Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Р. Фаталов, Эргодические средние при большом значении T и точные асимптотики малых уклонений для многомерного винеровского процесса, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2013, том 77, выпуск 6, 169–206

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7938>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 05:13:41

УДК 519.2

В. Р. Фаталов

Эргодические средние при большом значении T и точные асимптотики малых уклонений для многомерного винеровского процесса

Доказаны результаты о точных асимптотиках при $T \rightarrow \infty$ для средних $E_{a,c} \exp\left\{-\int_0^T g(\mathbf{w}(t)) dt\right\}$ и вероятностей $P_{a,c}\left\{\frac{1}{T} \int_0^T g(\mathbf{w}(t)) dt < d\right\}$, где $\mathbf{w}(t) = (w_1(t), \dots, w_n(t))$, $t \geq 0$, – n -мерный винеровский процесс, $g(x)$ – непрерывная положительная функция (потенциал), удовлетворяющая некоторым условиям, $d > 0$, $a, c \in \mathbb{R}^n$ – заданные векторы. Результаты получены на основе развитого в статье нового метода – метода Лапласа для времени пребывания многомерного винеровского процесса. Рассмотрены примеры степенного и радиального потенциалов. Доказаны результаты о точных асимптотиках малых уклонений для вероятностей $P_0\left\{\int_0^1 \sum_{j=1}^n |w_j(t)|^p dt < \varepsilon^p\right\}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и фиксированном $p > 0$.

Библиография: 54 наименования.

Ключевые слова: большие уклонения, марковские процессы, метод Лапласа, функционал действия, время пребывания, многомерный оператор Шрёдингера.

DOI: 10.4213/im7938

§ 1. Введение и формулировка основных результатов

Теория больших уклонений для времени пребывания однородных марковских процессов с непрерывным и дискретным временами является развитой и эффективной теорией (см. работы [1]–[22]). Принцип больших уклонений Донскера–Варадана, лежащий в основе этой теории, позволяет вычислять на логарифмическом уровне асимптотики интегралов типа Лапласа и асимптотики вероятностей больших уклонений для эргодических средних. В случае непрерывного времени мы рассматриваем асимптотики при $T \rightarrow \infty$ следующих величин:

$$E \exp\left\{-\int_0^T g(\xi(t)) dt\right\}, \quad P\left\{\frac{1}{T} \int_0^T g(\xi(t)) dt < d\right\}, \quad (1.1)$$

где $\xi(t)$, $t \geq 0$, – однородный марковский процесс с пространством состояний X , g – непрерывная действительная функция (потенциал), заданная на X , $d \in \mathbb{R}$ – фиксированное число, $[\Omega, \mathcal{F}, P]$ – достаточно богатое основное вероятностное пространство, E – математическое ожидание, взятое по вероятностной мере P .

Переход от логарифмических к точным асимптотикам для величин (1.1) оказался весьма сложным и потребовал создания нового метода исследования – бесконечномерного метода Лапласа для времени пребывания однородных марковских процессов. Этот метод был построен в работах [2], [17]–[19] для средних

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 07-01-00077, 11-01-00050).

и в статьях [4]–[6], [9], [10] для вероятностей в случае $X \subset \mathbb{R}$. В [9], [10], [18] рассмотрен случай дискретного времени, т. е. однородных марковских цепей. В [4]–[7] были также вычислены точные асимптотики вероятностей из (1.1) для таких *одномерных* марковских процессов, как винеровский, бesselевский, Орнштейна–Уленбека, и потенциалов $g(x) = |x|^p$, $p > 0$, $g(x) = e^{\theta|x|}$, $\theta > 0$. При этом была установлена тесная связь рассматриваемых асимптотических задач с теорией одномерных операторов Шрёдингера.

В настоящей работе мы покажем, что основные положения метода Лапласа из статей [4]–[6] применимы и в случае n -мерного винеровского процесса с пространством состояний $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Также мы приведем конкретные примеры вычисления точных асимптотик величин (1.1) и их приложения в теории малых отклонений.

Перейдем к точной формулировке полученных результатов.

