Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Р. Аваков, А. В. Арутюнов, Д. Ю. Карамзин, Исследование гладких отображений в окрестности аномальной точки, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014, том 78, выпуск 2, 3–42

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7928>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 13:19:08

УДК 517.9

Е. Р. Аваков, А. В. Арутюнов, Д. Ю. Карамзин

Исследование гладких отображений в окрестности анормальной точки

Исследуется разрешимость систем нелинейных уравнений в окрестности анормальной точки. Доказаны теоремы об обратной функции, гарантирующие существование решений рассматриваемых уравнений в окрестности анормальной точки, удовлетворяющих линейно-корневой оценке. Исследуется связанный с предыдущим вопрос о необходимых условиях экстремума в анормальной точке для конечномерной задачи с ограничениями. Для нее получены необходимые условия экстремума второго порядка, усиливающие известные ранее в этой области результаты.

Библиография: 15 наименований.

Ключевые слова: теорема об обратной функции, анормальная точка, задача на условный экстремум.

DOI: 10.4213/im7928

§ 1. Введение

Пусть заданы линейное пространство X , конечномерное евклидово пространство $Y = \mathbb{R}^k$, отображение $F: X \rightarrow Y$ и точка $x_0 \in X$. При исследовании отображения F одним из важнейших вопросов является следующий: при каких условиях, налагаемых на F , для любого y , достаточно близкого к точке $y_0 = F(x_0)$, уравнение

$$F(x) = y$$

имеет решение $\varphi(y)$, $\varphi(y_0) = x_0$?

Сначала для простоты будем предполагать, что X – банахово пространство. Пусть отображение $F: X \rightarrow Y$ непрерывно дифференцируемо в окрестности точки $x_0 \in X$. Если точка x_0 нормальна¹, т. е. $\text{im } F'(x_0) = Y$, то ответ на вопрос дает классическая теорема об обратной функции. А именно, тогда в некоторой окрестности y_0 существует такое решение $\varphi(y)$ искомого уравнения, что $\varphi(y_0) = x_0$ и функция φ непрерывно дифференцируема.

Пусть точка x_0 анормальна², т. е. $\text{im } F'(x_0) \neq Y$. Тогда классическая теорема об обратной функции не выполняется. (Например, уравнение $F(x) := x_1^2 + x_2^2 = y$ при $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ имеет решения лишь при $y \geq 0$, а для уравнения $F(x) := x_1^2 - x_2^2 = y$ существует бесконечное число непрерывных функций $\varphi(y)$, $y \in \mathbb{R}$, каждая из которых дает решение этого уравнения, однако ни одна из этих функций φ в нуле не является даже липшицевой.)

¹Наряду с термином *нормальная точка* используются также термины *регулярная* и *невырожденная точка*.

²Наряду с термином *анормальная точка* используются также термины *нерегулярная*, *вырожденная*, *критическая точка* и другие.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 12-01-00427, 12-01-33023).

Приведем теорему об обратной функции, которая справедлива без априорных предположений нормальности точки x_0 . Предположим, что отображение F дважды непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности точки x_0 , а его вторая производная удовлетворяет условию Липшица в этой окрестности. Введем необходимые понятия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть

$$h \in \ker F'(x_0), \quad F''(x_0)[h, h] \in \operatorname{im} F'(x_0). \quad (1.1)$$

Будем говорить, что в точке x_0 отображение F *2-регулярно по направлению h* , если

$$F''(x_0)[h, \ker F'(x_0)] + \operatorname{im} F'(x_0) = Y.$$

Обозначим через P оператор ортогонального проектирования Y на ортогональное дополнение к подпространству $\operatorname{im} F'(x_0)$.

Справедлива следующая теорема об обратной функции.

ТЕОРЕМА 1.1. *Предположим, что существует вектор $h \in X$, для которого имеет место (1.1), и в точке x_0 отображение F 2-регулярно по направлению h . Тогда существуют окрестность O точки y_0 , число $\operatorname{const} > 0$ и определенная на O непрерывная функция φ такие, что для всех $y \in O$ имеет место*

$$F(\varphi(y)) = y, \quad \|\varphi(y) - x_0\| \leq \operatorname{const}(|y - y_0| + |P(y - y_0)|^{1/2}). \quad (1.2)$$

Существование решения искомого уравнения $\varphi(y)$ для $y \in O$ с указанной оценкой было доказано в [1], а возможность выбора функции φ непрерывной была доказана в [2].

Отметим, что если точка x_0 нормальна, то предположение теоремы 1.1 выполняется при $h = 0$ и, следовательно, теорема 1.1 превращается в классическую теорему об обратной функции. Кроме того, в случае, когда X, Y – бесконечномерные банаховы пространства, эта теорема была доказана в [1], [2] в предположении, что подпространство $\operatorname{im} F'(x_0)$ замкнуто и топологически дополняемо. Случай, когда подпространство $\operatorname{im} F'(x_0)$ не замкнуто, был изучен в [3].

В связи с теоремой 1.1 возникает проблема получения достаточных условий существования вектора h , для которого имеет место (1.1) и в точке x_0 отображение F 2-регулярно по направлению h . Такое достаточное условие было получено в [4]. Приведем его. Введем необходимые понятия.

Пусть задано симметричное билинейное отображение $Q: X \times X \rightarrow Y$. Определим квадратичное отображение $Q: X \rightarrow Y$ по формуле $Q(x) := Q[x, x]$, $x \in X$, где $Q[x_1, x_2]$ – значение билинейного отображения Q на элементах x_1, x_2 . Билинейное отображение и порожденное им квадратичное отображение будем обозначать через Q , так как это не приводит к недоразумениям. Заметим, что вторая производная $F''(x_0)$ отображения F в точке x_0 порождает симметричное билинейное отображение $F''(x_0)[x_1, x_2]$. Для произвольного x через Qx обозначим линейный оператор, действующий из X в Y по формуле $(Qx)\xi = Q[x, \xi]$. Через P обозначим оператор ортогонального проектирования пространства Y на его подпространство $\operatorname{im} F'(x_0)^\perp$.

Рассмотрим множество нетривиальных нулей отображения Q :

$$N = \{x \in X, x \neq 0: Q(x) = 0\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Вектор $x \in N$ называется *регулярным нулем* квадратичного отображения Q , если $Q[x, X] = Y$.

Для квадратичного отображения Q и произвольного целого $r \geq 0$ положим

$$\Lambda_r^Q := \{\lambda \in Y^*: |\lambda| = 1, \text{ind}(\lambda Q) \leq r\}.$$

Здесь ind – индекс квадратичной формы

$$\lambda Q = \sum_{i=1}^k \lambda^i Q_i,$$

а Q_i – квадратичная форма, являющаяся i -й координатой отображения Q . Напомним, что индекс квадратичной формы – это максимальная из размерностей подпространств, на которых эта форма отрицательно определена. В работе [4] доказана следующая

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть существует вектор $y \in Q(X)$ такой, что $\langle y, \lambda \rangle < 0$ для любого $\lambda \in \Lambda_{k-1}^Q$. Тогда квадратичное отображение Q имеет регулярный ноль.

Заметим, что если $\Lambda_{k-1}^Q = \emptyset$, то предположения теоремы 1.2 выполнены автоматически, так как в качестве вектора y можно взять $y = 0$.

Для произвольного целого $r \geq 0$ через $\Lambda_r(x_0)$ обозначим множество всех векторов λ таких, что $F'(x_0)^* \lambda = 0$, $|\lambda| = 1$, для каждого из которых существует подпространство $\Pi \subseteq X$, $\text{codim } \Pi \leq r$, такое, что

$$\Pi \subseteq \ker F'(x_0), \quad \langle \lambda, F''(x_0)[\xi, \xi] \rangle \geq 0 \quad \forall \xi \in \Pi.$$

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть точка x_0 анормальна и

$$\exists h \in \ker F'(x_0): \quad \langle \lambda, F''(x_0)[h, h] \rangle < 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda_{k-1}(x_0). \quad (1.3)$$

Тогда существуют конечномерное подпространство $M \subseteq X$, окрестность O точки y_0 , число $\text{const} > 0$ и непрерывная функция $\varphi: O \rightarrow M$ такие, что для всех $y \in O$ имеет место (1.2).

Это утверждение вытекает из теорем 1.1, 1.2 и [5, леммы 1, 2]. Впервые утверждение такого типа было непосредственно доказано (т. е. без использования теорем 1.1, 1.2) в [5], где в условии (1.3) вместо $\Lambda_{k-1}(x_0)$ рассматривалось, вообще говоря, большее множество $\Lambda_k(x_0)$, а непрерывность обратной функции φ вообще не рассматривалась. При этом в [5] было доказано, что в предположении выполнения вводимого там условия 2-нормальности условие (1.3) необходимо для существования решения φ , удовлетворяющего оценке (1.2).

Подводя итог изложенному, если точка x_0 нормальна, получаем, что положительный ответ на вопрос о существовании решения исходного уравнения $F(x) = y$ с линейной оценкой дает классическая теорема об обратной функции. Более общо: если существует направление h , вдоль которого отображение 2-регулярно в точке x_0 , то решение уравнения $F(x) = y$ существует в силу теоремы 1.1 и оценка решения (1.2) является уже линейно-корневой.

Если точка x_0 анормальна, но $\text{codim im } F'(x_0) = 1$, то ответ на поставленный вопрос дает теорема 1.3. Действительно, в этом случае существует единственный (с точностью до умножения на -1) единичный вектор λ такой, что $F'(x_0)^* \lambda = 0$. В силу теоремы 1.3 если квадратичная форма $\lambda F''(x_0)$ не

является знакоопределенной на подпространстве $\ker F'(x_0)$, то исходное уравнение имеет непрерывное решение φ , удовлетворяющее оценке (1.2). Если же квадратичная форма $\lambda F''(x_0)$ либо неотрицательно, либо неположительно определена на подпространстве $\ker F'(x_0)$, то исходное уравнение хотя и может иметь решение, но, как это несложно доказать, ни одно из этих решений не будет удовлетворять оценке (1.2).

Таким образом, особый интерес представляет рассмотрение случая, когда

$$\operatorname{codim} \operatorname{im} F'(x_0) \geq 2,$$

а существование регулярного нуля не дано априори (и тогда предположения теоремы 1.3 не выполняются). Именно выводу достаточных условий существования решений исходного уравнения в этом случае и посвящена первая часть настоящей статьи. В §2 приведены формулировки теорем, содержащих эти условия, а также иллюстрирующие примеры. Доказательство этих теорем приведено в §4, а §3 посвящен доказательству вспомогательных лемм.

С разрешимостью уравнения $F(x) = y$ тесно связаны необходимые условия экстремума в нелинейной задаче минимизации

$$f(x) \rightarrow \min, \quad F(x) = 0, \quad (1.4)$$

где f и F предполагаются достаточно гладкими (см., например, [5]). Как известно (см., например, [6]), если точка x_0 , которая в этой задаче доставляет локальный минимум, аномальна для отображения F , то классический принцип Лагранжа неинформативен (выполняется независимо от минимизируемого функционала), а классические необходимые условия второго порядка могут нарушаться. Вторая часть настоящей статьи посвящена вопросу вывода для рассматриваемой задачи минимизации необходимых условий первого и второго порядков в аномальной точке минимума. Эти условия усиливают известные результаты для аномальных экстремальных задач. Они приведены в §5 и доказаны в §6. При этом вывод необходимых условий основан на получаемых в §2–4 теоремах об обратной функции.

Отметим отличие предлагаемого в настоящей статье подхода от теории особенностей [7], в которой также исследуются вырождения гладких отображений. В теории особенностей рассматриваются целые семейства отображений, для которых строится классификация типичных форм вырождения. В настоящей работе рассматривается одно (заданное) отображение, для которого мы пытаемся получить максимально возможную информацию в терминах только первой и второй производных в заданной аномальной точке. Однако при этом геометрическая суть получаемых результатов довольно сложна и не вполне понятна. Это, возможно, объясняется тем, что мы не налагаем априорных предположений на размерности пространств (естественно лишь считать, что $\dim X \geq \dim Y$).

§ 2. Теоремы о разрешимости нелинейных уравнений

Пусть X – линейное пространство, $Y = \mathbb{R}^k$, заданы отображение $F: X \rightarrow Y$ и точка $x_0 \in X$. Пусть $y_0 = F(x_0)$. Исследуем вопрос о существовании решения уравнения

$$F(x) = y$$

для y , принадлежащих окрестности точки y_0 .

Введем основные обозначения. Везде далее для целых $r \geq 0$ через Π_r обозначено линейное подпространство в X , *корузмерность* которого в X не превосходит r . С помощью угловых скобок $\langle \cdot, \cdot \rangle$ будем обозначать скалярное произведение и действие линейного функционала. Для заданных квадратичного отображения Q и множества $M \subset X$ будем использовать обозначение $Q(M) = \bigcup_{x \in M} Q(x)$. Пусть $\text{cone}\{M\}$ – коническая оболочка множества M .

Сначала предположим, что $X = \mathbb{R}^n$ и отображение F дважды непрерывно дифференцируемо в окрестности точки x_0 .

Пусть $y, d \in Y$, а $r \geq 0$ – целое число. Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_r(x_0; y, d) := \{ & \lambda \in Y^* \mid \exists l \in \ker F'(x_0), \exists \Pi_r \subseteq \ker F'(x_0): \\ & \text{codim}(\ker(PF''(x_0)l) \cap \Pi_r) \leq r + 1, \\ & |\lambda| = 1, l \neq 0, \langle \lambda, d \rangle \leq 0, F'(x_0)^* \lambda = 0, \\ & \exists \nu \in Y^*: F'(x_0)^* \nu + (F''(x_0)l)^* \lambda = 0, \\ & \langle \lambda, F''(x_0)[\xi, \xi] \rangle \geq 0 \quad \forall \xi \in \Pi_r, \\ & F''(x_0)[l, l] \in \text{cone}\{y\} + \text{cone}\{d\} + \text{im } F'(x_0) \}. \end{aligned}$$

Через $B_\delta(y)$ обозначим замкнутый шар с радиусом δ и центром в точке y . Для $\delta > 0$ положим

$$\Upsilon_\delta(d) := B_\delta(y_0) \cap (y_0 + \text{cone } B_\delta(d)).$$

В дальнейшем будем предполагать, что

$$k \geq 2, \quad \text{codim}(\text{im } F'(x_0)) \geq 2. \quad (2.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть задан вектор $d \in Y$. Скажем, что при $y \in Y$ для отображения F в точке x_0 выполняется условие $\mathbf{A}_r(x_0; y, d)$, если:

- a) $y \notin \text{im } F'(x_0) - \text{cone}\{d\}$;
- b) $y \in F''(x_0)(\ker F'(x_0))$;
- c) $\langle \lambda, y \rangle < 0$ для любого $\lambda \in \mathcal{M}_r(x_0; y, d)$.

Приведем теоремы о разрешимости рассматриваемого уравнения. Начнем с общего утверждения о разрешимости в конической окрестности.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть задан вектор $d \in Y$, причем $d \notin \text{im } F'(x_0)$. Предположим, что при некотором $\hat{y} \in Y$ для отображения F в точке x_0 выполняется условие $\mathbf{A}_{k-2}(x_0; \hat{y}, d)$. Тогда существуют положительные числа δ и const , зависящие от $\hat{y}$, d и такие, что для всех $y \in \Upsilon_\delta(d)$ существует вектор $x(y)$ такой, что

$$F(x(y)) = y, \quad |x(y) - x_0| \leq \text{const} \sqrt{|y - y_0|}. \quad (2.2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. По условию имеем $Pd \neq 0$, а значит, существуют $c_1, \delta_1 > 0$ такие, что $|y| \leq c_1 |Py|$ для любого $y \in \Upsilon_{\delta_1}(d)$. Поэтому, уменьшая, если необходимо, $\delta > 0$ и увеличивая число const из (2.2), для $y \in \Upsilon_\delta(d)$ получаем формально более сильную оценку $|x(y) - x_0| \leq \text{const} \sqrt{|P(y - y_0)|}$, которая, однако, в данном случае эквивалентна (2.2).

Перейдем к теоремам об обратной функции. Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_r(x_0) := \{ & \lambda \in Y^* \mid \exists l \in X, \exists \Pi_r: \\ & \text{codim}(\ker F'(x_0) \cap \ker(PF''(x_0)l) \cap \Pi_r) \leq r + 1, \\ & |\lambda| = 1, l \neq 0, F'(x_0)^* \lambda = 0, \exists \nu \in Y^*: F'(x_0)^* \nu + (F''(x_0)l)^* \lambda = 0, \\ & \langle \lambda, F''(x_0)[\xi, \xi] \rangle \geq 0 \ \forall \xi \in \Pi_r \}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $F'(x_0) = 0$ и

$$\exists \hat{y} \in F''(x_0)(X): \quad \langle \hat{y}, \lambda \rangle < 0 \quad \forall \lambda \in \mathcal{M}_{k-2}(x_0). \quad (2.3)$$

Тогда существуют окрестность O точки y_0 и положительное число const такие, что для любого $y \in O$ существует вектор $x = x(y)$, для которого выполняется (2.2).

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $\mathcal{M}_{k-2}(x_0) = \emptyset$. Тогда существуют окрестность O точки y_0 и положительное число const такие, что для всех $y \in O$ существует вектор $x = x(y)$, для которого выполняется

$$F(x(y)) = y, \quad |x(y) - x_0| \leq \text{const}(|y - y_0| + |P(y - y_0)|^{1/2}). \quad (2.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. При $k = 2$ возникает такая же ситуация, как и описанная во введении для случая, когда $\text{codim im } F'(x_0) = 1$. А именно, если $k = 2$, то в теореме 2.3 условие $\mathcal{M}_0(x_0) = \emptyset$ является не только достаточным, но и необходимым для того, чтобы для всех y из некоторой окрестности точки y_0 существовал вектор $x(y)$, для которого выполняется линейно-корневая оценка (2.4). Последнее вытекает из того, что если множество $\mathcal{M}_0(x_0)$ не пусто, то существует вектор $\lambda \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \neq 0$, для которого $F'(x_0)^* \lambda = 0$ и квадратичная форма $\lambda F''(x_0)$ неотрицательно определена.

Отметим, что при $k > 2$ приведенные достаточные условия разрешимости не являются необходимыми.

Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_r(x_0) := \{ & \lambda \in Y^* \mid \exists l \in X, \exists \Pi_r: \Pi_r \subseteq \ker F'(x_0) \cap \ker(PF''(x_0)l), \\ & |\lambda| = 1, l \neq 0, F'(x_0)^* \lambda = 0, \\ & \exists \nu \in Y^*: F'(x_0)^* \nu + (F''(x_0)l)^* \lambda = 0, \langle \lambda, F''(x_0)[\xi, \xi] \rangle \geq 0 \ \forall \xi \in \Pi_r \}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть $k \geq 1$, $\text{codim}(\text{im } F'(x_0)) \geq 1$ и

$$\exists \hat{y} \in F''(x_0)(\ker F'(x_0)): \langle \hat{y}, \lambda \rangle < 0 \quad \forall \lambda \in \mathcal{R}_{k-1}(x_0). \quad (2.5)$$

Тогда существуют окрестность O точки y_0 и положительное число const такие, что для любого $y \in O$ существует вектор $x = x(y)$, для которого выполняется (2.4).

Множества, участвующие в формулировках приведенных теорем, имеют весьма громоздкий вид и малопонятны. Опишем эти множества в случае, когда отображение F – однородное квадратичное отображение, т. е. $F(x) = Q[x, x]$, и $x_0 = 0$. Этот случай, с одной стороны, более прост в формулировках, а с другой – содержит основные сложности, возникающие при исследовании отображений в окрестности аномальных точек.

Итак, пусть $F = Q$. Тогда множество $\mathcal{M}_r(0)$ принимает следующий вид:

$$\mathcal{M}_r(0) = \{ \lambda \in Y^* \mid |\lambda| = 1, \exists l \in X, l \neq 0, \exists \Pi_r : \\ \text{codim}(\ker Ql \cap \Pi_r) \leq r + 1, \lambda Ql = 0, \langle \lambda, Q[\xi, \xi] \rangle \geq 0 \forall \xi \in \Pi_r \}.$$

Аналогично упрощаются и определения множеств $\mathcal{M}_r(0; y, d)$, $\mathcal{R}_r(0)$. Более того, очевидно, что в квадратичном случае все три множества $\mathcal{M}_r(0; y, d)$, $\mathcal{M}_r(0)$ и $\mathcal{R}_r(0)$ содержатся во множестве

$$\{ \lambda \in Y^* \mid |\lambda| = 1, \exists l \in X, l \neq 0, \lambda Ql = 0, \text{ind } \lambda Q \leq r \}.$$

Отметим, что последнее множество содержится во множестве Λ_r^Q . Таким образом, приведенные теоремы 2.1–2.4 развивают индексный подход, упомянутый во введении.

