Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Фонарёв, Минимальные лешцевы разложения
производных категорий грассманианов, *Изв. РАН. Сер.
матем.*, 2013, том 77, выпуск 5, 203–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7930>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 14:30:57

УДК 512.7+512.73

А. В. Фонарёв

Минимальные лефшецевы разложения производных категорий грассманианов

Построены два лефшецева разложения производной категории когерентных пучков на грассманиане k -мерных подпространств в векторном пространстве размерности n . Оба разложения допускают лефшецев базис, состоящий из эквивариантных векторных расслоений. Доказана полнота первого разложения. В случае, когда n и k взаимно просты, разложения совпадают и являются минимальными. В общем случае высказывается гипотеза о полноте и минимальности второго разложения.

Библиография: 10 наименований.

Ключевые слова: производные категории когерентных пучков, полуртогональные разложения.

DOI: 10.4213/im7930

§ 1. Введение

Производная категория когерентных пучков является одним из наиболее важных инвариантов алгебраического многообразия. Для исследования производных категорий полезно искать различного рода дополнительные структуры. Имеется отдельный случай, в котором триангулированная категория (а производная категория является триангулированной) может быть явно описана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 [1], [2]. Набор объектов $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ в k -линейной триангулированной категории $\mathcal{T}$ называется *исключительным*, если

$$\mathrm{RHom}(E_i, E_i) = k \quad \forall i, \quad \mathrm{RHom}(E_i, E_j) = 0, \quad i > j.$$

Исключительный набор $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ называется *полным*, если $\mathcal{T}$ – наименьшая полная триангулированная подкатегория, содержащая все E_i .

Исключительные наборы являются в некотором роде базисами в триангулированных категориях, в этом случае каждый объект допускает каноническую фильтрацию, в которой i -й фактор изоморфен прямой сумме сдвигов i -го объекта набора.

Простейшим примером многообразия с полным исключительным набором является проективное пространство. А. Бейлинсон показал в [3], что набор $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1), \dots, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(n))$ является полным исключительным в $\mathcal{D}^b(\mathbb{P}^n)$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Фонда поддержки молодых ученых “Конкурс Мёбиуса”, Лаборатории алгебраической геометрии НИУ ВШЭ (грант № 11.G34.31.0023), РФФИ (гранты № 11-01-92613-КО-а, 10-01-00678-а) и Программы Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ России” (грант НШ-5139.2012.1).

Можно немного обобщить понятие исключительного набора и рассматривать подкатегории вместо отдельных объектов. Для всякой полной триангулированной подкатегории $\mathcal{A}$ в триангулированной категории $\mathcal{T}$ ее *правым ортогоналом* (соответственно, *левым ортогоналом*) в $\mathcal{T}$ называется полная триангулированная подкатегория $\mathcal{A}^\perp$ (соответственно, ${}^\perp\mathcal{A}$), состоящая из всех объектов $T \in \mathcal{T}$ таких, что $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(A, T) = 0$ (соответственно, $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, A) = 0$) для всех $A \in \mathcal{A}$.

Для данного набора полных триангулированных подкатегорий $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n \subset \mathcal{T}$ обозначим через $\langle \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n \rangle$ наименьшую полную триангулированную подкатегорию в $\mathcal{T}$, содержащую $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2 [4]. Последовательность $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ полных триангулированных подкатегорий в категории $\mathcal{T}$ называется *полуортогональным набором*, если $\mathcal{A}_i \subset {}^\perp\mathcal{A}_j$ при всех $i > j$. Полуортогональный набор $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ называется *полуортогональным разложением*, если $\mathcal{T} = \langle \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n \rangle$.

Имеется интересный класс полуортогональных разложений в случае производных категорий. Такие разложения называются *лефшецевыми* и имеют вид

$$\mathcal{D}^b(X) = \langle \mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1 \otimes L, \dots, \mathcal{B}_{m-1} \otimes L^{m-1} \rangle,$$

где $\mathcal{D}^b(X) \supset \mathcal{B}_0 \supset \dots \supset \mathcal{B}_{m-1}$ — полные триангулированные подкатегории, а L — некоторое фиксированное линейное расслоение.

Оказывается, что всякое лефшецево разложение полностью определяется своим первым блоком $\mathcal{B}_0$. Таким образом, имеется естественный частичный порядок на множестве всех лефшецевых разложений, индуцированный порядком по включению, заданным на множестве их первых блоков. Важной задачей является построение лефшецевых разложений, которые минимальны по отношению к этому частичному порядку.

Минимальные лефшецевы разложения интересны по нескольким причинам, одной из которых является следующая гипотеза А. Кузнецова.

ГИПОТЕЗА 1.3 [5]. Пусть X — гладкое проективное многообразие. Тогда минимальные лефшецевы разложения $\mathcal{D}^b(X)$ соответствуют минимальным категорным разрешениям особенностей аффинного конуса над X .

В настоящей работе мы строим два лефшецевых разложения ограниченной производной категории когерентных пучков на грассманиане $X = \text{Gr}(k, V)$ подпространств размерности k в векторном пространстве V размерности n .

М. Капранов построил [6] полный исключительный набор в производной категории X

$$\mathcal{D}^b(X) = \langle \Sigma^\lambda \mathcal{U} \mid \lambda \in Y_{n,k} \rangle,$$

где λ пробегает множество $Y_{n,k}$ диаграмм Юнга, вписанных в прямоугольник размера $k \times (n - k)$, а $\mathcal{U}$ — тавтологическое подрасслоение ранга k в $V \otimes \mathcal{O}_X$. Однако капрановский набор порождает сильно неминимальное разложение.

Мы рассматриваем два лефшецевых разложения $\mathcal{D}^b(X)$. Одно из них было независимо открыто К. Бравом и Х. Томасом ¹. Однако они доказали лишь полуортогональность этого разложения, но не полноту, и не опубликовали свой результат. В настоящей работе доказывается как полуортогональность, так и

¹Частное сообщение автору.

полнота. В случае, когда n и k взаимно просты, $(n, k) = 1$, это лефшецево разложение минимально. Первым блоком данного разложения является

$$\mathcal{B}_0 = \langle \Sigma^\lambda \mathcal{U}^* \mid \lambda \in Y_{n,k}^u \rangle,$$

где $Y_{n,k}^u \subset Y_{n,k}$ обозначает множество тех диаграмм, которые не опускаются ниже диагонали, соединяющей левый нижний и правый верхний углы прямоугольника.

Оказывается, что в случае не взаимно простых n и k можно построить меньшее лефшецево разложение, однако в данный момент мы в состоянии проверить только полуортогональность второго разложения. Предполагается, что это разложение является полным и минимальным.

Наконец, напомним, что в случае $X = \text{Gr}(2, V)$ минимальное лефшецево разложение было построено в [7]. Оно совпадает с двумя разложениями, описанными в настоящей работе.

Работа построена следующим образом. В § 2 приведены все необходимые определения и факты о лефшецевых разложениях, знаменитая теорема Бореля–Ботта–Вейля, правило Литтлвуда–Ричардсона и капрановские исключительные наборы на грассманианах. В § 3 вводятся действие группы $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ на множестве $Y_{n,k}$ и некоторые связанные с ним характеристики. Это действие сыграет значительную роль в построении наших разложений и доказательстве полноты. В § 4 формулируются основные результаты и гипотезы, а также доказывается полуортогональность обоих разложений. Наконец, в § 5 строится новый интересный класс точных комплексов векторных расслоений на грассманианах, который используется для доказательства полноты первого разложения.

Автор благодарен университетскому научному руководителю С. М. Гусейн-Заде за его заботу, внимание и математическую толерантность. Появлению настоящей работы автор всецело обязан своему научному руководителю А. Г. Кузнецову, который не только поставил данный вопрос, но фактически научил автора своему удивительно красивому видению алгебраической геометрии. Автор благодарен А. Г. Кузнецову, А. И. Бондалу, Л. Манивелю и Д. О. Орлову за полезные обсуждения и своей семье за поддержку.

§ 2. Предварительные сведения

2.1. Лефшецевы разложения. Нас будет интересовать особый класс полуортогональных разложений ограниченной производной категории когерентных пучков на алгебраическом многообразии. Пусть X – алгебраическое многообразие над полем k характеристики нуль, а $\mathcal{O}_X(1)$ – линейное расслоение на X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 [8]. *Лефшецевым разложением* $\mathcal{D}^b(X)$ называется полуортогональное разложение вида

$$\mathcal{D}^b(X) = \langle \mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1(1), \dots, \mathcal{B}_{m-1}(m-1) \rangle, \quad \text{где } 0 \subset \mathcal{B}_{m-1} \subset \dots \subset \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{D}^b(X).$$

Подкатегория $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{D}^b(X)$ называется $(i+1)$ -м блоком разложения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ – исключительный набор, а $o: \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ – положительная функция с целыми значениями такая, что подкатегории

$$\mathcal{B}_i = \langle E_j \mid i < o(j) \rangle \quad (2.1)$$

образуют лефшецево разложение. В таком случае назовем набор $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ *лефшецевым базисом* в $\mathcal{D}^b(X)$ с носителем o .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Может создаться впечатление, что носитель входит как часть данных в определение лефшецева базиса. Однако каждое лефшецево разложение полностью задается своим первым блоком по следующему индуктивному правилу (см. [5]):

$$\mathcal{B}_k = {}^\perp \mathcal{B}_0(-k) \cap \mathcal{B}_{k-1}.$$

Таким образом, можно сказать, что лефшецев базис – это такой исключительный набор $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ в $\mathcal{D}^b(X)$, что $\mathcal{B}_0 = \langle E_1, E_2, \dots, E_n \rangle$ является первым блоком лефшецева разложения, причем каждый следующий блок $\mathcal{B}_i$ порождается поднабором в $(E_1, E_2, \dots, E_n)$.