Пусть $\mathbb{R}^n$ – обычное n -мерное евклидово пространство векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$ с нормой $|x| = (\sum_{k=1}^n x_k^2)^{1/2}$. Пусть $\mathbf{w}(t) = (w_1(t), \dots, w_n(t))$, $t \geq 0$, – n -мерный винеровский процесс, где $w_k(t)$, $k = 1, \dots, n$, – независимые одномерные винеровские процессы (см. [23, гл. 1, § 7, с. 48], [24, гл. 1, § 1]). Обозначим через C_0 пространство непрерывных функций $f(x)$, заданных на $\mathbb{R}^n$, которые стремятся к нулю при $|x| \rightarrow \infty$.

Как известно, винеровский процесс $\mathbf{w}(t)$ является однородным марковским феллеровским процессом с пространством состояний $\mathbb{R}^n$ и производящим оператором вида

$$(Af)(x) = \frac{1}{2} \Delta f(x) \equiv \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}, \quad f \in D_A, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad (1.2)$$

где D_A – множество дважды непрерывно дифференцируемых функций f на $\mathbb{R}^n$ таких, что f и ее производные первого и второго порядков принадлежат пространству C_0 (см. [24, гл. 7, § 1, предложения 1.10, 1.11]).

Пусть $L^2 \equiv L^2(\mathbb{R}^n)$ – гильбертово пространство квадратично интегрируемых функций $f(x)$ на $\mathbb{R}^n$ с нормой и скалярным произведением следующего вида:

$$\|f\| \equiv \|f\|_{L^2} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^2(x) dx \right)^{1/2}, \quad \langle f, v \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)v(x) dx, \quad f, v \in L^2. \quad (1.3)$$

В настоящей работе мы рассмотрим наиболее простой класс довольно быстро возрастающих на бесконечности положительных потенциалов g . Введем следующее условие, которое предполагается выполненным на протяжении всей статьи.

(A1) Пусть непрерывная функция $g(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, такова, что для некоторого $\tau > 0$ выполнено соотношение

$$\frac{g(x)}{|x|^\tau} \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (1.4)$$

Как видим, $g(x) \rightarrow \infty$ при $|x| \rightarrow \infty$ не медленнее, чем степенным образом. Значение подобного условия пояснено, например, в [25, с. 147].

1.1. Асимптотики интегралов. Изложим результаты, доказанные в настоящей работе, о точных асимптотиках интегралов из (1.1) в случае, когда $\xi(t) = \mathbf{w}(t)$ – n -мерный винеровский процесс, а потенциал g удовлетворяет условию (A1).

Рассмотрим n -мерный линейный дифференциальный оператор Шрёдингера $S: L^2 \rightarrow L^2$, действующий по правилу

$$(Sy)(x) = -\frac{1}{2}\Delta y(x) + g(x)y(x)$$

и определенный на всюду плотном множестве $D_S := \{y \in L^2 \cap D_A: Sy \in L^2\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Оператор Шрёдингера S является существенно самосопряженным положительным оператором и имеет чисто дискретный простой спектр, т.е. уравнение $Sy = \kappa y$ обладает счетным числом решений (κ_j, y_j) , $j = 0, 1, 2, \dots$, где $0 < \kappa_0 < \kappa_1 < \dots < \kappa_j < \dots$ – собственные значения, $\{y_j\}$ – соответствующие им нормированные собственные функции, $\|y_j\| = 1$. Основная собственная функция $y_0(x)$ является строго положительной, а система собственных функций $\{y_j\}_{j=0}^\infty$ образует ортонормированный базис в L^2 .*

В самом деле, существенная самосопряженность оператора S вытекает из теоремы Т. Като (см. [26, т. 2, гл. 10, теорема X.28], а также [27, §2, теорема 2.6]). Утверждения о положительности и спектре оператора S , а также о положительности функции y_0 вытекают из [26, т. 4, теоремы XIII.16, XIII.47] (см. также [28, гл. 9, §3, п. 1] и [27, §5, пример 5.5]). Согласно [26, т. 4, теоремы XIII.64, (v), XIII.67] система $\{y_j\}_{j=0}^\infty$ образует ортонормированный базис в L^2 .