Проиллюстрируем сформулированные теоремы на примерах. В следующем примере предположения теорем 1.1, 1.3 не выполняются, а предположения теорем 2.2–2.4 выполняются. Однако в данном примере отображение $x(\cdot)$ выбрать непрерывным нельзя. В этом заключается основное отличие утверждений теорем 2.2–2.4 от утверждений теорем 1.1, 1.3.

ПРИМЕР 2.1. Пусть $n = k = 2$, $x_0 = 0$,

$$Q(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix}.$$

Несложно проверить, что для введенного квадратичного отображения Q выполняются предположения теорем 2.2–2.4 (так как здесь $\mathcal{M}_0(0) = \mathcal{R}_1(0) = \emptyset$) и, значит, в их силу это квадратичное отображение сюръективно. Однако для отображения Q непрерывного обратного отображения $x(\cdot)$ не существует, поскольку любое квадратичное отображение $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (даже если оно сюръективно) не имеет правого обратного отображения, которое непрерывно в окрестности нуля (см. [8, лемма 1 и пример 4]). Отметим, что рассматриваемое квадратичное отображение Q не имеет нетривиальных нулей (а значит, и регулярных нулей). Кроме того, легко видеть, что для Q условие (1.3) не выполняется. Поэтому, в отличие от теорем 2.2–2.4, теоремы 1.1, 1.3 применить нельзя.

На основе приведенной конструкции можно построить еще один пример. Рассмотрим квадратичное отображение $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, определенное формулой

$$(z_1 z_2, |z_1|^2 - |z_2|^2), \quad (2.6)$$

где $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 = x_1 + ix_2$, $z_2 = x_3 + ix_4$. Очевидно, что его единственным нулем является $z_1 = z_2 = 0$. В то же время “овеществление” комплексного отображения (2.6) путем приравнивания его вещественной и мнимой частей к нулю приводит к квадратичному отображению $Q: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, для которого $\mathcal{M}_1(0) = \emptyset$. Тогда снова в силу теорем 2.2, 2.3 (но уже не теоремы 2.4) отображение Q сюръективно. Тем не менее Q не имеет нетривиальных нулей (а следовательно, не имеет и регулярных).

Эти два примера, построенные при $k = 2$ и $k = 3$, не являются случайными. Точно так же можно построить примеры при $k = 5$ и $k = 9$, взяв $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ для $k = 5$ и $z_1, z_2 \in \mathbb{O}$ для $k = 9$ в квадратичном отображении (2.6), где $\mathbb{H}$ – алгебра

кватернионов, а $\mathbb{O}$ – алгебра октав Кэли. В то же время нам неизвестны соответствующие примеры при $k \neq 2, 3, 5, 9$. Представляется интересным вопрос: при каких k существуют подобные примеры (отображений, которые не имеют нетривиальных нулей), когда множество $\Lambda_{k-2}(x_0)$ или хотя бы $\mathcal{M}_{k-2}(x_0)$ пусто (если такие примеры вообще существуют)? Этот вопрос был впервые сформулирован А. В. Арутюновым в [9], где были приведены указанные примеры.

В приведенных примерах квадратичное отображение Q не имело нетривиальных нулей.

Приведем пример квадратичного отображения, для которого выполнены предположения теоремы 2.2, однако у этого отображения все нули нерегулярны (тогда теорема 1.1 не применима) и имеются нули $x \in N$ такие, что $Qx \neq 0$.

ПРИМЕР 2.2. Пусть $n = 4$, $k = 3$. Рассмотрим квадратичное отображение

$$Q(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 \\ x_1x_3 - x_2x_4 \\ x_1x_2 - x_3x_4 \end{bmatrix}.$$

Сначала вычислим множество N . Покажем, что

$$N = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \neq 0 : x_1 = x_4 = 0, x_2 = \pm x_3\}. \quad (2.7)$$

Пусть $x \in N$. Если $x_3 = 0$, то в силу равенства $Q_1(x) = 0$ получаем $x = 0$, что противоречит условию $x \in N$. Поэтому $x_3 \neq 0$.

Докажем, что $x_4 = 0$. Пусть $x_4 \neq 0$. Из равенства $Q_2(x) = 0$, учитывая, что $x_3 \neq 0$, имеем $x_1 = \frac{x_2x_4}{x_3}$. Подставляя это выражение в равенство $Q_3(x) = 0$, получаем, поскольку $x_4 \neq 0$, что $x_2^2 = x_3^2$. Тогда из равенства $Q_1(x) = 0$ вытекает, что $x_4 = 0$. Противоречие. Значит, $x_4 = 0$. Однако тогда, поскольку $x_3 \neq 0$, в силу равенства $Q_2(x) = 0$ имеем $x_1 = 0$, откуда в силу того, что $Q_1(x) = 0$, имеем $x_2 = \pm x_3$. Итак, (2.7) доказано.

Покажем теперь, что выполняется условие (2.3). Действительно, если $\lambda \in \mathcal{M}_1(0)$, то неизбежно $\lambda^1 > 0$. Чтобы понять это, необходимо рассмотреть квадратичную форму

$$\lambda^1(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_4^2) + \lambda^2(x_1x_3 - x_2x_4) + \lambda^3(x_1x_2 - x_3x_4)$$

и увидеть, что при $\lambda^1 \leq 0$ и любых $\lambda^2, \lambda^3, |\lambda| = 1$, не существует подпространства Π_1 коразмерности 1, на котором эта квадратичная форма неотрицательно определена. Взяв теперь вектор $\hat{y} := (-1, 0, 0)$, который, очевидно, принадлежит множеству $Q(X)$, получаем (2.3).

Однако множество N как конус, что видно из (2.7), порождается ровно четырьмя векторами: $a = (0, 1, 1, 0)$, $b = (0, -1, 1, 0)$, $-a$ и $-b$. Легко проверить, что $Q_2a = Q_3a$, $Q_2b = -Q_3b$. Поэтому все нули Q нерегулярны. Кроме этого, легко увидеть, что условие (1.3) здесь не выполняется, так как $0 \in \text{con } \Lambda_2(0)$. Таким образом, применить теоремы 1.1, 1.3 мы не можем, однако теорема 2.2 применима (так как условие (2.3) выполнено), и поэтому отображение Q сюръективно и имеет место оценка (1.2).

Пример 2.2 легко обобщить в случае квадратичного отображения $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^3$, где $n \geq 4$, путем прибавления к первой форме Q_1 члена $x_5^2 + x_6^2 + \dots + x_n^2$.

Следующий пример показывает, что предположение $d \notin \operatorname{im} F'(x_0)$ в теореме 2.1 существенно. Другими словами, хотя в нем условие $\mathbf{A}_{k-2}(x_0; \widehat{y}, d)$ и выполняется, но $d \in \operatorname{im} F'(x_0)$. При этом для любого $\delta > 0$ существует $y \in \Upsilon_\delta(d)$, для которого уравнение $F(x) = y$ не имеет решений.

ПРИМЕР 2.3. Пусть $n = k = 3$, $x_0 = 0$. Определим отображение $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ по формуле

$$F(x) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \\ x_2 x_3 \end{bmatrix}.$$

Тогда $F(0) = 0$. Пусть $\widehat{y} = (0, -1, 0)$, $d = (1, 0, 0)$.

Проверим, что условие $\mathbf{A}_1(x_0; \widehat{y}, d)$ выполняется. Для этого достаточно установить, что $\mathcal{M}_1(x_0; \widehat{y}, d) = \emptyset$. Матрицы

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

определяют вторые частные производные второй и третьей компонент отображения F . По определению $\mathcal{M}_1(x_0; \widehat{y}, d)$ имеем соотношения для l : $l_1 = 0$, $Q_2(l) = l_2 l_3 = 0$, а значит, l имеет вид либо $l = \alpha(0, 0, 1)$, либо $l = \alpha(0, 1, 0)$, где $\alpha \neq 0$. Из вида матриц Q_1, Q_2 в (2.8) можно вывести, что в обоих случаях проекции векторов $Q_1 l$ и $Q_2 l$ на подпространство $x_1 = 0$ линейно независимы, следовательно, если $(Ql)^* \lambda + \nu(1, 0, 0)^* = 0$ для некоторых $\lambda \in \mathbb{R}^2$, $\nu \in \mathbb{R}$, то $\lambda = 0$. Поэтому $\mathcal{M}_1(x_0; \widehat{y}, d) = \emptyset$.

Пусть V – произвольная коническая окрестность вектора d . Рассмотрим луч

$$L = \{y = t(\gamma, 1, 0) : t > 0\},$$

где число $\gamma > 0$ выбрано так, что $L \subset V$.

Пусть x – произвольное решение уравнения

$$F(x) = y = \left(\frac{t\gamma}{2}, \frac{t}{2}, 0 \right), \quad t > 0.$$

Ясно, что $x_1 = \gamma t$. Поэтому

$$\gamma^2 t^2 - x_2^2 - x_3^2 = t > 0 \quad \Rightarrow \quad t(1 - \gamma^2 t) = -x_2^2 - x_3^2.$$

Однако при всех малых $t > 0$ это уравнение решения не имеет. Таким образом, в любой окрестности нуля найдутся точки $y \in V$, для которых уравнение $F(x) = y$ не имеет решений.

Теоремы 2.1–2.4 доказаны в предположении, что пространство X конечномерно. Возникает естественный вопрос: существенно ли это предположение? Следующий пример показывает, что каждая из теорем 2.1–2.4 для бесконечномерного X , вообще говоря, не выполняется.

ПРИМЕР 2.4. Пусть $X = L^2[0, 1]$. Определим линейные непрерывные операторы $A_1, A_2: X \rightarrow X$ по формулам $(A_1 x)(t) = tx(t)$, $(A_2 x)(t) = t^2 x(t)$, квадратичные формы $Q_i(x) = \langle A_i x, x \rangle$, $i = 1, 2$, и квадратичное отображение $Q = (Q_1, Q_2): X \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Покажем, что для отображения $F = Q$ в точке $x_0 = 0$ имеет место $\mathcal{M}_r(x_0; y, d) = \emptyset$ для любых d, y и $\mathcal{M}_r(x_0) = \emptyset$ для любого $r \geq 0$. Действительно, если для $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2) \neq 0$, $l \in X$ имеет место $(Ql)^*\lambda = 0$, то $(\lambda^1 t + \lambda^2 t^2)l(t) = 0$ для п.в. t и, значит, $l = 0$, что невозможно по определению.

Таким образом, для указанного отображения $F(x)$ в точке $x_0 = 0$ выполнены предположения всех теорем 2.1–2.4. Однако очевидно, что $Q_i(x) > 0$ для любого $x \neq 0$, $i = 1, 2$, и, значит, утверждения этих теорем не имеют места.

Тем не менее приведенные выше результаты обобщаются в случае бесконечномерного пространства X следующим образом. В линейном пространстве X введем *конечную топологию* (ее также называют *конечномерной топологией*), в которой множество считается открытым, если его пересечение с произвольным конечномерным подпространством открыто относительно этого подпространства (напомним, что произвольное конечномерное векторное пространство наделено единственной отделимой векторной топологией, которая здесь и подразумевается). Отображение F будем предполагать дважды непрерывно дифференцируемым в окрестности x_0 относительно конечной топологии. Последнее означает, что сужение F на произвольное конечномерное подпространство, содержащее x_0 , дважды непрерывно дифференцируемо в окрестности x_0 .

Положим

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_r(x_0) &:= \{ \lambda \in Y^* \mid \exists \Pi_r \subseteq X : \text{codim}(\Pi_r \cap \ker F'(x_0)) \leq r + 1, \\ &\quad |\lambda| = 1, F'(x_0)^*\lambda = 0, \langle \lambda, F''(x_0)[\xi, \xi] \rangle \geq 0 \ \forall \xi \in \Pi_r \}. \end{aligned}$$

Заметим, что $\Lambda_r(x_0) \subseteq \tilde{\Lambda}_r(x_0) \subseteq \Lambda_{r+1}(x_0)$.

Имеют место следующие аналоги теорем 2.2, 2.3.

ТЕОРЕМА 2.5. *Предположим, что $F'(x_0) = 0$ и*

$$\exists \hat{y} \in F''(x_0)(X) : \quad \langle \hat{y}, \lambda \rangle < 0 \quad \forall \lambda \in \tilde{\Lambda}_{k-2}(x_0). \quad (2.9)$$

Тогда существуют конечномерное подпространство $\tilde{X} \subseteq X$, содержащее x_0 , окрестность O точки y_0 и число $\text{const} > 0$ такие, что для всех $y \in O$ существует $x(y) \in \tilde{X}$ такое, что

$$F(x(y)) = y, \quad \|x(y) - x_0\|_{\tilde{X}} \leq \text{const} \sqrt{|y - y_0|}.$$

Здесь $\|\cdot\|_{\tilde{X}}$ означает норму в конечномерном подпространстве $\tilde{X}$.

ТЕОРЕМА 2.6. *Предположим, что $\tilde{\Lambda}_{k-2}(x_0) = \emptyset$. Тогда существуют конечномерное подпространство $\tilde{X} \subseteq X$, содержащее x_0 , окрестность O точки y_0 и число $\text{const} > 0$ такие, что для всех $y \in O$ существует $x(y) \in \tilde{X}$ такое, что*

$$F(x(y)) = y, \quad \|x(y) - x_0\|_{\tilde{X}} \leq \text{const} \left(|y - y_0| + \sqrt{|P(y - y_0)|} \right).$$

Аналогично, в бесконечномерном случае обобщается теорема 2.1 (мы не приводим здесь формулировку). Соответствующее обобщение теоремы 2.4 приводит к уже сформулированной во введении теореме 1.3.

§ 3. Основные леммы

В дальнейшем нам потребуется понятие верхнего топологического предела последовательности множеств $\{M_n\}$, который, напомним, состоит из всех предельных точек всевозможных последовательностей $\{x_n\}$ таких, что $x_n \in M_n$ для любого n , и обозначается через $\text{Ls}\{M_n\}$.

Положим $A := F'(x_0)$, $Q := F''(x_0)$. Везде далее, не ограничивая общности, предположим, что $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, и, если не оговорено противное, будем считать, что пространство X конечномерно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть заданы $d, \hat{y} \in Y$. Определим на Y многозначные отображения Ψ_1 и Ψ_2 по формулам

$$\Psi_1(y) = \mathcal{M}_r(x_0; y, y), \quad \Psi_2(y) = \mathcal{M}_r(x_0; y, d).$$

Тогда если $\hat{y} \notin \text{im } A$, то многозначное отображение Ψ_1 полунепрерывно сверху в точке $\hat{y}$, а если $\hat{y} \notin \text{im } A - \text{cone}\{d\}$, то Ψ_2 полунепрерывно сверху в точке $\hat{y}$.

Справедливость этого утверждения является простым следствием из [6, гл. 1, теорема 4.4].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть задана последовательность линейных операторов $B_i: X \rightarrow Y$, которая сходится к оператору B , и $\text{rank } B_i = \text{rank } B$ для любого i . Тогда если $a \in \text{im } B_i$ для любого i , то $a \in \text{im } B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, положим $m = \dim \text{im } B$. Выберем в пространстве X векторы x_j , $j = 1, \dots, m$, такие, что векторы Bx_j образуют базис в $\text{im } B$. Из сделанного предположения вытекает, что при всех больших i векторы $B_i x_j$, $j = 1, \dots, m$, также образуют базис в $\text{im } B_i$, причем в матрице, образованной векторами $B_i x_1, \dots, B_i x_m$, существует минор порядка m , модуль которого больше некоторого $\varepsilon > 0$ для всех больших i . Для каждого указанного i выберем $\alpha_{i,j}$ так, что $a = \sum_{j=1}^m \alpha_{i,j} B_i x_j$. Отсюда вытекает, что последовательности $\{\alpha_{i,j}\}$ ограничены, и, осуществляя теперь предельный переход при $i \rightarrow \infty$, получаем, что $a \in \text{im } B$. Предложение доказано.

ЛЕММА 3.1. Пусть заданы векторы $\hat{x} \in \ker A$, $d \in Y$, причем $d \notin \text{im } A$, и $\hat{y} = Q(\hat{x})$, и пусть для вектора $\hat{y}$ выполняется условие $\mathbf{A}_{k-2}(x_0; \hat{y}, d)$. Тогда в любой окрестности вектора $\hat{x}$ существует вектор $h \in \ker A$ такой, что

$$Q(h) \notin \text{im } A + \text{span}\{d\}, \quad (3.1)$$

$$\text{im } A + Q[h, \ker A] = Y. \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что в любой окрестности $\hat{x}$ существует вектор $h \in \ker A$ такой, что имеет место (3.1). Положим $L := \text{im } A + \text{span}\{d\}$. Покажем, что существует вектор $\xi \in \ker A$ такой, что $Q(\xi) \notin L$. Предположим противное, т. е. $Q(\ker A) \subseteq L$. В силу (2.1) имеем

$$L \neq Y \implies \exists \lambda \in L^\perp, \quad |\lambda| = 1.$$

Покажем, что тогда оба вектора λ и $-\lambda$ будут принадлежать множеству $\mathcal{M}_{k-2}(x_0; \hat{y}, d)$, что, в свою очередь, будет противоречить условию $\mathbf{A}_{k-2}(x_0; \hat{y}, d)$.

Действительно, по построению имеем $A^* \lambda = 0$, $\langle d, \lambda \rangle = 0$. Положим $l = \hat{x}$. Тогда $Q[l, \ker A] \subseteq L$, так как в противном случае существует вектор $\xi \in \ker A$

такой, что $Q[l, \xi] \notin L$, откуда при малых по модулю $\varepsilon \neq 0$ имеем $Q(l + \varepsilon\xi) \notin L$, что противоречит предположению $Q(\ker A) \subseteq L$.

Таким образом,

$$Q[l, \ker A] \subseteq L \implies (Ql)^*\lambda \in (\ker A)^\perp = \operatorname{im} A^* \implies \exists \nu \in Y^*: A^*\nu + (Ql)^*\lambda = 0. \quad (3.3)$$

Рассмотрим подпространство $\Pi_{k-1} := \ker A \cap \ker(PQl)$. По построению имеем $P^*\lambda = \lambda$. Отсюда в силу (3.3) имеем

$$\begin{aligned} \langle (PQl)^*\lambda, x \rangle &= \langle \lambda, PQ[l, x] \rangle = \langle \lambda, Q[l, x] \rangle \\ &= \langle (Ql)^*\lambda, x \rangle = -\langle A^*\nu, x \rangle = -\langle \nu, Ax \rangle = 0 \quad \forall x \in \ker A \end{aligned}$$

и, следовательно, $\operatorname{codim} \Pi_{k-1} \leq k-1$. В силу (2.1) коразмерность подпространства $\Pi_{k-2} := \ker A$ не превосходит $k-2$. Кроме того,

$$Q(\ker A) \subseteq L \implies \langle \lambda, Q(\xi) \rangle = 0 \quad \forall \xi \in \ker A = \Pi_{k-2}.$$

Таким образом, доказано, что построенные l, Π_{k-1}, Π_{k-2} отвечают векторам λ и $-\lambda$ в силу определения множества $\mathcal{M}_{k-2}(x_0; \hat{y}, d)$ и, значит, $\lambda, -\lambda \in \mathcal{M}_{k-2}(x_0; \hat{y}, d)$, однако это находится в противоречии с п. с) определения 2.1.

Итак, доказано, что существует вектор $\xi \in \ker A$ такой, что $Q(\xi) \notin L$, откуда вытекает, что $Q(\hat{x} + \varepsilon\xi) \notin L$ при всех малых по модулю $\varepsilon \neq 0$. Значит, в любой окрестности $\hat{x}$ существует вектор $h \in \ker A$ такой, что имеет место (3.1). Поэтому в силу предложения 3.1, при необходимости возмущая как угодно мало вектор $\hat{x}$, будем, не теряя общности, считать, что $\hat{y} \notin L$.