Лефшецево разложение называется *прямоугольным*, если $\mathcal{B}_{m-1} = \dots = \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_0$, и *минимальным*, если оно минимально по отношению к частичному порядку, заданному порядком включения на первых блоках.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Понятие лефшецева базиса тесно связано с понятием полного лефшецева исключительного набора (см. [7]). По всякому лефшецеву базису с невозрастающим носителем строится полный лефшецев исключительный набор, и наоборот.

Заметим, что перестройки также частично определены для лефшецевых базисов. Причем всегда можно перестроить лефшецев базис так, чтобы он соответствовал лефшецеву исключительному набору. Для этого достаточно в первом блоке перестроить объекты с меньшим значением носителя вправо.

Нам понадобится следующая лемма, которая дает простой способ проверки полуортогональности блоков, порожденных лефшецевым базисом.

ЛЕММА 2.5. *Исключительный набор $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ является лефшецевым базисом с носителем $o(i)$ тогда и только тогда, когда:*

- 1) *подкатегории $\mathcal{B}_i(i)$, заданные (2.1), порождают $\mathcal{D}^b(X)$;*
- 2) *$\text{Ext}^\bullet(E_p(k), E_q) = 0$ для всех $1 \leq p, q \leq n$ и $0 < k < o(p)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие 1) есть не что иное, как полнота порожденного разложения. Для доказательства условия 2) достаточно заметить, что блоки $\mathcal{B}_i$ порождаются поднаборами исключительного набора $(E_1, E_2, \dots, E_n)$, значит, достаточно проверить полуортогональность для соответствующих объектов. Остается воспользоваться изоморфизмом

$$\text{Ext}^\bullet(E_p(k), E_q(l)) = \text{Ext}^\bullet(E_p(k-l), E_q).$$

Лемма доказана.

2.2. Теорема Бореля–Ботта–Вейля и правило Литтлвуда–Ричардсона. Теорема Бореля–Ботта–Вейля – исключительно сильный результат, позволяющий вычислять когомологии линейных расслоений на пространстве флагов полупростой алгебраической группы. Данная теорема также может быть использована для вычисления когомологий эквивариантных векторных расслоений на грассманианах. Далее мы ограничиваемся рассмотрением случая группы $GL(V)$.

Пусть V – векторное пространство размерности n . Отождествим решетку весов группы $GL(V)$ с $\mathbb{Z}^n$ так, чтобы k -й фундаментальный вес π_k , являющийся старшим весом представления $\Lambda^k V$, соответствовал $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ (здесь первые k членов равны 1, а остальные равны 0). При таком описании конусу доминантных весов $GL(V)$ соответствует множество невозрастающих целочисленных последовательностей $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$. Для таких α обозначим через $\Sigma^\alpha V$ соответствующее представление $GL(V)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6. Далее мы будем активно использовать диаграммы Юнга, которые также представляют невозрастающие положительные конечные целочисленные последовательности, иногда наши диаграммы Юнга будут иметь строки отрицательной длины. Такие строки нужно представлять себе, как клетки, находящиеся слева от некоторой выбранной вертикальной оси, обозначающей нуль.

Аналогично, для данного векторного расслоения E ранга n на схеме S можно рассмотреть соответствующее главное $GL(n)$ -расслоение и построить векторное расслоение $\Sigma^\alpha E$, ассоциированное с представлением $GL(n)$ со старшим весом α .

Группа Вейля S_n естественным образом действует на решетке весов $\mathbb{Z}^n$. Пусть $\ell: S_n \rightarrow \mathbb{Z}$ – стандартная функция длины. Для всякого $\alpha \in \mathbb{Z}^k$ найдется элемент $\sigma \in S_n$ такой, что последовательность $\sigma(\alpha)$ не возрастает, причем этот элемент будет единственным, если и только если все члены α различны.

Пусть X – многообразие флагов группы $GL(V)$, а L_α – линейное расслоение на X , соответствующее весу α (в частности, L_{π_k} – обратный образ $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Lambda^k V)}(1)$ при естественной проекции $X \rightarrow \mathbb{P}(\Lambda^k V)$). Обозначим через

$$\rho = (n, n-1, \dots, 1)$$

полусумму положительных корней $GL(V)$. Соответствующее линейное расслоение L_ρ является квадратным корнем из антиканонического линейного расслоения.

Теорема Бореля–Ботта–Вейля вычисляет когомологии линейных расслоений L_α на X .

ТЕОРЕМА 2.7 [9]. *Предположим, что все члены $\alpha + \rho$ различны. Пусть σ – такая единственная перестановка, что $\sigma(\alpha + \rho)$ строго убывает. Тогда*

$$H^k(X, L_\alpha) = \begin{cases} \Sigma^{\sigma(\alpha+\rho)-\rho} V^*, & \text{если } k = l(\sigma), \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Если хотя бы два члена $\alpha + \rho$ совпадают, то $H^\bullet(X, L_\alpha) = 0$.

Рассмотрим теперь грассманиан $Gr(k, V)$. Пусть $\mathcal{U} \subset V \otimes \mathcal{O}_{Gr(k, V)}$ – тавтологическое подрасслоение ранга k . Имеется пара двойственных коротких точных

последовательностей:

$$0 \rightarrow \mathcal{U} \rightarrow V \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{Gr}(k,V)} \rightarrow V/\mathcal{U} \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow \mathcal{U}^\perp \rightarrow V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{Gr}(k,V)} \rightarrow \mathcal{U}^* \rightarrow 0,$$

где $\mathcal{U}^\perp = (V/\mathcal{U})^*$. Отметим, что $\Sigma^{1,1,\dots,1}\mathcal{U}^* \simeq \Sigma^{-1,-1,\dots,-1}\mathcal{U}^\perp$ – положительная образующая $\mathrm{Pic} \, \mathrm{Gr}(k, V)$. Пусть $\pi: X \rightarrow \mathrm{Gr}(k, V)$ – каноническая проекция многообразия флагов на грассманиан.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8 [6]. Пусть $\beta \in \mathbb{Z}^k$ и $\gamma \in \mathbb{Z}^{n-k}$ – две невозрастающие целочисленные последовательности, $\alpha = (\beta, \gamma) \in \mathbb{Z}^n$ – их конкатенация. Тогда $R\pi_* L_\alpha \simeq \Sigma^\beta \mathcal{U}^* \otimes \Sigma^\gamma \mathcal{U}^\perp$.

СЛЕДСТВИЕ 2.9. Если $\beta \in \mathbb{Z}^k$ и $\gamma \in \mathbb{Z}^{n-k}$ – невозрастающие последовательности и $\alpha = (\beta, \gamma) \in \mathbb{Z}^n$, то

$$H^\bullet(\mathrm{Gr}(k, V), \Sigma^\beta \mathcal{U}^* \otimes \Sigma^\gamma \mathcal{U}^\perp) \simeq H^\bullet(X, L_\alpha).$$

Поскольку всякое неприводимое $\mathrm{GL}(V)$ -эквивариантное векторное расслоение на $\mathrm{Gr}(k, V)$ изоморфно $\Sigma^\beta \mathcal{U}^* \otimes \Sigma^\gamma \mathcal{U}^\perp$ для некоторых невозрастающих $\beta \in \mathbb{Z}^k$ и $\gamma \in \mathbb{Z}^{n-k}$, следствие 2.9 вместе с теоремой 2.7 позволяет вычислить когомологии любого эквивариантного векторного расслоения на $\mathrm{Gr}(k, V)$.

Чтобы посчитать группы Ext между эквивариантными расслоениями на грассманиане, требуется применять правило Литтлвуда–Ричардсона [10]. В дальнейшем нам понадобится простое наблюдение, которое напрямую следует из этого правила.

ЛЕММА 2.10. Пусть λ и μ – пара диаграмм Юнга с k строками. Тогда для всякого неприводимого слагаемого $\Sigma^\alpha \mathcal{U}^* \subset \Sigma^\lambda \mathcal{U}^* \otimes \Sigma^\mu \mathcal{U}^*$ имеем $\lambda_i + \mu_k \leq \alpha_i \leq \lambda_1 + \mu_i$ при всех $1 \leq i \leq k$.

2.3. Капрановский исключительный набор. Пусть $X = \mathrm{Gr}(k, V)$ – грассманиан k -мерных подпространств в n -мерном векторном пространстве V . Пусть $\mathcal{U}$ – тавтологическое подрасслоение ранга k на X , а $Y_{n,k}$ – множество диаграмм Юнга, вписанных в прямоугольник размера $k \times (n - k)$.

ТЕОРЕМА 2.11 [6]. Набор $\{\Sigma^\lambda \mathcal{U} \mid \lambda \in Y_{n,k}\}$ (с любым линейным порядком, согласованным с частичным порядком вложения $\preceq$ на $Y_{n,k}$) является полным исключительным набором в $\mathcal{D}^b(X)$. Более того, этот набор является сильным, из чего следует, что $\mathcal{D}^b(X)$ эквивалентна гомотопической категории ограниченных комплексов пучков, состоящих из конечных прямых сумм пучков вида $\Sigma^\lambda \mathcal{U}$, где $\lambda \in Y_{n,k}$.

Кроме того, имеется весьма полезная спектральная последовательность, описываемая в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2.12 [6]. Для всякого $\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{D}^b(X)$ имеется обобщенная спектральная последовательность Бейлинсона

$$E_1^{pq} = \bigoplus_{|\alpha|=-p} \mathbf{H}^q(\mathcal{F}^\bullet \otimes \Sigma^{\alpha^*} \mathcal{U}^\perp) \otimes \Sigma^\alpha \mathcal{U} \implies H^{p+q}(\mathcal{F}^\bullet),$$

где α пробегает $Y_{n,k}$, а α^* обозначает транспонированное разбиение.

Отметим, что оригинальный капрановский набор основан на тавтологическом расслоении $\mathcal{U}$, в то время как мы предпочитаем работать с его двойственным $\mathcal{U}^*$. Это почти ничего не меняет, так как функтор двойственности является антиавтоэквивалентностью, которая меняет местами $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}^*$. Мы надеемся, что это не приведет к путанице.

