes \mathcal{B} \rightarrow k$ дается формулой

$$(q^m \otimes u, e_n \otimes v) = (u, v) \delta_{mn}, \quad u \in \mathcal{F}^\vee, \quad v \in \mathcal{F}.$$

Как и в случае алгебры Гейзенберга, представление ρ решеточной алгебры $\mathfrak{l}$ в $\mathcal{B}$ определяет контраградиентное представление $\rho^\vee$ в $\mathcal{B}^\vee$. Двойственное пространство Фока $\mathcal{B}^\vee$ является правым $\mathfrak{l}$ -модулем с младшим вектором $\mathbf{1}^\vee$, аннулируемым K_- .

§ 5. Глобальная теория

Здесь для алгебраической кривой X над алгебраически замкнутым полем k характеристики нуль мы определяем глобальные аналоги локальных КТП, введенных в § 4. Вкратце, эти глобальные КТП могут быть охарактеризованы следующим образом.

1. “КТП аддитивных бозонов на X ” отвечает глобальной алгебре Гейзенберга $\mathfrak{g}_X$ – ограниченной прямой сумме локальных алгебр Гейзенберга $\mathfrak{g}_P$ по всем точкам $P \in X$. Глобальное пространство Фока $\mathcal{F}_X$ определяется как ограниченное тензорное произведение локальных пространств Фока $\mathcal{F}_P$ по всем точкам $P \in X$. Глобальное пространство Фока $\mathcal{F}_X$ – это $\mathfrak{g}_X$ -модуль старшего веса. Существует линейный функционал математического ожидания $\langle \cdot \rangle: \mathcal{F}_X \rightarrow k$, однозначно определяемый свойствами нормализации и инвариантности по отношению к пространству аддитивных функций.

2. “КТП заряженных бозонов на X ” отвечает глобальной решеточной алгебре $\mathfrak{l}_X$. Глобальное заряженное пространство Фока $\mathcal{B}_X$ – это $\mathfrak{l}_X$ -модуль старшего веса. Существует единственный функционал математического ожидания $\langle \cdot \rangle: \mathcal{B}_X \rightarrow k$ со свойствами, аналогичными приведенным в п. 1.

5.1. Аддитивные бозоны на X . Следующие данные определяют КТП аддитивных бозонов:

AB1) неспециальный эффективный дивизор $D_{\text{ns}} = P_1 + \dots + P_g$ степени g на X с различными точками, локальные параметры t_i в P_i и k -векторное пространство аддитивных функций $\mathcal{A}(X, D_{\text{ns}})$ – подпространство $\mathbb{A}_X$, содержащее $F = k(X)$, введенное в примере 1;

AB2) локальные КТП аддитивных бозонов – $\mathfrak{g}_P$ -модули старшего веса $\mathcal{F}_P$ для всех точек $P \in X$;

AB3) глобальная алгебра Гейзенберга $\mathfrak{g}_X$ – одномерное центральное расширение абелевой алгебры Ли $\mathfrak{gl}_1(\mathbb{A}_X) = \mathbb{A}_X$ при помощи коцикла $c_X = \sum_{P \in X} c_P$;

AB4) $\mathfrak{g}_X$ -модуль старшего веса – глобальное пространство Фока $\mathcal{F}_X$ – ограниченное тензорное произведение $\mathcal{F}_P$ по всем точкам $P \in X$;

AB5) функционал математического ожидания – линейное отображение $\langle \cdot \rangle: \mathcal{F}_X \rightarrow k$, обладающее следующими свойствами:

- (i) $\langle \mathbf{1}_X \rangle = 1$, где $\mathbf{1}_X \in \mathcal{F}_X$ – старший вектор;
- (ii) $\langle \mathbf{a} \cdot v \rangle = 0$ для всех $a \in \mathcal{A}(X, D_{\text{ns}})$ и $v \in \mathcal{F}_X$.

Данные AB1) и AB2) уже были описаны в п. 3.1 и п. 4.1. Здесь мы введем глобальную алгебру Гейзенберга $\mathfrak{g}_X$, построим соответствующее глобальное пространство Фока $\mathcal{F}_X$ и докажем, что существует единственный функционал математического ожидания $\langle \cdot \rangle$, удовлетворяющий условиям (i) и (ii).