Осталось доказать, что в любой окрестности $\hat{x}$ существует вектор $h \in \ker A$, для которого справедливо (3.2). Сначала отметим очевидное вложение

$$\{\lambda \in \mathcal{M}_{k-2}(x_0; \hat{y}, \hat{y}) : \langle \lambda, d \rangle \leq 0\} \subseteq \mathcal{M}_{k-2}(x_0; \hat{y}, d). \quad (3.4)$$

Поскольку $\hat{y} \notin \operatorname{im} A$, по предложению 3.1 многозначное отображение $\Psi_1(y) = \mathcal{M}_{k-2}(x_0; y, y)$ полунепрерывно сверху в точке $\hat{y}$. Поэтому, учитывая, что пересечение двух полунепрерывных сверху отображений полунепрерывно сверху, из условия $\mathbf{A}_{k-2}(x_0; \hat{y}, d)$, используя включение (3.4), заключаем существование такой окрестности O вектора $\hat{x}$, что

$$\langle \lambda, Q(x) \rangle < 0 \quad \forall x \in O, \quad \forall \lambda \in \mathcal{M}_{k-2}(x_0; Q(x), Q(x)) : \langle \lambda, d \rangle \leq 0. \quad (3.5)$$

Учитывая, что $\hat{y} \notin \operatorname{im} A$, и уменьшая при необходимости окрестность O , будем также считать, что

$$PQ(x) \neq 0 \quad \forall x \in O. \quad (3.6)$$

Положим $Z(x) = PQ[x, \ker A]$. Целочисленная функция $\dim Z(x)$ переменной x на множестве $O \cap \ker A$ достигает максимума m в некоторой точке h . Покажем, что для указанного h выполняется (3.2).

Как известно, целочисленная функция $\dim Z(\cdot)$ полунепрерывна снизу. Поэтому в некоторой окрестности точки h эта функция постоянна и принимает значение m .

Предположим, что (3.2) нарушается. Тогда имеем $\operatorname{im} A + Q[h, \ker A] - \operatorname{cone}\{d\} \neq Y$. Поэтому по теореме об отделимости для выпуклых множеств

существует $\lambda \in Y^*$, $|\lambda| = 1$, такое, что

$$\begin{aligned} \langle \lambda, a_1 + a_2 - a_3 \rangle &\geq 0 \quad \forall a_1 \in \operatorname{im} A, \quad \forall a_2 \in Q[h, \ker A], \quad \forall a_3 \in \operatorname{cone}\{d\} \\ \implies \lambda &\in \operatorname{im} A^\perp, \quad \langle \lambda, d \rangle \leq 0, \quad (Qh)^* \lambda \in \operatorname{im} A^*. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$\exists \nu \in Y^*: \quad A^* \nu + (Qh)^* \lambda = 0 \implies \langle \lambda, PQ[h, x] \rangle = 0 \quad \forall x \in \ker A. \quad (3.7)$$

Положим

$$\Pi_{k-1} := \ker A \cap \ker PQh.$$

Тогда $\operatorname{codim} \Pi_{k-1} \leq k-1$, поскольку (3.2) нарушается. Докажем, что

$$\langle \lambda, Q(x) \rangle = 0 \quad \forall x \in \Pi_{k-1}. \quad (3.8)$$

Для этого достаточно показать, что

$$\langle \lambda, Q[c, x] \rangle = 0 \quad \forall c \in \ker A, \quad \forall x \in \Pi_{k-1}. \quad (3.9)$$

Действительно, пусть (3.9) нарушается. Тогда существуют векторы $c \in \ker A$, $\bar{x} \in \Pi_{k-1}$ такие, что $\langle \lambda, Q[c, \bar{x}] \rangle \neq 0$. Положим $a = PQ[c, \bar{x}]$. Для натуральных $i = 1, 2, \dots$ определим линейные операторы, действующие из пространства $\ker A$ в $\operatorname{im} A^\perp$, формулой $B_i := B + i^{-1}PQc$, где $B = PQh$. Тогда $a \in \operatorname{im} B_i$ для любого i , поскольку $\bar{x} \in \Pi_{k-1} \Rightarrow B\bar{x} = 0$, и, значит, $a = B_i(i\bar{x})$. В силу выбора вектора h имеет место $\operatorname{rank} B_i = \operatorname{rank} B = m$ для всех достаточно больших i . Поэтому из предложения 3.2 вытекает, что $a \in \operatorname{im} B$. С другой стороны, $a \notin \operatorname{im} B$ в силу (3.7) и того, что $\langle \lambda, a \rangle \neq 0$. Полученное противоречие доказывает (3.9), а значит, и (3.8).

Положим $\Pi_{k-2} = \operatorname{span}\{h\} + \Pi_{k-1}$. В силу (3.6) имеем

$$PQ(h) \neq 0 \implies h \notin \Pi_{k-1} \implies \operatorname{codim} \Pi_{k-2} \leq k-2.$$

Поскольку $h \in \ker A$, то $\Pi_{k-2} \subseteq \ker A$, а из (3.7) и (3.8) следует, что $\langle \lambda, Q(x) \rangle = 0$ для любого $x \in \Pi_{k-2}$.

По доказанному $l = h$ и ν отвечают построенному λ в силу определения множества $\mathcal{M}_{k-2}(x_0; Q(h), Q(h))$, значит, λ ему принадлежит. В то же время, как доказано выше, $\langle \lambda, d \rangle \leq 0$ и $\langle \lambda, Q(h) \rangle = 0$, что противоречит (3.5). Полученное противоречие доказывает (3.2). Лемма доказана.

Приведем необходимые условия строгой положительности квадратичной формы на пересечении квадрик. Пусть заданы квадратичная форма $Q_0: X \rightarrow \mathbb{R}$, симметричное билинейное отображение $Q: X \times X \rightarrow Y$ и $Q(x) = Q[x, x]$. Положим

$$\omega(y) = \inf_{x: Q(x)=y} Q_0(x),$$

причем этот инфимум может принимать и значение $-\infty$, а если $Q(x) \neq y$ для любого x , то полагаем $\omega(y) = +\infty$. Примем следующие соглашения об арифметических операциях с символом ∞ . Для $a \in \mathbb{R}$ положим

$$a \cdot \infty = \begin{cases} 0, & \text{если } a = 0, \\ \infty & \text{иначе.} \end{cases}$$

ЛЕММА 3.2. Пусть

$$Q_0(x) > 0 \quad \forall x \in X: Q(x) = 0, x \neq 0.$$

Тогда для любого $y \in Q(X)$, $y \neq 0$, существуют подпространство Π_{k-1} и вектор $\bar{\lambda} = (\lambda^0, \lambda) \in \mathbb{R} \times Y^*$, $\lambda^0 \geq 0$, $|\bar{\lambda}| = 1$, $l \in X$, $l \neq 0$, такие, что:

- a) $(\lambda^0 Q_0 + \lambda Q)l = 0$;
- b) $Q(l) = y$;
- c) $(\lambda^0 Q_0 + \lambda Q)(\xi) \geq 0$ для любого $\xi \in \Pi_{k-1}$;
- d) $\Pi_{k-1} \subseteq (\ker Q_0 l \cap \ker Ql) + \text{span}\{l\}$;
- e) $\lambda^0 \omega(y) + \langle \lambda, y \rangle = 0$;
- f) функция $\omega(y)$ ограничена снизу и полунепрерывна снизу на единичной сфере $S = \{y \in Y: |y| = 1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим задачу минимизации

$$Q_0(x) \rightarrow \min, \quad Q(x) = y. \quad (3.10)$$

Минимум в ней достигается. Действительно, если это не так, то существует последовательность $\{x_i\}$ такая, что $Q(x_i) = y$, $|x_i| \rightarrow \infty$, $Q_0(x_i) \leq \alpha$, где $\alpha = Q_0(\bar{x})$, а $\bar{x}: Q(\bar{x}) = y$. Приходим к противоречию, так как $x_i/|x_i| \rightarrow v$, $Q(v) = 0$, $Q_0(v) \leq 0$, $|v| = 1$.

Пусть l – решение задачи (3.10). Тогда верно b), и по теореме 4.1 из [6, с. 24] существуют число $\lambda^0 \geq 0$, вектор $\lambda \in Y^*$, $\bar{\lambda} = (\lambda^0, \lambda) \neq 0$, и подпространство $\Pi_k \subseteq \ker Ql \cap \ker Q_0 l$ (коразмерности не выше k), для которых выполняется a), и квадратичная форма $\lambda^0 Q_0 + \lambda Q$ неотрицательна на подпространстве Π_k . Заметим, что $l \notin \Pi_k$, так как $l \notin \ker Ql$ в силу b). Положим $\Pi_{k-1} := \Pi_k + \text{span}\{l\}$. Легко видеть, что $\text{codim } \Pi_{k-1} \leq k - 1$. Ясно также, что в силу a) верно c). Условие d) вытекает из построения.

Докажем e). Используя b) и то, что $Q_0(l) = \omega(y)$, имеем

$$\lambda^0 \omega(y) + \langle \lambda, y \rangle = \lambda^0 Q_0(l) + \langle \lambda, Q(l) \rangle = 0$$

в силу a). Условие e) доказано. Справедливость f) несложно выводится из того, что в силу оценки (4) из [10] существуют $c, \delta > 0$ такие, что $Q_0(x) + c|Q(x)| \geq \delta|x|^2$ для любого $x \in X$, и, следовательно, существует $c_1 > 0$ такое, что

$$\omega(y) = \min\{Q_0(x): Q(x) = y, |x| \leq c_1\} \quad \forall y \in Q(X).$$

При $y \notin Q(X)$ имеем $\omega(y) = +\infty$. Лемма доказана.

Следующий пример показывает, что в утверждении леммы 3.2 нельзя ослабить предположение относительно положительности формы Q_0 на пересечении квадратик $\{x: Q(x) = 0\}$, заменив его на неотрицательность.

ПРИМЕР 3.1. Пусть $n = 3$, $k = 2$. Рассмотрим квадратичное отображение

$$Q(x) = \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ x_1^2 - x_3^2 \end{bmatrix}$$

и задачу

$$x_2^2 \rightarrow \min, \quad Q(x) = 0.$$

Точка $x = 0$, очевидно, является минимумом, но не строгим. Покажем, что утверждение леммы 3.2 не выполняется. Возьмем $y = (1, -1)$. Поскольку $Q(l) = y$ (условие b)), то, как легко видеть, $l_j \neq 0$, $j = 1, 2, 3$. Поэтому векторы $Q_j l$, $j = 0, 1, 2$, будут линейно независимы. Однако это невозможно в силу условия а).

Приведем необходимые условия неотрицательности квадратичной формы на пересечении квадрик. Они выводятся из леммы 3.2 с помощью возмущения квадратичной формы Q_0 и последующего предельного перехода.

ЛЕММА 3.3. Пусть

$$Q_0(x) \geq 0 \quad \forall x \in X: Q(x) = 0.$$

Тогда для любого $y \in Q(X)$, $y \neq 0$, существуют подпространства $\Pi_k \subseteq \Pi_{k-1}$ и вектор $\bar{\lambda} = (\lambda^0, \lambda) \in \mathbb{R} \times Y^*$, $\lambda^0 \geq 0$, $|\bar{\lambda}| = 1$, $l \in X$, $l \neq 0$, такие, что:

- а) $(\lambda^0 Q_0 + \lambda Q)l = 0$;
- б) $Q(l) \in \text{cone}\{y\}$;
- в) $(\lambda^0 Q_0 + \lambda Q)(\xi) \geq 0$ для любого $\xi \in \Pi_{k-1}$;
- г) $\Pi_k \subseteq \ker Q_0 l \cap \ker Ql$;
- е) $\lambda^0 \omega(y) + \langle \lambda, y \rangle \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для натуральных i рассмотрим последовательность задач

$$Q_{0,i}(x) := Q_0(x) + i^{-1}|x|^2 \rightarrow \min, \quad Q(x) = 0.$$

Применяя к каждой из этих задач лемму 3.2, получим векторы $\bar{\lambda}_i = (\lambda_i^0, \lambda_i)$ и l_i , $|l_i| = 1$, удовлетворяющие условиям а)–е) леммы 3.2, в которых квадратичная форма Q_0 заменена на форму $Q_{0,i}$.

Нормируя векторы l_i и переходя к подпоследовательности, будем считать, что $\bar{\lambda}_i \rightarrow \bar{\lambda}$, $l_i/|l_i| \rightarrow l$, $|l| = 1$, при $i \rightarrow \infty$. Осуществляя предельный переход при $i \rightarrow \infty$, как и в аналогичных рассуждениях, приведенных выше, получаем, что для построенных $\bar{\lambda}$, l имеют место условия а)–д).

Докажем е). Зафиксируем $y \neq 0$ и возьмем произвольное h такое, что $Q(h) = y$. Тогда в силу условия е) леммы 3.2 имеем $\lambda_i^0 Q_{0,i}(h) + \langle \lambda_i, y \rangle \geq 0$, откуда при $i \rightarrow \infty$ получаем

$$\lambda^0 Q_0(h) + \langle \lambda, y \rangle \geq 0 \quad \forall h: Q(h) = y. \quad (3.11)$$

Возьмем минимизирующую последовательность $\{h_j\}$ такую, что $Q(h_j) = y$ для любого j , $Q_0(h_j) \rightarrow \omega(y)$. Если $\omega(y)$ конечно, то е) получается из соотношения (3.11) предельным переходом при $j \rightarrow \infty$. Пусть $\omega(y) = -\infty$. Тогда имеем $Q_0(h_j) \rightarrow -\infty$, а в силу (3.11) получаем

$$\langle \lambda, y \rangle \geq \lambda^0 (-Q_0(h_j)) \geq 0 \implies \lambda^0 = 0, \quad \langle \lambda, y \rangle \geq 0,$$

и, значит, условие е) выполнено, так как $\lambda^0 \omega(y) = 0 \cdot (-\infty) = 0$. Лемма доказана.

Пусть, как и раньше, $A := F'(x_0)$, $Q := F''(x_0)$.

ЛЕММА 3.4. Пусть выполнено условие

$$\exists y \in Q(\ker A): \quad \langle y, \lambda \rangle < 0 \quad \forall \lambda \in \mathcal{M}_{k-2}(x_0). \quad (3.12)$$

Тогда

$$PQ(\ker A) = \operatorname{im} A^\perp. \quad (3.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $A = 0$. Предположим, что (3.13) нарушается. Не ограничивая общности рассуждений, мы можем считать, что $(-1, 0, 0, \dots, 0) \notin Q(X)$, так как последнего всегда можно добиться с помощью линейного невырожденного преобразования пространства Y .

Тогда

$$Q_1(x) \geq 0 \quad \forall x: \quad Q_j(x) = 0, \quad j = 2, 3, \dots, k. \quad (3.14)$$

Применяя к указанным в (3.14) квадратичным формам лемму 3.3, получаем противоречие с предположением (2.3). Случай $A \neq 0$ сводится к рассмотренному следующим образом. Рассмотрим в качестве X пространство $\ker A$, в качестве Y пространство $(\operatorname{im} A)^\perp$, а в качестве Q отображение $H: \ker A \rightarrow (\operatorname{im} A)^\perp$, действующее по формуле $H(x) = PQ(x)$. Применив к H уже проведенные выше рассуждения, получим искомое утверждение. Лемма доказана.

Далее до конца этого параграфа будем считать, что X – произвольное векторное пространство, наделенное конечной топологией. В случае бесконечномерного пространства X имеет место следующее утверждение, аналогичное лемме 3.4.

ЛЕММА 3.5. Пусть выполнено условие

$$\exists y \in Q(\ker A): \quad \langle y, \lambda \rangle < 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda_{k-2}(x_0). \quad (3.15)$$

Тогда имеет место (3.13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Повторяя рассуждения от противного, приведенные при доказательстве леммы 3.4, получим (3.14). Поэтому в квадратичной задаче минимизации

$$Q_1(x) \rightarrow \min, \quad Q_j(x) = 0, \quad j = 2, 3, \dots, k,$$

точка $x = 0$ дает минимум. Применяя к этой задаче необходимые условия минимума из [11], приходим к противоречию и завершаем доказательство леммы.

ЛЕММА 3.6. Пусть выполнено условие (3.15) и $A = 0$. Тогда существует конечномерное подпространство $\tilde{X} \subseteq X$ такое, что для сужения Q на $\tilde{X}$ также выполнено условие (3.15).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим метод, использованный в [5]. В силу рассуждений, приведенных при доказательстве леммы 1 из [5], существует такое конечномерное подпространство $\bar{X} \subset X$, что если для квадратичного отображения $\bar{Q}$, являющегося сужением Q на $\bar{X}$, построить множество $\check{\Lambda}_{k-2} := \Lambda_{k-2}^{\bar{Q}}$, то конус $\operatorname{con} K$, где $K = \operatorname{cone} \check{\Lambda}_{k-2}$, будет острым (т.е. не будет содержать ненулевых подпространств). Поэтому конус, являющийся нормальным к K , имеет внутреннюю точку $\bar{y}$. Однако в силу (3.15) и леммы 3.5 квадратичное отображение Q сюръективно. Поэтому существует вектор $\bar{h} \in X$ такой, что $Q(\bar{h}) = \bar{y}$. Положим $\tilde{X} = \bar{X} + \operatorname{span}\{\bar{h}\}$. Очевидно, для отображения $\tilde{Q}$, являющегося сужением Q на $\tilde{X}$, выполняется (3.15).

§ 4. Доказательство теоремы об обратной функции

Докажем теоремы 2.1–2.6. Везде далее, не ограничивая общности, будем считать, что $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, и будем использовать введенные выше обозначения $A = F'(x_0)$, $Q = F''(x_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. В силу предложения 3.1 и леммы 3.1 существует $h \in \ker A$ такое, что при $\tilde{y} = Q(h)$ имеет место:

- 1) $\operatorname{im} A + Q[h, \ker A] = Y$;
- 2) выполнено условие $\mathbf{A}_{k-2}(x_0; \tilde{y}, d)$ и

$$\tilde{y} \notin \operatorname{im} A + \operatorname{span}\{d\}. \quad (4.1)$$

Положим $G(x, \alpha) = F(x) - \alpha^2 \tilde{y}$. В силу условия 1) отображение G и вектор $(h, 1)$ в точке $(x, \alpha) = (0, 0)$ удовлетворяют всем предположениям теоремы об обратной функции из [1]. Поэтому существуют δ_1, c_1 такие, что

$$\begin{aligned} \forall y \in B_{\delta_1}(0) \quad \exists (\hat{x}(y), \hat{\alpha}(y)): \\ G(\hat{x}(y), \hat{\alpha}(y)) = y, \quad |\hat{x}(y)| + |\hat{\alpha}(y)| \leq c_1 |y|^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Доказательство теоремы проведем от противного. А именно, предположим, что для любых $c > 0$ и $\delta > 0$ существует $\tilde{y}(c, \delta) \in \Upsilon_\delta(d)$ такое, что

$$F(x) \neq \tilde{y}(c, \delta) \quad \forall x: |x| \leq c |\tilde{y}(c, \delta)|^{1/2}. \quad (4.3)$$

Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$ и $\delta \in (0, \delta_1)$, причем ε^{-1} и δ^{-1} принимают лишь натуральные значения. Рассмотрим задачу минимизации

$$\varepsilon |x|^2 + \alpha^2 \rightarrow \min, \quad G(x, \alpha) = y_{\varepsilon, \delta} \quad (4.4)$$

относительно переменных $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Здесь $y_{\varepsilon, \delta} = \tilde{y}(\frac{c_1}{\sqrt{\varepsilon}}, \delta)$.

