Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Шютт, Теоремы о сэндвичах для структур Шиоды–Иносы, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2013, том 77, выпуск 1, 211–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7933>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 14:31:01

УДК 512.774.4

М. Шютт

Теоремы о сэндвичах для структур Шиоды–Иносы

Получена геометрическая реализация трех бесконечных семейств поверхностей типа КЗ, которые допускают сэндвич с поверхностями Куммера по отношению к структуре Шиоды–Иносы. Рассмотрен ряд конкретных примеров.

Библиография: 11 наименований.

Ключевые слова: поверхность типа КЗ, структура Шиоды–Иносы, эллиптическое расслоение, изогения.

DOI: 10.4213/im7933

§ 1. Введение

В последнее время в исследованиях по арифметике и геометрии поверхностей типа КЗ важную роль играют структуры Шиоды–Иносы. Эти структуры позволяют установить естественную связь между специальными поверхностями типа КЗ и поверхностями Куммера. В работе [1] Т. Шиода показал, что любая якобиева эллиптическая поверхность типа КЗ с двумя особыми слоями типа Π^* допускает сэндвич с поверхностью Куммера (последняя имеет тип произведения). Впоследствии С. Ма в рамках теории Ходжа получил формальное доказательство того факта, что произвольная структура Шиоды–Иносы может быть достроена до сэндвича [2]. Однако для типичного случая, когда число Пикара поверхности равно 17, известны только пять явных геометрических примеров, построенных А. Кумаром [3], Б. ван Гименом, А. Сарти [4] и К. Койке [5].

В настоящей работе геометрически реализованы три бесконечные серии поверхностей типа КЗ с числом Пикара не ниже 17, которые включаются в сэндвич по отношению к структуре Шиоды–Иносы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $N \in \mathbb{N}$. Предположим, что выполнена одна из трех следующих альтернатив:

- 1) $p \equiv 1 \pmod{4}$ для любого $p \mid N$;
- 2) $N = \prod_i p_i$ или $N = 7 \prod_i p_i$, $p_i \equiv 1, 2, 4 \pmod{7}$ для любого i ;
- 3) $N = \prod_i p_i$ или $N = 15 \prod_i p_i$ для нечетного числа простых чисел $p_i \equiv 2, 8 \pmod{15}$, либо $N = 3 \prod_i p_i$ или $N = 5 \prod_i p_i$ для четного числа простых чисел $p_i \equiv 2, 8 \pmod{15}$.

Тогда для любой поверхности X типа КЗ с примитивным вложением $T_X \hookrightarrow U^2 + \langle -2N \rangle$ существует явная геометрически реализованная структура Шиоды–Иносы, достраиваемая до сэндвича.

Доказательство теоремы 1 состоит в рассмотрении трех различных семейств поверхностей типа КЗ в § 3–5 соответственно; завершения доказательств для каждой из альтернатив даны в пп. 3.5, 4.4, 5.4. Наша конструкция использует специализацию 4-мерных семейств поверхностей типа КЗ посредством расширения решетки и эллиптических расслоений с сечением порядка 2. Следует отметить, что среди прочего эта конструкция позволяет реализовать все пять известных ранее примеров (следует рассмотреть дискриминанты; см. § 2). Однако она не приводит к решеткам трансцендентных классов $U^2 + \langle -2N \rangle$, помимо тех, которые указаны в теореме 1 (см. п. 3.6).

Работа построена следующим образом. В § 2 дан обзор необходимых фактов о структурах Шиоды–Иносы и сэндвичах. Каждый из последующих параграфов посвящен рассмотрению одного из исследуемых семейств. Всюду далее основным полем предполагается поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел, хотя полученные уравнения имеют смысл над любым полем k , характеристика которого отлична от 2.

§ 2. Структуры Шиоды–Иносы и конструкция сэндвича

Классическим примером поверхности типа КЗ является поверхность Кумера. Рассмотрим абелеву поверхность A и профакторизуем ее по действию инволюции, определяемой групповой структурой. На факторпространстве имеется 16 рациональных простых двойных особенностей (типа A_1), разрешение которых приводит к поверхности типа КЗ, обозначаемой $\text{Km}(A)$. Тем самым, имеется рациональное отображение степени 2

$$A \dashrightarrow \text{Km}(A).$$

Эта реализация находит отражение в свойствах решеток трансцендентных классов, т. е. ортогональных дополнений T_X к $\text{NS}(X)$ в решетке $H^2(X, \mathbb{Z})$ относительно произведения классов когомологий. А именно, решетки трансцендентных классов подобны, т. е. их ранги совпадают, тогда как форма пересечения умножается на 2:

$$T_{\text{Km}(A)} = T_A(2).$$

С точки зрения классификации полезно связать с поверхностью $\text{Km}(A)$ некоторую поверхность X типа КЗ, решетка трансцендентных классов которой совпадает с исходной решеткой:

$$T_X = T_A.$$

Впервые это удалось сделать Т. Шиоде и Х. Иносе в работе [6] для случая прямого произведения $A \cong E \times E'$, где E, E' – эллиптические кривые. Предложенная ими конструкция применима к поверхностям типа КЗ с числом Пикара 20 и существенно использует якобиевы эллиптические расслоения на поверхности $\text{Km}(E \times E')$. Показано, что построенная поверхность X допускает рациональное отображение на $\text{Km}(E \times E')$ степени 2. Другими словами, X обладает инволюцией Никулина (с восемью изолированными неподвижными точками), разрешение фактора по которой приводит к поверхности $\text{Km}(E \times E')$. Следуя [7], в точности это условие обычно требуется в определении структуры

Шиоды–Иносы произвольной комплексной абелевой поверхности A и комплексной поверхности X типа КЗ:

$$\begin{array}{ccc} A & & X \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ & \text{Km}(A) & \end{array} \quad (1)$$

В случае неизогенных эллиптических кривых мы получаем $\text{NS}(A) = U$ и $T_A = U^2$, где U обозначает гиперболическую плоскость $\mathbb{Z}^2$ с формой пересечения $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. В типичном случае, в отличие от описанного, число Пикара поверхности A равно единице. Если A снабжена поляризацией степени $2N$, $N \in \mathbb{N}$, имеет место равенство

$$T_A = U^2 + \langle -2N \rangle.$$

В терминах решеток Д. Р. Моррисон получил исчерпывающий ответ на вопрос о том, когда поверхность типа КЗ допускает структуру Шиоды–Иносы [7].

ТЕОРЕМА 2 (Д. Р. Моррисон). *Алгебраическая поверхность X типа КЗ допускает структуру Шиоды–Иносы тогда и только тогда, когда для некоторого $N \in \mathbb{N}$ имеется примитивное вложение решеток*

$$T_X \hookrightarrow U^2 + \langle -2N \rangle.$$

Эквивалентное условие состоит в том, что X допускает инволюцию Никулина, переставляющую две ортогональные копии решетки E_8 в $\text{NS}(X)$, или, более абстрактно, $E_8^2 \hookrightarrow \text{NS}(X)$. Напомним, что E_8 – это (единственная) унимодулярная четная отрицательно определенная решетка ранга 8.

Для обсуждения конструкции сэндвича нам потребуется вернуться к рассмотренному выше случаю прямого произведения $A = E \times E'$ из статьи [6]. Т. Шиода заметил [1], что в этом случае сэндвич возникает автоматически. Последнее означает, что поверхность $\text{Km}(E \times E')$ обладает инволюцией Никулина, которая, в свою очередь, определяет поверхность X . Тем самым, диаграмма (1) продолжается следующим образом в случае $A = E \times E'$:

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Km}(A) \\ & \swarrow & \searrow \\ A & & X \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ & \text{Km}(A) & \end{array} \quad (2)$$

Для произвольной комплексной абелевой поверхности A это наблюдение приводит к вопросу: всякая ли структура Шиоды–Иносы может быть продолжена до сэндвича? Положительный ответ был получен недавно в работе [2].

ТЕОРЕМА 3 (С. Ма). *Любая структура Шиоды–Иносы допускает сэндвич.*

Отметим, что доказательство С. Ма основано на теории Ходжа. В частности, из него не удастся извлечь никакой геометрической информации. В обозначениях теоремы 2 известны только *пять* значений $N \in \mathbb{N}$, для которых имеется явная геометрическая конструкция: случай $N = 1$ рассматривается в [3] и отвечает поверхности Куммера якобианов кривых рода 2; случаи $N = 2$ [4] и $N = 3, 5, 7$ [5] отвечают эллиптическим поверхностям типа КЗ с нулевым MW-рангом.

В каждом из случаев факторы реализованы посредством эллиптических расслоений с сечением порядка 2. Посредством общего слоя поверхности, X и $\text{Km}(A)$ можно интерпретировать как эллиптические кривые над полем $k(t)$. Тогда сечения переходят в $k(t)$ -рациональные точки на общем слое; в частности, сечения порядка 2 соответствуют точкам порядка 2, что, тем самым, порождает изогении порядка 2 общих слоев, а также рациональные отображения порядка 2 между ассоциированными эллиптическими поверхностями. В настоящей работе мы используем преимущественно именно этот подход. Более точно, мы строим трехмерные семейства эллиптических расслоений MW-ранга 1 и сечения порядка 2, связанные со структурой Шиоды–Иносы. Теорема 1 утверждает, что эта конструкция позволяет получить бесконечный набор семейств поверхностей типа КЗ со структурой сэндвича, и указанные выше пять семейств в этот набор входят. Для двух случаев с малым значением N , которые не вошли в указанный выше список примеров ($N = 4, 8$), мы явно указываем уравнения, определяющие соответствующие семейства.

