Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Ю. Козлов, Об алгебраической независимости функций одного класса, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2013, том 77, выпуск 1, 23–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7932>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 09:40:29

УДК 511

П. Ю. Козлов

Об алгебраической независимости функций одного класса

Рассматриваются функции Рамануджана и некоторое семейство близких к ним по свойствам функций и доказывается их алгебраическая независимость над полем рациональных функций с комплексными коэффициентами. Доказывается также оценка кратностей нулей многочленов от этих функций.

Библиография: 8 наименований.

Ключевые слова: алгебраическая независимость, функции Рамануджана, оценка кратностей нулей многочленов.

DOI: 10.4213/im7932

§ 1. Введение

В работе [1] С. Рамануджан в 1916 г. определил три функции

$$P(z) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) z^n, \quad Q(z) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) z^n, \\ R(z) = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) z^n,$$

где $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$, и доказал, что для любого целого неотрицательного i существует многочлен $A_i(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ такой, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2i+1}(n) z^n = A_i(P(z), Q(z), R(z)).$$

Рассмотрим семейство функций

$$G_{i,j}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^i \sigma_{-2j-1}(n) z^n, \quad 0 \leq i \leq 2j.$$

Э. Гроссвальд в 1970 г. доказал формулы, выражающие значения дзета-функции Римана $\zeta(s)$ в нечетных целых точках через числа $G_{i,j}(e^{-2\pi})$: если $a = 2n + 1$ – целое нечетное число и $a \equiv 3 \pmod{4}$, то

$$\zeta(a) = \pi^a B_1(a) - 2G_{0,n}(e^{-2\pi}),$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-01-00743).

а если $a \equiv 1 \pmod{4}$, то

$$\zeta(a) = \pi^a B_2(a) - 2G_{0,n}(e^{-2\pi}) - \frac{8\pi}{a-1} G_{1,n}(e^{-2\pi}),$$

где рациональные числа $B_1(a)$ и $B_2(a)$ определяются следующим образом:

$$B_1(a) = 2^{a-1} \sum_{k=0}^{(a+1)/4} (-1)^{k+1} \frac{B_{2k} B_{a+1-2k}}{(2k)! (a+1-2k)!},$$

$$B_2(a) = 2^a \sum_{k=0}^{(a-1)/4} (-1)^k \left(1 - \frac{4k-2}{a-1}\right) \frac{B_{2k} B_{a+1-2k}}{(2k)! (a+1-2k)!},$$

и B_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, — числа Бернулли (см. [2]).

Таким образом, $\zeta(s)$ при нечетных s выражаются через значения функций $G_{i,j}(z)$ в точке $z = e^{-2\pi}$.

Функции $G_{i,j}(z)$ связаны следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \delta G_{i,j}(z) &= G_{i+1,j}(z), & 0 \leq i \leq 2j-1, \\ \delta G_{2j,j}(z) &= A_j(P(z), Q(z), R(z)), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\delta = z \frac{d}{dz}$. При $0 \leq i < 2j$ тождество (1.1) доказывается прямым вычислением, а при $i = 2j$ имеем

$$\delta G_{2j,j}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2j+1} \sum_{m|n} m^{-2j-1} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k|n} k^{2j+1} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2j+1}(n) z^n.$$

К. Малер в 1969 г. доказал, что функции $P(z)$, $Q(z)$, $R(z)$ алгебраически независимы над полем $\mathbb{C}(z)$.

Основным результатом настоящей статьи является следующая

ТЕОРЕМА 1. *Для любого целого неотрицательного n функции $P(z)$, $Q(z)$, $R(z)$, $G_{i,j}(z)$, $0 \leq j \leq n$, $0 \leq i \leq 2j$, алгебраически независимы над полем $\mathbb{C}(z)$.*

Также в статье получена оценка кратностей нулей многочленов от функций $P(z)$, $Q(z)$, $R(z)$, $G_{i,j}(z)$, $0 \leq j \leq n$, $0 \leq i \leq 2j$, для любого целого неотрицательного числа n .