§ 3. Комбинаторика диаграмм Юнга

3.1. Групповые действия на диаграммах. Пусть $Y_{n,k}$ — множество диаграмм Юнга, вписанных в прямоугольник размера $k \times (n - k)$. Такие диаграммы можно отождествить с невозрастающими целочисленными последовательностями $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ такими, что $n - k \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 0$. Это описание мы будем называть *обычным*. Можно также мыслить о таких диаграммах, как о целых путях, ведущих из левого нижнего угла прямоугольника в правый верхний и двигающихся только вправо и вверх. Такие пути состоят из $n - k$ горизонтальных и k вертикальных единичных отрезков. Значит, множество $Y_{n,k}$ отождествляется с множеством бинарных последовательностей длины n , содержащих ровно k единиц.

Используя последнее описание, легко построить естественное действие группы $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ на $Y_{n,k}$. Это не что иное, как циклическое действие на двоичных последовательностях, при котором образующая g группы $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ действует по правилу

$$g: a_1 a_2 \dots a_n \mapsto a_n a_1 a_2 \dots a_{n-1},$$

где $a_i \in \{0, 1\}$. В дальнейшем это действие будет называться *циклическим*. Образ $\lambda \in Y_{n,k}$ при действии образующей g обозначим через λ' и будем называть его *сдвигом* λ . В обычном описании λ' имеет следующий вид:

$$\lambda' = \begin{cases} (\lambda_1 + 1, \lambda_2 + 1, \dots, \lambda_k + 1), & \text{если } \lambda_1 < n - k, \\ (\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k, 0), & \text{если } \lambda_1 = n - k. \end{cases}$$

Действие g^d на λ будет обозначаться $\lambda^{(d)}$.

Также имеется действие группы $\mathbb{Z}$ на множестве всех диаграмм с k строками (возможно, отрицательной длины), заданное по правилу

$$\lambda(t) = (\lambda_1 + t, \lambda_2 + t, \dots, \lambda_k + t).$$

Диаграмма $\lambda(t)$ будет называться *подкруткой* λ на t .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Диаграмма $\lambda \in Y_{n,k}$ называется *верхнетреугольной*, если она лежит над диагональю прямоугольника, ведущей из правого верхнего в левый нижний угол. В обычном описании это означает, что

$$\lambda_i \leq \frac{(n - k)(k - i)}{k} \quad (3.1)$$

при всех $i = 1, \dots, k$. Аналогичным образом определяются *нижнетреугольные* диаграммы. Эти множества будут обозначаться $Y_{n,k}^u$ и $Y_{n,k}^l$ соответственно.

Известен геометрический способ описания орбиты циклического действия. Рассмотрим некоторую диаграмму $\lambda \in Y_{n,k}$ и продолжим ее n -периодически

в оба направления. Это эквивалентно продолжению двоичной последовательности, соответствующей λ . Чтобы получить какой-либо элемент орбиты, достаточно выбрать целую точку на расширенном пути и нарисовать прямоугольник размера $k \times (n - k)$, используя выбранную точку в качестве правого верхнего угла. Чтобы увидеть циклическое действие, достаточно переместить прямоугольник вдоль пути в юго-западном направлении. Целые точки на расширенном пути будут называться *вершинами*.

Приведенное описание орбит позволяет доказать следующую лемму.

ЛЕММА 3.2. *Всякая орбита циклического действия на $Y_{n,k}$ содержит верхнетреугольный элемент.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нарисуем все прямые с наклоном $k/(n - k)$, проходящие через вершины расширенного пути. Поскольку путь n -периодичен, получится не более чем n различных прямых, причем путь будет лежать над самой нижней из них. Осталось нарисовать прямоугольник с правым верхним углом в любой из вершин, лежащих на нижней прямой. Так мы получим искомым верхнетреугольный элемент.

Вершина на расширенном пути называется *и-допустимой* (*1-допустимой*), если она является правым верхним углом верхнетреугольной (нижнетреугольной) диаграммы.

На множестве диаграмм $Y_{n,k}$ имеется инволюция. Для данной диаграммы $\lambda \in Y_{n,k}$ ее *дополнение* λ^c в обычном описании задается следующим образом:

$$\lambda^c = (n - k - \lambda_k, n - k - \lambda_{k-1}, \dots, n - k - \lambda_1).$$

В двоичном описании последовательность $a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n$ отображается в свое отражение $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1$. Немедленно проверяется, что $(\lambda^c)^c = \lambda$. Важно, что взятие дополнения устанавливает биекцию между верхне- и нижнетреугольными диаграммами. Стоит также отметить, что $(\lambda')^c = (\lambda^c)^{(n-1)}$.

Отрицанием диаграммы λ с k строками называется

$$-\lambda = (-\lambda_k, -\lambda_{k-1}, \dots, -\lambda_1).$$

В этих терминах имеем $\lambda^c = (-\lambda)(n - k)$ и $\Sigma^\lambda \mathcal{U} = \Sigma^{-\lambda} \mathcal{U}^*$.

3.2. Порядки и некоторые характеристики. Далее нам потребуются два отношения порядка на $Y_{n,k}$. Первый из них – частичный порядок по включению $\preceq$. Скажем, что $\lambda \preceq \mu$, если $\lambda_i \leq \mu_i$ для всех $i = 1, \dots, k$. Как обычно, мы полагаем $\lambda \prec \mu$, если $\lambda \preceq \mu$ и $\lambda \neq \mu$. Второй – лексикографический порядок $\leq$, которому подчинен $\preceq$. Скажем, что $\lambda < \mu$, если $\lambda_i = \mu_i$ при $i = 1, \dots, t - 1$ и $\lambda_t < \mu_t$ для некоторого $1 \leq t \leq k$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Верхнетреугольная диаграмма $\lambda \in Y_{n,k}$ называется *минимальной*, если она является лексикографически наименьшим элементом в своей орбите. Множество минимальных верхнетреугольных диаграмм обозначим через $Y_{n,k}^{\text{mu}}$. Отметим, что $Y_{n,k}^{\text{mu}}$ индексирует орбиты циклического действия. Для заданной диаграммы $\lambda \in Y_{n,k}$ длина ее орбиты обозначается через $o(\lambda)$.

ПРИМЕР 3.4. Рассмотрим множество $Y_{6,3}$. Имеются следующие орбиты действия группы $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$:

Множеством верхнетреугольных диаграмм является

$$Y_{n,k}^u = \left\{ \emptyset, \square, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right\}.$$

Множеством минимальных верхнетреугольных диаграмм –

$$Y_{n,k}^{mu} = \left\{ \emptyset, \square, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right\}.$$

Верхнетреугольные диаграммы $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$ и $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$ лежат в одной орбите, причем первая из них является минимальной.

Имеется естественная ассоциативная некоммутативная операция

$$\oplus: Y_{n,k} \times Y_{m,l} \rightarrow Y_{n+m,k+l},$$

которая задана конкатенацией двоичных последовательностей, представляющих диаграммы. А именно, для данных диаграмм $a \in Y_{n,k}$ и $b \in Y_{m,l}$ имеем

$$a \oplus b = a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_m$$

в двоичном представлении $a = a_1 a_2 \dots a_n$, $b = b_1 b_2 \dots b_m$ и

$$a \oplus b = (\mu_1 + (n - k), \mu_2 + (n - k), \dots, \mu_l + (n - k), \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$$

в обычном представлении $a = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$, $b = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l)$.

ЛЕММА 3.5. Для произвольных $a, a' \in Y_{n,k}$ и $b, b' \in Y_{m,l}$ выполняется следующее:

- 1) $b \oplus a < b' \oplus a'$, если и только если $a < a'$ или $a = a'$ и $b < b'$;
- 2) $b \oplus a \preceq b' \oplus a'$, если и только если $a \preceq a'$ и $b \preceq b'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО является прямым следствием из определения.

Наконец, нам потребуется несколько характеристик различных типов диаграмм.

1. Для данной диаграммы $\lambda \in Y_{n,k}$ ее *наклоном* называется $s(\lambda) = k/(n - k)$; очевидно, что сумма двух верхнетреугольных (соответственно, нижнетреугольных) диаграмм с одинаковым наклоном вновь является верхнетреугольной (соответственно, нижнетреугольной).

2. Для данной диаграммы $\lambda \in Y_{n,k}^u$ обозначим через $r(\lambda)$ длину пути, ведущего из правого верхнего угла прямоугольника до самой правой вершины,

лежащей на диагонали и отличной от исходной. Например, если λ – строго верхнетреугольная диаграмма, то $r(\lambda) = n$.

3. Для данной диаграммы $\lambda \in Y_{n,k}^1$ обозначим через $l(\lambda)$ длину пути, ведущего из левого нижнего угла прямоугольника до самой левой вершины, лежащей на диагонали и отличной от исходной. В частности, $\lambda^c \in Y_{n,k}^u$ и $l(\lambda) = r(\lambda^c)$.

4. Для данной диаграммы $\lambda \in Y_{n,k}$ обозначим через $d(\lambda)$ наименьшее $d \geq 0$ такое, что $\lambda^{(d)}$ нижнетреугольная. Это то же самое, что длина пути, ведущего из правого верхнего угла прямоугольника до самой правой 1-допустимой вершины диаграммы. В частности, если $\lambda \in Y_{n,k}^1$ то $d(\lambda) = 0$.

5. Для данной диаграммы $\lambda \in Y_{n,k}$ обозначим через $e(\lambda)$ длину пути, ведущего из левого нижнего угла до самой левой 1-допустимой вершины, отличной от исходной. В частности, $e(\lambda) > 0$, и при $\lambda \in Y_{n,k}^1$ имеем $e(\lambda) = l(\lambda)$.