§ 3. Первое семейство

Рассмотрим 4-мерное семейство $\mathcal{X}$ поверхностей типа КЗ, для типичного члена X которого выполнено

$$\text{NS}(X) = U + E_7^2.$$

Это семейство также недавно исследовалось в работе [8]. Оно может быть задано как эллиптическое расслоение с двумя особыми слоями кодаирова типа III^* в точках 0 и ∞ :

$$X: y^2 = x^3 + t^3 a(t)x + t^5 b(t), \quad (3)$$

где $a(t), b(t) \in k[t]$ имеют степень 2.

Здесь можно нормировать переменные (x, y) и, независимо, переменную t , что позволяет избавиться от двух неопределенных коэффициентов. Гиперболическая плоскость $U \subset \text{NS}(X)$ порождается нулевым сечением O и типичным слоем F , в то время как решетки типа E_7 включают в себя компоненты слоев, не пересекающие O .

Естественно начать рассмотрение именно с этого семейства, поскольку оно специализируется в семейство Кумара с $\text{NS} = U + E_7 + E_8$, если положить, например, $\deg(a) \leq 1$. Решетку трансцендентных классов поверхности X можно вычислить, используя теорию Никулина дискриминантных форм (или как 2-элементарную решетку):

$$T_X = U^2 + A_1^2. \quad (4)$$

Здесь мы рассматриваем двойственную решетку $L^\vee$ к невырожденной четной целочисленной решетке L . Она определяет дискриминантную группу $L^\vee/L$, которая является конечной абелевой группой порядка квадрат дискриминанта решетки L . Дискриминантная группа несет индуцированную с L квадратичную форму, которая называется *дискриминантной формой* и обозначается через

$$q_L: L^\vee/L \rightarrow \mathbb{Q}/2\mathbb{Z}.$$

Имеет место изоморфизм абелевых групп

$$E_7^\vee/E_7 \cong A_1^\vee/A_1 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

На самом деле, имеются порождающие элементы с квадратом $-3/2$ (соответственно, $-1/2$), которые определяют непосредственное отождествление

$$q_{E_7} \cong -q_{A_1}. \quad (5)$$

3.1. Расширение решетки. Удобный способ специализации рассматриваемого 4-мерного семейства поверхностей типа КЗ к подсемейству с числом Пикара $\rho \geq 17$ состоит в расширении решетки $L = \text{NS}$ некоторым вектором v из T_X с отрицательным квадратом. В этом построении единственным тонким моментом является использование примитивного замыкания в КЗ-решетке Λ

$$L' := \overline{\langle L, v \rangle} \subset \Lambda = H^2(X, \mathbb{Z}) = U^3 + E_8^2.$$

Теория поляризованных поверхностей типа КЗ гарантирует, что L' отвечает 3-мерному семейству (подсемейству), состоящему из поверхностей типа КЗ, для которых в общем положении имеем $\text{NS} = L'$ и $T' = v^\perp \subset T_X$ для решетки трансцендентных классов. Поскольку мы интересуемся решетками трансцендентных классов, содержащими две копии U (см. теорему 2), мы будем в дальнейшем расширять L посредством вектора из A_1^2 .

ПРИМЕР 4. Рассмотрим вектор $v = (1, 0) \in A_1^2$, т.е. порождающий первого экземпляра A_1 . Изоморфизм (5) сопоставляет вектору $v/2$ порождающий w фактора $E_7^\vee/E_7$. Тем самым,

$$L' := \overline{\langle L, v \rangle} = \langle L, v/2 + w \rangle.$$

На самом деле, мы присоединили по одной копии E_7 и A_1 к унимодулярной решетке E_8 , так что $L' = U + E_7 + E_8$.

Поскольку расширение решетки включает в себя процедуру примитивного замыкания, мы должны выяснить, какие целые числа представляются решеткой A_1^2 примитивно, т.е. посредством вектора $v = (v_1, v_2)$ с условием $\text{НОД}(v_1, v_2) = 1$. Следующая лемма является легким упражнением из теории квадратичных форм.