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $z_1, \dots, z_N \in \mathbb{C}$ — фиксированные точки, $n \geq 0$ — целое число. Тогда для любого многочлена $P \in \mathbb{C}[z, x_1, x_2, x_3, y_{0,0}, \dots, y_{0,n}, \dots, y_{2n,n}]$, не равного тождественно нулю, выполняется неравенство*

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \text{ord}_{z=z_j} P(z, P(z), Q(z), R(z), G_{0,0}(z), \dots, G_{0,n}(z), \dots, G_{2n,n}(z)) \\ \leq c_2 ((\deg_z P + N)(\deg_{\bar{x}, \bar{y}} P)^{(n+1)^2+3} + N \deg_z P), \end{aligned}$$

где c_2 — константа, зависящая только от функций $P(z)$, $Q(z)$, $R(z)$, $G_{i,j}(z)$, $0 \leq j \leq n$, $0 \leq i \leq 2j$.

§ 2. Вспомогательные результаты

ТЕОРЕМА 3. Пусть K – поле функций, замкнутое относительно оператора дифференцирования $\delta = z \frac{d}{dz}$, и набор функций $f_0, \dots, f_{2l}$ удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned} \delta f_k &= f_{k+1}, & 0 \leq k \leq 2l-1, \\ \delta f_{2l} &= a, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где a – фиксированный элемент поля K . Тогда если $f_{2l} \notin K$, то функции $f_0, \dots, f_{2l}$ алгебраически независимы над K .

ЛЕММА 1. Если функция $\varphi(z)$ алгебраична над полем K и $\delta\varphi \in K$, то $\varphi \in K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [3, гл. 7, лемма 1].

ЛЕММА 2. Пусть F – поле функций от одной комплексной переменной, замкнутое относительно операции дифференцирования. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$y'_k = q_{k0} + \sum_{i=1}^m q_{ki} y_i, \quad (2.2)$$

где $q_{ki} \in F$, и поставим ей в соответствие дифференциальный оператор

$$D = \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{k=1}^m \left(q_{k0} + \sum_{i=1}^m q_{ki} y_i \right) \frac{\partial}{\partial y_k},$$

действующий в кольце $F[y_1, \dots, y_m]$ многочленов от переменных $y_1, \dots, y_m$ с коэффициентами в F . Пусть I – ненулевой идеал в $F[y_1, \dots, y_m]$, отличный от всего кольца и такой, что $DI \subset I$. Тогда существует решение $f_1, \dots, f_m$ системы (2.2) такое, что для любого $P \in I$

$$P(f_1, \dots, f_m) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [4, лемма 1].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Предположим, что функция f_{2l} алгебраична над K . Поскольку $\delta f_{2l} = a$, то $f_{2l} \in K$ по лемме 2, но это противоречит условию теоремы. Значит, f_{2l} трансцендентна над полем K .

Пусть $r \geq -1$ – наименьшее число такое, что для любого решения $g_0, \dots, g_{2l}$ системы (2.1) функции $g_{r+1}, \dots, g_{2l}$ алгебраически независимы над K . Поскольку любые два решения уравнения $\delta f_{2l} = a$ отличаются на комплексную константу, из трансцендентности над K одного решения следует трансцендентность всех решений последнего уравнения системы (2.1). Поэтому $r \leq 2l-1$. Если $r = -1$, то утверждение теоремы доказано, иначе функции $f_r, \dots, f_{2l}$ алгебраически зависимы над K и существует многочлен $P(x_r, \dots, x_{2l}) \in K[x_r, \dots, x_{2l}]$, неприводимый над K и такой, что $P(f_r, \dots, f_{2l}) = 0$. Неприводимость P над K влечет за собой также тот факт, что P имеет минимальную степень по x_r среди всех многочленов, обращающихся в нуль в точке $(f_r, \dots, f_{2l})$.

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$D = z \frac{\partial}{\partial z} + x_{r+1} \frac{\partial}{\partial x_r} + \cdots + x_{2l} \frac{\partial}{\partial x_{2l-1}} + a \frac{\partial}{\partial x_{2l}},$$

действующий в кольце $K[x_r, \dots, x_{2l}]$. Справедливо тождество $DP(f_r, \dots, f_{2l}) = z \frac{d}{dz} P(f_r, \dots, f_{2l}) = 0$. Поскольку P неприводим над K , то $P \mid DP$, иначе из P и DP можно исключить x_r и получить соотношение между $f_{r+1}, \dots, f_{2l}$, что невозможно.