Далее везде ради краткости мы используем обозначения

$$\begin{aligned} P_a\{\mathbf{w} \in (\cdot)\} &:= P\{\mathbf{w} \in (\cdot) \mid \mathbf{w}(0) = a\}, \\ P_{a,c}\{\mathbf{w} \in (\cdot)\} &:= P\{\mathbf{w} \in (\cdot) \mid \mathbf{w}(0) = a, \mathbf{w}(T) = c\}, \end{aligned}$$

где $a \in \mathbb{R}^n$ и $c \in \mathbb{R}^n$. Усреднения по соответствующей вероятности обозначены через E_a и $E_{a,c}$. Также мы используем обычную запись для элемента меры Лебега $dx = dx_1 \dots dx_n$ при $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Итак, пусть $\kappa_0 > 0$ – минимальное собственное число оператора Шрёдингера S и $y_0(t) > 0$ – соответствующая нормированная собственная функция, т.е. y_0 – единственное решение следующей граничной задачи для уравнения Шрёдингера:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\Delta y(x) + g(x)y(x) &= \kappa_0 y(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} y(x) &= 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} y^2(x) dx = 1. \end{aligned} \tag{1.5}$$

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть выполнено условие (A1) и фиксированы векторы $a \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}^n$. Тогда при $T \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические соотношения*

$$E_a \exp\left\{-\int_0^T g(\mathbf{w}(t)) dt\right\} = \exp\{-\kappa_0 T\} y_0(a) \int_{\mathbb{R}^n} y_0(x) dx (1 + o(1)), \tag{1.6}$$

$$E_{a,c} \exp\left\{-\int_0^T g(\mathbf{w}(t)) dt\right\} = \exp\{-\kappa_0 T\} (2\pi T)^{n/2} y_0(a) y_0(c) (1 + o(1)). \tag{1.7}$$

Теорема 1.1 при $n = 1$ доказана в [8, теорема 3]. Далее, в § 3, мы дадим доказательство теоремы 1.1, основанное на методе времени пребывания. В § 2 мы изложим вывод соотношения (1.6) при помощи формулы Фейнмана–Каца. Примеры к теореме 1.1 приведены ниже.

1.2. Асимптотики вероятностей. Вычисление точных асимптотик вероятностей из (1.1) для процесса $\mathbf{w}(t)$ – более сложная задача, поскольку результат описывается в более сложной форме. Пусть потенциал g удовлетворяет условию (A1). Определим функционал

$$U(v) := \int_{\mathbb{R}^n} g(x)v^2(x) dx \equiv \langle gv, v \rangle, \quad v \in L^2, \quad (1.8)$$

и пусть D_0 – множество функций $h(x) \in L^2$ таких, что $g(x)h(x) \in L^2$. Пусть $D := D_0 \cap D_S$ – множество, всюду плотное в L^2 . Определим множество

$$\mathcal{H} := \{v \in D : \langle v, v \rangle = 1\} \quad (1.9)$$

и функционал

$$J(v) := \begin{cases} -\langle \mathcal{A}v, v \rangle, & \text{если } v \in \mathcal{H}, \\ +\infty, & \text{если } v \in L^2 \setminus \mathcal{H}. \end{cases} \quad (1.10)$$

Функционал $J(v)$ тесно связан с функционалом действия $I(v)$, введенным далее в формуле (3.6) (см. равенство перед формулой (4.2)). Известно, что функционал действия играет основную роль в вариационном принципе теории больших отклонений (см. [3, гл. 2, определение 2.1 и п. 5.1, условие (E4)]. Для формулировки результатов об асимптотиках вероятностей нам понадобится следующее предложение, имеющее вариационную природу (см. доказательство в § 4).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Пусть выполнено условие (A1) и фиксировано число $d > 0$. Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) экстремальная задача

$$J(v) \rightarrow \inf, \quad v \in \mathcal{H}, \quad v \geq 0, \quad U(v) \leq d, \quad (1.11)$$

имеет единственное решение – функцию $v_0(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, при этом функция $v_0(x)$ ограничена и положительна;

(ii) существует единственная пара (λ_0, β_0) положительных чисел (множители Лагранжа) такая, что функция $v_0(x)$ является единственным положительным решением граничной задачи

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\Delta v(x) + \lambda_0 g(x)v(x) &= \beta_0 v(x), & x \in \mathbb{R}^n, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} v(x) &= 0, & \int_{\mathbb{R}^n} v^2(x) dx = 1, & \int_{\mathbb{R}^n} g(x)v^2(x) dx = d, \end{aligned} \quad (1.12)$$

для уравнения типа Шрёдингера с потенциалом $g(x)$, при этом

$$\inf\{J(v) : v \in \mathcal{H}, U(v) \leq d, v \geq 0\} = J(v_0) = \beta_0 - d\lambda_0 > 0. \quad (1.13)$$