ЛЕММА 5. *Решетка A_1^2 представляет число $-2N$ примитивно тогда и только тогда, когда N является либо произведением простых чисел $p \equiv 1 \pmod{4}$, либо удвоенным произведением такого вида.*

Мы уже обсудили расширение решетки при $N = 1$ (см. пример 4). Прочие случаи отвечают $v_1 v_2 \neq 0$, причем оба числа не являются одновременно четными. Пусть w_1 и w_2 – порождающие $E_7^\vee/E_7$ с квадратом $-3/2$, отвечающие соответствующим векторам из A_1 посредством (5). Тогда мы получаем, что

$$L' := \overline{\langle L, v' \rangle}, \quad v' = \frac{v}{2} + \begin{cases} w_1, & v_1 \text{ нечетно,} \\ 0, & v_1 \text{ четно,} \end{cases} + \begin{cases} w_2, & v_2 \text{ нечетно,} \\ 0, & v_2 \text{ четно.} \end{cases}$$

Отметим, что в соответствии с нашими соглашениями v' является целым четным вектором:

$$2\mathbb{Z} \ni (v')^2 = -\frac{N}{2} - \begin{cases} \frac{3}{2}, & \text{если } N \text{ нечетно,} \\ 3, & \text{если } N \text{ четно.} \end{cases}$$

Напомним, что согласно общей теории эллиптических поверхностей с сечением группа NS порождается компонентами слоев и сечениями. Если $N = 1$, то расширение решетки вызывает вырождение особых слоев, как в примере 4. В случае $N \neq 1$ особые слои не вырождаются и дополнительный алгебраический класс v' можно отождествить с сечением P , которое ортогонально O и F в NS и пересекает один или оба слоя типа III^* в нетождественной компоненте, в зависимости от четности v_1 и v_2 . В терминах теории решеток Морделла–Вейля [9] вклад от w_1, w_2 в значение $(v')^2$ отвечает поправочным членам для соответствующих компонент слоев. Следовательно, P имеет высоту $h(P) = N/2$.

3.2. Решетка трансцендентных классов. По построению подсемейство с $L' \hookrightarrow \text{NS}$ имеет в общем положении решетку трансцендентных классов $T' = U^2 + \langle -2N \rangle$.

3.3. Альтернативное эллиптическое расслоение. Мы переходим к рассмотрению другого эллиптического расслоения на X , на котором имеется сечение порядка 2. Для этого мы отождествим дивизор D кодаирова типа I_8^* с носителем на O и на компонентах слоев типа III^* , как показано на рис. 1.

Линейная система дивизора D индуцирует эллиптическое расслоение $X \rightarrow \mathbb{P}^1$. Здесь рациональные кривые, примыкающие к D , выступают в качестве нулевого сечения и сечения порядка два. Последнее утверждение легко проверяется посредством высотного спаривания, если заметить, что две оставшиеся компоненты исходных слоев типа III^* (не пересекающиеся с дивизором типа I_8^*) в общем положении находятся в двух слоях типа I_2 . Помимо этих трех особых слоев новое расслоение в общем положении имеет шесть слоев типа I_1 .

Явно дивизор D может быть задан параметром $u = x/t^2$ в терминах (3). Элементарные преобразования приводят к нормальной форме Вейерштрасса

$$X: y^2 = t(u^3 t^2 + u a(t) + b(t)), \quad (6)$$

т. е. эллиптической кривой над $k(u)$ с сечением $(0, 0)$ порядка 2. После расшире-

Рис. 1. Дивизор типа I_g^* с носителем на двух слоях типа III^* и на сечении O

ния решетки рациональная кривая P определяет мультисечение альтернативного расслоения, которое индуцирует сечение P' той же высоты $h(P') = N/2$.

3.4. Поверхность Куммера. Рассмотрим 2-изогенную эллиптическую поверхность Y , возникающую из альтернативного эллиптического расслоения на X посредством факторизации по сдвигу на $(0, 0)$ и разрешения особенностей. В общем положении Y имеет особые слои I_4^* , $2 \times I_1$, $6 \times I_2$ и сечение порядка 2. Решетку трансцендентных классов можно представить как $T_Y = (U(2))^2 + A_1^2$. Рассмотрим специализацию Y' поверхности Y , отвечающую расширению решетки X посредством сечения P (и P').

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть N – нечетное целое число из леммы 5. Тогда Y' – поверхность Куммера, для которой $T_{Y'} = T_X(2) = U(2)^2 + \langle -4N \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение о том, что поверхность является поверхностью Куммера, следует из 2-делимости $T_{Y'}$, что определяет четную решетку ранга не менее 17, как в теореме 2. Покажем, что решетка трансцендентных классов имеет указанный вид.

Сечение расширения P' поднимается до сечения P^* на Y высоты $h(P^*) = 2h(P') = N$. Мы утверждаем, что это сечение не делится на 2 в $MW(Y')$. Действительно, в противном случае существовало бы сечение Q , для которого $2Q = P$, а значит, $h(Q) = N/4$. Тогда, рассматривая имеющиеся особые слои, мы заключаем, что поправочные члены в высотном спаривании были бы все полуцелыми. Тем самым, $h(Q) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Противоречие.