Многочлен P можно представить в виде $P = A_m x_r^m + \cdots + A_0$, где $A_i \in K[x_{r+1}, \dots, x_{2l}]$, $A_m \neq 0$. Тогда

$$DP = DA_m x_r^m + (DA_{m-1} + m x_{r+1} A_m) x_r^{m-1} + \cdots + (DA_0 + x_{r+1} A_1).$$

Принимая во внимание то, что для некоторого многочлена S выполняется соотношение $DP = P \cdot S$, получаем, что S не зависит от x_r и $DA_m = A_m \cdot S$. Это означает то, что идеал (A_m) замкнут относительно оператора дифференцирования D .

По лемме 2 существует решение $\bar{g} = (g_0, \dots, g_{2l})$ системы (1.1) такое, что $A_m(\bar{g}) = A_m(g_{r+1}, \dots, g_{2l}) = 0$, откуда следует алгебраическая зависимость функций $g_{r+1}, \dots, g_{2l}$ над K , что противоречит определению числа r . Теорема доказана.

§ 3. Доказательство алгебраической независимости функций $G_{i,j}(z)$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Предположим, что утверждение теоремы неверно и существуют такие целые неотрицательные n , при которых функции

$$P(z), Q(z), R(z), G_{i,j}(z), \quad 0 \leq j \leq n, \quad 0 \leq i \leq 2j,$$

алгебраически зависимы над полем $\mathbb{C}(z)$. Пусть l – минимальное из таких чисел. Обозначим через $\mathfrak{K}$ поле, полученное присоединением функций $G_{i,j}(z)$, $0 \leq j \leq l-1$, $0 \leq i \leq 2j$, к полю $\mathbb{C}(z)$. Тогда функция $G_{2l,l}(z)$ лежит в поле $\mathfrak{K}$, иначе, применяя теорему 3 к полю $\mathfrak{K}$ и функциям $G_{0,l}, \dots, G_{2l,l}$, получаем, что функции $G_{i,j}(z)$, $0 \leq j \leq l$, $0 \leq i \leq 2j$, алгебраически независимы над $\mathfrak{K}$, а это противоречит выбору числа l .

Следовательно, найдутся взаимно простые многочлены B и C из кольца $\mathbb{C}[z, x_1, x_2, x_3; y_{i,j}]$, $0 \leq j \leq l-1$, $0 \leq i \leq 2j$ такие, что

$$G_{2l,l} = \frac{B(z, P(z), Q(z), R(z), G_{i,j}(z))}{C(z, P(z), Q(z), R(z), G_{i,j}(z))}. \quad (3.1)$$

В статье [1] доказано, что

$$\begin{aligned} \delta P(z) &= \frac{1}{12} ((P(z))^2 - Q(z)), & \delta Q(z) &= \frac{1}{3} (P(z)Q(z) - R(z)), \\ \delta R(z) &= \frac{1}{2} (P(z)R(z) - (Q(z))^2). \end{aligned}$$

Учитывая эти соотношения, систему (1.1), а также равенство $\delta z = z$, определим оператор дифференцирования D , действующий на поле $\mathbb{C}(z, x_1, x_2, x_3; y_{i,j}, 0 \leq j \leq l-1, 0 \leq i \leq 2j)$ следующим образом:

$$D = z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{12}(x_1^2 - x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{3}(x_1 x_2 - x_3) \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{2}(x_1 x_3 - x_2^2) \frac{\partial}{\partial x_3} \\ + A_0 \frac{\partial}{\partial y_{0,0}} + \dots + y_{1,l-1} \frac{\partial}{\partial y_{0,l-1}} + \dots + y_{2l-2,l-1} \frac{\partial}{\partial y_{2l-3,l-1}} + A_{l-1} \frac{\partial}{\partial y_{2l-2,l-1}}.$$

Тогда

$$D\left(\frac{B}{C}\right) = A_l \Rightarrow DB \cdot C - DC \cdot B = A_l C^2 \Rightarrow C \mid DC \quad (3.2)$$

в силу взаимной простоты многочленов B и C .

В дальнейшем идеалы I кольца $\mathbb{C}[z, x_1, x_2, x_3; y_{i,j}, 0 \leq j \leq l-1, 0 \leq i \leq 2j]$, а также его подколец, обладающие тем свойством, что $DI \subset I$, будут называться D -инвариантными идеалами.