§ 4. Лефшецевы разложения на грассманианах

Далее $X = \text{Gr}(k, V)$ будет обозначать грассманиан k -мерных подпространств в n -мерном векторном пространстве V . Обозначим через $\mathcal{U} \subset V \otimes \mathcal{O}_X$ тавтологическое подрасслоение ранга k . Имеются следующие взаимно двойственные короткие точные последовательности векторных расслоений на X :

$$0 \rightarrow \mathcal{U} \rightarrow V \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow V/\mathcal{U} \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow \mathcal{U}^\perp \rightarrow V^* \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{U}^* \rightarrow 0,$$

где $\mathcal{U}^\perp = (V/\mathcal{U})^*$. Напомним, что $\Sigma^{1, \dots, 1} \mathcal{U}^* \simeq \Sigma^{-1, \dots, -1} \mathcal{U}^\perp \simeq \mathcal{O}_X(1)$ – положительная образующая $\text{Pic } X$.

4.1. Формулировка основных результатов. Рассмотрим два набора подкатегорий в $\mathcal{D}^b(X)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_i &= \langle \Sigma^\lambda \mathcal{U}^* \mid \lambda \in Y_{n,k}^{\text{mu}}, i < o(\lambda) \rangle, & i &= 0, \dots, n-1, \\ \mathcal{B}_i &= \langle \Sigma^\lambda \mathcal{U}^* \mid \lambda \in Y_{n,k}^u, i < r(\lambda) \rangle, & i &= 0, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Очевидно, что $\mathcal{A}_0 \supset \mathcal{A}_1 \supset \dots \supset \mathcal{A}_{n-1}$ и $\mathcal{B}_0 \supset \mathcal{B}_1 \supset \dots \supset \mathcal{B}_{n-1}$.

Ожидается, что оба этих набора задают лефшецево разложение $\mathcal{D}^b(X)$. Однако на данный момент мы можем доказать полноту только для $\mathcal{B}_i$.

Следующие две теоремы – основные результаты настоящей работы.

ТЕОРЕМА 4.1. *Подкатегории $\mathcal{B}_i$ образуют лефшецево разложение $\mathcal{D}^b(X)$. Исключительный набор $(\Sigma^\lambda \mathcal{U}^* \mid \lambda \in Y_{n,k}^u)$ является лефшецевым базисом данного разложения с носителем $r(\lambda)$.*

ПРИМЕР 4.2. Рассмотрим случай $X = \text{Gr}(3, 6)$. Имеется лефшецев базис

$$(\mathcal{O}_X, \mathcal{U}^*, \Lambda^2 \mathcal{U}^*, S^2 \mathcal{U}^*, \Sigma^{(2,1,0)} \mathcal{U}^*)$$

со следующими значениями функции-носителя: $(6, 6, 4, 2, 2)$. Другими словами, имеется полный лефшецев исключительный набор

$$\begin{pmatrix} \Sigma^{(2,1,0)} \mathcal{U}^* & \Sigma^{(2,1,0)} \mathcal{U}^*(1) & & & & \\ S^2 \mathcal{U}^* & S^2 \mathcal{U}^*(1) & & & & \\ \Lambda^2 \mathcal{U}^* & \Lambda^2 \mathcal{U}^*(1) & \Lambda^2 \mathcal{U}^*(2) & \Lambda^2 \mathcal{U}^*(3) & & \\ \mathcal{U}^* & \mathcal{U}^*(1) & \mathcal{U}^*(2) & \mathcal{U}^*(3) & \mathcal{U}^*(4) & \mathcal{U}^*(5) \\ \mathcal{O}_X & \mathcal{O}_X(1) & \mathcal{O}_X(2) & \mathcal{O}_X(3) & \mathcal{O}_X(4) & \mathcal{O}_X(5) \end{pmatrix}.$$

Здесь объекты, стоящие в одном столбце, порождают подкрученные блоки соответствующего разложения.

ТЕОРЕМА 4.3. *Категории $\mathcal{A}_i(i)$ полуортгогональны. Другими словами, имеетя лефшецево разложение*

$$\langle \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1(1), \dots, \mathcal{A}_{n-1}(n-1) \rangle = \mathcal{A} \subset \mathcal{D}^b(X)$$

некоторой полной триангулированной подкатегории $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}^b(X)$ с лефшецевым базисом, заданным исключительным набором $(\Sigma^\lambda \mathcal{U}^* \mid \lambda \in Y_{n,k}^{\text{mu}})$ и носителем $o(\lambda)$.

Теореме 4.3 сопутствуют две важные гипотезы.

ГИПОТЕЗА 4.4. Подкатегории $\mathcal{A}_i(i)$ порождают $\mathcal{D}^b(X)$. Иначе говоря, подкатегории $\mathcal{A}_i$ образуют лефшецево разложение $\mathcal{D}^b(X)$.

ПРИМЕР 4.5. В случае $X = \text{Gr}(3, 6)$ получаем лефшецев исключительный набор

$$\begin{pmatrix} \Sigma^{(2,1,0)} \mathcal{U}^* & \Sigma^{(2,1,0)} \mathcal{U}^*(1) & & & & \\ \Lambda^2 \mathcal{U}^* & \Lambda^2 \mathcal{U}^*(1) & \Lambda^2 \mathcal{U}^*(2) & \Lambda^2 \mathcal{U}^*(3) & \Lambda^2 \mathcal{U}^*(4) & \Lambda^2 \mathcal{U}^*(5) \\ \mathcal{U}^* & \mathcal{U}^*(1) & \mathcal{U}^*(2) & \mathcal{U}^*(3) & \mathcal{U}^*(4) & \mathcal{U}^*(5) \\ \mathcal{O}_X & \mathcal{O}_X(1) & \mathcal{O}_X(2) & \mathcal{O}_X(3) & \mathcal{O}_X(4) & \mathcal{O}_X(5) \end{pmatrix}.$$

Можно сравнить данный набор с набором из примера 4.2 и заметить, что объекты $S^2 \mathcal{U}^*$ и $S^2 \mathcal{U}^*(1)$ были заменены на $\Lambda^2 \mathcal{U}^*(4)$ и $\Lambda^2 \mathcal{U}^*(5)$, что уменьшило первый блок набора.

Как уже было упомянуто, важным вопросом является построение не просто произвольных, а минимальных лефшецевых разложений. Мы ожидаем следующее.

ГИПОТЕЗА 4.6. Подкатегории $\mathcal{A}_i$ образуют минимальное лефшецево разложение $\mathcal{D}^b(X)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.7. Мы рассматриваем два лефшецевых разложения $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{B}_i$ категории $\mathcal{D}^b(X)$. Имеем $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{B}_0$, так как исключительный набор, порождающий $\mathcal{A}_0$, является поднабором набора, порождающего $\mathcal{B}_0$. Действительно, первый из них состоит из объектов, соответствующих минимальным верхнетреугольным диаграммам, в то время как второй – всем верхнетреугольным диаграммам. Значит, разложение $\mathcal{A}_i$ не превосходит разложения $\mathcal{B}_i$ по отношению к порядку включения, заданному на первых блоках.

Более того, имеются два случая, в которых $\mathcal{A}_0 = \mathcal{B}_0$. Это выполняется тогда и только тогда, когда k и n взаимно просты или $k = 2$. В этих случаях орбиты циклического действия на $Y_{n,k}$ имеют только по одному верхнетреугольному элементу, который автоматически минимален, и для всякого $\lambda \in Y_{n,k}^u$ выполнено $r(\lambda) = o(\lambda)$. Значит, $\mathcal{A}_i = \mathcal{B}_i$ при всех $i = 0, \dots, n-1$, что, в частности, согласуется с утверждением о том, что всякое лефшецево разложение задается своим первым блоком.

Гипотеза 4.6 представляется достаточно сложной, ибо до сих пор не известен естественный способ для проверки лефшецевых разложений на минимальность. Несмотря на это имеются несколько случаев, когда гипотеза немедленно выполняется.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.8. *Выполнено следующее:*

- 1) гипотезы 4.4, 4.6 выполняются, когда n и k взаимно просты;
- 2) если $k = p$ – простое число, то из гипотезы 4.4 следует гипотеза 4.6.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что число блоков лешпецева разложения ограничено сверху индексом многообразия. Действительно, если $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X(-n)$, то по двойственности Серра

$$\mathrm{Hom}(E(n), E(n)) \simeq \mathrm{Ext}^d(E(n), E)^*$$

для всякого объекта $E \in \mathcal{D}^b(X)$, где d – размерность многообразия X . Первая группа содержит выделенный ненулевой элемент

$$\mathrm{id}_{E(n)} \in \mathrm{Hom}(E(n), E(n)),$$

откуда видно, что группа $\mathrm{Ext}^d(E(n), E)$ ненулевая. Значит, объект $E(n)$ не может быть ортогонален слева к E ни при каком $E \in \mathcal{D}^b(X)$.

В случае грассманиана $\mathrm{Gr}(k, V)$ имеем $n = \dim V$. Значит, все наши разложения уже состоят из максимально возможного числа блоков.

В замечании 4.7 мы видели, что подкатегории $\mathcal{A}_i$ совпадают с $\mathcal{B}_i$ при взаимно простых k и n , а значит, образуют лешпецево разложение. Более того, в этом случае разложение прямоугольное и имеет максимально возможное число блоков, а потому является минимальным. Утверждение 1) доказано.

Чтобы доказать утверждение 2), сначала заметим, что в случае $k = p$ и k делит n имеется всего одна короткая орбита, представленная минимальной верхнетреугольной диаграммой

$$\left(\frac{(n-k)}{k}(k-1), \dots, \frac{(n-k)}{k}, 0 \right).$$

Далее, число N объектов всякого полного исключительного набора совпадает с рангом $\mathrm{rank} K_0(X) = \binom{n}{k}$. Если $k = p$ – простой делитель n , то число N не делится на n . Отсюда следует, что в данном случае не существует полного прямоугольного лешпецева набора (разложения). В то же время лешпецев базис, соответствующий $\mathcal{A}_i$, содержит ожидаемое минимальное число элементов $\lceil \frac{N}{n} \rceil$. Предложение доказано.