Пусть $c_X: \mathbb{A}_X \times \mathbb{A}_X \rightarrow k$ – глобальная билинейная форма,

$$c_X(x, y) = \sum_{P \in X} c_P(x_P, y_P) = - \sum_{P \in X} \text{Res}_P(x_P dy_P), \quad x, y \in \mathbb{A}_X.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Глобальная алгебра Ли–Гейзенберга $\mathfrak{g}_X$ – это одномерное центральное расширение абелевой алгебры Ли $\mathbb{A}_X$

$$0 \rightarrow kC \rightarrow \mathfrak{g}_X \rightarrow \mathbb{A}_X \rightarrow 0$$

с 2-коциклом c_X .

Подалгебра Ли $\mathfrak{g}_X^+ = \mathbb{O}_X \oplus kC$ – это максимальная абелева подалгебра $\mathfrak{g}_X$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Глобальное пространство Фока $\mathcal{F}_X$ – это неприводимый $\mathfrak{g}_X$ -модуль с вектором $\mathbf{1}_X$, аннулируемым абелевой подалгеброй $\mathbb{O}_X \oplus \{0\}$.

Как и в локальном случае, глобальный модуль Фока индуцирован с одномерного $\mathfrak{g}_X^+$ -модуля,

$$\mathcal{F}_X = \text{ind}_{\mathfrak{g}_X^+}^{\mathfrak{g}_X} k.$$

Согласно изложенному в § 4 имеем для $K = F_P$, $P \in X$, разложение (12), где $F_P^{(+)} = \mathcal{O}_P$ и $F_P^{(-)} = \mathcal{A}_P(X, D)|_P$. Отсюда получаем следующее разложение k -векторного пространства $\mathbb{A}_X$ в прямую сумму изотропных подпространств по отношению к билинейной форме c_X :

$$\mathbb{A}_X = \mathbb{O}_X \oplus \mathcal{F}_X^{(-)}. \quad (17)$$

Здесь

$$\mathcal{F}_X^{(-)} = \prod_{P \in X} F_P^{(-)}$$

– прямое произведение по всем $P \in X$, ограниченное по отношению к нулевым подпространствам $\{0\} \subset F_P^{(-)}$. Разложение (17) приводит к изоморфизму

$$\mathcal{F}_X \simeq \text{Sym}^\bullet \mathcal{F}_X^{(-)}.$$

Глобальное пространство Фока $\mathcal{F}_X$ снабжено линейной топологией, задаваемой естественной фильтрацией, ассоциированной с $\mathbb{Z}$ -градуировкой.

Эквивалентным образом, $\mathcal{F}_X$ может быть определено как тензорное произведение:

$$\mathcal{F}_X = \widehat{\bigotimes_{P \in X} \mathcal{F}_P},$$

ограниченное по отношению к векторам $\mathbf{1}_P \in \mathcal{F}_P$ и снабженное тихоновской топологией. Другими словами, $\mathbf{1}_X = \bigotimes_{P \in X} \mathbf{1}_P$, и $\mathcal{F}_X$ натянута на векторы

$$v = \bigotimes_{P \in X} v_P,$$

где $v_P = \mathbf{1}_P$ для всех, кроме конечного числа, $P \in X$. Для каждого $P \in X$ имеем $v = v_P \otimes v^P$, где $v^P = \bigotimes_{Q \in X} \tilde{v}_Q$, $\tilde{v}_Q = v_Q$ для $Q \neq P$ и $\tilde{v}_P = \mathbf{1}_P$. Обозначим через ρ_P соответствующее представление $\mathfrak{g}_P$ в $\mathcal{F}_P$, $P \in X$, а через ρ – представление $\mathfrak{g}_X$ в $\mathcal{F}_X$. Полагая $\mathbf{x} = \rho(x) \in \text{End } \mathcal{F}_X$, для $x = \{x_P\}_{P \in X} \in \mathbb{A}_X$ и $v = \bigotimes_{P \in X} v_P$ имеем

$$\mathbf{x} \cdot v = \sum_{P \in X} \mathbf{x}_P \cdot v_P \otimes v^P,$$

где $\mathbf{x}_P = \rho_P(x_P) \in \text{End } \mathcal{F}_P$.