ЛЕММА 3. *Каждый D -инвариантный главный идеал кольца $\mathbb{C}[z, x_1, x_2, x_3]$ имеет вид $(z^s \Delta^t)$, где $\Delta = x_2^2 - x_3^2$, а s и t – неотрицательные целые числа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [5, лемма 4.1].

ЛЕММА 4. *Каждый D -инвариантный главный идеал кольца $\mathbb{C}[z, x_1, x_2, x_3; y_{i,j}, 0 \leq j \leq l-1, 0 \leq i \leq 2j]$ имеет вид $(z^s \Delta^t)$, где $\Delta = x_2^2 - x_3^2$, а s и t – неотрицательные целые числа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (W) – искомый D -инвариантный идеал. Тогда существует многочлен V такой, что $DW = V \cdot W$. Расположим мономы многочлена W в лексикографическом порядке по переменным $y_{0,0}, y_{0,1}, \dots, y_{2l-2,l-1}$. Пусть самый старший из них имеет вид

$$W'(z, x_1, x_2, x_3) y_{0,0}^{\alpha_{0,0}} y_{0,1}^{\alpha_{0,1}} \dots y_{2l-2,l-1}^{\alpha_{2l-2,l-1}}.$$

После применения к многочлену W оператора D мы получим многочлен со старшим членом

$$DW'(z, x_1, x_2, x_3) y_{0,0}^{\alpha_{0,0}} y_{0,1}^{\alpha_{0,1}} \dots y_{2l-2,l-1}^{\alpha_{2l-2,l-1}}.$$

Таким образом, многочлен V лежит в кольце $\mathbb{C}[z, x_1, x_2, x_3]$, и, более того, верно равенство $DW' = V \cdot W'$. Из леммы 3 следует, что $W' = \gamma z^s \Delta^t$ и $V = tx_1 + s$ с некоторыми целыми неотрицательными s и t .

Равенство $DG = 0$, $G \in \mathbb{C}(z, x_1, x_2, x_3; y_{i,j}, 0 \leq j \leq l-1, 0 \leq i \leq 2j)$ означает в силу определения оператора D , что

$$\delta G(z, P(z), Q(z), R(z), G_{i,j}(z)) \equiv 0,$$

и, следовательно, $G(z, P(z), Q(z), R(z), G_{i,j}(z)) = k \in \mathbb{C}$. Однако последнее в силу алгебраической независимости над $\mathbb{C}(z)$ функций $P(z)$, $Q(z)$, $R(z)$, $G_{i,j}(z)$, $0 \leq j \leq l-1$, $0 \leq i \leq 2j$, означает, что $G \equiv k \in \mathbb{C}$, и, следовательно, поле констант оператора D в поле $\mathbb{C}(z, x_1, x_2, x_3, y_{i,j})$, $0 \leq j \leq l-1$, $0 \leq i \leq 2j$, совпадает с $\mathbb{C}$.

По доказанному имеем $DW = (tx_1 + s)W$ и $D(\Delta^{-t}z^{-s}) = -(tx_1 + s)\Delta^{-t}z^{-s}$, поэтому $D(W \cdot \Delta^{-t}z^{-s}) = 0$ и с некоторой константой $k \in \mathbb{C}$ выполняется равенство $W \cdot \Delta^{-t}z^{-s} = k$, или $W = kz^s\Delta^t$. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Обозначим через K поле $\mathbb{C}(z, x_1, x_2, x_3)$, а через $\mathfrak{K}$ кольцо $K[y_{i,j}]$, $0 \leq j \leq l-1$, $0 \leq i \leq 2j$. Пусть L – линейное пространство в кольце $\mathbb{C}[z, x_1, x_2, x_3]$, порожденное многочленами $1, A_0, \dots, A_l$ над полем комплексных чисел. В силу делимости (3.2) главный идеал (C) является D -инвариантным, и поэтому при некоторых целых $s, t \geq 0$ и комплексном k верно, что $C = kz^s\Delta^t$. Учитывая также (3.1), получаем, что для многочлена