Итак, решетка $NS(Y')$ порождена компонентами слоев, нулевым сечением и сечением порядка 2 вместе с P^* . В частности, используя [10, формула (22)], мы получаем

$$\text{disc } NS(Y') = \frac{4 \times 2^6}{2^2} h(P^*) = 2^6 N. \quad (7)$$

Далее мы используем тот факт, что прямой образ индуцирует вложение

$$T_X(2) \hookrightarrow T_{Y'}$$

(которое в общем случае не обязано быть примитивным, но обе решетки имеют одинаковый ранг [11]; см. также [6], [7]). Согласно (7) обе решетки имеют одинаковый дискриминант, и тем самым они согласованы. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Если число N четно, то, напротив, сечение P^* является 2-делимым в $MW(Y')$ (достаточно рассмотреть 2-длину; см. также замечание 11). Тем самым, дискриминанты решеток $T_X(2)$ и $T_{Y'}$ не совпадают. На самом деле, два случая расширения решеток в лемме 5 в определенном смысле двойственны: нечетное N на X отвечает четному $2N$ на Y , и четное N на X определяет нечетное $N/2$ на Y .

3.5. Доказательство теоремы 1, 1). Будем предполагать, что число N разлагается в произведение простых чисел $p \equiv 1 \pmod{4}$, как в теореме 1, 1). Рассмотрим семейство поверхностей типа КЗ, заданное расширением решетки поверхности $\mathcal{X}$, отвечающим N . Согласно предложению 6 каждую поверхность X' из данного семейства с $\rho(X') = 17$ можно включить в сэндвич по отношению к структуре Шиоды–Иносы, используя 2-изогению и ее двойственную. Остается исключить возможность того, что конструкция вырождается для большего числа Пикара.

Заметим, что каждый невырожденный член семейства обладает соответствующим эллиптическим расслоением с сечением порядка 2, но, возможно, с разными вырожденными слоями. Остается показать, что вне зависимости от числа Пикара фактор имеет 2-делимую решетку трансцендентных классов. Это вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 8. *Рассмотрим семейство поверхностей (X, ι) типа КЗ с инволюцией Никулина ι . Предположим, что разрешение особенностей Y фактора X/ι в общем положении имеет решетку трансцендентных классов*

$$T_Y = T_X(2).$$

Тогда это же имеет место для любой невырожденной специализации пары (X, ι) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (X', ι') – невырожденная специализация с фактором Y' . Имеются естественные примитивные вложения

$$T_{X'} \hookrightarrow T_X, \quad T_{Y'} \hookrightarrow T_Y.$$

Используя прямой образ относительно морфизма факторизации и предположение леммы, мы получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} T_{Y'} & \hookrightarrow & T_Y \\ \cup & & \parallel \\ T_{X'}(2) & \hookrightarrow & T_X(2) \end{array}$$

Рассматривая правый нижний угол, мы заключаем, что $T_{X'}(2)$ примитивно вкладывается в T_Y . Рассматривая левый верхний угол, мы делаем аналогичный вывод для вложения $T_{X'}(2) \subset T_{Y'}$. Поскольку решетки имеют один и тот же ранг [11], мы получаем равенство $T_{Y'} = T_{X'}(2)$. Лемма доказана.

Таким образом, доказана теорема 1, 1).

3.6. Оптимальность конструкции. Может возникнуть вопрос, нельзя ли получить посредством нашей конструкции другие поверхности типа КЗ, если не ограничивать себя рассмотрением прямого слагаемого A_1^2 в решетке T из леммы 5. В самом деле, решетка трансцендентных классов T представляет любое целое число, причем различными способами. Напомним, однако, что нашей целью является построение примитивных вложений

$$U^2 + \langle -2N \rangle \hookrightarrow T. \quad (8)$$

Объясним, почему наша конструкция не приводит к подсемействам с решеткой трансцендентных классов, отличной от указанных в теореме 1. Для этого мы сначала вложим прямое слагаемое U^2 в T . В общем случае ортогональное дополнение $M = (U^2)^\perp \subset T$ не обязательно единственно, но род M , т.е. класс изогении, определяется по T однозначно. Согласно теории групп классов род M состоит из единственной решетки. Следовательно, для того чтобы изучать примитивные вложения (8), достаточно рассматривать представления $-2N$ посредством A_1^2 . Эти же аргументы можно использовать для двух нижеследующих конструкций (см. леммы 10, 13).

3.7. Другие расширения решеток. Для полноты изложения мы кратко обсудим другие расширения решеток семейства $\mathcal{X}$. Это также послужит дополнительной проверкой изложенных выше аргументов. Подобные рассуждения применимы и к семействам поверхностей типа КЗ, рассматриваемым в следующих параграфах.