Положим

$$\mathfrak{P}_X = \prod_{P \in X} \mathfrak{p}.$$

Топологически двойственное к глобальному пространству Фока $\mathcal{F}_X$ – это k -векторное пространство $\mathcal{F}_X^\vee = \overline{\text{Sym}^\bullet \mathfrak{P}_X}$, являющееся пополнением $\text{Sym}^\bullet \mathfrak{P}_X$ по отношению к линейной топологии, задаваемой естественной фильтрацией, ассоциированной с $\mathbb{Z}$ -градуировкой. Двойственное глобальное пространство Фока $\mathcal{F}_X^\vee$ – это правый $\mathfrak{g}_X$ -модуль с младшим вектором $\mathbf{1}_X^\vee$, аннулируемым абелевой подалгеброй $\mathcal{F}_X^{(-)} \oplus \{0\}$. Эквивалентным образом,

$$\mathcal{F}_X^\vee = \widehat{\bigotimes_{P \in X} \mathcal{F}_P^\vee}$$

– пополнение тензорного произведения, ограниченного по отношению к векторам $\mathbf{1}_P^\vee$. Пополнение здесь берется по отношению к двойной фильтрации $\{F^{mn} \text{Sym}^\bullet \mathfrak{P}_X\}$,

$$F^{mn} \text{Sym}^\bullet \mathfrak{P}_X = \sum_{i=0}^m \sum_{P_1, \dots, P_i \in X} \left(\bigoplus_{l_1 + \dots + l_i = 0}^n \text{Sym}^{l_1} \mathfrak{p}_1 \otimes \dots \otimes \text{Sym}^{l_i} \mathfrak{p}_i \right).$$

Другими словами, элементы $\mathcal{F}_X^\vee$ – это бесконечные формальные суммы

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{P_1, \dots, P_n \in X} a_{P_1 \dots P_n} u_{P_1 \dots P_n},$$

где $u_{P_1 \dots P_n} \in \overline{\mathcal{F}}_{P_1 \dots P_n}^\vee$ – пополнение тензорного произведения

$$\mathcal{F}_{P_1 \dots P_n}^\vee = \mathcal{F}_{P_1}^\vee \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_{P_n}^\vee$$

по отношению к фильтрации

$$F^m \mathcal{F}_{P_1 \dots P_n}^\vee = \bigoplus_{l_1 + \dots + l_n = 0}^m \left(\text{Sym}^{l_1} \mathfrak{p}_1 \otimes \dots \otimes \text{Sym}^{l_n} \mathfrak{p}_n \right).$$

Пусть $\{u_P^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ – базис для $\mathfrak{p}$, двойственный к базису $\{v_P^{(n)} = \eta_P^{(n)}|_P\}_{n \in \mathbb{N}}$ для $F_P^{(-)}$ по отношению к спариванию, задаваемому c_P (см. п. 4.1). Таким образом, получаем, что $\mathcal{F}_X^\vee$ – пополнение $k[[u_P^n]]$ пространства формальных рядов Тейлора от бесконечного числа переменных $u_P^{(n)}$, $P \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Такая реализация $\mathcal{F}_X^\vee$ оказывается удобной для доказательства следующего основного результата КТП аддитивных бозонов.

ТЕОРЕМА 6. *Существует единственный линейный функционал $\langle \cdot \rangle: \mathcal{F}_X \rightarrow k$, являющийся функционалом математического ожидания и удовлетворяющий следующим свойствам:*

$$\text{EV1)} \quad \langle \mathbf{1}_X \rangle = 1;$$

$$\text{EV2)} \quad \langle \mathbf{a} \cdot v \rangle = 0 \text{ для всех } a \in \mathcal{A}(X, D_{\text{ns}}) \text{ и } v \in \mathcal{F}_X.$$