$$E = \frac{1}{kz^s\Delta^t} B(z, x_1, x_2, x_3, y_{i,j})$$

из кольца $\mathfrak{K}$ выполняется равенство

$$G_{2l,l} = E(G_{0,0}, \dots, G_{0,l-1}, G_{2l-2,l-1}).$$

Теперь из системы (1.1) несложно вывести соотношение

$$DE = A_l(x_1, x_2, x_3).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из предположения об алгебраической независимости функций $G_{i,j}(z)$, $0 \leq j \leq l-1$, $0 \leq i \leq 2j$, над $\mathbb{C}(z, P(z), Q(z), R(z))$ следует, что значения многочленов из кольца $\mathfrak{K}$ на этих функциях равны тогда и только тогда, когда равны сами эти многочлены. Из этого можно также сделать вывод, что если $DF = 0$ для некоторого $F \in \mathfrak{K}$, то $F \equiv \text{const}$.

Упорядочим переменные $y_{i,j}$ по старшинству следующим образом: будем считать, что переменная y_{i_1,j_1} *старше* переменной y_{i_2,j_2} , если $j_1 > j_2$ или если $j_1 = j_2$ и $i_1 < i_2$. Введем соответствующее лексикографическое упорядочение на кольце $\mathfrak{K}$. Обозначим через S совокупность многочленов $V \in \mathfrak{K}$, для которых существует $c \in \mathbb{C}$ такое, что $DV - cy_{i,j} \in \{1, A_l, \dots, A_{j+1}\}$, где $y_{i,j}$ – старшая переменная V , и таких, что $DV \neq 0$. Множество S непусто, так как в него входит E . Пусть A – минимальный относительно введенного упорядочения многочлен из S . Предположим, что он не является константой в кольце $\mathfrak{K}$ и u – его старшая переменная.

Разложим A по степеням u : $A = a_s u^s + a_{s-1} u^{s-1} + \dots + a_0$. Применение оператора D не увеличивает многочлен в лексикографическом упорядочении, а $Du \prec u$. Поэтому в равенстве

$$DA = u^s Da_s + u^{s-1}(Da_{s-1} + sa_s Du) + \dots + (Da_0 + a_1 Du)$$

все выражения в скобках и коэффициент Da_s не зависят от u . Так как $A \in S$, при некоторых $b \in L$ и $c \in \mathbb{C}$ выполняется равенство $DA = b + cu$. Отсюда следует, что

$$u^s Da_s + u^{s-1}(Da_{s-1} + sa_s Du) + \dots + (Da_0 + a_1 Du) = cu + b. \quad (3.3)$$

Поскольку многочлен A минимален в S и каждое a_i младше A относительно введенного лексикографического упорядочения, то $a_i \notin S$.

Определим индексы i, j равенством $u = y_{i,j}$. Так как переменная u обязательно входит в A , то $s > 0$. Возможны следующие случаи.

1. Если $s = 1$, то, приравнявая коэффициенты при u в тождестве (3.3), получим, что $Da_1 = c$. При $c \neq 0$ отсюда следует, что $a_1 \in S$, но это неверно. Значит, $Da_1 = 0$, и согласно замечанию 1 коэффициент a_1 совпадает с некоторой комплексной константой f . Учитывая это, приравняем в (3.3) свободные коэффициенты. Получим $Da_0 + fDu = b$. Если $i = 2j$, то $Du = A_j$ и, следовательно, $Da_0 = b - fA_j$. Если $i < 2j$, то $Du = y_{i+1,j}$, поэтому $Da_0 = b - fy_{i+1,j}$. В последних случаях a_0 принадлежит множеству S , что противоречит минимальности A в S .

2. Если $s = 2$, то, приравнявая коэффициенты при u^2 в тождестве (3.3), получаем, что $Da_2 = 0$. Согласно замечанию 1 коэффициент a_2 совпадает с некоторой комплексной константой f , которая не равна нулю как коэффициент при старшем члене в многочлене A . Учитывая это, приравняем в тождестве (3.3) коэффициенты при u . Получим, что $Da_1 + 2fDu = c$. Если $i = 2j$, то $Du = A_j$ и, следовательно, $Da_1 = c - 2fA_j$. Если $i < 2j$, то $Du = y_{i+1,j}$, поэтому $Da_1 = c - 2fy_{i+1,j}$. В последних случаях $a_1 \in S$, что противоречит минимальности A .