Дополнительная характеристика экстремальной тройки $(\lambda_0, \beta_0, v_0)$ дана в § 4, лемма 4.4. Определим непрерывную функцию

$$V(x) := \beta_0 - \lambda_0 g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Легко видеть, что в силу первого соотношения в формуле (1.12) выполнено равенство

$$(\mathcal{A}v_0)(x) = -V(x)v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.14)$$

Из формулы (1.14) и одного факта, указанного в конце доказательства леммы 4.7, следует, что ядро E_0 оператора $\mathcal{A} + V: L^2 \rightarrow L^2$ представляет собой одномерное подпространство пространства L^2 :

$$E_0 := \text{Ker}(\mathcal{A} + V) = \{c_0 v_0(x), c_0 \in \mathbb{R}\}.$$

Имеет место разложение гильбертова пространства L^2 в прямую сумму:

$$L^2 = E_0 \oplus E_1,$$

где

$$E_1 := E_0^\perp = \left\{ v \in L^2: \int_{\mathbb{R}^n} v(x)v_0(x) dx = 0 \right\}$$

— ортогональное дополнение подпространства E_0 (см. [28, гл. 4, § 1, п. 3]). Положим

$$\psi(x) := \frac{g(x)}{d} - 1, \quad x \in \mathbb{R}^n; \quad (1.15)$$

тогда в силу двух последних равенств из (1.12) имеем $v_0\psi \in E_1$. Обозначим

$$\sigma^2 := -2\lambda_0^2 d \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{A} + V)^{-1}[v_0\psi](x)g(x)v_0(x) dx, \quad (1.16)$$

где (согласно вышеизложенному) обратный элемент $(\mathcal{A} + V)^{-1}[v_0\psi](x)$ берется из подпространства E_0 , т. е. для него выполнено равенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{A} + V)^{-1}[v_0\psi](x)v_0(x) dx = 0. \quad (1.17)$$

Конечность и положительность σ^2 доказана в лемме 4.7. Укажем, что из формулы (1.4) следует соотношение $\int_{\mathbb{R}^n} v_0(x) dx < \infty$.

Сформулируем основной результат об асимптотиках вероятностей.

ТЕОРЕМА 1.2 (точная асимптотика для вероятностей). Пусть выполнено условие (A1), фиксированы число $d > 0$ и векторы $a \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$. Тогда при $T \rightarrow \infty$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_a \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T g(\mathbf{w}(t))g dt < d \right\} \\ &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi T}} \exp\{-T(\beta_0 - d\lambda_0)\} v_0(a) \int_{\mathbb{R}^n} v_0(x) dx (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{a,c} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T g(\mathbf{w}(t)) dt < d \right\} \\ &= \frac{(2\pi T)^{(n-1)/2}}{\sigma} \exp\{-T(\beta_0 - d\lambda_0)\} v_0(a)v_0(c)(1 + o(1)). \end{aligned} \quad (1.19)$$

1.3. Примеры. В качестве потенциала $g(x)$ в теоремах 1.1, 1.2 удобно брать те функции, для которых эллиптические уравнения в частных производных (1.5) и (1.12) имеют простые решения. Некоторые такие уравнения описаны в справочниках [28, гл. 9, § 2] и [29, гл. 7, § 7.4].

ПРИМЕР 1.1. Рассмотрим наиболее простой, но важный для приложений случай, когда выполнено следующее условие.

(A2) Пусть потенциал g имеет вид

$$g(x) = \sum_{j=1}^n g_j(x_j), \quad x = (x_1, \dots, x_n),$$

где непрерывные функции $g_j(x_j) \geq 0$, $x_j \in \mathbb{R}$, таковы, что для некоторых $\tau_j > 0$ выполнены соотношения

$$\frac{g_j(t)}{|t|^{\tau_j}} \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad |t| \rightarrow \infty, \quad j = 1, \dots, n.$$

В этом случае асимптотики интегралов из теоремы 1.1 выражаются через одномерные асимптотики, так как в силу независимости координатных процессов $w_j(t)$, $j = 1, \dots, n$, для фиксированного $T > 0$ имеют место факторизации

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_a \exp \left\{ - \int_0^T \sum_{j=1}^n g_j(w_j(t)) dt \right\} &= \prod_{j=1}^n \mathbb{E}_{a_j} \exp \left\{ - \int_0^T g_j(w_j(t)) dt \right\}, \\ \mathbb{E}_{a,c} \exp \left\{ - \int_0^T \sum_{j=1}^n g_j(w_j(t)) dt \right\} &= \prod_{j=1}^n \mathbb{E}_{a_j, c_j} \exp \left\{ - \int_0^T g_j(w_j(t)) dt \right\}, \end{aligned} \quad (1.20)$$

где $a = (a_1, \dots, a_n)$, $c = (c_1, \dots, c_n)$.