Пусть X' – некоторая поверхность типа КЗ с числом Пикара 17 и дискриминантом $2N$, $N > 1$, которая возникает из $\mathcal{X}$ посредством расширения решетки. Как и выше, X' обладает дополнительным сечением P высоты $N/2$, скажем, по отношению к исходному эллиптическому расслоению. Рассмотрим случай нечетного N . Здесь P пересекает некоторые нетождественные компоненты слов, тогда как для сечения $2P$ высоты $2N$ это не так. Обозначим через φ ортогональную проекцию по отношению к O, F в $\text{NS}(X')$. По предположению $\varphi(2P)$ ортогонально тривиальной решетке (т.е. образу $\text{NS}(X)$ в $\text{NS}(X')$), и мы получаем, что

$$\varphi(2P)^2 = -2N, \quad \varphi(2P)\varphi(P) = -N.$$

В частности, $\varphi(2P)/N \in \text{NS}(X')^\vee$. В дискриминантной группе $\text{NS}(X')^\vee / \text{NS}(X')$ это определяет элемент порядка N , где дискриминантная форма принимает значение $-2/N$.

Предположим, что $T(X') = U^2 + \langle -2N \rangle$ – это одна из рассматриваемых решеток трансцендентных классов. Ее дискриминантная форма также принимает значение $-2/N$ на элементе порядка N . Тогда для того, чтобы $\text{NS}(X')$ и $T(X')$ были ортогональными дополнениями в КЗ-решетке, мы требуем, чтобы их дискриминантные формы имели противоположные знаки. В частности, это означает, что -1 является квадратом по модулю любого простого делителя числа N . Тем самым, мы приходим к условиям теоремы 1.

В случае четного N следует рассматривать два подслучая в зависимости от четности числа $M = N/2$. Если $N/2$ нечетно, то используем приведенные выше аргументы применительно к элементу $\varphi(P)/M \in \text{NS}(X')^\vee$ порядка N

в дискриминантной группе. Если $N/2$ чётно, то P лежит в узкой решетке Морделла–Вейля и пересекает все особые слои в тождественной компоненте. Тем самым, $\text{NS}(X') = \text{NS}(X) + \langle \varphi(P) \rangle$, и 2-длина дискриминантной группы равна 3, что превосходит соответствующее значение для $U^2 + \langle -2N \rangle$. Противоречие.

§ 4. Второе семейство

В этом и следующем параграфах мы исследуем непосредственно эллиптические расслоения и сечение порядка 2, которое на этот раз является полустабильным. Такие расслоения допускают расширенную нормальную форму Вейерштрасса

$$y^2 = x(x^2 + a(t)x + b(t))$$

с приводимыми слоями в нулях многочлена $b(t)$. Мы рассматриваем два семейства, которые приводят к структурам Шиоды–Иносы. В настоящем параграфе будут изучаться поверхности с особыми слоями кодаировых типов I_{14} и I_2 . Соответствующие поверхности типа КЗ образуют 4-мерное семейство поверхностей типа КЗ

$$X: y^2 = x(x^2 + a(t)x + t), \quad (9)$$

где $a \in k[t]$ имеет степень 4 и не обращается в нуль в точке $t = 0$. Геометрически это означает, что $\rho(X) = 16$.

4.1. Решетка трансцендентных классов. Решетка трансцендентных классов определяется альтернативным эллиптическим расслоением на поверхности X . А именно, легко определить дивизор кодаирова типа Π^* по I_{14} расширенной посредством O и тождественной компоненты I_2 . Оставшиеся компоненты на I_{14} определяют сечение и A_6 -конфигурацию рациональных кривых. Сравнивая ранги и дискриминанты, мы находим, что в общем положении

$$\text{NS}(X) = U + A_6 + E_8, \quad T_X = U^2 + \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Последнее представление легко проверяется по дискриминантной форме, поскольку $A_6^\vee/A_6$ обладает порождающим элементом с квадратом $-6/7$.

4.2. Факторсемейство. Рассмотрим фактор по действию сдвига на сечение порядка 2 и обозначим получившиеся эллиптические поверхности типа КЗ через Y . Тогда в общем положении Y имеет особые слои типов $I_7, I_1, 8 \times I_2$, и $\text{MW} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

ЛЕММА 9. *В общем положении Y имеет трансцендентную решетку $T_Y \cong T_X(2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [11] поверхность Y типа КЗ также имеет число Пикара 16, а значит, MW-ранг равен нулю по формуле Шиоды–Тейта. Стандартные формулы исключают другие кручения. Тем самым, группа $\text{NS}(Y)$ порождена компонентами слоев и двумя сечениями конечных порядков. В частности, $\text{NS}(Y)$ имеет дискриминант $2^6 7$. Тогда, как и выше, вложение $T_X(2) \hookrightarrow T_Y$, отвечающее прямому образу, является изометрией.