В силу (4.2) и вида минимизируемого функционала задача (4.4) имеет решение. Возьмем какое-нибудь ее решение $(x_{\varepsilon, \delta}, \alpha_{\varepsilon, \delta})$. Поскольку $y_{\varepsilon, \delta} \in B_\delta(0) \subset B_{\delta_1}(0)$, то в силу (4.2)

$$\exists \hat{x}_{\varepsilon, \delta}, \hat{\alpha}_{\varepsilon, \delta}: \quad G(\hat{x}_{\varepsilon, \delta}, \hat{\alpha}_{\varepsilon, \delta}) = y_{\varepsilon, \delta}, \quad |\hat{x}_{\varepsilon, \delta}| + |\hat{\alpha}_{\varepsilon, \delta}| \leq c_1 |y_{\varepsilon, \delta}|^{1/2}.$$

Из последних соотношений следует, что

$$\varepsilon |x_{\varepsilon, \delta}|^2 + \alpha_{\varepsilon, \delta}^2 \leq \varepsilon |\hat{x}_{\varepsilon, \delta}|^2 + \hat{\alpha}_{\varepsilon, \delta}^2 \leq c_1^2 |y_{\varepsilon, \delta}|,$$

откуда получаем

$$|x_{\varepsilon, \delta}| \leq \frac{c_1}{\sqrt{\varepsilon}} |y_{\varepsilon, \delta}|^{1/2}, \quad (4.5)$$

$$|\alpha_{\varepsilon, \delta}| \leq c_1 |y_{\varepsilon, \delta}|^{1/2}. \quad (4.6)$$

Поэтому в силу предположения (4.3) из (4.5) вытекает, что

$$\alpha_{\varepsilon, \delta} \neq 0. \quad (4.7)$$

Применим к задаче (4.4) в точке $(x_{\varepsilon,\delta}, \alpha_{\varepsilon,\delta})$ необходимые условия второго порядка из [11]. Существуют число $\lambda_{\varepsilon,\delta}^0 \geq 0$, вектор $\lambda_{\varepsilon,\delta} \in Y^*$ и подпространство $\bar{\Pi}_{\varepsilon,\delta} \subseteq X \times \mathbb{R}$ такие, что

$$\lambda_{\varepsilon,\delta}^0 + |\lambda_{\varepsilon,\delta}| = 1, \quad (4.8)$$

$$2\varepsilon\lambda_{\varepsilon,\delta}^0 x_{\varepsilon,\delta} + F'(x_{\varepsilon,\delta})^* \lambda_{\varepsilon,\delta} = 0, \quad (4.9)$$

$$\lambda_{\varepsilon,\delta}^0 \alpha_{\varepsilon,\delta} - \langle \lambda_{\varepsilon,\delta}, \tilde{y} \rangle \alpha_{\varepsilon,\delta} = 0, \quad (4.10)$$

$$2\lambda_{\varepsilon,\delta}^0 (\varepsilon|x|^2 + \alpha^2) + \langle \lambda_{\varepsilon,\delta}, F''(x_{\varepsilon,\delta})[x, x] - 2\alpha^2 \tilde{y} \rangle \geq 0 \quad \forall (x, \alpha) \in \bar{\Pi}_{\varepsilon,\delta}, \quad (4.11)$$

$$\bar{\Pi}_{\varepsilon,\delta} \subseteq \{(x, \alpha) : F'(x_{\varepsilon,\delta})x - 2\alpha\alpha_{\varepsilon,\delta}\tilde{y} = 0\}, \quad (4.12)$$

$$\text{codim } \bar{\Pi}_{\varepsilon,\delta} = \max\{k-1, \text{rank } G'(x_{\varepsilon,\delta}, \alpha_{\varepsilon,\delta})\}. \quad (4.13)$$

В силу (4.7) из (4.10) имеем

$$\lambda_{\varepsilon,\delta}^0 - \langle \lambda_{\varepsilon,\delta}, \tilde{y} \rangle = 0. \quad (4.14)$$

Отсюда, из (4.11), (4.12) и (4.7) получаем

$$2\lambda_{\varepsilon,\delta}^0 \varepsilon|x|^2 + \langle \lambda_{\varepsilon,\delta}, F''(x_{\varepsilon,\delta})[x, x] \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \Pi_{\varepsilon,\delta}, \quad (4.15)$$

где $\Pi_{\varepsilon,\delta} = \{x : F'(x_{\varepsilon,\delta})x \in \text{span}\{\tilde{y}\}\}$, если точка $x_{\varepsilon,\delta}$ нормальна для отображения F , и $\Pi_{\varepsilon,\delta} = \{x \in X : (x, 0) \in \bar{\Pi}_{\varepsilon,\delta}\}$ в противном случае. Тогда

$$\text{codim } \Pi_{\varepsilon,\delta} \leq k-1. \quad (4.16)$$

(Здесь codim – коразмерность уже в пространстве X .) Действительно, если $x_{\varepsilon,\delta}$ – нормальная точка отображения F , то (4.16) непосредственно вытекает из определения $\Pi_{\varepsilon,\delta}$ и того, что $\tilde{y} \neq 0$. Пусть точка $x_{\varepsilon,\delta}$ аномальна для отображения F . Если при этом $\text{codim } \bar{\Pi}_{\varepsilon,\delta} = k-1$, то неравенство (4.16) также выполняется. В противном случае в силу (4.13)

$$\text{codim } \bar{\Pi}_{\varepsilon,\delta} = k \implies \bar{\Pi}_{\varepsilon,\delta} = \ker G'(x_{\varepsilon,\delta}, \alpha_{\varepsilon,\delta}) \implies \Pi_{\varepsilon,\delta} = \ker F'(x_{\varepsilon,\delta}).$$

Однако точка $x_{\varepsilon,\delta}$ аномальна для отображения F и, значит, $\text{codim } \ker F'(x_{\varepsilon,\delta}) \leq k-1$. Условие (4.16) доказано.

Докажем, что

$$|F'(x_{\varepsilon,\delta})x| \leq 2\varepsilon |\langle x_{\varepsilon,\delta}, x \rangle| |\tilde{y}| \quad \forall x \in \Pi_{\varepsilon,\delta}. \quad (4.17)$$

Если $x_{\varepsilon,\delta}$ – аномальная точка для отображения F , то по построению имеем $\Pi_{\varepsilon,\delta} \subseteq \ker F'(x_{\varepsilon,\delta})$ и, значит, (4.17) выполнено. Предположим, что точка $x_{\varepsilon,\delta}$ нормальна для F . В этом случае, очевидно, $\lambda_{\varepsilon,\delta}^0 > 0$.

Пусть $x \in \Pi_{\varepsilon,\delta}$. Тогда существует $\alpha \in \mathbb{R}$ такое, что

$$F'(x_{\varepsilon,\delta})x = \alpha\tilde{y}. \quad (4.18)$$

Умножая обе части равенства (4.18) на $\lambda_{\varepsilon,\delta}$, в силу (4.9), (4.14) и того, что $\lambda_{\varepsilon,\delta}^0 > 0$, имеем $\alpha = -2\varepsilon \langle x_{\varepsilon,\delta}, x \rangle$. Отсюда и из (4.18) вытекает (4.17).

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. В силу оценок (4.5), (4.6) существуют такие x_ε , α_ε , что после перехода к подпоследовательности выполняется

$$x_\varepsilon = \lim_{\delta \rightarrow 0} x_{\varepsilon,\delta} \sigma_{\varepsilon,\delta}^{-1}, \quad \alpha_\varepsilon = \lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha_{\varepsilon,\delta} \sigma_{\varepsilon,\delta}^{-1},$$

где $\sigma_{\varepsilon,\delta} = \sqrt{|y_{\varepsilon,\delta}|}$.

Из (4.5), (4.6) имеем $|x_\varepsilon| \leq c_1/\sqrt{\varepsilon}$, $|\alpha_\varepsilon| \leq c_1$. Согласно [6, теорема 4.4] в X существует такое линейное подпространство $\Pi_{k-1}(\varepsilon)$, что

$$\text{codim } \Pi_{k-1}(\varepsilon) = k - 1, \quad \Pi_{k-1}(\varepsilon) \subseteq \lim_{\delta \rightarrow 0} \Pi_{\varepsilon, \delta}.$$

По построению $y_{\varepsilon, \delta} \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$, откуда в силу (4.5) имеем $x_{\varepsilon, \delta} \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$. Кроме того, по построению $\Pi_{\varepsilon, \delta} \subseteq \{x: F'(x_{\varepsilon, \delta})x \in \text{span}\{\tilde{y}\}\}$, откуда в силу определения верхнего топологического предела вытекает, что $Ax \in \text{span}\{\tilde{y}\}$ для любого $x \in \Pi_{k-1}(\varepsilon)$. Отсюда, поскольку $\tilde{y} \notin \text{im } A$ (условие (4.1)), получаем, что $\Pi_{k-1}(\varepsilon) \subseteq \ker A$.

По построению получаем

$$F(x_{\varepsilon, \delta}) - \alpha_{\varepsilon, \delta}^2 \tilde{y} = y_{\varepsilon, \delta} \implies Ax_{\varepsilon, \delta} + \frac{1}{2}Q(x_{\varepsilon, \delta}) + o(|x_{\varepsilon, \delta}|)^2 = \alpha_{\varepsilon, \delta}^2 \tilde{y} + y_{\varepsilon, \delta}. \quad (4.19)$$

Деля полученное справа равенство в (4.19) на $\sigma_{\varepsilon, \delta}$, переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$ и учитывая оценку (4.6), в силу которой $\alpha_{\varepsilon, \delta}^2/\sigma_{\varepsilon, \delta} \rightarrow 0$, имеем

$$x_\varepsilon \in \ker A. \quad (4.20)$$

В силу (4.8) и компактности единичного шара в $\mathbb{R}^{k+1}$ существуют такие $\lambda_\varepsilon^0 \geq 0$, $\lambda_\varepsilon \in Y^*$, что после перехода к подпоследовательности имеет место сходимость $\lambda_{\varepsilon, \delta}^0 \rightarrow \lambda_\varepsilon^0$, $\lambda_{\varepsilon, \delta} \rightarrow \lambda_\varepsilon$ при $\delta \rightarrow 0$.

Переходя к пределу в (4.9), получим $A^*\lambda_\varepsilon = 0$. Деля равенство (4.9) на $\sigma_{\varepsilon, \delta}$ и переходя в нем, а также в (4.8), (4.14) и (4.15) к пределу при $\delta \rightarrow 0$ (используя определение верхнего топологического предела), имеем

$$\lambda_\varepsilon^0 + |\lambda_\varepsilon| = 1, \quad (4.21)$$

$$2\varepsilon\lambda_\varepsilon^0 x_\varepsilon + (Qx_\varepsilon)^*\lambda_\varepsilon \in \text{im } A^*, \quad (4.22)$$

$$\lambda_\varepsilon^0 - \langle \lambda_\varepsilon, \tilde{y} \rangle = 0, \quad (4.23)$$

$$2\lambda_\varepsilon^0 \varepsilon |x|^2 + \langle \lambda_\varepsilon, Q(x) \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \Pi_{k-1}(\varepsilon). \quad (4.24)$$

Деля равенство (4.19) на $\sigma_{\varepsilon, \delta}^2$ и используя определение множества $\Upsilon_\delta(d)$, после перехода к пределу получим

$$\frac{1}{2}Q(x_\varepsilon) \in \alpha_\varepsilon^2 \tilde{y} + \frac{d}{|d|} + \text{im } A. \quad (4.25)$$

Докажем, что

$$x_\varepsilon \notin \Pi_{k-1}(\varepsilon). \quad (4.26)$$

Для этого вначале покажем, что

$$Q[x_\varepsilon, x] \in \text{span}\{\tilde{y}\} + \text{im } A \quad \forall x \in \Pi_{k-1}(\varepsilon). \quad (4.27)$$

Действительно, пусть $\bar{x} \in \Pi_{k-1}(\varepsilon)$. Тогда в силу определения верхнего топологического предела существуют такие $\bar{x}_\delta \in \Pi_{\varepsilon, \delta}$, что после перехода к подпоследовательности имеем $\bar{x}_\delta \rightarrow \bar{x}$ при $\delta \rightarrow 0$. По определению подпространства $\Pi_{\varepsilon, \delta}$ имеем $F'(x_{\varepsilon, \delta})\bar{x}_\delta \in \text{span}\{\tilde{y}\}$. Однако $F'(x_{\varepsilon, \delta}) = A + Qx_{\varepsilon, \delta} + o(|x_{\varepsilon, \delta}|)$. Подставляя это равенство в предыдущее включение и деля затем на $\sigma_{\varepsilon, \delta}$, учитывая,

что $x_{\varepsilon, \delta} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, имеем $Q[x_\varepsilon, \bar{x}] \in \text{span}\{\tilde{y}\} + \text{im } A$. Соотношение (4.27) доказано.

Предположим, что (4.26) нарушается. Тогда в силу (4.27) выполнено $Q(x_\varepsilon) \in \text{span}\{\tilde{y}\} + \text{im } A$. Отсюда в силу (4.25), используя условие (4.1), получим, что $d \in \text{im } A$, а это противоречит предположению теоремы. Итак, (4.26) доказано.

Положим $\Pi_{k-2}(\varepsilon) = \text{span}\{x_\varepsilon, \Pi_{k-1}(\varepsilon)\}$. В силу (4.20) имеем $\Pi_{k-2}(\varepsilon) \subseteq \ker A$, а в силу (4.26)

$$\text{codim } \Pi_{k-2}(\varepsilon) = k - 2.$$

Далее, подставляя в (4.17) приведенное выше представление для $F'(x_{\varepsilon, \delta})$ и деля на $\sigma_{\varepsilon, \delta}$, используя определение верхнего топологического предела и то, что $|Py| \leq |y|$ для любого y , при $\delta \rightarrow 0$ имеем

$$|PQ[x_\varepsilon, x]| \leq 2\varepsilon |\langle x_\varepsilon, x \rangle| |\tilde{y}| \quad \forall x \in \Pi_{k-1}(\varepsilon). \quad (4.28)$$

Умножая скалярно (4.22) на x_ε и используя (4.20), получим

$$2\lambda_\varepsilon^0 \varepsilon |x_\varepsilon|^2 + \langle \lambda_\varepsilon, Q(x_\varepsilon) \rangle = 0. \quad (4.29)$$

Из (4.22) и того, что $\Pi_{k-1}(\varepsilon) \subseteq \ker A$, получаем

$$2\varepsilon \lambda_\varepsilon^0 \langle x_\varepsilon, x \rangle + \langle \lambda_\varepsilon, Q[x_\varepsilon, x] \rangle = 0 \quad \forall x \in \Pi_{k-1}(\varepsilon).$$

Из последних двух равенств в силу (4.24) вытекает неравенство

$$2\lambda_\varepsilon^0 \varepsilon |x|^2 + \langle \lambda_\varepsilon, Q(x) \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \Pi_{k-2}(\varepsilon). \quad (4.30)$$

Далее, скалярно умножая обе части (4.25) на λ_ε , с учетом (4.23), (4.29) и того, что $A^* \lambda_\varepsilon = 0$, получим

$$|d|^{-1} \langle \lambda_\varepsilon, d \rangle = -\lambda_\varepsilon^0 \varepsilon |x_\varepsilon|^2 - \alpha_\varepsilon^2 \langle \lambda_\varepsilon, \tilde{y} \rangle \leq 0. \quad (4.31)$$

Найдем вектор l такой, что после перехода к подпоследовательности имеет место

$$l = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon |x_\varepsilon|^{-1} \implies |l| = 1.$$

В силу [6, теорема 4.4] существуют такие подпространства Π_{k-1} , Π_{k-2} размерности $k-1$ и $k-2$ соответственно, что

$$\Pi_{k-1} \subseteq \text{Ls}_{\varepsilon \rightarrow 0} \Pi_{k-1}(\varepsilon), \quad \Pi_{k-2} \subseteq \text{Ls}_{\varepsilon \rightarrow 0} \Pi_{k-2}(\varepsilon).$$

Деля равенства (4.22) и (4.25) на $|x_\varepsilon|$ и $|x_\varepsilon|^2$ соответственно и переходя в них, а также в соотношениях (4.21), (4.23), (4.30), (4.31) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, найдем число $\lambda^0 \geq 0$ и векторы $\lambda, \nu \in Y^*$ такие, что

$$\lambda^0 + |\lambda| = 1, \quad (4.32)$$

$$\langle \lambda, \tilde{y} \rangle = \lambda^0 \geq 0, \quad (4.33)$$

$$A^* \lambda = 0, \quad \langle \lambda, d \rangle \leq 0, \quad A^* \nu + (Ql)^* \lambda = 0,$$

$$\langle \lambda, Q(x) \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \Pi_{k-2},$$

$$Q(l) \in \text{cone}\{\tilde{y}\} + \text{cone}\{d\} + \text{im } A.$$

Деля обе части (4.28) на $|x_\varepsilon|$, в силу определения верхнего топологического предела имеем при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\Pi_{k-1} \subseteq \ker PQL.$$

Ясно также, что

$$\Pi_{k-1} \subseteq \Pi_{k-2} \subseteq \ker A.$$

Из (4.32) и (4.33) следует, что $\lambda \neq 0$. Поэтому в силу полученных соотношений имеем $\lambda|\lambda|^{-1} \in \mathcal{M}_{k-2}(x_0; \tilde{y}, d)$. В то же время в силу (4.33) имеем $\langle \lambda, \tilde{y} \rangle \geq 0$, что противоречит п. с) определения 2.1 условия $\mathbf{A}_{k-2}(x_0; \tilde{y}, d)$. Это противоречие завершает рассмотрения. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. По лемме 3.4 в силу (2.3) имеет место равенство (3.13). Кроме того, очевидно,

$$\mathcal{M}_{k-2}(x_0; \hat{y}, d) \subseteq \mathcal{M}_{k-2}(x_0) \quad \forall d \in Y. \quad (4.34)$$

Поэтому в силу (2.3) условие $\mathbf{A}_{k-2}(x_0; \hat{y}, d)$ выполняется при любом $d \in S$, для которого векторы d и $\hat{y}$ неколлинеарны. Здесь S – единичная сфера в Y . Если же векторы $\hat{y}$ и d коллинеарны, то в силу предложения 3.1 и (4.34), (3.13) существует как угодно близкий к $\hat{y}$ вектор y такой, что выполнено условие $\mathbf{A}_{k-2}(x_0; y, d)$. Тогда поскольку $A = 0$, то $d \notin \text{im } A$ для любого $d \in S$ и, значит, для каждого $d \in S$ выполнены предположения теоремы 2.1. Из этой теоремы вытекает, что для любого $d \in S$ существуют $\text{const}, \delta > 0$ такие, что для любого $y \in \Upsilon_\delta(d)$ существует $x(y)$, для которого выполняется (2.2). Однако каждое из множеств $\Upsilon_\delta(d)$ представляет собой пересечение истинной окрестности нуля с конической окрестностью d . Взяв все такие конические окрестности вектора $d \in S$, покроем сферу S . В силу ее компактности, выбирая из полученного покрытия конечное подпокрытие, стандартным образом найдем искомые $\text{const} > 0$ и окрестность $O = B_\delta(y_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.3. Не теряя общности, будем считать, что $A \neq 0$, так как при $A = 0$ теорема вытекает из уже доказанной теоремы 2.2.

Для $d, w \in Y$ положим

$$M_\delta(w, d) = B_\delta(0) \cap (\text{cone } B_\delta(d)) \cap (\text{im } A + \text{cone } B_\delta(w)).$$

Нашей ближайшей целью будет доказательство того, что для любых ненулевых $d \in \text{im } A$ и $w \in \text{im } A^\perp$ существуют положительные числа δ и const такие, что для всех $y \in M_\delta(w, d)$ существует $x(y)$, удовлетворяющее оценке (2.4).

Итак, пусть заданы ненулевые векторы $d \in \text{im } A$, $w \in \text{im } A^\perp$. Рассмотрим квадратичное отображение $PQ: \ker A \rightarrow (\text{im } A)^\perp$. По лемме 3.4 оно сюръективно, т.е. $PQ(\ker A) = (\text{im } A)^\perp$. Поэтому, применяя к указанному отображению теорему Сарда и учитывая (2.1), получаем существование последовательности векторов $h_i \in \ker A$ таких, что $w_i := PQ(h_i) \rightarrow w$, и для всех i имеем

$$\text{im } A + Q[h_i, \ker A] = Y, \quad (4.35)$$

$$w_i \notin \text{span}\{w\}. \quad (4.36)$$

Доказательство приведенного выше утверждения проведем от противного. А именно, предположим, что для любых $c > 0$ и $\delta > 0$ существует $\tilde{y}(c, \delta) \in M_\delta(w, d)$ такое, что

$$\forall x: |x| \leq c(|\tilde{y}(c, \delta)| + |P\tilde{y}(c, \delta)|^{1/2}) \implies F(x) \neq \tilde{y}(c, \delta). \quad (4.37)$$

Зафиксируем произвольный номер i и положим $G(x, \alpha) = F(x) - \alpha^2 w_i$. В силу (4.35) отображение G и вектор $(h_i, 1)$ в точке $(x, \alpha) = (0, 0)$ удовлетворяют всем предположениям теоремы об обратной функции из [1]. Поэтому

$$\begin{aligned} \exists \delta_1 > 0, \quad c_1 > 0: \quad \forall y \in B_{\delta_1}(0) \quad \exists (\hat{x}(y), \hat{\alpha}(y)): \\ G(\hat{x}(y), \hat{\alpha}(y)) = y, \quad |\hat{x}(y)| + |\hat{\alpha}(y)| \leq c_1(|y| + |Py|^{1/2}). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$ и $\delta \in (0, \delta_1)$, причем ε^{-1} и δ^{-1} принимают лишь натуральные значения. Рассмотрим задачу

$$\varepsilon|x|^2 + \alpha^2 \rightarrow \min, \quad G(x, \alpha) = y_{\varepsilon, \delta}, \quad (4.39)$$

где $y_{\varepsilon, \delta} = \tilde{y}(\frac{c_1}{\sqrt{\varepsilon}}, \delta)$.