Функционал $\langle \cdot \rangle$ имеет вид

$$\langle v \rangle = (\Omega_X, v),$$

где

$$\Omega_X = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{m,n=1}^{\infty} \sum_{P,Q \in X} c_{PQ}^{(mn)} u_P^{(m)} u_Q^{(n)} \right\} \in \mathcal{F}_X^\vee,$$

$$c_{PQ}^{(mn)} = -\text{Res}_Q(\eta_P^{(m)} d\eta_Q^{(n)}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из разложения (10) следует, что линейный функционал $\langle v \rangle = (\Omega, v)$ удовлетворяет свойствам EV1) и EV2), если и только если он нормализован, $(\Omega, \mathbf{1}_X) = 1$ и $\Omega \in \mathcal{F}_X^\vee$ удовлетворяет системе уравнений

$$\Omega \cdot \eta_P^{(n)} = 0 \tag{18}$$

для всех $P \in X$ и $n \in \mathbb{N}$, где $\eta_P^{(n)} = \rho^\vee(\eta_P^{(n)})$. Пусть $\eta_P^{(n)} = \beta_P^{(n)} + \gamma_P^{(n)}$, где $\beta_P^{(n)} = \{\beta_{PQ}^{(n)}\}_{Q \in X}$ и $\gamma_P^{(n)} = \{\gamma_{PQ}^{(n)}\}_{Q \in X} \in \mathbb{A}_X$ определяются следующим образом:

$$\beta_{PQ}^{(n)} = \begin{cases} 0, & \text{если } Q = P, \\ \eta_P^{(n)}|_Q, & \text{если } Q \neq P, \end{cases} \quad \gamma_{PQ}^{(n)} = \begin{cases} \eta_P^{(n)}|_P, & \text{если } Q = P, \\ 0, & \text{если } Q \neq P. \end{cases}$$

Из (16) следует что $\gamma_P^{(n)}$ действует на $\mathcal{F}_X^\vee$ как дифференцирование по отношению к переменной $u_P^{(n)}$. Для $Q \neq P$ имеем

$$\beta_{PQ}^{(n)} = a_{PQ}^{(n)} + \sum_{m=1}^{\infty} a_{PQ}^{(nm)} u_Q^{(m)},$$

где $a_{PQ}^{(n)} \in k$ и

$$a_{PQ}^{(nm)} = c(\beta_{PQ}^{(n)}, v_Q^{(m)}) = -\text{Res}_Q(\eta_P^{(n)} d\eta_Q^{(m)}) = c_{PQ}^{(nm)}.$$

Поскольку $c_{PP}^{(nm)} = 0$ (см. лемму 1), отсюда заключаем что $\beta_P^{(n)}$ действует на $\mathcal{F}_X^\vee$ как умножение на $\sum_{Q \in X} c_{PQ}^{(nm)} u_Q^{(m)}$. Уравнения (18) могут быть переписаны следующим образом:

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_P^{(n)}} + \sum_{Q \in X} c_{PQ}^{(nm)} u_Q^{(m)} \right) \Omega = 0, \quad P \in X, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (19)$$

Как это следует из утверждения (i) леммы 1,

$$c_{PQ}^{(mn)} = c_{QP}^{(nm)},$$

так что система дифференциальных уравнений (19) совместна и Ω_X – ее единственное нормализованное решение.

ЗАМЕЧАНИЕ 20. Пусть $\mathfrak{g}$ – полупростая алгебра Ли над k с формой Киллинга–Картана $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Заменим k -векторное пространство $\mathbb{A}_X$ с билинейной формой c_X на k -векторное пространство $\mathbb{V}_X = \mathfrak{g} \otimes_k \mathbb{A}_X$ с билинейной формой $-\sum_{P \in X} \text{Res}_P \langle x_P, dy_P \rangle$. Тогда теорема 6 допускает естественное обобщение и в случае, когда аддитивные тождества Уорда выполняются для $\mathfrak{g} \otimes_k \mathcal{A}(X, D_{\text{ns}})$. Соответствующая КТП ассоциирована с алгеброй токов на алгебраической кривой в смысле [6].