Пусть $\kappa_{0j} > 0$, $j = 1, \dots, n$, – минимальное собственное число одномерного оператора Шрёдингера $(S_j y)(t) = -\frac{1}{2}y''(t) + g_j(t)y(t)$ и $y_{0j}(t) > 0$ – соответствующая нормированная собственная функция, т. е. y_{0j} – единственное решение следующей граничной задачи для уравнения Шрёдингера:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}y''(t) + g_j(t)y(t) &= \kappa_{0j}y(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ \int_{\mathbb{R}} y^2(t) dt &= 1. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. Пусть выполнено условие (A2) и фиксированы векторы $a = (a_1, \dots, a_n)$, $c = (c_1, \dots, c_n)$. Тогда при $T \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические соотношения

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_a \exp \left\{ - \int_0^T \sum_{j=1}^n g_j(w_j(t)) dt \right\} &= \exp\{-\kappa_0 T\} \prod_{j=1}^n \left[y_{0j}(a_j) \int_{\mathbb{R}} y_{0j}(t) dt \right] (1 + o(1)), \\ \mathbb{E}_{a,c} \exp \left\{ - \int_0^T \sum_{j=1}^n g_j(w_j(t)) dt \right\} &= \exp\{-\kappa_0 T\} (2\pi T)^{n/2} \prod_{j=1}^n [y_{0j}(a_j) y_{0j}(c_j)] (1 + o(1)), \end{aligned}$$

где $\kappa_0 = \sum_{j=1}^n \kappa_{0j}$.

Очевидно, предложение 1.3 вытекает непосредственно из теоремы 1.1 и формул (1.20). Отметим, что в условиях предложения 1.3 экстремальная функция $y_0(x)$ из теоремы 1.1 имеет вид

$$y_0(x) = \prod_{j=1}^n y_{0j}(x_j), \quad x = (x_1, \dots, x_n).$$

Рассмотрим теперь теорему 1.2 в случае, когда выполнено условие (A2). Покажем, как можно более подробно описать величины $(\lambda_0, \beta_0, v_0(x))$ из предложения 1.2. Для произвольного фиксированного числа $\lambda > 0$ рассмотрим n одномерных граничных задач относительно собственных чисел оператора Шрёдингера следующего вида ($j = 1, \dots, n$):

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}v_j''(t) + \lambda g_j(t)v_j(t) &= \beta_j v_j(t), & t \in \mathbb{R}, \\ \int_{\mathbb{R}} v_j^2(t) dt &= 1. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Из общей теории одномерных операторов Шрёдингера следует, что при $j = 1, \dots, n$ задача (1.21) имеет счетное число решений $(\beta_{kj}(\lambda), v_{kj}(\lambda))$, $k = 0, 1, 2, \dots$, где

$$0 < \beta_{0j}(\lambda) < \beta_{1j}(\lambda) < \dots < \beta_{kj}(\lambda) < \dots$$

– собственные значения, $\{v_{kj}(\lambda)\}_{k=0}^\infty$ – соответствующие им нормированные собственные функции, $\|v_{kj}(\lambda)\| = 1$. Выделим экстремальную пару $(\beta_{0j}(\lambda), v_{0j}(\lambda, t))$, $t \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, и напомним, что здесь $v_{0j}(\lambda, t) \geq 0$.