3. Если $s > 2$, то $Da_s = 0$. Аналогично случаю 2 доказывается, что $a_s = f \in \mathbb{C}$, $f \neq 0$. Учитывая это, приравняем в (3.3) коэффициенты при u^{s-1} . Получим, что $Da_{s-1} + sfDu = 0$. Если $i = 2j$, то $Du = A_j$ и, следовательно, $Da_{s-1} = -sfA_j$. Если $i < 2j$, то $Du = y_{i+1,j}$, поэтому $Da_{s-1} = -sfy_{i+1,j}$. В последних случаях $a_{s-1} \in S$, что неверно.

В случаях 1–3 мы получили противоречие с нашим предположением, поэтому существует элемент $U \in \mathbb{C}(z, x_1, x_2, x_3)$, удовлетворяющий условиям $DU \neq 0$ и $DU = V \in L \subset \mathbb{C}[z, x_1, x_2, x_3]$.

Пусть $U = \frac{X(z, x_1, x_2, x_3)}{Y(z, x_1, x_2, x_3)}$, где $X, Y \in \mathbb{C}[z, x_1, x_2, x_3]$. Равенство $D(\frac{X}{Y}) = V$ можно переписать в виде

$$DX \cdot Y - DY \cdot X = VY^2, \quad (3.4)$$

откуда следует что $Y \mid DY$. Таким образом, главный идеал (Y) является D -инвариантным и в силу леммы 3 имеет вид $(z^s \Delta^t)$ с неотрицательными s и t . Значит, Y пропорционален многочлену $z^s \Delta^t$; не умаляя общности, можно считать, что $Y = z^s \Delta^t$. Подставляя это в соотношение (3.4), получаем равенство, которое после деления на $z^s \Delta^t$ преобразуется в следующее:

$$DX - V \cdot z^s \Delta^t = (s + tx_1)X. \quad (3.5)$$

Разложим X по степеням z : $X = \sum_{n=0}^N X_n z^n$. Тогда для $n \neq s$, приравнявая в равенстве (3.5) коэффициенты при z^n , получаем $DX_n = (tx_1 + s - n)X_n$, откуда следует, что в поле $\mathbb{C}(z, x_1, x_2, x_3)$ верно соотношение $D(X_n \cdot z^{n-s} \Delta^{-t}) = 0$. Поскольку поле констант оператора D в $\mathbb{C}(z, x_1, x_2, x_3)$ совпадает с $\mathbb{C}$, верно равенство $X_n \cdot z^{n-s} \Delta^{-t} = k \in \mathbb{C}$, или $X_n = k \cdot z^{s-n} \Delta^t$. Однако $n \neq s$ и X_n не содержит переменной z , поэтому $k = 0$ и $X_n \equiv 0$.

Значит, $X = X_s z^s$. Подставляя это в (3.5), сокращая общий член обеих частей $sz^s X_s$ и деля на z^s , получим в итоге равенство

$$DX_s - V \cdot \Delta^t = tx_1 X_s, \quad (3.6)$$

где $V, X_s \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ и $V \neq 0$.

Определим для любого многочлена $G(x_1, x_2, x_3)$ кольца $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ его вес $\omega(G)$ равенством

$$\omega(G) = \deg_t G(tx_1, t^2x_2, t^3x_3).$$

Тогда:

- 1) если все мономы многочлена G имеют одинаковый вес, то или $DG = 0$, или выполняется равенство $\omega(DG) = \omega(G) + 1$;
- 2) для любого G справедливо неравенство $\omega(DG) \leq \omega(G) + 1$;
- 3) для любых двух многочленов G, H справедливо равенство $\omega(GH) = \omega(G) + \omega(H)$.

Свойства 1)–3) тривиально следуют из определений веса и оператора D .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для любого целого неотрицательного i многочлен A_i можно представить в виде $A_i = k_i + B_i$, где k_i – ненулевое действительное число, а B_i – сумма мономов веса $i + 1$ (см. [6, гл. X, теорема 4.2]).