Наконец, стоит отметить, что второе лешпецево разложение было независимо совместно открыто К. Бравом и Х. Томасом (частное сообщение). Однако они доказали только исключительность соответствующего лешпецева базиса и не опубликовали свой результат. В настоящей работе мы доказываем полуортогональность обоих разложений и полноту второго.

4.2. Полуортогональность. Здесь доказывается полуортогональность подкатегорий $\mathcal{A}_i(i)$ и $\mathcal{B}_j(j)$:

$$\mathcal{A}_j(j) \subset {}^\perp \mathcal{A}_i(i), \quad \mathcal{B}_j(j) \subset {}^\perp \mathcal{B}_i(i), \quad 0 \leq i < j \leq n-1.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.9. *Подкатегории $\mathcal{B}_i(i)$ полуортогональны:*

$$\mathcal{B}_j(j) \subset {}^\perp \mathcal{B}_i(i), \quad 0 \leq i < j \leq n-1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим часть 2) критерия, сформулированного в лемме 2.5. Достаточно проверить, что при всех $\lambda, \mu \in Y_{n,k}^u$ и $0 < t < r(\lambda)$ выполняется

$$\mathrm{Ext}^\bullet(\Sigma^\lambda \mathcal{U}^*(t), \Sigma^\mu \mathcal{U}^*) = 0.$$

Во-первых, имеем

$$\mathrm{Ext}^\bullet(\Sigma^\lambda \mathcal{U}^*(t), \Sigma^\mu \mathcal{U}^*) = H^\bullet(X, \Sigma^\lambda \mathcal{U} \otimes \Sigma^\mu \mathcal{U}^*(-t)).$$

Чтобы посчитать последние, применим правило Литтлвуда–Ричардсона. Пусть $\Sigma^\alpha \mathcal{U}^*$ – неприводимое слагаемое в разложении $\Sigma^\lambda \mathcal{U} \otimes \Sigma^\mu \mathcal{U}^*(-t) = \Sigma^{-\lambda} \mathcal{U}^* \otimes \Sigma^\mu \mathcal{U}^*(-t)$. По лемме 2.10 имеем

$$-\lambda_{k+1-i} - t \leq \alpha_i \leq \mu_i - t. \quad (4.1)$$

Поскольку диаграммы λ и μ верхнетреугольные, согласно определению имеем

$$0 \leq \lambda_i, \mu_i \leq \frac{(n-k)(k-i)}{k}$$

(см. (3.1)). Совместим последние два неравенства и получим

$$-\frac{(i-1)(n-k)}{k} - t \leq \alpha_i \leq \frac{(k-i)(n-k)}{k} - t. \quad (4.2)$$

Чтобы вычислить $H^\bullet(X, \Sigma^\alpha \mathcal{U}^*)$, достаточно применить теорему Бореля–Ботта–Вейля. Хотелось бы, чтобы когомологии обратились в нуль. Это происходит только в том случае, когда пара элементов последовательности

$$\alpha + \rho = (n + \alpha_1, n - 1 + \alpha_2, \dots, n - k + 1 + \alpha_k, n - k, \dots, 2, 1) \quad (4.3)$$

совпадают. Поскольку последовательность $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ невозрастающая, первые k членов последовательности (4.3) различны и убывают. Последние $n - k$ членов последовательности (4.3) также различны и убывают. Таким образом, некоторые члены из (4.3) совпадают, если и только если $n + 1 - i + \alpha_i$ лежит в промежутке $[1, n - k]$ при некотором $1 \leq i \leq k$.

Предположим, что все члены (4.3) различны, т. е.

$$n + 1 - j + \alpha_j \geq n - k + 1, \quad n - j + \alpha_{j+1} \leq 0 \quad (4.4)$$

при некотором $1 \leq j \leq k - 1$. Здесь мы воспользовались тем, что

$$\alpha_1 \geq -t > -n \implies n + \alpha_1 > 0 \quad \text{и} \quad \alpha_k \leq -t < 0 \implies n - k + 1 + \alpha_k \leq n - k.$$

Теперь воспользуемся неравенствами (4.4) и (4.2):

$$\begin{aligned} \alpha_j \geq j - k &\implies \frac{(k-j)(n-k)}{k} - t \geq j - k, \\ \alpha_{j+1} \leq j - n &\implies -\frac{j(n-k)}{k} - t \leq j - n. \end{aligned}$$

Получаем следующее:

$$t \leq \frac{n(k-j)}{k}, \quad t \geq \frac{n(k-j)}{k} \implies t = \frac{n(k-j)}{k}.$$

Отметим, что t – целое число. Совместим неравенства $n - j + \alpha_{j+1} \leq 0$ и (4.1) для λ_{k-j} :

$$-\lambda_{k-j} - \frac{n(k-j)}{k} \leq j - n \implies \lambda_{k-j} \geq \frac{(n-k)j}{k}.$$

Учитывая, что диаграмма λ верхнетреугольная, получаем диаграмму $\lambda_{k-j} \leq (n-k)j/k$. Следовательно,

$$\lambda_{k-j} = \frac{(n-k)j}{k},$$

т. е. λ выходит на диагональ в точке $(k-j)$ -й строки. Заметим, что расстояние от правого верхнего угла прямоугольника до этой точки есть

$$(k-j) + \left((n-k) - \frac{(n-k)j}{k} \right) = \frac{n(k-j)}{k} = t.$$

Таким образом, $t \geq r(\lambda)$, что противоречит условию. Предложение доказано.

Чтобы проверить полуортогональность подкатегорий $\mathcal{A}_i(i)$, нам понадобится следующее простое наблюдение.

ЛЕММА 4.10. Пусть $\Sigma^\alpha \mathcal{U}^*$ – неприводимое слагаемое в разложении $\Sigma^\lambda \mathcal{U} \otimes \Sigma^\mu \mathcal{U}^*$ для некоторых $\lambda, \mu \in Y_{n,k}$. Если все члены $\alpha_i \geq 0$ неотрицательны, то $\lambda \leq \mu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $\Sigma^\alpha \mathcal{U}^* \subset \Sigma^\lambda \mathcal{U} \otimes \Sigma^\mu \mathcal{U}^*$ тогда и только тогда, когда $\Sigma^\mu \mathcal{U}^* \subset \Sigma^\alpha \mathcal{U}^* \otimes \Sigma^\lambda \mathcal{U}^*$. Поскольку λ и α содержат только неотрицательные члены, по лемме 2.10 для всякого неприводимого слагаемого $\Sigma^\beta \mathcal{U}^*$ в $\Sigma^\alpha \mathcal{U}^* \otimes \Sigma^\lambda \mathcal{U}^*$ выполнено $\lambda \leq \beta$. Лемма доказана.

Мы готовы доказать теорему 4.3. Напомним, что она утверждает полуортогональность подкатегорий $\mathcal{A}_i(i)$:

$$\mathcal{A}_j(j) \subset {}^\perp \mathcal{A}_i(i), \quad 0 \leq i < j \leq n-1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.3. Будем следовать доказательству предложения 4.9 при $\lambda, \mu \in Y_{n,k}^{\text{mu}}$. Оно остается верным до последнего момента, где используется неравенство $t < r(\lambda)$, которое теперь заменено более слабым предположением $t < o(\lambda)$.

Таким образом, мы можем полагать

$$t = \frac{n(k-j)}{k} \in \mathbb{Z}, \quad \lambda_{k-j} = \frac{j(n-k)}{k}. \quad (4.5)$$

Аналогично проверяется, что $\mu_j = (k-j)(n-k)/k$.

Равенства (4.5) означают, что диаграммы λ, μ выходят на диагональ и могут быть записаны в виде $\mu = b \oplus a$ и $\lambda = b' \oplus a'$ для некоторых $a, b' \in Y_{jn/k, j}$ и $a', b \in Y_{(k-j)n/k, k-j}$. Поскольку согласно правилу Литтлвуда–Ричардсона i -я строка μ вносит вклад в строки слагаемого тензорного произведения с номерами не меньше i , применяя лемму 4.10, получаем, что $a \succeq b'$ и, аналогично, $a' \succeq b$.

Заметим, что $a \oplus b$ (соответственно, $a' \oplus b'$) лежит в той же орбите, что и μ (соответственно, λ).

Далее понадобится следующее наблюдение. Из минимальности λ следует, что $\lambda = b' \oplus a' \leq a' \oplus b'$. Однако из неравенства $t < o(\lambda)$ следует, что $b' \oplus a'$ и $a' \oplus b'$ не могут совпадать, а потому неравенство строгое:

$$b' \oplus a' < a' \oplus b'. \quad (4.6)$$

Рассмотрим случай $a \succ b'$ и $a' \succ b$. Тогда

$$\lambda = b' \oplus a' < a' \oplus b' < b \oplus a \leq a \oplus b < b' \oplus a' = \lambda,$$

где первое и третье неравенства следуют из минимальности λ и μ , второе следует из $a \succ b'$, а четвертое – из $a' \succ b$. Получаем противоречие: $\lambda < \lambda$.

В дальнейшем для диаграммы $\alpha \in Y_{p,q}$ под ее высотой подразумевается $h(\alpha) = q$. Мы также используем обозначение

$$m^p = \underbrace{m \oplus m \oplus \cdots \oplus m}_p.$$

Случай 1: $b' \prec a$, $a' = b$ и $h(b) \geq h(a)$. Всё еще выполняются неравенства

$$\lambda = b' \oplus b < b \oplus b' < b \oplus a = \mu \leq a \oplus b. \quad (4.7)$$

В частности, $b' \oplus b < b \oplus a \leq a \oplus b$, откуда следует, что $b = c \oplus a$ и $\lambda = b' \oplus c \oplus a$. Поскольку $b' \prec a$, получаем $b \oplus b' < b' \oplus c \oplus a = \lambda$, что противоречит неравенству (4.7).