5.2. Заряженные аддитивные бозоны на X . Следующие данные определяют КТП заряженных аддитивных бозонов:

СВ1) неспециальный эффективный дивизор $D_{\text{ns}} = P_1 + \dots + P_g$ степени g на X с различными точками, локальные параметры t_i в P_i и k -векторное пространство аддитивных функций $\mathcal{A}(X, D_{\text{ns}})$ – подпространство $\mathbb{A}_X$, содержащее $F = k(X)$, введенное в примере 1;

СВ2) локальные КТП заряженных аддитивных бозонов – $\mathbb{I}_P$ -модули старшего веса $\mathcal{B}_P$ для всех точек $P \in X$;

СВ3) глобальная решеточная алгебра $\mathbb{I}_X$ – полупрямая сумма глобальной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{g}_X$ и абелевой алгебры Ли $k[\text{Div}_0(X)]$ с образующими e_D , $D \in \text{Div}_0(X)$, где $k[\text{Div}_0(X)]$ – групповая алгебра группы $\text{Div}_0(X)$ дивизоров степени 0 на X ;

СВ4) $\mathbb{I}_X$ -модуль старшего веса – глобальное пространство Фока $\mathcal{B}_X$ со старшим вектором $\mathbf{1}_X \in \mathcal{B}_X$;

СВ5) функционал математического ожидания – линейное отображение $\langle \cdot \rangle: \mathcal{B}_X \rightarrow k$, удовлетворяющее следующим свойствам:

- (i) $\langle \mathbf{e}_D \cdot \mathbf{1}_X \rangle = 1$ для всех $D \in \text{Div}_0(X)$;
- (ii) $\langle \mathbf{a} \cdot u \rangle = 0$ для всех $a \in \mathcal{A}(X, D_{\text{ns}})$ и $u \in \mathcal{B}_X$.

Как k -векторное пространство групповая алгебра $k[\text{Div}_0(X)]$ аддитивной группы $\text{Div}_0(X)$ дивизоров степени 0 на X имеет базис $\{e_D\}_{D \in \text{Div}_0(X)}$, $e_{D_1}e_{D_2} = e_{D_1+D_2}$. Для каждого $x = \{x_P\} \in \mathbb{A}_X$ и $D = \sum_{P \in X} n_P P$, $P \in \text{Div}_0(X)$, положим

$$x(D) = \sum_{P \in X} n_P x_P(0) \in k,$$

где $x_P(0) = x_P^+ \bmod \mathfrak{p} \in k$ – постоянный член $x_P \in F_P$, определяемый разложением (12), связанным с неспециальным дивизором D_{ns} (см. п. 4.2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Глобальная решеточная алгебра $\mathbb{I}_X$ – это полупрямая сумма глобальной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{g}_X$ и абелевой алгебры $k[\text{Div}_0(X)]$ со скобкой Ли

$$[x + \alpha C + \gamma e_{D_1}, y + \beta C + \delta e_{D_2}] = c_X(x, y)C + y(D_1)\gamma e_{D_1} - x(D_2)\delta e_{D_2},$$

где $x + \alpha C, y + \beta C \in \mathfrak{g}_X$ и $\gamma, \delta \in k$.

Глобальное пространство Фока $\mathcal{B}_X$ – это тензорное произведение групповой алгебры $k[\text{Div}_0(X)]$ и пространства Фока аддитивных бозонов $\mathcal{F}_X$:

$$\mathcal{B}_X = k[\text{Div}_0(X)] \otimes \mathcal{F}_X = \bigoplus_{D \in \text{Div}_0(X)} \mathcal{B}_X^D,$$

где $\mathcal{B}_X^D = k \cdot e_D \otimes \mathcal{F}_X$. Глобальное пространство Фока $\mathcal{B}_X$ является неприводимым $\mathbb{I}_X$ -модулем, где $k[\text{Div}_0(X)]$ действует умножением,

$$\mathbf{e}_{D_1}(e_{D_2} \otimes v) = e_{D_1+D_2} \otimes v, \quad v \in \mathcal{F}_X, \quad (20)$$

а $\mathbb{A}_X$ действует следующим образом:

$$\mathbf{x}(e_D \otimes v) = -x(D)e_D \otimes v + e_D \otimes (\mathbf{x} \cdot v), \quad x \in \mathbb{A}_X, \quad v \in \mathcal{F}_X. \quad (21)$$

Для каждого $D = \sum_{P \in X} n_P P \in \text{Div}_0(X)$ подпространство $\mathcal{B}_X^D$ – это неприводимый $\mathfrak{g}_X$ -модуль. Он обладает свойством: для $x = \{x_P\}_{P \in X} \in \mathbb{A}_X$ таких, что $x_P \in k$ для всех $P \in X$, ограничение оператора $\mathbf{x}$ на $\mathcal{B}_X^D$ есть $-x(D)\mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ – тождественный оператор. В частности, когда $x = c$ – константа, $x(D) = c \deg D = 0$, и $\mathbf{x}$ действует как 0 в $\mathcal{B}_X$.