Положим $B_{-1} = 1$. Поскольку многочлен V лежит в множестве L , в силу замечания 2 его можно представить в виде $\sum_{j=-1}^l c_j B_j$, где не все c_j равны нулю, причем $\omega(B_j) = j + 1$. Пусть i – максимальный индекс, при котором $c_i \neq 0$. Обозначим через H сумму мономов веса $6t + i$ многочлена X_s . Выделим в равенстве (3.6) мономы $DH - c_i B_i \cdot \Delta^t = tx_1 H$ веса $6t + i + 1$. Последнее равенство эквивалентно следующему:

$$D\left(\frac{H}{\Delta^t}\right) = c_i B_i,$$

которое, в свою очередь, означает, что

$$\delta\left(\frac{H(P(z), Q(z), R(z))}{(Q^3(z) - R^2(z))^t}\right) = c_i B_i(P(z), Q(z), R(z)). \quad (3.7)$$

Функция $\frac{H(P(z), Q(z), R(z))}{(Q^3(z) - R^2(z))^t}$ разлагается в ряд по целым степеням z , а после применения к ней оператора дифференцирования δ получится ряд, который не содержит константы. С другой стороны, $c_i B_i(P(z), Q(z), R(z))$ разлагается в ряд по целым неотрицательным степеням z , который в силу замечания 2 принимает ненулевое значение в точке 0 (c_i при $i = -1$ и $c_i \zeta(-1 - 2i)/2$ при $i \geq 0$) и, следовательно, содержит ненулевую константу. Таким образом, мы пришли к противоречию с предположением, сформулированным в начале доказательства теоремы, а и это доказывает ее верность.

§ 4. Доказательство теоремы 2

Для нахождения оценки кратностей нулей многочленов от функций $P(z)$, $Q(z)$, $R(z)$, $G_{i,j}(z)$ воспользуемся следующим результатом, полученным А. П. Долгалёвым (см. [7]).

ТЕОРЕМА 4. Пусть $z_1, \dots, z_N \in \mathbb{C}$ – фиксированные точки, функции $f_1, \dots, \dots, f_m$ аналитичны в этих точках и удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$y'_j = \frac{a_j(z, y_1, \dots, y_m)}{a_0(z, y_1, \dots, y_m)}, \quad j = 1, \dots, m, \quad (4.1)$$

где $a_j(z, x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{C}[z, x_1, \dots, x_m]$ – взаимно простые в совокупности многочлены, и D – оператор дифференцирования в кольце многочленов $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$, определенный следующим образом:

$$D = a_0(z, x_1, \dots, x_m) \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=1}^m a_j(z, x_1, \dots, x_m) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Если существует постоянная $c_0 > 0$, зависящая только от набора функций $\bar{f}(z) = (f_1(z), \dots, f_m(z))$ и такая, что для любого D -инвариантного простого идеала $\mathfrak{p}$, содержащего все многочлены P с условием $P(z, \bar{f}(z)) \equiv 0$, выполняется

$$\min_{E \in \mathfrak{p}} \sum_{j=1}^N \text{ord}_{z=z_j} E(z, \bar{f}(z)) \leq c_0,$$

то для любого многочлена $P \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$ такого, что $P(z, \bar{f}(z)) \not\equiv 0$, верно неравенство

$$\sum_{j=1}^N \text{ord}_{z=z_j} P(z, \bar{f}(z)) \leq c_1 ((\deg_z P + \deg_{\bar{x}} P + N)(\deg_{\bar{x}} P)^q + N \deg_z P),$$

где q – максимальное количество функций $f_j(z)$, алгебраически независимых над $\mathbb{C}(z)$, и константа $c_1 > 0$ зависит только от функций $\bar{f}(z)$.

Обозначим через R_k кольцо, полученное присоединением k самых младших переменных $y_{i,j}$ к кольцу $\mathbb{C}[z, x_1, x_2, x_3]$, и докажем следующее утверждение: если k – целое неотрицательное число, любой простой D -инвариантный идеал в кольце R_k содержит либо многочлен z , либо многочлен Δ . Предположим, что это утверждение верно не для всех k и выберем наименьшее $l \in \mathbb{Z}$, при котором существует D -инвариантный идеал $\mathfrak{p}$ кольца R_l , не содержащий ни многочлена z , ни многочлена Δ . В работе [8] показано, что в кольце $R_0 = \mathbb{C}[z, x_1, x_2, x_3]$ любой D -инвариантный простой идеал содержит один из этих многочленов, поэтому $l > 0$. Рассмотрим идеал $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap R_{l-1}$, в силу простоты $\mathfrak{p}$ он также является простым. Если $\mathfrak{q} \neq (0)$, согласно нашему предположению либо $z \in \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, либо $\Delta \in \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, что приводит нас к противоречию. Если же $\mathfrak{q} = (0)$, то $\mathfrak{p}$ является главным идеалом. Тогда по лемме 4 он содержит либо z , либо Δ . Полученное в этом случае противоречие с предположением доказывает верность утверждения.