Случай 2: $b' \prec a$, $a' = b$ и $h(b) < h(a)$. Как и в случае 1, рассмотрим неравенства

$$b' \oplus b < b \oplus a \leq a \oplus b.$$

Из них следует, что $a = c \oplus b$ и $\mu = b \oplus c \oplus b$. Диаграммы $c \oplus b^2$ и $b^2 \oplus c$ верхнетреугольны и лежат в орбите μ . Последняя минимальна, откуда $\mu \leq b^2 \oplus c$ и $\mu \leq c \oplus b^2$. Из последних двух неравенств следует, что $c \oplus b = b \oplus c$, а поэтому существует диаграмма t с тем же наклоном, что у b , такая, что $b = t^p$ и $\mu = t^{p+q}$.

Рассмотрим теперь неравенства

$$\lambda = b' \oplus t^p < t^p \oplus b' \leq t^q \oplus t^p = \mu.$$

Поскольку $h(b') = h(a) > h(b) = h(t^p)$, мы видим, что $b' = d \oplus t^p$. Повторяя данное рассуждение, можно выделять слагаемое, равное t^p , пока не останется

$$\lambda = e \oplus t^{sp} \oplus t^p < t^p \oplus e \oplus t^{sp} \leq t^r \oplus t^p \oplus t^{sp} = \mu,$$

где $0 < h(e) = h(t^r) \leq h(t^p)$, а s – положительное целое число. Из последнего неравенства получается $e < t^r$. В то же время $r \leq p$, откуда $t^p \oplus t^{sp} \oplus e < e \oplus t^{sp} \oplus t^p = \lambda$, что вновь противоречит минимальности λ .

Случай $b \prec a'$, $a = b'$ рассматривается аналогично.

Наконец, заметим, что случай $b = a'$ и $a = b'$ невозможен: мы показали, что

$$\lambda = b' \oplus a' < a' \oplus b' = b \oplus a = \mu.$$

Однако в таком случае λ и μ лежат в одной орбите и должны совпадать, так как обе диаграммы минимальные верхнетреугольные. Теорема доказана.

§ 5. Полнота

Целью в настоящем параграфе является доказательство полноты разложения

$$\langle \mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1(1), \dots, \mathcal{B}_{n-1}(n-1) \rangle.$$

Для этого нам понадобится класс точных комплексов, которые мы называем *ступенчатыми*.

5.1. Ступенчатые комплексы. Сначала докажем следующую лемму.

ЛЕММА 5.1. Пусть $\lambda \in Y_{n,k}$ – диаграмма при $\lambda_1 = n - k$. Тогда

$$\mathrm{Ext}^p(\Sigma^\lambda \mathcal{U}^*, \Sigma^{\lambda'} \mathcal{U}^*(-1)) = \begin{cases} k & \text{при } p = n - k, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству предложения 4.9. Во-первых, имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^\bullet(\Sigma^\lambda \mathcal{U}^*, \Sigma^{\lambda'} \mathcal{U}^*(-1)) &= H^\bullet(X, \Sigma^\lambda \mathcal{U} \otimes \Sigma^{\lambda'} \mathcal{U}^*(-1)) \\ &= H^\bullet(X, \Sigma^{-\lambda} \mathcal{U}^* \otimes \Sigma^{\lambda'} \mathcal{U}^*(-1)). \end{aligned}$$

Чтобы посчитать последние, применим правило Литтлвуда–Ричардсона. Пусть $\Sigma^\alpha \mathcal{U}^*$ – неприводимое слагаемое в разложении $\Sigma^\lambda \mathcal{U} \otimes \Sigma^{\lambda'} \mathcal{U}^*(-1)$. Поскольку мы хотим получить ненулевые $H^\bullet(X, \Sigma^\alpha \mathcal{U}^*)$, по теореме Бореля–Ботта–Вейля все элементы последовательности

$$\alpha + \rho = (n + \alpha_1, n - 1 + \alpha_2, \dots, n - k + 1 + \alpha_k, n - k, \dots, 2, 1) \quad (5.1)$$

должны быть различны. Так как последовательность α_i не возрастает, первые k и последние $n - k$ членов (5.1) различны. Значит, достаточно проверить, что

$$\{n + \alpha_1, n - 1 + \alpha_2, \dots, n - k + 1 + \alpha_k\} \cap \{n - k, \dots, 2, 1\} = \emptyset. \quad (5.2)$$

Из правила Литтлвуда–Ричардсона немедленно следуют неравенства $\alpha_i \geq -(n - k) - 1$. Значит, все элементы последовательности $(n + \alpha_1, \dots, n - k + 1 + \alpha_k)$ неотрицательные. Эта последовательность не возрастает, откуда следует, что если выполнено (5.2), то

$$\begin{aligned} \text{либо } \alpha_i &\geq -1 \text{ при } i = 1, \dots, k - 1 \text{ и } \alpha_k = -(n - k) - 1, \\ \text{либо } \alpha_i &\geq 0 \text{ при всех } i = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

По лемме 2.10 имеем $\alpha_k \leq (-\lambda)_k + \lambda'_1 = -\lambda_1 + \lambda_2 - 1 \leq -1$, откуда второй случай невозможен. Далее, $\Sigma^{\bar{\alpha}} \mathcal{U}^*$ при $\bar{\alpha} = (-1, \dots, -1, -(n - k) - 1)$ содержится в $\Sigma^\lambda \mathcal{U} \otimes \Sigma^{\lambda'} \mathcal{U}^*(-1)$ с кратностью 1, будучи единственным членом в разложении, дающим ненулевой вклад в когомологии.

Теперь применим теорему Бореля–Ботта–Вейля, чтобы посчитать $H^\bullet(X, \Sigma^{-1, \dots, -1, -(n - k) - 1} \mathcal{U}^*)$. Имеем

$$\bar{\alpha} + \rho = (n - 1, n - 2, \dots, n - k + 1, 0, n - k, \dots, 2, 1).$$

Пусть σ – циклическая перестановка последних $n - k + 1$ членов. Тогда $\ell(\sigma) = n - k$ и $\sigma(\bar{\alpha} + \rho) = (n - 1, \dots, 1, 0)$, $\sigma(\bar{\alpha} + \rho) - \rho = (-1, \dots, -1, -1)$.

Наконец, получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Ext}^p(\Sigma^\lambda \mathcal{U}^*, \Sigma^{\lambda'} \mathcal{U}^*(-1)) &= H^p(X, \Sigma^{\bar{\alpha}} \mathcal{U}^*) \\ &= \begin{cases} \Sigma^{-1, \dots, -1} V^* \simeq \Lambda^n V & \text{при } p = n - k, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Если рассмотреть $\lambda \in Y_{n,k}$ при $\lambda_1 < n - k$, то $\Sigma^{\lambda'} \mathcal{U}^*(-1) \simeq \Sigma^\lambda \mathcal{U}^*$. Это значит, что

$$\operatorname{Ext}^p(\Sigma^\lambda \mathcal{U}^*, \Sigma^{\lambda'} \mathcal{U}^*(-1)) = \operatorname{Ext}^p(\Sigma^\lambda \mathcal{U}^*, \Sigma^\lambda \mathcal{U}^*) = \begin{cases} k, & \text{если } p = 0, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

в силу исключительности расслоения $\Sigma^\lambda \mathcal{U}^*$. Применяя лемму 5.1, получаем, что всегда имеется каноническое расширение между расслоениями $\Sigma^\lambda \mathcal{U}^*$ и $\Sigma^{\lambda'} \mathcal{U}^*(-1)$ в степени 0 или $n - k$. Более того, композиция

$$\begin{aligned} \Sigma^\lambda \mathcal{U}^* \rightarrow \Sigma^{\lambda'} \mathcal{U}^*(-1)[d_1] \rightarrow \Sigma^{\lambda''} \mathcal{U}^*(-2)[d_2] \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \Sigma^{\lambda^{(n)}} \mathcal{U}^*(-n)[d_n] = \Sigma^\lambda \mathcal{U}^*(-n)[k(n - k)] \end{aligned}$$

нетривиальна в $\operatorname{Ext}^{k(n-k)}(\Sigma^\lambda \mathcal{U}^*, \Sigma^\lambda \mathcal{U}^*(-n)) \simeq \operatorname{Hom}(\Sigma^\lambda \mathcal{U}^*, \Sigma^\lambda \mathcal{U}^*)^* = k$.