ЗАМЕЧАНИЕ 21. Можно также определить расширенную решеточную алгебру $\tilde{\mathbb{I}}_X$ как полупрямую сумму глобальной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{g}_X$ и абелевой алгебры Ли $k[\text{Div}(X)]$ и соответствующий неприводимый $\tilde{\mathbb{I}}_X$ -модуль – расширенное пространство Фока

$$\tilde{\mathcal{B}}_X = k[\text{Div}(X)] \otimes \mathcal{F}_X = \bigoplus_{D \in \text{Div}(X)} \mathcal{B}_X^D.$$

Действие $\tilde{\mathbb{I}}_X$ на $\tilde{\mathcal{B}}_X$ задается теми же формулами (20), (21), где теперь постоянный адель $x = c$ действует в $\mathcal{B}_X^D$ как $(c \deg D)\mathbf{I}$.

Двойственное пространство Фока $\mathcal{B}_X^\vee$ определяется как пополнение прямой суммы двойственных пространств к $\mathcal{B}_X^D$ по $D \in \text{Div}_0(X)$, задаваемое формальными бесконечными рядами. Конкретно

$$\mathcal{B}_X^\vee = \overline{\bigoplus_{D \in \text{Div}_0(X)} \mathcal{B}_X^\vee(D)},$$

где

$$\mathcal{B}_X^\vee(D) = k \cdot q^D \otimes \mathcal{F}_X^\vee,$$

$q^D \in k[\text{Div}_0(X)]^\vee$ двойственны к e_D , а $\mathcal{F}_X^\vee$ было определено в п. 5.1.

ТЕОРЕМА 7. *Существует единственный линейный функционал $\langle \cdot \rangle: \mathcal{B}_X \rightarrow k$, являющийся функционалом математического ожидания и удовлетворяющий следующим свойствам:*

EV1) $\langle e_D \cdot \mathbf{1}_X \rangle = 1$ для всех $D \in \text{Div}_0(X)$;

EV2) $\langle \mathbf{a} \cdot v \rangle = 0$ для всех $\mathbf{a} \in \mathcal{A}(X, D_{\text{ns}})$ и $v \in \mathcal{B}_X$.

Функционал $\langle \cdot \rangle$ имеет вид

$$\langle v \rangle = (\hat{\Omega}_X, v),$$

где

$$\hat{\Omega}_X = \sum_{D \in \text{Div}_0(X)} q^D \otimes \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{P \in X} \eta_P^{(n)}(D) u_P^{(n)} \right\} \Omega_X \in \mathcal{B}_X^\vee$$

и Ω_X приведено в теореме 6.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\Omega = \sum_{D \in \text{Div}_0(X)} q^D \otimes \Omega_D, \quad \Omega_D \in \mathcal{F}_X^\vee.$$

Условие $(\Omega, e_D \otimes \mathbf{1}_X) = 1$ для всех $D \in \text{Div}_0(X)$ эквивалентно нормировке $(\Omega_D, \mathbf{1}_X) = 1$. Поскольку константы действуют как 0 в $\mathcal{B}_X$, достаточно проверить справедливость уравнений

$$(q^D \otimes \Omega_D) \cdot \eta_P^{(n)} = 0 \quad (22)$$

для всех $D = \sum_{Q \in X} n_Q Q \in \text{Div}_0(X)$ и $P \in X$. Так как

$$q^D \cdot \eta_P^{(n)} = -\eta_P^{(n)}(D) q^D = - \sum_{Q \in X} n_Q \eta_P^{(n)} \Big|_Q (0) q^D$$

(отметим, что $\eta_P^{(n)}|_P(0) = 0$ по определению из п. 4.2), из (22) получаем, что Ω_D удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_P^{(n)}} - \sum_{Q \in X} n_Q \eta_P^{(n)} \Big|_Q (0) + \sum_{Q \in X} c_{PQ}^{(nm)} u_Q^{(m)} \right) \Omega_D = 0,$$