4.3. Расширение решетки. Как и ранее, мы расширим решетку $\text{NS}(X)$ посредством вектора из последнего слагаемого в T_X . В общем положении имеются следующие возможности.

ЛЕММА 10. *Форма $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ примитивно представляет $-2N$ тогда и только тогда, когда N – произведение простых чисел $p \equiv 1, 2, 4 \pmod{7}$ или такое произведение, умноженное на 7.*

Выберем вектор v , как в лемме 10, и расширим NS посредством порождающего элемента из $v^\perp$ в указанной выше решетке ранга 2. Мы приходим к решетке трансцендентных классов

$$T' = U^2 + \mathbb{Z}v = U^2 + \langle -2N \rangle.$$

С точки зрения эллиптического расслоения это означает наличие дополнительного особого слоя ($N = 1$) или сечения P высоты $2N/7$ ($N > 1$).

4.4. Доказательство теоремы 1, 2). Пусть N – число из теоремы 1, 2) (или, эквивалентно, из леммы 10) и X' – член подсемейства поверхностей типа КЗ, соответствующего расширению решетки X , отвечающему числу N . По предположению решетка $T_{X'}$ примитивно вкладывается в $U^2 + \langle -2N \rangle$. Более того, леммы 8, 10 показывают, что факторповерхность имеет решетку трансцендентных классов $T_{X'}(2)$. Используя 2-изогению и двойственную к ней, мы заключаем, что эти поверхности образуют сэндвич по отношению к структуре Шиоды–Иносы.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Из наших построений следует, что образ сечения P на факторповерхности становится 2-делимым. Этот факт также можно проверить непосредственно на факторповерхности, сравнивая 2-длину группы NS и ранг решетки трансцендентных классов.

4.5. Пример $N = 4$. Нам нужно снабдить эллиптическое расслоение (9) сечением высоты $8/7$. С точностью до сдвига на сечение порядка 2 и инверсию такое сечение P единственно; оно пересекает I_{14} в Θ_4 (четвертая компонента) и I_2 в тождественной компоненте, но не пересекает O . В самом деле, высотное спаривание дает

$$h(P) = 4 - \frac{4 \cdot 10}{14} = \frac{8}{7}.$$

С учетом расширенной нормальной формы Вейерштрасса (9) сечение P может иметь только вид (α, w) , где $\alpha \in k^*$ и $w \in k[t]$ имеет степень 2. Тогда пара (α, w) однозначно определяет многочлен $a(t)$ в (9), поскольку

$$w^2 = \alpha^3 + \alpha^2 a(t) + \alpha t.$$

Мы получаем 3-мерное семейство поверхностей типа КЗ с решеткой $T = U^2 + \langle -8 \rangle$ в общем положении и унирациональным многообразием модулей.

§ 5. Третье семейство

В качестве третьего семейства мы рассматриваем эллиптические поверхности типа КЗ с сечением порядка 2 и особыми слоями типов I_{10} и I_6 . Здесь нормальная форма Вейерштрасса может быть преобразована к виду

$$X: y^2 = x(x^2 + a(t)x + t^3), \quad (10)$$

что вновь определяет 4-мерное семейство с $\rho = 16$ в общем положении. Рассуждения в этом случае аналогичны рассуждениям в предыдущем случае, поэтому мы лишь наметим основные идеи.

5.1. Решетка трансцендентных классов. Дискриминантная форма позволяет найти решетку трансцендентных классов в общем положении

$$T_X = U^2 + \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Вычисления можно упростить, используя сэндвичи с другим эллиптическим расслоением, например со слоями типов III^* и IV^* и сечением высоты $5/2$ (эллиптический параметр $u = x/t$). Это дает представление для $q_{NS(X)}$ вида $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}(-4/3) + \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}(-2/5)$, что согласуется с формой q_{T_X} с точностью до знака.

5.2. Факторсемейство. Обозначим факторы эллиптических поверхностей с сечением порядка 2 через Y . Тогда в общем положении Y имеет особые слои $I_5, I_3, 8 \times I_2$, и $MW \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

ЛЕММА 12. *В общем положении Y имеет решетку трансцендентных классов $T_Y \cong T_X(2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассматривая особые слои и сечение конечного порядка, мы заключаем, что $NS(Y)$ имеет дискриминант $2^6 15$. Как и выше, вложение $T_X(2) \hookrightarrow T_Y$ прямого образа является изометрией.

5.3. Расширение решетки. Расширим решетку $NS(X)$ вектором из последнего слагаемого в T_X . Анализ того, какие числа могут быть примитивно представлены, в этом случае является несколько более деликатным. Это можно заметить уже из того факта, что числа 2, 3 и 5 представимы нужным образом, а числа 6, 10 или 15 не представимы. Это связано с тем, что соответствующая квадратичная форма определяет класс порядка 2 в группе классов $Cl(-15)$. Последнее объясняет появление условия четности.