Оказывается, каноническое расширение из леммы 5.1 можно явно реализовать.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Пусть $\lambda \in Y_{n,k}$ – диаграмма при $\lambda_1 = n - k$. Тогда имеется длинная точная последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \Sigma^{\lambda'} \mathcal{U}^*(-1) \rightarrow \Lambda^{\nu_{n-k}} V^* \otimes \Sigma^{\mu_{n-k}} \mathcal{U}^* \rightarrow \dots \rightarrow \Lambda^{\nu_2} V^* \otimes \Sigma^{\mu_2} \mathcal{U}^* \\ \rightarrow \Lambda^{\nu_1} V^* \otimes \Sigma^{\mu_1} \mathcal{U}^* \rightarrow \Sigma^\lambda \mathcal{U}^* \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

для некоторых $0 \leq \nu_i < n$ и $\mu_i \in Y_{n,k}$, которые будут описаны далее.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим двойственную длинную точную последовательность. Применим теорему 2.12 к комплексу, состоящему из единственного пучка $\Sigma^{\lambda'} \mathcal{U}(1)$. Необходимо посчитать

$$E_1^{pq} = \bigoplus_{|\alpha|=-p} \mathbf{H}^q(\Sigma^{\lambda'} \mathcal{U}(1) \otimes \Sigma^{\alpha^*} \mathcal{U}^\perp) \otimes \Sigma^\alpha \mathcal{U}.$$

Сначала найдем все такие $\alpha \in Y_{n,k}$, что $\mathbf{H}^\bullet(\Sigma^{\lambda'} \mathcal{U}(1) \otimes \Sigma^{\alpha^*} \mathcal{U}^\perp) \neq 0$. Теорема Бореля–Ботта–Вейля утверждает, что последнее выполняется тогда и только тогда, когда все члены последовательности

$$(n - \lambda'_k + 1, (n - 1) - \lambda'_{k-1} + 1, \dots, (n - k + 1) - \lambda'_1 + 1, n - k + \alpha_1^*, \dots, 2 + \alpha_{n-k-1}^*, 1 + \alpha_{n-k}^*)$$

различны. Вспомним, что $\lambda' = (\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{n-k}, 0)$. Предыдущую последовательность можно переписать в виде

$$(n + 1, n - \lambda_k, \dots, n - k + 2 - \lambda_2, n - k + \alpha_1^*, \dots, 2 + \alpha_{n-k-1}^*, 1 + \alpha_{n-k}^*). \quad (5.4)$$

Предположим, что все члены последовательности (5.4) различны. Тогда после подходящей перестановки они образуют строго убывающую последовательность. Поскольку все члены, кроме первого, лежат в промежутке $[1, n]$, переставленная последовательность будет иметь вид

$$(n+1, n, \dots, n-j+1, n-j-1, \dots, 1) \quad (5.5)$$

для некоторого $0 \leq j \leq n-1$. Более того, $n-j \neq n-k+t-\lambda_t \Leftrightarrow j \neq k+\lambda_t-t$ при всех $2 \leq t \leq k$. Значит, имеется $n-k+1$ способов выбрать значение j , каждый из которых дает свое α^* , получаемое такой перестановкой последовательности (5.5), что первые k мест заняты $n+1$ и $n-k+t-\lambda_t$, а последние $n-k$ членов убывают. Наконец, заметим, что $\alpha^* = \lambda^*$ соответствует $j = n-1$.

Теперь мы можем выписать все возможные α :

$$(0) \alpha^* = \mu_0 = \lambda^*;$$

$$(i) \alpha^* = \mu_i = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_{n-k-i}^*, \lambda_{n-k-i+2}^* - 1, \dots, \lambda_{n-k}^* - 1, 0) \text{ для } i = 1, \dots, n-k.$$

В каждом случае необходимо определить p и q . Напомним, что p совпадает с $-|\alpha|$, а q равно числу инверсий в последовательности (5.4). Простое вычисление дает следующий ответ:

$$(0) p_0 = -|\lambda|, q_0 = |\lambda| - (n-k);$$

$$(i) p_i = -|\lambda| + \lambda_{n-k+1-i}^* + (i-1), q_i = |\lambda| - (n-k) - (\lambda_{n-k+1-i}^* - 1).$$

Сразу видно, что все значения $p_i + q_i = -(n-k) + i$ различны при $i = 0, \dots, n-k$. Учитывая тот факт, что спектральная последовательность сходится к единственному пучку, помещенному в степени 0, получаем длинную точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathbf{H}^{q_0}(\Sigma^{\lambda'} \mathcal{U}(1) \otimes \Sigma^{\mu_0} \mathcal{U}^\perp) \otimes \Sigma^{\mu_0^*} \mathcal{U} \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \mathbf{H}^{q_{n-k}}(\Sigma^{\lambda'} \mathcal{U}(1) \otimes \Sigma^{\mu_0} \mathcal{U}^\perp) \otimes \Sigma^{\mu_{n-k}^*} \mathcal{U} \rightarrow \Sigma^{\lambda'} \mathcal{U}(1) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Наконец, вычислим $\mathbf{H}^{q_i}(\Sigma^{\lambda'} \mathcal{U}(1) \otimes \Sigma^{\mu_i} \mathcal{U}^\perp)$. После такой перестановки последовательности (5.4), в результате которой члены последовательности стали строго убывать, (5.4) будет иметь вид

$$(n+1, n, \dots, n+1-\nu_i, \dots, 1).$$

Применяя теорему Бореля–Ботта–Вейля, получаем $\mathbf{H}^{q_i}(\Sigma^{\lambda'} \mathcal{U}(1) \otimes \Sigma^{\mu_i} \mathcal{U}^\perp) \simeq \Lambda^{\nu_i} V$. Наконец, отметим, что $\mu_0 = \lambda^*$ и $\nu_0 = n$. Поскольку $\Lambda^n V \simeq \mathbf{k}$, после

Рис. 1

дуализации получается искомая длинная точная последовательность. Предложение доказано.

Рис. 2

Имеется комбинаторное описание μ_i и ν_i из предложения 5.3. Для диаграммы $\lambda \in Y_{n,k}$ с $\lambda_1 = n - k$ нарисует полосу ширины 1, как показано на рис. 1.

Диаграмма μ_i изображена на рис. 2 жирной линией. Нужно пойти по пути λ слева направо и “подпрыгнуть” на путь $\lambda'(-1)$ в точке с абсциссой $n - k - i$.

Число ν_i равно числу клеток, которое нужно убрать из диаграммы λ , чтобы получить μ_i . На рис. 2 они изображены серым цветом.

5.2. Полнота. Здесь мы закончим доказательство теоремы 4.1. Полуортогональность уже была проверена в предложении 4.9. Чтобы доказать полноту, удобно ввести в рассмотрение еще одно лешцево разложение.

Рассмотрим подкатегории

$$\mathcal{B}'_i = \langle \Sigma^\lambda \mathcal{U}^* \mid \lambda \in Y_{n,k}^1, i < l(\lambda) \rangle.$$

ПРИМЕР 5.4. В случае $X = \text{Gr}(3, 6)$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{B}'_0 &= \mathcal{B}'_1 = \langle \mathcal{O}_X(3), \Lambda^2 \mathcal{U}^*(2), \mathcal{U}^*(2), \Sigma^{(3,3,1)} \mathcal{U}^*, \Sigma^{(3,2,1)} \mathcal{U}^* \rangle, \\ \mathcal{B}'_2 &= \mathcal{B}'_3 = \langle \mathcal{O}_X(3), \Lambda^2 \mathcal{U}^*(2), \mathcal{U}^*(2) \rangle, \quad \mathcal{B}'_4 = \mathcal{B}'_5 = \langle \mathcal{O}_X(3), \Lambda^2 \mathcal{U}^*(2) \rangle. \end{aligned}$$

Нам понадобится следующее наблюдение.

ЛЕММА 5.5. *Имеется лешцево разложение*

$$\langle \mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1(1), \dots, \mathcal{B}_{n-1}(n-1) \rangle = \mathcal{D}^b(X),$$

если и только если имеется лешцево разложение

$$\langle \mathcal{B}'_{n-1}(1-n), \dots, \mathcal{B}'_1(-1), \mathcal{B}_0 \rangle = \mathcal{D}^b(X). \quad (5.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функтор двойственности является антиавтоэквивалентностью категорий, а функтор подкрутки на $\mathcal{O}_X(n-k)$ – автоэквивалентностью. Композиция этих функторов дает антиавтоэквивалентность, которая сохраняет полноту и обращает соотношения ортогональности. Остается заметить, что $\mathcal{B}'_i = \mathcal{B}_i^*(n-k)$. Лемма доказана.

Согласно лемме 5.5 достаточно проверить полноту разложения (5.6), чтобы доказать полноту разложения $\mathcal{B}_i(i)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.6. *Разложение $\mathcal{B}'_i(-i)$ полное. Иными словами,*

$$\langle \mathcal{B}'_{n-1}(1-n), \dots, \mathcal{B}'_1(-1), \mathcal{B}'_0 \rangle = \mathcal{D}^b(X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напоминаем, что определения $r(\lambda)$, $l(\lambda)$, $d(\lambda)$ и $e(\lambda)$ даны в конце п. 3.2.

Для диаграммы λ такой, что $\lambda(t) \in Y_{n,k}$ при некотором t , обозначим через $\tilde{\lambda}$ диаграмму $\lambda(-\lambda_1 + n - k)$. Удобно дуализировать капрановский набор и использовать $(\Sigma^\lambda \mathcal{U}^* \mid \lambda \in Y_{n,k})$. Поскольку функтор двойственности является антиавтоэквивалентностью, это полный исключительный набор в $\mathcal{D}^b(X)$.

Достаточно показать, что всякий объект из $(\Sigma^\lambda \mathcal{U}^* \mid \lambda \in Y_{n,k})$ обладает резольвентой, все члены которой являются прямыми суммами векторных расслоений $\Sigma^\mu \mathcal{U}^*(-t)$, где $\mu \in Y_{n,k}^1$ и $0 \leq t < l(\mu)$.

Данное векторное расслоение $\Sigma^\lambda \mathcal{U}^*(-t)$ при $\lambda \in Y_{n,k}$ можно подкрутить на $\mathcal{O}_X(t + n - k - \lambda_1)$ и получить векторное расслоение, удовлетворяющее условиям предложения 5.3. Подкручивая назад длинную точную последовательность (5.3), получаем резольвенту исходного расслоения. Неформально, для данного расслоения $\Sigma^\lambda \mathcal{U}^*$ при $\lambda \in Y_{n,k}$ мы хотели бы взять эту резольвенту, заменить каждый член, который не имеет вид $\Sigma^\mu \mathcal{U}^*(-t)$ при $\mu \in Y_{n,k}^1$, на его резольвенту и продолжить этот процесс до остановки. Теперь останется свернуть полученный “мультикомплекс” в одну резольвенту. Однако требуется доказать, что описанный процесс действительно останавливается, а расслоения $\Sigma^\mu \mathcal{U}^*$ при $\mu \in Y_{n,k}^1$ появляются с допустимыми подкрутками. Формализуем предыдущее рассуждение.