В силу (4.38) и вида минимизируемого функционала заключаем, что задача (4.39) имеет решение. Возьмем какое-нибудь ее решение $(x_{\varepsilon, \delta}, \alpha_{\varepsilon, \delta})$. Далее, поскольку $y_{\varepsilon, \delta} \in B_\delta(0) \subset B_{\delta_1}(0)$, в силу (4.38) имеем

$$\begin{aligned} \exists \hat{x}_{\varepsilon, \delta}, \hat{\alpha}_{\varepsilon, \delta}: \quad G(\hat{x}_{\varepsilon, \delta}, \hat{\alpha}_{\varepsilon, \delta}) = y_{\varepsilon, \delta}, \quad |\hat{x}_{\varepsilon, \delta}| + |\hat{\alpha}_{\varepsilon, \delta}| \leq c_1(|y_{\varepsilon, \delta}| + |Py_{\varepsilon, \delta}|^{1/2}) \\ \Rightarrow \quad \varepsilon|x_{\varepsilon, \delta}|^2 + \alpha_{\varepsilon, \delta}^2 \leq \varepsilon|\hat{x}_{\varepsilon, \delta}|^2 + \hat{\alpha}_{\varepsilon, \delta}^2 \leq c_1^2(|y_{\varepsilon, \delta}| + |Py_{\varepsilon, \delta}|^{1/2})^2. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$|x_{\varepsilon, \delta}| \leq \frac{c_1}{\sqrt{\varepsilon}}(|y_{\varepsilon, \delta}| + |Py_{\varepsilon, \delta}|^{1/2}), \quad (4.40)$$

$$|\alpha_{\varepsilon, \delta}| \leq c_1(|y_{\varepsilon, \delta}| + |Py_{\varepsilon, \delta}|^{1/2}). \quad (4.41)$$

Поэтому в силу предположения (4.37) из (4.40) вытекает, что

$$\alpha_{\varepsilon, \delta} \neq 0. \quad (4.42)$$

Применим к задаче (4.39) в точке $(x_{\varepsilon, \delta}, \alpha_{\varepsilon, \delta})$ необходимые условия второго порядка из [11]. Существуют число $\lambda_{\varepsilon, \delta}^0 \geq 0$, вектор $\lambda_{\varepsilon, \delta} \in Y^*$ и подпространство $\bar{\Pi}_{\varepsilon, \delta} \subseteq X \times \mathbb{R}$ (которые также зависят от номера i , но эту зависимость для сокращения записи отмечать не будем) такие, что

$$\lambda_{\varepsilon, \delta}^0 + |\lambda_{\varepsilon, \delta}| = 1, \quad (4.43)$$

$$2\varepsilon\lambda_{\varepsilon, \delta}^0 x_{\varepsilon, \delta} + F'(x_{\varepsilon, \delta})^* \lambda_{\varepsilon, \delta} = 0, \quad (4.44)$$

$$\lambda_{\varepsilon, \delta}^0 \alpha_{\varepsilon, \delta} - \langle \lambda_{\varepsilon, \delta}, w_i \rangle \alpha_{\varepsilon, \delta} = 0, \quad (4.45)$$

$$2\lambda_{\varepsilon, \delta}^0(\varepsilon|x|^2 + \alpha^2) + \langle \lambda_{\varepsilon, \delta}, F''(x_{\varepsilon, \delta})[x, x] - 2\alpha^2 w_i \rangle \geq 0 \quad \forall (x, \alpha) \in \bar{\Pi}_{\varepsilon, \delta}, \quad (4.46)$$

$$\bar{\Pi}_{\varepsilon, \delta} \subseteq \{(x, \alpha): F'(x_{\varepsilon, \delta})x - 2\alpha\alpha_{\varepsilon, \delta}w_i = 0\}, \quad (4.47)$$

$$\text{codim } \bar{\Pi}_{\varepsilon, \delta} = \max\{k-1, \text{rank } G'(x_{\varepsilon, \delta}, \alpha_{\varepsilon, \delta})\}. \quad (4.48)$$

В силу (4.42) из (4.45) имеем

$$\lambda_{\varepsilon, \delta}^0 - \langle \lambda_{\varepsilon, \delta}, w_i \rangle = 0. \quad (4.49)$$

Отсюда, из (4.46), (4.47) и (4.42) получаем

$$2\lambda_{\varepsilon, \delta}^0 \varepsilon|x|^2 + \langle \lambda_{\varepsilon, \delta}, F''(x_{\varepsilon, \delta})[x, x] \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \Pi_{\varepsilon, \delta}, \quad (4.50)$$

где $\Pi_{\varepsilon,\delta} = \{x: F'(x_{\varepsilon,\delta})x \in \text{span}\{w_i\}\}$, если точка $x_{\varepsilon,\delta}$ нормальна для отображения F , и $\Pi_{\varepsilon,\delta} = \{x \in X: (x, 0) \in \bar{\Pi}_{\varepsilon,\delta}\}$ в противном случае. Покажем, что тогда

$$\text{codim } \Pi_{\varepsilon,\delta} \leq k - 1. \quad (4.51)$$

(Здесь codim – коразмерность уже в пространстве X .) Действительно, если $x_{\varepsilon,\delta}$ – нормальная точка отображения F , то (4.51) непосредственно вытекает из определения $\Pi_{\varepsilon,\delta}$ и того, что $w_i \neq 0$. Пусть точка $x_{\varepsilon,\delta}$ аномальна для отображения F . Если при этом $\text{codim } \bar{\Pi}_{\varepsilon,\delta} = k - 1$, то неравенство (4.51) также выполняется. В противном случае в силу (4.48) имеем

$$\text{codim } \bar{\Pi}_{\varepsilon,\delta} = k \implies \bar{\Pi}_{\varepsilon,\delta} = \ker G'(x_{\varepsilon,\delta}, \alpha_{\varepsilon,\delta}) \implies \Pi_{\varepsilon,\delta} = \ker F'(x_{\varepsilon,\delta}).$$

Однако точка $x_{\varepsilon,\delta}$ аномальна для F и, значит, $\text{codim } \ker F'(x_{\varepsilon,\delta}) \leq k - 1$. Условие (4.51) доказано.

Докажем, что

$$|F'(x_{\varepsilon,\delta})x| \leq 2\varepsilon |\langle x_{\varepsilon,\delta}, x \rangle| |w_i| \quad \forall x \in \Pi_{\varepsilon,\delta}. \quad (4.52)$$

Если $x_{\varepsilon,\delta}$ – аномальная точка для отображения F , то по построению имеем $\Pi_{\varepsilon,\delta} \subseteq \ker F'(x_{\varepsilon,\delta})$ и, значит, (4.52) выполнено. Предположим, что точка $x_{\varepsilon,\delta}$ нормальна для F . В этом случае, очевидно, $\lambda_{\varepsilon,\delta}^0 > 0$.

Пусть $x \in \Pi_{\varepsilon,\delta}$. Тогда существует $\alpha \in \mathbb{R}$ такое, что

$$F'(x_{\varepsilon,\delta})x = \alpha w_i. \quad (4.53)$$

Умножая обе части равенства (4.53) на $\lambda_{\varepsilon,\delta}$, в силу (4.44), (4.49) и того, что $\lambda_{\varepsilon,\delta}^0 > 0$, имеем $\alpha = -2\varepsilon \langle x_{\varepsilon,\delta}, x \rangle$. Отсюда и из (4.53) вытекает (4.52).

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. В силу оценок (4.40), (4.41) существуют такие x_ε , α_ε , что после перехода к подпоследовательности выполняется

$$x_\varepsilon = \lim_{\delta \rightarrow 0} x_{\varepsilon,\delta} \sigma_{\varepsilon,\delta}^{-1}, \quad \alpha_\varepsilon = \lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha_{\varepsilon,\delta} \sigma_{\varepsilon,\delta}^{-1},$$

где $\sigma_{\varepsilon,\delta} = |y_{\varepsilon,\delta}| + |Py_{\varepsilon,\delta}|^{1/2}$.

Из (4.40), (4.41) имеем $|x_\varepsilon| \leq c_1/\sqrt{\varepsilon}$, $|\alpha_\varepsilon| \leq c_1$.

Согласно [6, теорема 4.4] в X существует такое линейное подпространство $\Pi_{k-1}(\varepsilon)$, что

$$\text{codim } \Pi_{k-1}(\varepsilon) = k - 1, \quad \Pi_{k-1}(\varepsilon) \subseteq \text{Ls}_{\delta \rightarrow 0} \Pi_{\varepsilon,\delta}.$$

По построению $y_{\varepsilon,\delta} \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$, откуда в силу (4.40) имеем $x_{\varepsilon,\delta} \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$. Кроме того, по построению $\Pi_{\varepsilon,\delta} \subseteq \{x: F'(x_{\varepsilon,\delta}) \in \text{span}\{w_i\}\}$, откуда в силу определения верхнего топологического предела вытекает, что $Ax \in \text{span}\{w_i\}$ для любого $x \in \Pi_{k-1}(\varepsilon)$. Отсюда, поскольку $w_i \notin \text{im } A$, получаем

$$\Pi_{k-1}(\varepsilon) \subseteq \ker A. \quad (4.54)$$

В силу (4.43) и компактности единичного шара в $\mathbb{R}^{k+1}$ существуют такие $\lambda_\varepsilon^0 \geq 0$, $\lambda_\varepsilon \in Y^*$, что после перехода к подпоследовательности имеет место сходимость $\lambda_{\varepsilon,\delta}^0 \rightarrow \lambda_\varepsilon^0$, $\lambda_{\varepsilon,\delta} \rightarrow \lambda_\varepsilon$ при $\delta \rightarrow 0$.

Переходя к пределу в (4.44), получим $A^* \lambda_\varepsilon = 0$. Деля равенство (4.44) на $\sigma_{\varepsilon, \delta}$ и переходя в нем, а также в (4.43), (4.49) и (4.50) к пределу при $\delta \rightarrow 0$ (используя определение верхнего топологического предела), имеем

$$\lambda_\varepsilon^0 + |\lambda_\varepsilon| = 1, \quad (4.55)$$

$$2\varepsilon \lambda_\varepsilon^0 x_\varepsilon + (Qx_\varepsilon)^* \lambda_\varepsilon \in \text{im } A^*, \quad (4.56)$$

$$\lambda_\varepsilon^0 - \langle \lambda_\varepsilon, w_i \rangle = 0, \quad (4.57)$$

$$2\lambda_\varepsilon^0 \varepsilon |x|^2 + \langle \lambda_\varepsilon, Q(x) \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \Pi_{k-1}(\varepsilon). \quad (4.58)$$

По построению

$$F(x_{\varepsilon, \delta}) - \alpha_{\varepsilon, \delta}^2 w_i = y_{\varepsilon, \delta} \implies Ax_{\varepsilon, \delta} + \frac{1}{2} Q(x_{\varepsilon, \delta}) + o(|x_{\varepsilon, \delta}|)^2 = \alpha_{\varepsilon, \delta}^2 w_i + y_{\varepsilon, \delta}. \quad (4.59)$$

Очевидно, что при $Py_{\varepsilon, \delta} \neq 0$ имеет место

$$\sigma_{\varepsilon, \delta}^{-2} Py_{\varepsilon, \delta} = \frac{Py_{\varepsilon, \delta}}{|Py_{\varepsilon, \delta}|} \left(\frac{|y_{\varepsilon, \delta}|}{\sqrt{|Py_{\varepsilon, \delta}|}} + 1 \right)^{-2}, \quad \frac{Py_{\varepsilon, \delta}}{|Py_{\varepsilon, \delta}|} \rightarrow w, \quad \delta \rightarrow 0.$$

Поэтому, деля равенство, выписанное в правой части (4.59), на $\sigma_{\varepsilon, \delta}^2$ и используя определение множества $M_\delta(w, d)$, заключаем, что существует $\kappa_\varepsilon \in [0, 1]$, для которого после перехода к пределу при $\delta \rightarrow 0$ имеет место

$$\frac{1}{2} Q(x_\varepsilon) \in \alpha_\varepsilon^2 w_i + \kappa_\varepsilon w |w|^{-1} + \text{im } A, \quad (4.60)$$

причем $\kappa_\varepsilon = 0$ тогда и только тогда, когда существует подпоследовательность такая, что

$$\text{или } |Py_{\varepsilon, \delta}| = 0, \quad \text{или } \frac{|y_{\varepsilon, \delta}|}{\sqrt{|Py_{\varepsilon, \delta}|}} \rightarrow \infty, \quad \delta \rightarrow 0. \quad (4.61)$$

Докажем, что

$$x_\varepsilon \notin \Pi_{k-1}(\varepsilon). \quad (4.62)$$

Для этого сначала покажем, что

$$Q[x_\varepsilon, x] \in \text{span}\{w_i\} + \text{im } A \quad \forall x \in \Pi_{k-1}(\varepsilon). \quad (4.63)$$

Действительно, пусть $\bar{x} \in \Pi_{k-1}(\varepsilon)$. Тогда в силу определения верхнего топологического предела существуют такие $\bar{x}_\delta \in \Pi_{\varepsilon, \delta}$, что после перехода к подпоследовательности имеем $\bar{x}_\delta \rightarrow \bar{x}$ при $\delta \rightarrow 0$. По определению подпространства $\Pi_{\varepsilon, \delta}$ имеем $F'(x_{\varepsilon, \delta}) \bar{x}_\delta \in \text{span}\{w_i\}$. Однако $F'(x_{\varepsilon, \delta}) = A + Qx_{\varepsilon, \delta} + o(|x_{\varepsilon, \delta}|)$. Подставляя это равенство в предыдущее включение и деля затем на $\sigma_{\varepsilon, \delta}$, кроме того, учитывая, что $x_{\varepsilon, \delta} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, имеем $Q[x_\varepsilon, \bar{x}] \in \text{span}\{w_i\} + \text{im } A$. Соотношение (4.63) доказано.

Вернемся к доказательству (4.62). Пусть сначала $\kappa_\varepsilon > 0$. Предположим, что (4.62) нарушается. Тогда в силу (4.63) имеем

$$Q(x_\varepsilon) \in \text{span}\{w_i\} + \text{im } A. \quad (4.64)$$

Отсюда в силу (4.60), используя то, что $w \in (\text{im } A)^\perp$, $w_i = PQ(h_i) \Rightarrow w_i \in (\text{im } A)^\perp$, и условие (4.36), получаем противоречие. Таким образом, при $\kappa_\varepsilon > 0$ условие (4.62) доказано.

Пусть теперь $\kappa_\varepsilon = 0$. Докажем, что в этом случае $x_\varepsilon \notin \ker A$. Действительно, из (4.61) несложно вытекает, что $|y_{\varepsilon,\delta}| \sigma_{\varepsilon,\delta}^{-1} \rightarrow 1$, откуда в силу определения множества $M_\delta(w, d)$ имеем $y_{\varepsilon,\delta} \sigma_{\varepsilon,\delta}^{-1} \rightarrow d|d|^{-1}$. Поэтому, деля равенство (4.59) на $\sigma_{\varepsilon,\delta}$ и переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$, кроме того, учитывая оценку (4.41), в силу которой $\alpha_{\varepsilon,\delta}^2 / \sigma_{\varepsilon,\delta} \rightarrow 0$, имеем $Ax_\varepsilon = d|d|^{-1} \neq 0$. Поэтому $x_\varepsilon \notin \ker A$, откуда в силу (4.54) имеет место (4.62).

Положим $\Pi_{k-2}(\varepsilon) = \text{span}\{x_\varepsilon, \Pi_{k-1}(\varepsilon)\}$. В силу (4.62)

$$\text{codim } \Pi_{k-2}(\varepsilon) = k - 2.$$

Далее, подставляя в (4.52) приведенное выше представление для $F'(x_{\varepsilon,\delta})$ и деля на $\sigma_{\varepsilon,\delta}$, кроме того, используя определение верхнего топологического предела и то, что $|Py| \leq |y|$ для любого y , при $\delta \rightarrow 0$ имеем

$$|PQ[x_\varepsilon, x]| \leq 2\varepsilon |\langle x_\varepsilon, x \rangle| |w_i| \quad \forall x \in \Pi_{k-1}(\varepsilon). \quad (4.65)$$

Докажем, что

$$2\lambda_\varepsilon^0 \varepsilon |x|^2 + \langle \lambda_\varepsilon, Q(x) \rangle \geq \gamma_i |x|^2 \quad \forall x \in \Pi_{k-2}(\varepsilon), \quad (4.66)$$

где $\{\gamma_i\}$ – некоторая сходящаяся к нулю числовая последовательность.

Действительно, умножая скалярно (4.60) на λ_ε и учитывая, что $A^* \lambda_\varepsilon = 0$, имеем

$$\langle \lambda_\varepsilon, Q(x_\varepsilon) \rangle = 2\alpha_\varepsilon^2 \langle \lambda_\varepsilon, w_i \rangle + 2\kappa_\varepsilon \langle \lambda_\varepsilon, w \rangle |w|^{-1}. \quad (4.67)$$

Деля (4.60) на $|x_\varepsilon|^2$ и используя то, что $w, w_i \in (\text{im } A)^\perp$, в силу (4.36) получаем, что обе числовые последовательности $\{\alpha_\varepsilon^2 |x_\varepsilon|^{-2}\}$ и $\{\kappa_\varepsilon |x_\varepsilon|^{-2}\}$ ограничены равномерно по i, ε . Кроме того, в силу (4.57) имеем $\langle \lambda_\varepsilon, w_i \rangle \geq 0$. Поэтому нижний предел при $\varepsilon \rightarrow 0, i \rightarrow \infty$ последовательности правых частей в равенстве (4.67), деленных на $|x_\varepsilon|^2$, неотрицателен и, значит, нижний предел последовательности $\langle \lambda_\varepsilon, Q(x_\varepsilon/|x_\varepsilon|) \rangle$ также неотрицателен. Кроме того, в силу соотношений (4.56) и (4.54) имеем

$$2\varepsilon \lambda_\varepsilon^0 \langle x_\varepsilon, x \rangle + \langle \lambda_\varepsilon, Q[x_\varepsilon, x] \rangle = 0 \quad \forall x \in \Pi_{k-1}(\varepsilon).$$

Отсюда в силу (4.58) и определения $\Pi_{k-2}(\varepsilon)$ вытекает справедливость (4.66).

Найдем вектор l такой, что после перехода к подпоследовательности имеет место

$$l = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon |x_\varepsilon|^{-1} \implies |l| = 1.$$

Теперь осуществим предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$ (напомним, что номер i фиксирован). В силу [6, теорема 4.4] в X существуют такие подпространства $\Pi_{k-1,i}, \Pi_{k-2,i}$ коразмерности $k-1$ и $k-2$ соответственно, что

$$\Pi_{k-1,i} \subseteq \text{Ls}_{\varepsilon \rightarrow 0} \Pi_{k-1}(\varepsilon), \quad \Pi_{k-2,i} \subseteq \text{Ls}_{\varepsilon \rightarrow 0} \Pi_{k-2}(\varepsilon), \quad \Pi_{k-1,i} \subseteq \Pi_{k-2,i}.$$

Деля равенства (4.56) и (4.60) на $|x_\varepsilon|$ и $|x_\varepsilon|^2$ соответственно и переходя в них, а также в соотношениях (4.55), (4.57), (4.66) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, кроме того, используя определение верхнего топологического предела, найдем скаляр

$\lambda_i^0 \geq 0$ и векторы $\lambda_i, \nu_i \in Y^*$ такие, что

$$\lambda_i^0 + |\lambda_i| = 1, \quad (4.68)$$

$$\langle \lambda_i, w_i \rangle = \lambda_i^0, \quad (4.69)$$

$$A^* \lambda_i = 0, \quad (4.70)$$

$$A^* \nu_i + (Ql_i)^* \lambda_i = 0, \quad \nu_i \in (\ker A^*)^\perp, \quad (4.71)$$

$$\langle \lambda_i, Q(x) \rangle \geq \gamma_i |x|^2 \quad \forall x \in \Pi_{k-2,i}. \quad (4.72)$$

Деля обе части (4.65) на $|x_\varepsilon|$ и используя определение верхнего топологического предела, при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем $\Pi_{k-1,i} \subseteq \ker PQL$. Кроме того, в силу формулы (4.54) имеем $\Pi_{k-1,i} \subseteq \ker A$.