ЛЕММА 13. *Целое число $-2N$ представляется решеткой $\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ примитивно тогда и только тогда, когда:*

- 1) N является произведением нечетного числа простых чисел $p \equiv 2, 8 \pmod{15}$ или 15, умноженному на такое произведение;
- 2) N равно 3 или 5, умноженному на произведение четного числа простых чисел $p \equiv 2, 8 \pmod{15}$.

Расширение NS посредством примитивного вектора, перпендикулярного вектору из леммы 13, приводит к решетке трансцендентных классов

$$T' = U^2 + \langle -2N \rangle.$$

При этом эллиптическое расслоение снабжено сечением P высоты $2N/15$.

5.4. Доказательство теоремы 1, 3). Пусть N – число из теоремы 1, 3) (или, эквивалентно, из леммы 13) и X' – член подсемейства поверхностей типа КЗ, определенного расширением решетки X , отвечающим N . По предположению $T_{X'}$ примитивно вкладывается в $U^2 + \langle -2N \rangle$. Более того, из лемм 8, 13 следует, что факторповерхность имеет решетку трансцендентных классов $T_{X'}(2)$. Тем самым, эти поверхности реализуют сэндвич относительно структуры Шиоды–Иносы.

5.5. Пример $N = 8$. Эллиптическое расслоение (10) должно иметь сечение P высоты $16/15$. Достаточно, чтобы P пересекало I_{10} и I_6 в Θ_2 (вторая компонента) и не пересекало O , поскольку

$$h(P) = 4 - \frac{2 \cdot 8}{10} - \frac{2 \cdot 4}{6} = \frac{16}{15}.$$

Нормальная форма Вейерштрасса (10) показывает, что P должно иметь вид $(\alpha t^2, wt^2)$, где $\alpha \in k^*$ и $w \in k[t]$ имеет степень 2. Тогда пара (α, w) однозначно определяет многочлен $a(t)$ в (10), поскольку

$$w^2 = \alpha^3 t^2 + \alpha^2 a(t) + \alpha t.$$

Мы получаем 3-мерное семейство поверхностей типа КЗ с решеткой $T = U^2 + \langle -16 \rangle$ в общем положении и унирациональным многообразием модулей.

Идея написания этой статьи возникла у автора во время участия в семинаре по арифметике и геометрии поверхностей типа КЗ и трехмерных многообразий Калаби–Яу в институте Филдса в августе 2011 г. Автор благодарит организаторов семинара за стимулирующую атмосферу и гостеприимство, кроме того, рецензента, а также переводчика И. В. Аржанцева за ценные замечания.

Список литературы

1. T. Shioda, “Kummer sandwich theorem of certain elliptic $K3$ surfaces”, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **82**:8 (2006), 137–140.
2. S. Ma, “On $K3$ surfaces which dominate Kummer surfaces”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **141**:1 (2013), 131–137.
3. A. Kumar, “ $K3$ surfaces associated with curves of genus two”, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2008, №6, Art. ID rnm165.
4. B. van Geemen, A. Sarti, “Nikulin involutions on $K3$ surfaces”, *Math. Z.*, **255**:4 (2007), 731–753.
5. K. Koike, *Elliptic $K3$ surfaces admitting a Shioda–Inose structure*, arXiv: 1104.1470.
6. T. Shioda, H. Inose, “On singular $K3$ surfaces”, *Complex analysis and algebraic geometry*, Iwanami Shoten, Tokyo, 1977, 119–136.

7. D.R. Morrison, “On $K3$ surfaces with large Picard number”, *Invent. Math.*, **75**:1 (1984), 105–121.
8. A. Clinger, C.F. Doran, “Note on a geometric isogeny of $K3$ surfaces”, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2011, № 16, 3657–3687.
9. T. Shioda, “On the Mordell–Weil lattices”, *Comment. Math. Univ. St. Paul.*, **39**:2 (1990), 211–240.
10. M. Schütt, T. Shioda, “Elliptic surfaces”, *Algebraic geometry in East Asia* (Seoul, Korea, 2008), Adv. Stud. Pure Math., **60**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2010, 51–160.
11. H. Inose, “Defining equations of singular $K3$ surfaces and a notion of isogeny”, *Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry* (Kyoto, 1977), Kinokuniya Book Store, Tokyo, 1978, 495–502.

М. ШЮТТ (M. SCHÜTT)
Leibniz University of Hannover, Germany
E-mail: schuett@math.uni-hannover.de

Поступило в редакцию
07.11.2011

Перевод с английского И.В. Аржанцева