В частности, любой простой D -инвариантный идеал $\mathfrak{p}$ в кольце $R_{(n+1)^2} = \mathbb{C}[z, x_1, x_2, x_3, y_{0,0}, \dots, y_{0,n}, \dots, y_{2n,n}]$ содержит либо многочлен z , либо многочлен Δ . Поэтому для всех таких идеалов имеет место следующая оценка:

$$\min_{E \in \mathfrak{p}} \sum_{j=1}^N \text{ord}_{z=z_j} E(z, P(z), Q(z), R(z), G_{0,0}(z), \dots, G_{0,n}(z), \dots, G_{2n,n}(z)) \leq 1,$$

так как функции z и $\Delta(z) = Q^3(z) - R^2(z)$ не обращаются в нуль в кольце $0 < |z| < 1$, а в точке $z = 0$ имеют нуль первого порядка.

В силу теоремы 1 функции, составляющие набор $\bar{g}(z) = (P(z), Q(z), R(z), G_{0,0}(z), \dots, G_{0,n}(z), \dots, G_{2n,n}(z))$, алгебраически независимы над $\mathbb{C}[z]$, поэтому

если многочлен $P \in \mathbb{C}[z, x_1, x_2, x_3, y_{0,0}, \dots, y_{0,n}, \dots, y_{2n,n}]$ тождественно не равен нулю, то $P(z, \bar{g}(z)) \not\equiv 0$. Также набор функций $\bar{g}(z)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений типа (1.1) при $a_0 = z$. Таким образом, все условия теоремы 4 выполнены, и, применяя ее к $\bar{f}(z) = \bar{g}(z)$ при $q = (n+1)^2 + 3$, получаем требуемое.

Список литературы

1. S. Ramanujan, “On Certain arithmetical functions”, *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, **22**:9 (1916), 159–184.
2. E. Grosswald, “Die Werte der Riemannschen Zetafunktion an ungeraden Argumentstellen”, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl.* II, 1970, 9–13.
3. А. Б. Шидловский, *Трансцендентные числа*, Наука, М., 1987; англ. пер.: A. B. Shidlovskii, *Transcendental numbers*, de Gruyter Stud. Math., **12**, de Gruyter, Berlin, 1989.
4. Ю. В. Нестеренко, “Об алгебраической независимости значений E -функций, удовлетворяющих линейным неоднородным дифференциальным уравнениям”, *Матем. заметки*, **5**:5 (1969), 587–598; англ. пер.: Yu. V. Nesterenko, “On the algebraic independence of the values of E -functions satisfying nonhomogeneous linear differential equations”, *Math. Notes*, **5**:5 (1969), 352–358.
5. Ю. В. Нестеренко, “Модулярные функции и вопросы трансцендентности”, *Матем. сб.*, **187**:9 (1996), 65–96; англ. пер.: Yu. V. Nesterenko, “Modular functions and transcendence questions”, *Sb. Math.*, **187**:9 (1996), 1319–1348.
6. С. Ленг, *Введение в теорию модулярных форм*, Мир, М., 1979; пер. с англ.: S. Lang, *Introduction to modular forms*, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1976.
7. А. П. Долгалёв, “Оценка порядков нулей многочленов от некоторых аналитических функций”, *Матем. заметки*, **84**:2 (2008), 193–206; англ. пер.: A. P. Dolgalev, “Estimates for the orders of zeros of polynomials in some analytic functions”, *Math. Notes*, **84**:2 (2008), 184–196.
8. F. Pellarin, “La structure differentielle de l’anneau des formes quasi-modulaires pour $SL_2(\mathbb{Z})$ ”, *J. Théor. Nombres Bordeaux*, **18**:1 (2006), 241–264.

П. Ю. Козлов (P. Yu. Kozlov)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова,
 механико-математический факультет
E-mail: pkozlov@list.ru

Поступило в редакцию
 06.11.2011