Осуществляя в полученных соотношениях еще один предельный переход, но уже при $i \rightarrow \infty$, найдем l , $|l| = 1$, подпространства $\Pi_{k-1} \subseteq \Pi_{k-2}$, скаляр $\lambda^0 \geq 0$ и векторы $\lambda, \nu \in Y^*$, удовлетворяющие условиям (4.68)–(4.72), в которых опущен индекс i , а также

$$\text{codim } \Pi_{k-1} = k - 1, \quad \text{codim } \Pi_{k-2} = k - 2, \quad \Pi_{k-1} \subseteq \ker PQL \cap \ker A.$$

Однако из (4.68) и (4.69) вытекает, что $\lambda \neq 0$, откуда в силу полученных соотношений имеем $\lambda|\lambda|^{-1} \in \mathcal{M}_{k-2}(x_0)$. Получили противоречие, так как по условию $\mathcal{M}_{k-2}(x_0) = \emptyset$. Таким образом, доказано существование положительных δ и const , при которых оценка (2.4) справедлива для всех $y \in M_\delta(w, d)$.

Зафиксируем произвольное $d_0 \in \text{im } A$, $d_0 \neq 0$. Обозначим через $\bar{S}$ единичную сферу в подпространстве $(\text{im } A)^\perp$. Возьмем произвольное $w \in \bar{S}$, и пусть $\delta, \text{const} > 0$ отвечают паре векторов (d_0, w) в силу доказанного выше утверждения относительно множества $M_\delta(w, d_0)$. Это множество является пересечением истинной окрестности нуля, конической окрестности вектора d_0 и конической окрестности вида $\text{im } A + \text{cone } B_\delta(w)$. Поэтому, покрывая такими окрестностями (последнего вида) сферу $\bar{S}$ и выделяя в силу ее компактности из этого открытого покрытия конечное подпокрытие, найдем такие $\delta_0, c_0 > 0$, что для любого $y \in \Upsilon_{\delta_0}(d_0)$ существует $x(y)$, для которого имеет место (2.4) при $\text{const} = c_0$. Здесь мы учли, что

$$\bigcup_{w \in \bar{S}} M_\delta(w, d_0) = \Upsilon_\delta(d_0) \quad \forall \delta > 0.$$

Повторяя теперь рассуждения, проведенные в заключительной части доказательства теоремы 2.2, основанные на компактности единичной сферы конечномерного пространства Y , завершаем доказательство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.4 проводится во многом аналогично доказательству теоремы 2.3. В силу условия (2.5), возмущая, если нужно, вектор $\hat{y}$, добьемся того, что $\hat{y} \notin \text{im } A$. Повторим рассуждения из доказательства теоремы 2.3, но заменяя в них вектор w_i на $\hat{y}$, множество $M_\delta(w, d)$ на $\Upsilon_\delta(d)$ и опуская при этом все рассуждения, связанные с получением подпространств $\Pi_{k-2}(\varepsilon)$, $\Pi_{k-2,i}$ и Π_{k-2} соответственно. Другими словами, повторяя предыдущие рассуждения, мы не будем в них доказывать условие (4.62). Кроме того, эти рассуждения мы проведем для произвольного направления $d \neq 0$. Тогда мы докажем, что существует вектор λ такой, что $\lambda|\lambda|^{-1} \in \mathcal{R}_{k-1}(x_0)$, но в силу

формулы (4.69) будем иметь $\langle \lambda, \hat{y} \rangle \geq 0$, что приводит к противоречию с условием (2.5). Таким образом, устанавливается существование положительных чисел δ и const , при которых оценка (2.4) справедлива для всех $y \in \Upsilon_\delta(d)$. Далее дословно повторим рассуждения доказательства теоремы 2.2, основанные на компактности единичной сферы. Эти рассуждения применимы, поскольку вектор d теперь произвольный, а значит, может быть выбран и так, чтобы $d \in \text{im } A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.5. В силу условия (2.9) и того факта, что $\Lambda_r(x_0) \subseteq \tilde{\Lambda}_r(x_0)$, и в силу леммы 3.6 существует такое конечномерное подпространство $\tilde{X}$, содержащее x_0 , что для отображения $\tilde{F}$, являющегося сужением F на подпространство $\tilde{X}$, выполнено условие (2.3). Действительно, имеем $\mathcal{M}_{k-2}(x_0) \subseteq \tilde{\Lambda}_{k-2}(x_0)$. Теперь искомое утверждение вытекает из теоремы 2.2. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.6. Воспользуемся рассуждениями из [6]. Обозначим через $\mathcal{W}$ множество конечномерных подпространств $M \subset X$, содержащих x_0 и таких, что $A(M) = \text{im } A$. Пусть $\tilde{\Lambda}_{k-2}(x_0; M)$ – множество $\tilde{\Lambda}_{k-2}(x_0)$, но построенное для сужения квадратичного отображения Q на M . Ясно, что $\tilde{\Lambda}_{k-2}(x_0) \subseteq \tilde{\Lambda}_{k-2}(x_0; M)$ для любого $M \in \mathcal{W}$. Докажем, что

$$\exists \overline{M} \in \mathcal{W}: \quad \tilde{\Lambda}_{k-2}(x_0; \overline{M}) = \emptyset. \quad (4.73)$$

Действительно, предположим противное. Тогда $\tilde{\Lambda}_{k-2}(x_0; M) \neq \emptyset$ для любого $M \in \mathcal{W}$. Легко проверяется тот факт, что

$$\bigcap_{i=1}^s \tilde{\Lambda}_{k-2}(x_0; M_i) \supseteq \tilde{\Lambda}_{k-2}\left(x_0; \sum_{i=1}^s M_i\right) \neq \emptyset$$

для произвольного набора подпространств $M_i \in \mathcal{W}$, $i = 1, \dots, s$. Однако множества $\tilde{\Lambda}_{k-2}(x_0; M)$ замкнуты, и потому система множеств $\tilde{\Lambda}_{k-2}(x_0; M)$, $M \in \mathcal{W}$, является централизованной. Тогда

$$\Xi := \bigcap_{M \in \mathcal{W}} \tilde{\Lambda}_{k-2}(x_0; M) \neq \emptyset.$$

Возьмем произвольный вектор $\lambda \in \Xi$. Аналогично рассуждениям из [6], приведенным при доказательстве теоремы 4.1, мы покажем, что $\lambda \in \tilde{\Lambda}_{k-2}(x_0)$ и, таким образом, имеет место $\Xi = \tilde{\Lambda}_{k-2}(x_0)$. Тогда в силу доказанного выше имеем $\tilde{\Lambda}_{k-2}(x_0) \neq \emptyset$, что противоречит предположению теоремы. Итак, условие (4.73) доказано.

Применив к отображению $\overline{F}$, являющемуся сужением F на $\overline{M}$, теорему 2.3 и используя при этом, что $\mathcal{M}_{k-2}(x_0) \subseteq \tilde{\Lambda}_{k-2}(x_0)$, получим утверждение теоремы.

§ 5. Необходимые условия экстремума второго порядка для анормальных задач

Приведем необходимые условия экстремума для анормальных задач. В этой области на сегодняшний день существует два различных подхода к исследованию. Первый, так называемый *индексный подход*, основанный на оценке

индекса квадратичной формы функции Лагранжа, был предложен в [12] (см. также [6], [13], [14]). Другой подход, основанный на том свойстве, что всякое направление, по которому отображение F 2-регулярно, лежит в касательном конусе в точке x_0 ко множеству нулей F , был разработан в работах [1], [15].

Настоящая часть работы посвящена дальнейшей разработке индексного подхода и усилению теоремы 4.1 из [6]. Результатом этого усиления является следующая теорема.

Положим $\bar{Y} = \mathbb{R} \times Y$. Рассмотрим функцию Лагранжа $\mathcal{L}(x, \bar{\lambda}) = \lambda^0 f(x) + \langle \lambda, F(x) \rangle$, где $\bar{\lambda} = (\lambda^0, \lambda) \in \bar{Y}$, $\lambda^0 \geq 0$ – множители Лагранжа.

Введем в рассмотрение множество множителей Лагранжа

$$\bar{\Lambda}(x_0) := \{ \bar{\lambda} \in \bar{Y} : \bar{\lambda} = (\lambda^0, \lambda), |\bar{\lambda}| = 1, \lambda^0 \geq 0, \mathcal{L}_x(x_0, \bar{\lambda}) = 0 \}.$$

Положим $\Phi = (f, F)$, $d = (-1, 0, \dots, 0) \in \bar{Y}$. Пусть $\bar{y} \in \bar{Y}$. Для целых $r \geq 0$ рассмотрим множество

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}}_r(x_0; \bar{y}) = \{ \bar{\lambda} \in \bar{\Lambda}(x_0) \mid \exists l \in \ker F'(x_0) : \\ \langle f'(x_0), l \rangle \leq 0, l \neq 0, \exists \Pi_r \subseteq \ker F'(x_0) : \\ \text{codim}(\ker f'(x_0) \cap \ker \bar{P}\Phi''(x_0)l \cap \Pi_r) \leq r + 1, \\ \exists \bar{\nu} = (\nu^0, \nu), \nu^0 \geq 0; \mathcal{L}_x(x_0, \bar{\nu}) + \mathcal{L}_{xx}(x_0, \bar{\lambda})l = 0, \\ \mathcal{L}_{xx}(x_0, \bar{\lambda})[\xi, \xi] \geq 0 \forall \xi \in \Pi_r, \\ \Phi''(x_0)[l, l] \in \text{cone}\{\bar{y}\} + \text{cone}\{d\} + \text{im } \Phi'(x_0) \}. \end{aligned}$$

Здесь $\bar{P}$ – оператор ортогонального проектирования пространства $\bar{Y}$ на его подпространство $(\text{im } \Phi'(x_0))^\perp$.

Заметим, что если $f'(x_0) \in \text{im}(F'(x_0))^*$, то $\overline{\mathcal{M}}_r(x_0; \bar{y}) = \mathcal{M}_r(x_0; \bar{y}, d; \Phi)$, где зависимость в $\mathcal{M}_r$ от Φ означает, что множество $\mathcal{M}_r$ вычисляется для отображения Φ , а не F . Будем использовать это далее.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть аномальная точка x_0 является локальным минимумом в задаче (1.4). Тогда

$$\begin{aligned} \max_{\bar{\lambda} \in \overline{\mathcal{M}}_{k-1}(x_0; \Phi''(x_0)[h, h])} \mathcal{L}_{xx}(x_0, \bar{\lambda})[h, h] \geq 0 \quad \forall h \in \ker F'(x_0) : \\ \Phi''(x_0)[h, h] \notin \text{im } \Phi'(x_0) - \text{cone}\{d\}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Доказательство теоремы 5.1 приведено в следующем параграфе. Сформулируем одно следствие из этого утверждения.

Пусть

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}}_r(x_0) = \{ \bar{\lambda} \in \bar{\Lambda}(x_0) \mid \exists l \in \ker F'(x_0) : \\ \langle f'(x_0), l \rangle \leq 0, l \neq 0, \exists \Pi_r \subseteq \ker F'(x_0) : \\ \text{codim}(\ker f'(x_0) \cap \ker \bar{P}\Phi''(x_0)l \cap \Pi_r) \leq r + 1, \\ \exists \bar{\nu} = (\nu^0, \nu), \nu^0 \geq 0; \mathcal{L}_x(x_0, \bar{\nu}) + \mathcal{L}_{xx}(x_0, \bar{\lambda})l = 0, \\ \mathcal{L}_{xx}(x_0, \bar{\lambda})[\xi, \xi] \geq 0 \forall \xi \in \Pi_r \}. \end{aligned}$$

Ясно, что множество $\overline{\mathcal{M}}_r(x_0)$ содержит в себе множество $\overline{\mathcal{M}}_r(x_0; \bar{y})$ при любом $\bar{y}$, так как определение $\overline{\mathcal{M}}_r(x_0)$ – это в точности определение $\overline{\mathcal{M}}_r(x_0; \bar{y})$, но без последнего условия

$$\Phi''(x_0)[l, l] \in \text{cone}\{\bar{y}\} + \text{cone}\{d\} + \text{im } \Phi'(x_0).$$

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть аномальная точка x_0 является локальным минимумом в задаче (1.4). Тогда

$$\max_{\bar{\lambda} \in \overline{\mathcal{M}}_{k-1}(x_0)} \mathcal{L}_{xx}(x_0, \bar{\lambda})[h, h] \geq 0 \quad \forall h \in \ker F'(x_0). \quad (5.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h \in \ker F'(x_0)$. Поскольку

$$\overline{\mathcal{M}}_{k-1}(x_0; \Phi''(x_0)[h, h]) \subseteq \overline{\mathcal{M}}_{k-1}(x_0),$$

в силу (5.1) условие (5.2) необходимо доказать только для тех h , для которых $\Phi''(x_0)[h, h] \in \text{im } \Phi'(x_0) - \text{cone}\{d\}$.

Итак, пусть $\Phi''(x_0)[h, h] \in \text{im } \Phi'(x_0) - \text{cone}\{d\}$. Тогда, очевидно, имеем, что $F''(x_0)[h, h] \in \text{im } F'(x_0)$. Заметим, что если

$$F''(x_0)(\ker F'(x_0)) \subseteq \text{im } F'(x_0), \quad (5.3)$$

то $\{0\} \times (\text{im } F'(x_0))^\perp \subseteq \text{cone } \overline{\mathcal{M}}_{k-1}(x_0)$, и тогда условие (5.2) выполняется автоматически. Поэтому предположим также, что

$$\exists z \in \ker F'(x_0): \quad F''(x_0)[z, z] \notin \text{im } F'(x_0).$$

Тогда, очевидно, $F''(x_0)[h + \varepsilon z, h + \varepsilon z] \notin \text{im } F'(x_0)$ при всех малых $\varepsilon > 0$. Поэтому $\Phi''(x_0)[h + \varepsilon z, h + \varepsilon z] \notin \text{im } \Phi'(x_0) - \text{cone}\{d\}$ и, значит, в силу теоремы 5.1 для возмущенного вектора $h + \varepsilon z$ верно условие (5.1). Однако $\overline{\mathcal{M}}_{k-1}(x_0; \Phi''(x_0)[h + \varepsilon z, h + \varepsilon z]) \subseteq \overline{\mathcal{M}}_{k-1}(x_0)$ и, следовательно, условие (5.1) влечет справедливость условия (5.2) для вектора $h + \varepsilon z$. Утверждение теперь получается предельным переходом в этом условии по $\varepsilon \rightarrow 0$. Следствие доказано.

Приведем другую формулировку необходимых условий экстремума, которая эквивалентна теореме 5.1.

Для целых $r \geq 0$ рассмотрим множество

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}_r(x_0) = \{ & \bar{\lambda} \in \bar{\Lambda}(x_0) \mid \exists l \in \ker F'(x_0), \exists \Pi_{r+1}, \Pi_r: \langle f'(x_0), l \rangle \leq 0, l \neq 0, \\ & \Pi_{r+1} \subseteq \Pi_r \subseteq \ker F'(x_0), \langle f'(x_0), x \rangle = 0 \quad \forall x \in \Pi_{r+1}, \\ & \mathcal{L}_{xx}(x_0, \bar{\mu})[l, x] = 0 \quad \forall x \in \Pi_{r+1}, \quad \forall \bar{\mu} \in \bar{\Lambda}(x_0), \\ & \exists \bar{\nu} = (\nu^0, \nu), \nu^0 \geq 0: \mathcal{L}_x(x_0, \bar{\nu}) + \mathcal{L}_{xx}(x_0, \bar{\lambda})l = 0, \\ & \mathcal{L}_{xx}(x_0, \bar{\lambda})[\xi, \xi] \geq 0 \quad \forall \xi \in \Pi_r, \quad \mathcal{L}_{xx}(x_0, \bar{\mu})[l, l] \leq 0 \quad \forall \bar{\mu} \in \bar{\Lambda}(x_0) \}. \end{aligned}$$

Для $y \in Y$ положим

$$\omega(y) = \inf_{x \in D(y)} f''(x_0)[x, x],$$

где

$$D(y) = \{x \in \ker F'(x_0): F''(x_0)[x, x] \in y + \text{im } F'(x_0)\},$$

и рассмотрим множество

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}_r(x_0; y) = \{ & \bar{\lambda} \in \bar{\Lambda}(x_0) \mid \exists l \in \ker F'(x_0), \exists \Pi_{r+1}, \Pi_r: \langle f'(x_0), l \rangle \leq 0, l \neq 0, \\ & \Pi_{r+1} \subseteq \Pi_r \subseteq \ker F'(x_0), \langle f'(x_0), x \rangle = 0 \quad \forall x \in \Pi_{r+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}_{xx}(x_0, \bar{\mu})[l, x] = 0 \quad \forall x \in \Pi_{r+1}, \quad \forall \bar{\mu} \in \bar{\Lambda}(x_0), \\
& \exists \bar{\nu} = (\nu^0, \nu), \quad \nu^0 \geq 0: \mathcal{L}_x(x_0, \bar{\nu}) + \mathcal{L}_{xx}(x_0, \bar{\lambda})l = 0, \\
& \mathcal{L}_{xx}(x_0, \bar{\lambda})[\xi, \xi] \geq 0 \quad \forall \xi \in \Pi_r, \\
& \mathcal{L}_{xx}(x_0, \bar{\mu})[l, l] \leq \mu^0 \omega(y) + \langle \mu, y \rangle \quad \forall \bar{\mu} = (\mu^0, \mu) \in \bar{\Lambda}(x_0) \}.
\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть аномальная точка x_0 является локальным минимумом в задаче (1.4). Тогда для любого вектора $y \in F''(x_0)(\ker F'(x_0))$, удовлетворяющего предположению

$$y \notin \operatorname{im} F'(x_0), \quad (5.4)$$

выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{k-1}(x_0; y) \neq \emptyset, \quad (5.5)$$

$$\exists \bar{\lambda} = (\lambda^0, \lambda) \in \widetilde{\mathcal{M}}_{k-1}(x_0): \quad \lambda^0 \omega(y) + \langle \lambda, y \rangle \geq 0. \quad (5.6)$$

Доказательство теоремы 5.2 приведено в следующем параграфе, а здесь мы обсудим ее утверждение.

Из определения множества $\widetilde{\mathcal{M}}_{k-1}(x_0; y)$ вытекает справедливость неравенства

$$\lambda^0 \omega(y) + \langle \lambda, y \rangle \geq 0 \quad \forall \bar{\lambda} = (\lambda^0, \lambda) \in \widetilde{\mathcal{M}}_{k-1}(x_0; y). \quad (5.7)$$

Значит, если выполнено (5.5), то в силу (5.7) имеет место аналогичное (5.6) условие

$$\exists \bar{\lambda} = (\lambda^0, \lambda) \in \widetilde{\mathcal{M}}_{k-1}(x_0; y): \quad \lambda^0 \omega(y) + \langle \lambda, y \rangle \geq 0.$$

Обратимся к условию (5.4). Игнорировать его, вообще говоря, нельзя. Это показывает простой пример задачи минимизации произвольного функционала с одним ограничением: $F(x) = |x|^2 = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Допустим, что выполнены все предположения теоремы 5.2 и, кроме того, в задаче (1.4) существует нормальный множитель Лагранжа, т. е. существует ν такое, что $\bar{\nu} = (1, \nu) \in \bar{\Lambda}(x_0)$, и $\omega(0) = -\infty$. Тогда утверждение теоремы 5.2 выполнено для всех $y \in \operatorname{im} F'(x_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменяя при необходимости функцию $f(x)$ функцией $f(x) + \langle \nu, F(x) \rangle$, будем, не теряя общности, считать, что $f'(x_0) = 0$. Заметим, что если имеет место (5.3), то искомое утверждение очевидно. Поэтому будем предполагать, что

$$\exists \xi \in \ker F'(x_0): \quad F''(x_0)[\xi, \xi] \notin \operatorname{im} F'(x_0).$$

В силу предположения $\omega(0) = -\infty$ существует вектор $h \in \ker F'(x_0)$, для которого $F''(x_0)[h, h] \in \operatorname{im} F'(x_0)$, $f''(x_0)[h, h] = -1$. Для натуральных i положим $x_i = ih + i^{-2}\xi$, $y_i = F''(x_0)[x_i, x_i]$. Тогда в силу выбора h , ξ имеем

$$Py_i \rightarrow 0, \quad f''(x_0)[x_i, x_i] \rightarrow -\infty \implies \omega(y_i) \rightarrow -\infty$$

и $y_i \notin \operatorname{im} F'(x_0)$ при всех больших i . Здесь P обозначает оператор ортогонального проектирования пространства Y на $(\operatorname{im} F'(x_0))^\perp$.