Для всякого $\lambda \in Y_{n,k}$ такого, что $\lambda_1 = n - k$ и $\lambda \notin Y_{n,k}^1$, рассмотрим множество

$$\text{Exp}(\lambda) = \{(\tilde{\mu}_1, t_1), \dots, (\tilde{\mu}_{n-k}, t_{n-k}), (\tilde{\lambda}', t_{n-k+1})\},$$

где $t_i = n - k - \mu_{i,1}$ при $1 \leq i \leq n - k$ и $t_{n-k+1} = (n - k - \lambda'_1) + 1$. Положим $\text{Exp}(\lambda) = \{(\lambda, 0)\}$ для $\lambda \in Y_{n,k}^1$ и обозначим $\text{Exp}^{(1)}(\lambda) = \text{Exp}(\lambda)$. Далее, определим

$$\text{Exp}^{(k+1)}(\lambda) = \bigcup_{(\mu, t) \in \text{Exp}^{(k)}(\lambda)} \text{Exp}(\mu)[t],$$

где $\{(\mu_i, t_i)\}_{i \in I}[t] = \{(\mu_i, t_i + t)\}_{i \in I}$.

Заметим, что

$$\Sigma^\lambda \mathcal{U}^* \in \langle \Sigma^\mu \mathcal{U}^*(-t) \rangle_{(\mu, t) \in \text{Exp}(\lambda)}$$

по предложению 5.3. По индукции также имеем

$$\Sigma^\lambda \mathcal{U}^* \in \langle \Sigma^\mu \mathcal{U}^*(-t) \rangle_{(\mu, t) \in \text{Exp}^{(k)}(\lambda)}$$

для всех $k \geq 1$.

Утверждается, что:

- 1) при некотором $k \geq 1$ выполняется $\text{Exp}^{(k)}(\lambda) \subset Y_{n,k}^1 \times \mathbb{Z}$;
 - 2) если $\text{Exp}^{(k)}(\lambda) \subset Y_{n,k}^1 \times \mathbb{Z}$, то для всякого $(\mu, t) \in \text{Exp}^{(k)}(\lambda)$ имеем $t < l(\mu)$.
- Для доказательства 1) заметим, что

$$\max\{d(\mu)\}_{(\mu, t) \in \text{Exp}^{(k)}(\lambda)} \leq \max\{d(\lambda) - 1, 0\}.$$

Отсюда для всех $(\mu, t) \in \text{Exp}^{d(\lambda)}(\lambda)$ имеем $d(\mu) \leq 0$, а значит, $\mu \in Y_{n,k}^1$.

Для проверки 2) заметим, что для всех $(\mu, t) \in \text{Exp}(\lambda)$ выполнено $t \leq e(\mu) - e(\lambda)$. По индукции это также верно для всех $(\mu, t) \in \text{Exp}^{(k)}(\lambda)$. Теперь если $\text{Exp}^{(k)}(\lambda) \subset Y_{n,k}^1 \times \mathbb{Z}$, то

$$t \leq e(\mu) - e(\lambda) = l(\mu) - e(\lambda) < l(\mu),$$

так как по определению $e(\lambda) > 0$.

Мы показали, что $\Sigma^\lambda \mathcal{U}^* \in \langle \mathcal{B}'_{n-1}(1-n), \dots, \mathcal{B}'_1(-1), \mathcal{B}'_0 \rangle$ при всех $\lambda \in Y_{n,k}$, $\lambda_1 = n - k$. В случае произвольного $\lambda \in Y_{n,k}$ заметим, что

$$\Sigma^\lambda \mathcal{U}^* \in \langle \Sigma^\mu \mathcal{U}^*(-t) \mid (\mu, t) \in \text{Exp}^{(k)}(\tilde{\lambda})[n - k - \lambda_1] \rangle.$$

Требуется проверить, что для всех $(\mu, t) \in \text{Exp}^{d(\tilde{\lambda})}(\tilde{\lambda})$ выполнено неравенство $t + (n - k - \lambda_1) < l(\mu)$. Известно уже, что $t \leq l(\mu) - e(\tilde{\lambda})$. Легко видеть, что

$$e(\tilde{\lambda}) = e(\lambda(n - k - \lambda_1)) = e(\lambda) + (n - k - \lambda_1) > n - k - \lambda_1,$$

так как $e(\lambda) > 0$. Поэтому

$$t \leq l(\mu) - e(\tilde{\lambda}) = l(\mu) - e(\lambda) - (n - k - \lambda_1) < l(\mu) - (n - k - \lambda_1),$$

что завершает доказательство предложения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.1. Полуортогональность разложения была проверена в предложении 4.9. Согласно лемме 5.5 и предложению 5.6 получаем полноту.

Наконец, вернемся к нашему основному примеру $\text{Gr}(3, 6)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.7. Гипотеза 4.4 выполняется для $X = \text{Gr}(3, 6)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждение, аналогичное приведенному в лемме 5.5, показывает, что достаточно проверить равенство

$$\mathcal{D}^b(X) = \langle \Sigma^\lambda \mathcal{U}^*(-t) \mid \lambda \in Y_{n,k}^{\text{ml}}, t < o(\lambda) \rangle,$$

где $Y_{n,k}^{\text{ml}} = \{\lambda \mid \lambda^c \in Y_{n,k}^{\text{mu}}\}$.

В нашем случае $Y_{6,3}^1 \setminus Y_{6,3}^{\text{ml}} = \{(3, 3, 1)\}$. Из предложения 5.6 известно, что

$$\mathcal{D}^b(X) = \langle \Sigma^\lambda \mathcal{U}^*(-t) \mid \lambda \in Y_{n,k}^1, t < l(\lambda) \rangle.$$

Значит, будет достаточно проверить включения

$$\Sigma^{(3,3,1)} \mathcal{U}^*, \Sigma^{(3,3,1)} \mathcal{U}^*(-1) \in \langle \Sigma^\lambda \mathcal{U}^*(-t) \mid \lambda \in Y_{n,k}^{\text{ml}}, t < o(\lambda) \rangle. \quad (5.7)$$

Как и в доказательстве предложения 5.6, рассмотрим множества $\text{Exp}^{(k)}$, но в этот раз положим $\text{Exp}(\lambda) = \{(\lambda, 0)\}$ только при $\lambda \in Y_{n,k}^{\text{ml}}$. Легко проверить, что $E = \text{Exp}^{(2)}((3, 3, 1)) \subset Y_{6,3}^{\text{ml}} \times \mathbb{Z}$. Однако множества E и $E(1)$ содержат “плохие” элементы $((3, 2, 1), 2)$ и $((3, 2, 1), 3)$, для которых $o((3, 2, 1)) = 2$.

Чтобы показать (5.7), достаточно проверить, что

$$\Sigma^{(3,2,1)} \mathcal{U}^*(-2), \Sigma^{(3,2,1)} \mathcal{U}^*(-3) \in \langle \Sigma^\lambda \mathcal{U}^*(-t) \mid \lambda \in Y_{n,k}^{\text{ml}}, t < o(\lambda) \rangle. \quad (5.8)$$

Рассмотрим длинную точную последовательность (5.3) для $\Sigma^{(3,2,1)}\mathcal{U}^*$

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \Sigma^{(3,2,1)}\mathcal{U}^*(-2) &\rightarrow \Lambda^5 V^* \otimes \Sigma^{(3,2,2)}\mathcal{U}^*(-2) \\ &\rightarrow \Lambda^3 V^* \otimes \Sigma^{(3,3,3)}\mathcal{U}^*(-2) \rightarrow V^* \otimes \Sigma^{(3,3,2)}\mathcal{U}^*(-1) \rightarrow \Sigma^{(3,2,1)}\mathcal{U}^* \rightarrow 0 \end{aligned}$$

в качестве правой резольвенты для $\Sigma^{(3,2,1)}\mathcal{U}^*(-2)$. Отсюда видно, что включение (5.8) выполнено.

Список литературы

1. А. И. Бондал, “Представления ассоциативных алгебр и когерентные пучки”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **53**:1 (1989), 25–44; англ. пер.: A. I. Bondal, “Representation of associative algebras and coherent sheaves”, *Math. USSR-Izv.*, **34**:1 (1990), 23–42.
2. A. L. Gorodentsev, A. N. Rudakov, “Exceptional vector bundles on projective spaces”, *Duke Math. J.*, **54**:1 (1987), 115–130.
3. А. А. Бейлинсон, “Когерентные пучки на $\mathbf{P}^n$ и проблемы линейной алгебры”, *Функц. анализ и его прил.*, **12**:3 (1978), 68–69; англ. пер.: A. A. Beilinson, “Coherent sheaves on $\mathbf{P}^n$ and problems of linear algebra”, *Funct. Anal. Appl.*, **12**:3 (1978), 214–216.
4. А. И. Бондал, М. М. Капранов, “Представимые функторы, функторы Серра и перестройки”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **53**:6 (1989), 1183–1205; англ. пер.: A. I. Bondal, M. M. Kapranov, “Representable functors, Serre functors, and mutations”, *Math. USSR-Izv.*, **35**:3 (1990), 519–541.
5. A. Kuznetsov, “Lefschetz decompositions and categorical resolutions of singularities”, *Selecta Math. (N.S.)*, **13**:4 (2008), 661–696.
6. М. М. Капранов, “On the derived categories of coherent sheaves on some homogeneous spaces”, *Invent. Math.*, **92**:3 (1988), 479–508.
7. A. Kuznetsov, “Exceptional collections for Grassmannians of isotropic lines”, *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, **97**:1 (2008), 155–182.
8. A. Kuznetsov, “Homological projective duality”, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, **105**:1 (2007), 157–220.
9. M. Demazure, “A very simple proof of Bott’s theorem”, *Invent. Math.*, **33**:3 (1976), 271–272.
10. V. Gasharov, “A short proof of the Littlewood–Richardson rule”, *European J. Combin.*, **19**:4 (1998), 451–453.

А. В. ФОНАРЁВ (A. V. FONAREV)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова
 E-mail: avfonarev@mi.ras.ru

Поступило в редакцию
 18.10.2011
 17.01.2012