которая имеет единственное нормализованное решение, задаваемое формулой

$$\Omega_D = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{P \in X} \eta_P^{(n)}(D) u_P^{(n)} - \frac{1}{2} \sum_{m,n=1}^{\infty} \sum_{P,Q \in X} c_{PQ}^{(mn)} u_P^{(m)} u_Q^{(n)} \right\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 22. Теоремы 6, 7 также справедливы и для произвольного поля констант k нулевой характеристики (см. замечание 10).

ЗАМЕЧАНИЕ 23. Все приведенные результаты тривиально справедливы для случая кривой X рода нуль. Используя замечание 8, легко получить явные элементарные формулы для функционала математического ожидания $\langle \cdot \rangle$ для квантовых аддитивных и заряженных бозонов на $\mathbb{P}_k^1$.

5.3. Инвариантные формулировки. Здесь мы приведем инвариантную формулировку и доказательство обобщения теоремы 6 в случае алгебр токов, предложенные рецензентом. Пусть V – k -векторное пространство, рассматриваемое как абелева алгебра Ли, а c – кососимметрическая билинейная форма на V . Обозначим через $\tilde{V}$ одномерное центральное расширение V

$$0 \rightarrow k \cdot C \rightarrow \tilde{V} \rightarrow V \rightarrow 0$$

при помощи 2-коцикла c , а через $\mathscr{W}$ – алгебру Вейля алгебры Ли $\tilde{V}$, как в п. 4.1. Пусть U и W – изотропные подпространства в V по отношению к билинейной форме c такие, что $U \cap W$ и $V/(U + W)$ конечномерны и $U \cap W$ лежит в ядре c .

ЛЕММА 2. *Имеет место канонический изоморфизм k -векторных пространств*

$$\mathscr{W}/\mathscr{W} \cdot (U + W) \simeq \text{Sym}^\bullet(V/(U + W)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в прямом вычислении в симплектическом базисе V , согласованном с соответствующими базисами в U и W .

В обозначениях из замечания 20 положим $V = \mathbb{V}_X = \mathfrak{g} \otimes_k \mathbb{A}_X$,

$$c(x, y) = - \sum_{P \in X} \text{Res}_P \langle x_P, dy_P \rangle,$$

$U = \mathfrak{g} \otimes_k F$ и $W = \mathfrak{g} \otimes_k \mathbb{O}_X$, где $F = k(X)$. Тогда

$$\mathscr{W}/\mathscr{W} \cdot W \simeq \mathcal{F}_X$$

– пространство Фока алгебры токов на X , и, используя адельную интерпретацию когомологий Ж.-П. Серра:

$$V/(U + W) \simeq \mathfrak{g} \otimes_k H^1(X, \mathcal{O}_X),$$

из леммы 2 получаем

$$\mathcal{F}_X/(\mathfrak{g} \otimes_k F) \cdot \mathcal{F}_X \simeq \text{Sym}^\bullet(\mathfrak{g} \otimes_k H^1(X, \mathcal{O}_X)).$$

Это показывает, что глобальные симметрии $\mathfrak{g} \otimes_k F$ не определяют функционал математического ожидания $\langle \cdot \rangle$ однозначно, за исключением случая $X = \mathbb{P}_k^1$.

Для расширения алгебры глобальных симметрий рассмотрим лагранжево подпространство $L \subset H_{\text{dR}}^1(X) \simeq \Omega^{(2\text{nd})}/dF$ такое, что ограничение на L естественного отображения $H_{\text{dR}}^1(X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X)$ является изоморфизмом. Например, пусть $L = k \cdot \omega_1 \oplus \cdots \oplus k \cdot \omega_g$ (см. теорему 4). Пусть $\tilde{L}$ – полный

прообраз L при отображении $\Omega^{(2\text{nd})} \rightarrow \Omega^{(2\text{nd})}/dF$. Утверждается, что существует подпространство $U_0 \subset \mathbb{A}_X$ такое, что

$$F \subset U_0, \quad U_0 \cap \mathbb{O}_X = k, \quad dU_0 = \tilde{L}.$$

Например, пусть $U_0 = \mathcal{A}(X, D_{\text{ns}})$. Тогда $U = \mathfrak{g} \otimes_k U_0$ – изотропное подпространство V и согласно замечанию 9 имеем

$$V/(U + W) = \{0\}.$$

Таким образом,

$$\mathcal{F}_X/U \cdot \mathcal{F}_X \simeq k,$$

что и есть, в существенном, утверждение теоремы 6 (за вычетом явной формулы для вектора Ω_X). Согласно замечанию 10 условие алгебраической замкнутости поля k несущественно.