Возьмем $\bar{\lambda}_i = (\lambda_i^0, \lambda_i)$, отвечающие y_i в силу теоремы 5.2 (т.е. либо $\bar{\lambda}_i \in \widetilde{\mathcal{M}}_{k-1}(x_0; y_i)$, либо $\bar{\lambda}_i \in \widetilde{\mathcal{M}}_{k-1}(x_0)$ и верно (5.6)). Тогда

$$\langle \lambda_i, y_i \rangle \geq -\lambda_i^0 \omega(y_i) \implies \lambda_i^0 \rightarrow 0.$$

Поэтому, переходя к подпоследовательности, будем считать, что $\bar{\lambda}_i \rightarrow \bar{\lambda} = (0, \lambda)$, откуда несложно вытекает, что $\bar{\lambda}$ отвечает любому $y \in \text{im } F'(x_0)$ в силу теоремы 5.2. Предложение доказано.

В предложении 5.1 предположение о том, что $\omega(0) = -\infty$, означает, что исходная задача (1.4) не может быть сведена к квадратичной. А именно, пусть для простоты $F'(x_0) = 0$. Тогда если $\omega(0) = -\infty$, то в квадратичной задаче

$$f''(x_0)[x, x] \rightarrow \min, \quad F''(x_0)[x, x] = 0, \quad x \in X,$$

точка $x = 0$ не является точкой минимума.

Для квадратичных задач, т.е. когда $F = Q$ – квадратичное отображение, а $f = Q_0$ – квадратичная форма и $x_0 = 0$, утверждение теоремы 5.2 превращается в утверждение леммы 3.3, а соответствующие формулировки принимают более ясный и понятный вид.

Отметим, что приведенные в теоремах 5.1, 5.2 условия являются содержательным усилением необходимых условий второго порядка, полученных в [11]. Изложенное демонстрирует следующий пример.

ПРИМЕР 5.1. Рассмотрим квадратичное отображение $Q: X \rightarrow Y$ такое, что множество его нетривиальных нулей не пусто, все они регулярны и принадлежат некоторому собственному подпространству. (Примером такого отображения может служить отображение $Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $Q(x) = (x_1 x_2, x_1^2 - x_2^2 + x_3^2)$.)

Рассмотрим задачу

$$Q_0(x) \rightarrow \min, \quad Q(x) = 0, \tag{5.8}$$

где Q_0 – произвольная заданная квадратичная форма. Несложно видеть, что в точке $x_0 = 0$ необходимые условия из [11] выполняются автоматически (для любой Q_0) при $\lambda^0 = 0$.

Действительно, покажем, что если $L \neq X$, где $L := \text{span}\{N\}$, то для любого $x \in X$ существует вектор $\lambda \in \Lambda_{k-1}^Q$ такой, что

$$\lambda Q(x) \geq 0. \tag{5.9}$$

Возьмем произвольный отличный от нуля вектор $l \in L^\perp$ и рассмотрим задачу

$$\langle l, x \rangle \rightarrow \min, \quad Q(x) = 0. \tag{5.10}$$

Легко видеть, что в задаче (5.10) минимум достигается при $x = 0$. Применим к задаче (5.10) необходимые условия второго порядка, полученные в [11]. Легко видеть, что в их силу для любого $x \in X$ существует отличный от нуля вектор $\lambda \in Y^*$ такой, что индекс квадратичной формы $\lambda Q(\xi)$ не превышает $k - 1$, и выполняется (5.9).

Будем теперь предполагать, что форма Q_0 такова, что $Q_0(h) < 0$ для некоторого h , являющегося регулярным нулем Q . Тогда, очевидно, точка $x_0 = 0$ не является решением рассматриваемой задачи.

Покажем, что утверждение теоремы 5.2 нарушается при любом $y \neq 0$, являющемся регулярным значением отображения Q (а их множество всюду плотно в $\mathbb{R}^2$).

Действительно, из того, что $Q_0(h) < 0$ и h является регулярным нулем Q , несложно вытекает, что $\omega(y) = -\infty$ для любого y . Далее, $\lambda^0 > 0$ для любого $\bar{\lambda} \in \widetilde{\mathcal{M}}_{k-1}(0)$, поскольку все нетривиальные нули Q регулярны. Аналогично для любого регулярного значения $y \neq 0$ имеет место $\lambda^0 > 0$ для любого $\bar{\lambda} \in \widetilde{\mathcal{M}}_{k-1}(0; y)$, поскольку $Q(l) \in \text{cone}\{y\}$ (что, конечно, следует из вида множества $\widetilde{\mathcal{M}}_{k-1}(0; y)$). Отсюда получаем противоречие с условиями (5.6) и (5.7).

Таким образом, в силу теоремы 5.2 точка $x_0 = 0$ не является минимумом в рассматриваемой задаче. Отметим, что последнее вытекает также из [10, теорема 3].

В примере 5.1 все нули квадратичного отображения Q являются регулярными. Приведем пример квадратичной задачи, в которой квадратичное отображение Q имеет нерегулярный нуль, однако в силу теоремы 5.1 или теоремы 5.2 точка $x_0 = 0$ не является решением.

ПРИМЕР 5.2. Пусть $X = \mathbb{R}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $Q_0(x) = -x_3^2$, $Q(x) = (x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_3^2, x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_3)$. Рассмотрим задачу (5.8). Здесь в точке $x_0 = 0$ выполнены необходимые условия из [11] (с множителями Лагранжа $\bar{\lambda} = \pm(0, -1, 2) \in \bar{\Lambda}_1(0)$). Заметим, что $h = (2, 0, 1)$ является нерегулярным нулем отображения Q .

Покажем, что в то же время для $y = (1, 1)$ утверждение теоремы 5.2 нарушается. Действительно, пусть сначала $\bar{\lambda} \in \widetilde{\mathcal{M}}_1(0)$. Тогда соответствующий вектор l коллинеарен одному из трех нетривиальных нулей отображения Q : $a = (2, 2\sqrt{2}, 3)$, $b = (2, -2\sqrt{2}, 3)$ или h . Однако при $l = a$ и $l = b$ соотношение

$$\mathcal{L}_{xx}(0, \bar{\lambda})l = (\lambda^0 Q_0 + \lambda Q)l = 0 \quad (5.11)$$

нарушается при любых $\bar{\lambda} \neq 0$, а если $l = h$, то $\bar{\lambda} = (0, 1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$ и, значит, нарушается (5.6).

Покажем, что $\widetilde{\mathcal{M}}_1(0; y) = \emptyset$. Действительно, пусть $\bar{\lambda} = (\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2) \in \widetilde{\mathcal{M}}_1(0; y)$. Предположим сначала, что $(\lambda^1, \lambda^2) \neq 0$. Тогда если (5.11) выполняется для некоторого $l = (l_1, l_2, l_3) \neq 0$, то, вычисляя соответствующий определитель и приравнявая его нулю, имеем $4(l_1 - l_3)l_2 = l_1 l_2$ и, значит, либо $l_2 = 0$, либо $l_3 = \frac{3}{4}l_1$. Из определения множества $\widetilde{\mathcal{M}}_1(0; y)$ следует, что $Q(l) = y$. Подставляя указанные значения l_i в равенство $Q(l) = y$, несложно получаем, что возможен лишь первый из двух указанных выше случаев, т. е. $l_2 = 0$, и тогда $l_2 = l_3 = 0$, $l_1 = \pm 1$. Отсюда в силу (5.11) имеем $\lambda^0 > 0$, $\lambda^1 + \lambda^2 = 0$. Если же $\lambda^1 = \lambda^2 = 0$, то, очевидно, $\lambda^0 = 1$.

Таким образом, в обоих случаях $\lambda^0 > 0$ и $\langle \lambda, y \rangle = 0$. Кроме того, $\omega(y) < 0$. Последнее вытекает из теоремы об обратной функции, примененной к квадратичному отображению Q в точке a , которая является регулярным нулем Q , и из неравенства $Q_0(a) < 0$. Следовательно, неравенство (5.7) нарушается. Полученное противоречие доказывает, что $\widetilde{\mathcal{M}}_1(0; y) = \emptyset$.

Если к отображению Q из примера 5.1 прибавить произвольное полиномиальное отображение, степень которого не ниже трех, то проведенные рассуждения не изменятся, так как в формулировках теорем 5.1, 5.2 используются

лишь первая и вторая производные рассматриваемых отображений. В то же время в этом случае теорема 3 из [10] уже не применима (за счет существования нерегулярного нуля h и наличия неквадратичных членов).

Следующий пример демонстрирует, что в случае бесконечномерного пространства X утверждения теорем 5.1, 5.2 уже не имеют места.

ПРИМЕР 5.3. Пусть X – гильбертово пространство и $A: X \rightarrow X$ – компактный симметричный положительный оператор (т.е. $\langle Ax, x \rangle > 0$ для любого $x \neq 0$). Из компактности оператора следует, что $\text{im } A \neq X$. Возьмем вектор $a \in X$ такой, что $a \notin \text{im } A$, и рассмотрим задачу

$$\langle a, x \rangle \rightarrow \min, \quad \langle Ax, x \rangle = 0,$$

минимум в которой достигается в точке $x = 0$. Однако легко проверить, что $\widetilde{M}_r(0) = \widetilde{M}_r(0) = \widetilde{M}_r(0; y) = \emptyset$ для любого $y \in \mathbb{R}$ и любого r . Действительно, поскольку $\lambda^0 = 0$, то из условия

$$\nu^0 a + \lambda Al = 0,$$

учитывая, что $a \notin \text{im } A$, мы извлекаем, что $\nu^0 = 0$ и $Al = 0$. Последнее, однако, невозможно, так как $l \neq 0$, а оператор A положительный.

§ 6. Доказательство необходимых условий экстремума

Для доказательства теоремы 5.1 понадобятся вспомогательные утверждения и определения. Следующие два утверждения были получены в [4]. Пусть, как и выше, $A = F'(x_0)$, $Q = F''(x_0)$, а N – множество нетривиальных нулей Q . Для $z \in X$ положим

$$\Lambda_r^Q(z) := \{ \lambda \in Y^* \mid |\lambda| = 1, (Qz)^* \lambda = 0, \exists \Pi_r \subseteq \ker Qz: \langle \lambda, Q(\xi) \rangle \geq 0 \ \forall \xi \in \Pi_r \}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Квадратичное отображение $Q(\xi)$, определенное по формуле

$$Q(\xi) = PF''(x_0)[\xi, \xi], \quad \xi \in \ker F'(x_0),$$

называется *гессианом* отображения F в точке x_0 и обозначается $\text{Hess}(x_0; F)$. Таким образом, $\text{Hess}(x_0; F): \ker F'(x_0) \rightarrow \text{im } F'(x_0)^\perp$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Пусть $z \in N$ – вектор такой, что в некоторой его окрестности все нули квадратичного отображения Q нерегулярны. Тогда все нули гессиана $\text{Hess}(z; Q)$ также нерегулярны.

ЛЕММА 6.1. Предположим, что $x_0 \in N$ и существует такая окрестность O точки x_0 , что для любого $z \in N \cap O$ имеет место

$$\Lambda_{k-1}^Q(z) \neq \emptyset, \quad \max_{\lambda \in \Lambda_{k-1}^Q(z)} \lambda Q(x) \geq 0 \quad \forall x \in \ker Qz. \quad (6.1)$$

Тогда если для $y \in Y$ выполняется условие

$$\langle \lambda, y \rangle < 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda_{k-1}^Q(z), \quad \forall z \in N \cap O, \quad (6.2)$$

то существует окрестность V точки x_0 такая, что для любого $\tau > 0$ уравнение $Q(x) = \tau y$ не имеет решений $x \in V$.

Для $a \in X^*$, $y \in Y$ положим

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{M}}_{k-1}^0(a, y) = \{ & \lambda \in Y^* \mid |\lambda| = 1, \exists l \in X, l \neq 0, \langle a, l \rangle \leq 0, \\ & \exists \Pi_k, \Pi_{k-1}, \Pi_k \subseteq \Pi_{k-1} \subseteq X, \Pi_k \subseteq \ker Ql \cap \{x \mid \langle a, x \rangle = 0\} \\ & \lambda Q(x) \geq 0 \forall x \in \Pi_{k-1}, (Ql)^* \lambda \in -\text{cone}\{a\}, Q(l) \in \text{cone}\{y\}\}.\end{aligned}$$

ЛЕММА 6.2. Пусть для $a \in X^*$ существует такое $y \in Y$, $y \neq 0$, что

$$\langle y, \lambda \rangle < 0 \quad \forall \lambda \in \overline{\mathcal{M}}_{k-1}^0(a, y). \quad (6.3)$$

Тогда если $\langle a, x \rangle = 0$ для любого регулярного нуля x квадратичного отображения Q , то $a = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем от противного, т. е. предположим, что $a \neq 0$. Покажем, что тогда

$$\langle a, \xi \rangle = 0 \quad \forall \xi: Q(\xi) = y. \quad (6.4)$$

Действительно, предположим противное, т. е. что

$$\exists \xi: Q(\xi) = y, \quad \langle a, \xi \rangle \neq 0. \quad (6.5)$$

Отметим, что

$$\Lambda_{k-1}^Q(l) \subseteq \overline{\mathcal{M}}_{k-1}^0(a, y) \quad \forall l \in N, \quad (6.6)$$

поскольку $\Lambda_{k-1}^Q(l) = \Lambda_{k-1}^Q(-l)$, а значит, выбирая нужный знак вектора l так, чтобы выполнялось $\langle a, l \rangle \leq 0$, и положив $\Pi_k = \Pi_{k-1} \cap \{x \mid \langle a, x \rangle = 0\}$, получаем (6.6). В силу (6.6) и (6.3) имеет место

$$\langle \lambda, y \rangle < 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda_{k-1}^Q(l), \quad \forall l \in N. \quad (6.7)$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим задачу

$$-(\langle a, x \rangle)^2 + \varepsilon |x|^2 \rightarrow \min, \quad Q(x) = y. \quad (6.8)$$

Покажем, что в задаче (6.8) минимум достигается. Для этого рассмотрим произвольную минимизирующую последовательность $\{x_i\}$ этой задачи и покажем, что она ограничена. Действительно, предположим противное, т. е. что после перехода к подпоследовательности имеем $|x_i| \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$. Положим $v_i = x_i/|x_i|$. Переходя к подпоследовательности, будем считать, что $v_i \rightarrow v$. Очевидно, $|v| = 1$, $Q(v) = 0$ и, кроме того,

$$\langle a, v \rangle \neq 0, \quad (6.9)$$

поскольку если $\langle a, v \rangle = 0$, то $\langle a, v_i \rangle \rightarrow 0$, откуда имеем

$$-(\langle a, x_i \rangle)^2 + \varepsilon |x_i|^2 = |x_i|^2(\varepsilon - \langle a, v_i \rangle) \rightarrow \infty,$$

что невозможно, так как $\{x_i\}$ – минимизирующая последовательность.

В силу (6.9) вектор v не принадлежит замыканию множества регулярных нулей Q , так как по условию леммы вектор a ортогонален ему. Отсюда в силу (6.7), предложения 6.1 и теоремы 1.2 непосредственно вытекает, что для

$v \in N$ выполнены все предположения леммы 6.1, т.е. условия (6.1), (6.2). Поэтому в силу леммы 6.1 в окрестности точки v уравнение $Q(x) = \tau y$ не имеет решений при $\tau > 0$. Однако $Q(v_i) = \tau_i y$, где $\tau_i = |x_i|^{-2} > 0$.

Полученное противоречие доказывает, что последовательность $\{|x_i|\}$ ограничена, и, следовательно, в задаче (6.8) существует решение, которое мы обозначим через x_ε . Заметим, что $-x_\varepsilon$ также является решением этой задачи. Поэтому, выбирая решение с нужным знаком, добьемся того, чтобы выполнялось

$$\langle a, x_\varepsilon \rangle \leq 0.$$

Применим к задаче (6.8) необходимые условия второго порядка (см. [6, теорема 4.1]). В силу этих условий существуют число $\nu_\varepsilon^0 \geq 0$, вектор $\lambda_\varepsilon \in Y^*$ и подпространство $\Pi_\varepsilon \subseteq X$, $\text{codim } \Pi_\varepsilon = k$, такие, что

$$\nu_\varepsilon^0 + |\lambda_\varepsilon| = 1,$$

$$\Pi_\varepsilon \subseteq \ker(\varepsilon x_\varepsilon - \langle a, x_\varepsilon \rangle a) \cap \ker Qx_\varepsilon, \quad (6.10)$$

$$-\nu_\varepsilon^0 \langle a, x_\varepsilon \rangle a + \nu_\varepsilon^0 \varepsilon x_\varepsilon + \lambda_\varepsilon Qx_\varepsilon = 0, \quad (6.11)$$

$$-\nu_\varepsilon^0 (\langle a, x \rangle)^2 + \nu_\varepsilon^0 \varepsilon |x|^2 + \lambda_\varepsilon Q(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Pi_\varepsilon. \quad (6.12)$$

Рассмотрим подпространство $\bar{\Pi}_\varepsilon = \Pi_\varepsilon + \text{span}\{x_\varepsilon\}$. Тогда в силу (6.10) имеем $\text{codim } \bar{\Pi}_\varepsilon = k-1$, так как $Q(x_\varepsilon) = y \neq 0 \Rightarrow x_\varepsilon \notin \ker Qx_\varepsilon$. В силу (6.11), (6.12) получаем

$$-\nu_\varepsilon^0 (\langle a, x \rangle)^2 + \nu_\varepsilon^0 \varepsilon |x|^2 + \lambda_\varepsilon Q(x) \geq 0 \quad \forall x \in \bar{\Pi}_\varepsilon. \quad (6.13)$$

Используя (6.13) и то, что $Q(\xi) = y$ (см. (6.4)), а точка x_ε доставляет минимум в задаче (6.8), в силу (6.11) имеем

$$-\nu_\varepsilon^0 (\langle a, \xi \rangle)^2 + \nu_\varepsilon^0 \varepsilon |\xi|^2 + \lambda_\varepsilon Q(\xi) \geq -\nu_\varepsilon^0 (\langle a, x_\varepsilon \rangle)^2 + \nu_\varepsilon^0 \varepsilon |x_\varepsilon|^2 + \lambda_\varepsilon Q(x_\varepsilon) = 0. \quad (6.14)$$

Как и выше, положим $l_\varepsilon := x_\varepsilon |x_\varepsilon|^{-1}$. Переходя к подпоследовательности, при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем $\nu_\varepsilon^0 \rightarrow \nu^0 \geq 0$, $\lambda_\varepsilon \rightarrow \lambda$ и $l_\varepsilon \rightarrow l$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $|l| = 1$. В силу [6, теорема 4.4] в X существуют такие линейные подпространства $\Pi_k \subseteq \Pi_{k-1}$, что $\text{codim } \Pi_k = k$, $\text{codim } \Pi_{k-1} = k-1$ и $\Pi_k \subseteq \text{Ls}\{\Pi_\varepsilon\}$, $\Pi_{k-1} \subseteq \text{Ls}\{\bar{\Pi}_\varepsilon\}$. Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в условиях (6.10), (6.11), (6.13) и (6.14), получаем

$$\Pi_k \subseteq \ker Ql,$$

$$-\nu^0 \langle a, l \rangle a + \lambda Ql = 0, \quad \langle a, l \rangle \leq 0, \quad (6.15)$$

$$\lambda Q(x) \geq \nu^0 (\langle a, x \rangle)^2 \quad \forall x \in \Pi_{k-1}, \quad (6.16)$$

$$\langle \lambda, y \rangle \geq \nu^0 (\langle a, \xi \rangle)^2, \quad \nu^0 + |\lambda| = 1. \quad (6.17)$$

В силу (6.17) имеем $\lambda \neq 0$. Докажем, что $\lambda/|\lambda| \in \bar{\mathcal{M}}_{k-1}^0(a, y)$. Для этого в силу доказанного выше нам осталось показать, что

$$\Pi_k \subseteq \{x \mid \langle a, x \rangle = 0\}. \quad (6.18)$$

Действительно, из условия глобального минимума в задаче (6.8) имеем

$$-(\langle a, x_\varepsilon \rangle)^2 + \varepsilon |x_\varepsilon|^2 \leq -(\langle a, x \rangle)^2 + \varepsilon |x|^2 \quad \forall x: Q(x) = y. \quad (6.19)$$

Рассмотрим два случая. Пусть сначала существует такая подпоследовательность, что $x_\varepsilon \rightarrow \bar{x}$. Покажем, что тогда $\langle a, \bar{x} \rangle \neq 0$. Действительно, если

$\langle a, \bar{x} \rangle = 0$, то из соотношения (6.19) при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем $\langle a, x \rangle = 0$ для любого x такого, что $Q(x) = y$, это, в свою очередь, противоречит (6.5). Значит, $\langle a, \bar{x} \rangle \neq 0$.

Возьмем произвольное $x \in \Pi_k$. Для него существуют векторы $\eta_\varepsilon \in \Pi_\varepsilon$ такие, что после перехода к подпоследовательности выполнено $\eta_\varepsilon \rightarrow x$. В силу (6.10) имеем $\varepsilon \langle x_\varepsilon, \eta_\varepsilon \rangle = \langle a, x_\varepsilon \rangle \langle a, \eta_\varepsilon \rangle$, откуда при $\varepsilon \rightarrow 0$, учитывая, что $\langle a, x_\varepsilon \rangle \rightarrow \langle a, \bar{x} \rangle \neq 0$, получаем $\langle a, x \rangle = 0$, а это доказывает (6.18).

Рассмотрим второй случай: $|x_\varepsilon| \rightarrow \infty$. Как и выше, возьмем произвольное $x \in \Pi_k$ и отвечающую ему последовательность $\{\eta_\varepsilon\}$, кроме того, в силу соотношения (6.10) имеем

$$\varepsilon \langle l_\varepsilon, \eta_\varepsilon \rangle = \langle a, l_\varepsilon \rangle \langle a, \eta_\varepsilon \rangle. \quad (6.20)$$

Деля неравенство в (6.19) на $|x_\varepsilon|^2$, получаем $-(\langle a, l_\varepsilon \rangle)^2 + \varepsilon \leq \varepsilon \gamma_\varepsilon$, где $\gamma_\varepsilon = |x|^2 |x_\varepsilon|^{-2} \rightarrow 0$. Поэтому $|\langle a, l_\varepsilon \rangle| \geq \sqrt{\varepsilon(1 - \gamma_\varepsilon)}$, откуда с учетом (6.20) имеем

$$|\langle a, l_\varepsilon \rangle| |\langle a, \eta_\varepsilon \rangle| = \varepsilon |\langle l_\varepsilon, \eta_\varepsilon \rangle| \implies \sqrt{\varepsilon(1 - \gamma_\varepsilon)} |\langle a, \eta_\varepsilon \rangle| \leq \varepsilon |\langle l_\varepsilon, \eta_\varepsilon \rangle|.$$

Деля последнее неравенство на $\sqrt{\varepsilon}$ и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем $\langle a, x \rangle = 0$, что завершает доказательство (6.18).

Итак, доказано, что $\lambda/|\lambda| \in \overline{M}_{k-1}^0(a, y)$. Однако в силу (6.17) имеем $\langle y, \lambda \rangle \geq 0$, что противоречит предположению (6.3) леммы. Полученное противоречие завершает доказательство (6.4).

Согласно [6, теорема 4.4] несложно получить, что многозначное отображение $\overline{M}_{k-1}^0(a, \cdot)$ полунепрерывно сверху в окрестности точки $y \neq 0$. Поэтому при всех $\hat{\xi}$, близких к ξ , для вектора $\hat{y} = Q(\hat{\xi})$ условие (6.3) также выполняется. Однако поскольку по сделанному предположению $a \neq 0$, то, как угодно мало сдвигая вектор ξ , можно добиться того, что $\langle a, \xi \rangle \neq 0$, а это противоречит соотношению (6.4). Полученное противоречие доказывает, что $a = 0$. Лемма доказана.

Положим $a := f'(x_0)$, $H := \text{Hess}(x_0; F)$,

$$\overline{M}_r^0(x_0; \bar{y}) := \{\lambda \in Y \mid (0, \lambda) \in \overline{M}_r(x_0; \bar{y})\}, \quad \bar{y} \in \bar{Y}.$$

ЛЕММА 6.3. Пусть $y \in Q(\ker A)$ и

$$\begin{aligned} \exists y^0: \quad \bar{y} := (y^0, y) &\notin \text{im } \Phi'(x_0) - \text{cone}\{d\}, \\ \langle y, \lambda \rangle < 0 \quad \forall \lambda &\in \overline{M}_{k-1}^0(x_0; \bar{y}). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Предположим, что вектор $a \in X^*$ аннулирует множество всех регулярных нулей гессиана H . Тогда $a \in \text{im } A^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Искомое утверждение вытекает из леммы 6.2, примененной к пространствам $X = \ker A$, $Y = (\text{im } A)^\perp$, определенной на них квадратичной форме $Q = H$, вектору Pu и сужению функционала a на $\ker A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.1. Пусть $h \in \ker A$ и

$$\bar{y} = (y^0, y) := \Phi''(x_0)[h, h] \notin \text{im } \Phi'(x_0) - \text{cone}\{d\}.$$

Рассмотрим два случая. Пусть сначала условие (6.21) выполняется. Покажем, что тогда $a \in \text{im } A^*$.

Действительно, поскольку x_0 – локальный минимум в задаче (1.4), по теореме о касательном конусе из [1] все регулярные нули гессиана H лежат в ядре a . Поэтому по лемме 6.3 получаем, что $a \in \text{im } A^*$.

Покажем, что

$$d \notin \text{im } \Phi'(x_0). \quad (6.22)$$

Действительно, предположим противное. Тогда существует $x \in X$ такое, что

$$\Phi'(x_0)x = d \implies Ax = 0, \langle a, x \rangle = -1.$$

Однако в силу доказанного существует y^* такое, что $A^*y^* = a$, откуда имеем цепочку равенств

$$-1 = \langle a, x \rangle = \langle A^*y^*, x \rangle = \langle y^*, Ax \rangle = 0.$$

Полученное противоречие доказывает (6.22).

Для отображения Φ в точке x_0 рассмотрим условие $\mathbf{A}_{k-1}(x_0; \bar{y}, d)$ и покажем, что оно нарушается. Действительно, предположим, что условие $\mathbf{A}_{k-1}(x_0; \bar{y}, d)$ выполняется. Тогда с учетом (6.22) для отображения Φ в точке x_0 справедливо утверждение теоремы 2.1, что, очевидно, противоречит тому, что по условию x_0 является локальным минимумом в задаче (1.4). Таким образом, для отображения Φ в точке x_0 условие $\mathbf{A}_{k-1}(x_0; \bar{y}, d)$ нарушается.

Однако условия а), б) из определения $\mathbf{A}_{k-1}(x_0; \bar{y}, d)$ выполнены в силу выбора вектора h . Кроме того, $\text{codim im } \Phi'(x_0) \geq 2$, поскольку по условию точка x_0 аномальна и $a \in \text{im } A^*$. Значит, нарушается условие с) из определения $\mathbf{A}_{k-1}(x_0; \bar{y}, d)$. Учитывая, что

$$\overline{\mathcal{M}}_{k-1}(x_0; \bar{y}) = \mathcal{M}_{k-1}(x_0; \bar{y}, d; \Phi), \quad \mathcal{L}_{xx}(x_0, \bar{\lambda})[h, h] = \langle \bar{\lambda}, \bar{y} \rangle,$$

получаем неравенство (5.1).

Рассмотрим второй случай. Пусть условие (6.21) нарушается. Тогда по определению существует $\bar{\lambda} = (\lambda^0, \lambda) \in \overline{\mathcal{M}}_{k-1}(x_0; \bar{y})$ такое, что $\lambda^0 = 0$ и $\langle y, \lambda \rangle \geq 0$, и, значит, утверждение леммы, т.е. неравенство (5.1), выполняется автоматически. Теорема доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. Пусть $y \notin \text{im } F'(x_0)$, $y_i^0 \rightarrow \omega(y)$, $i \rightarrow \infty$, и $\bar{y}_i := (y_i^0, y) \in \Phi''(x_0)(\ker F'(x_0))$ для любого i . Тогда

$$\widetilde{\mathcal{M}}_r(x_0) \cup \widetilde{\mathcal{M}}_r(x_0; y) = \bigcap_i \overline{\mathcal{M}}_r(x_0; \bar{y}_i). \quad (6.23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\widetilde{\mathcal{M}}_r^i(x_0; y)$ множество, полученное из множества $\widetilde{\mathcal{M}}_r(x_0; y)$ за счет замены в его определении значения $\omega(y)$ на y_i^0 . Сначала покажем, что

$$\widetilde{\mathcal{M}}_r(x_0) \cup \widetilde{\mathcal{M}}_r^i(x_0; y) = \overline{\mathcal{M}}_r(x_0; \bar{y}_i). \quad (6.24)$$

В силу определения указанных множеств для этого достаточно показать, что, во-первых, условие

$$\Pi_{r+1} \subseteq \ker \bar{P}\Phi''(x_0)l$$

эквивалентно условию

$$\mathcal{L}_{xx}(x_0, \bar{\mu})[l, x] = 0 \quad \forall x \in \Pi_{r+1}, \quad \forall \bar{\mu} \in \bar{\Lambda}(x_0),$$

а во-вторых, включение

$$\Phi''(x_0)[l, l] \in \text{cone}\{\bar{y}_i\} + \text{cone}\{d\} + \text{im } \Phi'(x_0) \quad (6.25)$$

эквивалентно тому, что выполняется хотя бы одно из следующих условий:

$$\mathcal{L}_{xx}(x_0, \bar{\mu})[l, l] \leq 0 \quad \forall \bar{\mu} \in \bar{\Lambda}(x_0), \quad (6.26)$$

$$\exists \gamma > 0: \quad \gamma \mathcal{L}_{xx}(x_0, \bar{\mu})[l, l] \leq \mu^0 y_i^0 + \langle \mu, y \rangle \quad \forall \bar{\mu} = (\mu^0, \mu) \in \bar{\Lambda}(x_0). \quad (6.27)$$

Действительно, первая эквивалентность непосредственно вытекает из того, что $\ker(\Phi'(x_0))^* \perp \text{im } \Phi'(x_0)$. Докажем вторую эквивалентность. Пусть выполняется (6.25). Тогда найдутся такие $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$, что

$$\langle \bar{\mu}, \Phi''(x_0)[l, l] \rangle = \mathcal{L}_{xx}(x_0, \bar{\mu})[l, l] = \alpha \langle \bar{\mu}, \bar{y}_i \rangle - \beta \mu^0 \quad \forall \bar{\mu} = (\mu^0, \mu) \in \bar{\Lambda}(x_0).$$

Отсюда, если $\alpha = 0$, выполнено условие (6.26). Если $\alpha > 0$, то при $\gamma = \alpha^{-1}$ имеет место (6.27). Обратная импликация вытекает из теоремы отделимости выпуклых конусов. Условие (6.24) доказано.

Теперь покажем, что

$$\widetilde{\mathcal{M}}_r(x_0) \cup \widetilde{\mathcal{M}}_r(x_0; y) = \widetilde{\mathcal{M}}_r(x_0) \cup \bigcap_i \widetilde{\mathcal{M}}_r^i(x_0; y). \quad (6.28)$$

Действительно, поскольку $\omega(y) \leq y_i^0$, имеем $\widetilde{\mathcal{M}}_r(x_0; y) \subseteq \widetilde{\mathcal{M}}_r^i(x_0; y)$ для любого i . С другой стороны, если $\bar{\lambda} \in \widetilde{\mathcal{M}}_r^i(x_0; y)$ для любого i , то при всех i выполняется

$$\mathcal{L}_{xx}(x_0, \bar{\mu})[l_i, l_i] \leq \mu^0 y_i^0 + \langle \mu, y \rangle \quad \forall \bar{\mu} = (\mu^0, \mu) \in \bar{\Lambda}(x_0),$$

где $l_i \in X$ – вектор, отвечающий $\bar{\lambda}$ в силу определения $\widetilde{\mathcal{M}}_r^i(x_0; y)$. Переходя к подпоследовательности, будем считать, что либо $|l_i| \rightarrow \infty$, либо $l_i \rightarrow l_0$. Однако в первом случае после перехода к пределу при $i \rightarrow \infty$ получаем $\bar{\lambda} \in \widetilde{\mathcal{M}}_r(x_0)$. Во втором случае $l_0 \neq 0$, поскольку $y \notin \text{im } F'(x_0)$, откуда имеем $\bar{\lambda} \in \widetilde{\mathcal{M}}_r(x_0; y)$. Итак, (6.28) доказано. Легко видеть, что соотношение (6.23) является следствием (6.24) и (6.28). Предложение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.2. Отметим, что теорема является следствием предложения 6.2 и теоремы 5.1. Действительно, пусть $y \notin \text{im } F'(x_0)$. Рассмотрим минимизирующую последовательность $y_i^0 \rightarrow \omega(y)$, $i \rightarrow \infty$, такую, что

$$\bar{y}_i := (y_i^0, y) \in \Phi''(x_0)(\ker F'(x_0))$$

для любого i , и пусть последовательность чисел y_i^0 монотонно убывает, т. е. $y_i^0 \leq y_j^0$ при $i \geq j$. Поскольку $y \notin \text{im } F'(x_0)$, то, очевидно, $\bar{y}_i \notin \text{im } \Phi'(x_0) - \text{cone}\{d\}$. Поэтому из теоремы 5.1 вытекает существование вектора $\bar{\lambda}_i \in \overline{\mathcal{M}}_{k-1}(x_0; \bar{y}_i)$, для которого верно (5.1). Легко устанавливается (см. доказательство предложения 6.2 и формулу (6.24)), что $\overline{\mathcal{M}}_{k-1}(x_0; \bar{y}_i) \subseteq \overline{\mathcal{M}}_{k-1}(x_0; \bar{y}_j)$, если $y_i^0 \leq y_j^0$. Поэтому

$$\text{Ls}_{i \rightarrow \infty} \{\overline{\mathcal{M}}_{k-1}(x_0; \bar{y}_i)\} = \bigcap_i \overline{\mathcal{M}}_{k-1}(x_0; \bar{y}_i).$$

Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\bar{\lambda}_i \rightarrow \bar{\lambda} = (\lambda^0, \lambda) \neq 0$, причем в силу изложенного будем иметь, что, во-первых,

$$\bar{\lambda} \in \bigcap_i \overline{\mathcal{M}_{k-1}(x_0; \bar{y}_i)},$$

и, во-вторых, выполнено условие

$$\lambda^0 \omega(y) + \langle \lambda, y \rangle \geq 0.$$

Теперь воспользуемся предложением 6.2. Тогда в силу (6.23) вектор λ удовлетворяет либо условию (5.5), либо (5.6). Теорема доказана.

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензентам за сделанные замечания, способствовавшие улучшению изложения.

Список литературы

1. Е. Р. Аваков, “Теоремы об оценках в окрестности особой точки отображения”, *Матем. заметки*, **47**:5 (1990), 3–13; англ. пер.: E. R. Avakov, “Theorems on estimates in the neighborhood of a singular point of a mapping”, *Math. Notes*, **47**:5 (1990), 425–432.
2. А. В. Арутюнов, “Теорема о неявной функции без априорных предположений нормальности”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **46**:2 (2006), 205–215; англ. пер.: A. V. Arutyunov, “Implicit function theorem without a priori assumptions about normality”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **46**:2 (2006), 195–205.
3. Е. Р. Аваков, А. В. Арутюнов, “Теорема об обратной функции и условия экстремума для аномальных задач с незамкнутым образом”, *Матем. сб.*, **196**:9 (2005), 3–22; англ. пер.: E. R. Avakov, A. V. Arutyunov, “Inverse function theorem and conditions of extremum for abnormal problems with non-closed range”, *Sb. Math.*, **196**:9 (2005), 1251–1269.
4. А. В. Арутюнов, Д. Ю. Карамзин, “Регулярные нули квадратичных отображений и их приложение”, *Матем. сб.*, **202**:6 (2011), 3–28; англ. пер.: A. V. Arutyunov, D. Yu. Karamzin, “Regular zeros of quadratic maps and their application”, *Sb. Math.*, **202**:6 (2011), 783–806.
5. А. В. Арутюнов, “Теорема о неявной функции как реализация принципа Лагранжа. Аномальные точки”, *Матем. сб.*, **191**:1 (2000), 3–26; англ. пер.: A. V. Arutyunov, “Implicit function theorem as a realization of the Lagrange principle. Abnormal points”, *Sb. Math.*, **191**:1 (2000), 1–24.
6. А. В. Арутюнов, *Условия экстремума. Аномальные и вырожденные задачи*, Факториал, М., 1997; англ. пер.: A. V. Arutyunov, *Optimality conditions. Abnormal and degenerate problems*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.
7. В. И. Арнольд, *Теория катастроф*, 4-е изд., УРСС, М., 2004; англ. пер. 3-го изд.: V. I. Arnol'd, *Catastrophe theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
8. А. В. Арутюнов, С. Е. Жуковский, “Существование обратных отображений и их свойства”, *Дифференциальные уравнения и топология*. II, Тр. МИАН, **271**, МАИК, М., 2010, 18–28; англ. пер.: A. V. Arutyunov, S. E. Zhukovskiy, “Existence and properties of inverse mappings”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **271** (2010), 12–22.
9. А. В. Арутюнов, В. Ячимович, “К теории экстремума для аномальных задач”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. Вычисл. матем. и кибернетика*, 2000, № 1, 34–40; англ. пер.: A. V. Arutyunov, V. Jaćimović, “To the theory of extremum for abnormal problems”, *Moscow Univ. Comput. Math. Cybernet.*, **1** (2000), 30–37.

10. А. В. Арутюнов, “Неотрицательность квадратичных форм на пересечении квадрик и квадратичные отображения”, *Матем. заметки*, **84**:2 (2008), 163–174; англ. пер.: A. V. Arutyunov, “Nonnegativity of quadratic forms on intersections of quadrics and quadratic maps”, *Math. Notes*, **84**:2 (2008), 155–165.
11. А. В. Арутюнов, Д. Ю. Карамзин, “Необходимые условия экстремума в аномальной экстремальной задаче с ограничениями типа равенств”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **46**:8 (2006), 1363–1368; англ. пер.: A. V. Arutyunov, D. Yu. Karamzin, “Necessary optimality conditions in an abnormal optimization problem with equality constraints”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **46**:8 (2006), 1293–1298.
12. А. В. Арутюнов, Н. Т. Тынянский, “К необходимым условиям локального минимума в теории оптимального управления”, *Докл. АН СССР*, **275**:2 (1984), 268–272; англ. пер.: A. V. Arutyunov, N. T. Tynyanskiĭ, “On necessary conditions for a local minimum in optimal control theory”, *Soviet Math. Dokl.*, **29**:2 (1984), 176–179.
13. А. А. Аграчев, Р. В. Гамкредидзе, “Индекс экстремальности и квазиэкстремальные управления”, *Докл. АН СССР*, **284**:4 (1985), 777–781; англ. пер.: A. A. Agrachev, R. V. Gamkrelidze, “The index of extremality and quasiextremal controls”, *Soviet Math. Dokl.*, **32**:2 (1985), 478–481.
14. А. А. Аграчев, “Топология квадратичных отображений и гессианы гладких отображений”, *Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом.*, **26**, ВИНТИ, М., 1988, 85–124; англ. пер.: A. A. Agrachev, “Topology of quadratic maps and Hessians of smooth maps”, *J. Soviet Math.*, **49**:3 (1990), 990–1013.
15. Е. Р. Аваков, “Условия экстремума для гладких задач с ограничениями типа равенств”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **25**:5 (1985), 680–693; англ. пер.: E. R. Avakov, “Extremum conditions for smooth problems with equality-type constraints”, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, **25**:3 (1985), 24–32.

ЕВГЕНИЙ РАЧИЕВИЧ АВАКОВ
(EVGENIY R. AVAKOV)
Институт проблем управления
им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва
E-mail: era@maxmin.ru

Поступило в редакцию
14.10.2011
04.06.2013

АРАМ ВЛАДИМИРОВИЧ АРУТЮНОВ
(ARAM V. ARUTYUNOV)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
факультет вычислительной математики
и кибернетики;
Университет дружбы народов
им. П. Лумумбы, г. Москва
E-mail: arutun@orc.ru

ДМИТРИЙ ЮРЬЕВИЧ КАРАМЗИН
(DMITRY YU. KARAMZIN)
Вычислительный центр
им. А. А. Дородницына РАН, г. Москва
E-mail: dmitry_karamzin@mail.ru