Список литературы

1. Ж.-П. Серр, *Алгебраические группы и поля классов*, Мир, М., 1968; пер. с фр.: J.-P. Serre, *Groupes algébriques et corps de classes*, Hermann & Cie, Paris, 1959.
2. J. Tate, “Residues of differentials on curves”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **1**:1 (1968), 149–159.
3. E. Arbarello, C. De Concini, V.G. Кас, “The infinite wedge representation and the reciprocity law for algebraic curves”, *Theta functions – Bowdoin 1987, Part 1* (Brunswick, ME, 1987), Proc. Sympos. Pure Math., **49**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, 171–190.
4. D. Kazhdan, *Free fermions on an algebraic curve* (Lecture at AMS Summer Institute Theta functions), 1987.
5. E. Witten, “Free fermions on an algebraic curve”, *The mathematical heritage of Hermann Weyl*, Proc. Sympos. Pure Math., **48**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988, 329–344.
6. E. Witten, “Quantum field theory, Grassmannians, and algebraic curves”, *Comm. Math. Phys.*, **113**:4 (1988), 529–600.
7. L. A. Takhtajan, “Quantum field theories on an algebraic curve”, *Lett. Math. Phys.*, **52**:1 (2000), 79–91.
8. K. Iwasawa, *Algebraic functions*, Transl. Math. Monogr., **118**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
9. И. Кра, *Автоморфные формы и кляйновы группы*, Мир, М., 1975; пер. с англ.: I. Kra, *Automorphic forms and Kleinian groups*, Benjamin, Reading, MA, 1972.
10. N. Kawamoto, Y. Namikawa, A. Tsuchiya, Y. Yamada, “Geometric realization of conformal field theory on Riemann surfaces”, *Comm. Math. Phys.*, **116**:2 (1988), 247–308.
11. К. Шевалле, *Введение в теорию алгебраических функций от одной переменной*, Физматгиз, М., 1959; пер. с англ.: C. Chevalley, *Introduction to the theory of algebraic functions of one variable*, Math. Surveys, **6**, Amer. Math. Soc., New York, 1951.
12. M. Eichler, *Introduction to the theory of algebraic numbers and functions*, Academic Press, New York, 1966.
13. В. Кац, *Бесконечномерные алгебры Ли*, Мир, М., 1993; пер. с англ.: V.G. Кас, *Infinite dimensional Lie algebras*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

14. E. Frenkel, D. Ben-Zvi, *Vertex algebras and algebraic curves*, Math. Surveys Monogr., **88**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
15. С. Лефшец, *Алгебраическая топология*, ИЛ, М., 1949; пер. с англ.: S. Lefschetz, *Algebraic topology*, Amer. Math. Soc., New York, 1942.
16. Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии*, Мир, М., 1982; пер. с англ.: Ph. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley, New York, 1978.
17. A. Weil, “Sur les fonctions algébriques à corps de constantes fini”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **210** (1940), 592–594.
18. С. О. Горчинский, “Бирасширение Пуанкаре и иделы на алгебраической кривой”, *Матем. сб.*, **197**:1 (2006), 25–38; англ. пер.: S. O. Gorchinskii, “Poincaré biextension and idèles on an algebraic curve”, *Sb. Math.*, **197**:1 (2006), 23–36.

Л. А. ТАХТАДЖЯН (L. A. TAKHTAJAN)
Department of Mathematics,
Stony Brook University, NY, USA;
Международный математический институт
им. Л. Эйлера, г. Санкт-Петербург
E-mail: leontak@math.sunysb.edu

Поступило в редакцию
11.10.2011
19.04.2012