Зафиксируем число $d > 0$. Используя метод разделения переменных и математическую индукцию, несложно показать, что в силу условия (A2) и предложения 1.2 уравнение относительно $\lambda > 0$

$$\sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} v_{0j}^2(\lambda, t) g_j(t) dt = d \quad (1.22)$$

имеет положительный корень $\lambda_1 > 0$ такой, что тройка $(\beta_0, \lambda_0, v_0(x))$ из предложения 1.2 имеет следующий вид:

$$\lambda_0 = \lambda_1, \quad \beta_0 = \sum_{j=1}^n \beta_{0j}(\lambda_0), \quad v_0(x) = \prod_{j=1}^n v_{0j}(\lambda_0, x_j), \quad x = (x_1, \dots, x_n). \quad (1.23)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. Пусть выполнено условие (A2), фиксированы число $d > 0$ и векторы $a \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$. Тогда при $T \rightarrow \infty$ справедливы соотношения (1.18), (1.19), в которых тройка $(\lambda_0, \beta_0, v_0(x))$ определяется по формулам (1.22), (1.23).

Как видим, при условии (A2) нам удалось дать описание тройки $(\lambda_0, \beta_0, v_0(x))$ из предложения 1.2 посредством решений n одномерных дифференциальных уравнений (1.21). Постоянная σ из формулы (1.16), по-видимому, подобного описания не допускает. Это объясняется тем, что вычисление значения $(\mathcal{A} + V)^{-1}[v_0\psi](x)$ даже при условии (A2) сводится к решению *неоднородного* эллиптического дифференциального уравнения в частных производных, а здесь метод разделения переменных не применим (см., в частности, [29,

гл. 7, п. 7.4.5]). Однако в важном частном случае *степенных* функций $g_j(t)$, $j = 1, \dots, n$, достаточно простые формулы для постоянной σ можно получить, используя метод малых уклонений (см. далее примеры 1.2, 1.3).

1.4. Степенные потенциалы и точные асимптотики малых уклонений. Рассмотрим частный случай примера 1.1.

ПРИМЕР 1.2. Пусть потенциал g имеет вид

$$g(x) = \sum_{j=1}^n |x_j|^p, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (1.24)$$

где $p > 0$ – некоторое фиксированное число. Здесь, очевидно, выполнено условие (A2) с $g_j(t) = |t|^p$ для $t \in \mathbb{R}$ и $j = 1, \dots, n$. При $n = 1$ и $g(t) = |t|^p$, $t \in \mathbb{R}$, асимптотики величин (1.1) при $T \rightarrow \infty$ найдены в [4] и [8].

В силу формул (1.20) выполнены равенства

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_a \exp \left\{ - \int_0^T \sum_{j=1}^n |w_j(t)|^p dt \right\} &= \prod_{j=1}^n \mathbb{E}_{a_j} \exp \left\{ - \int_0^T |w_j(t)|^p dt \right\}, \\ \mathbb{E}_{a,c} \exp \left\{ - \int_0^T \sum_{j=1}^n |w_j(t)|^p dt \right\} &= \prod_{j=1}^n \mathbb{E}_{a_j, c_j} \exp \left\{ - \int_0^T |w_j(t)|^p dt \right\}, \end{aligned} \quad (1.25)$$

где $a = (a_1, \dots, a_n)$, $c = (c_1, \dots, c_n)$. Таким образом, асимптотики при $T \rightarrow \infty$ интегралов из левых частей формул (1.25) полностью определяются одномерными асимптотиками, вычисленными в работе [8, теорема 4].

Рассмотрим теперь асимптотики вероятностей из формулы (1.1) при потенциале g вида (1.24). Рассуждая так же, как при выводе формул (1.21)–(1.23), и учитывая результаты из [4], получаем следующее описание величин, которые характеризуют точные асимптотики.

Зафиксируем числа $p > 0$, $d > 0$ и целое n . Пусть $\kappa_{01} \equiv \kappa_{01}(p) > 0$ – минимальное собственное число одномерного оператора Шрёдингера $(S_1 y)(t) = -\frac{1}{2}y''(t) + |t|^p y(t)$ и $y_{01}(t) > 0$ – соответствующая нормированная собственная функция, т.е. y_{01} – единственное решение следующей граничной задачи для уравнения Шрёдингера:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}y''(t) + |t|^p y(t) &= \kappa_{01} y(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ \int_{\mathbb{R}} y^2(t) dt &= 1. \end{aligned}$$

Отметим, что в силу приближения Лиувилля–Грина (см. [30, гл. 6, теорема 2.1]) выполнено соотношение

$$\log y_{01}(t) = -\frac{2\sqrt{2}}{p+2} |t|^{(p+2)/2} (1 + o(1)), \quad |t| \rightarrow \infty,$$

поэтому $\int_{-\infty}^{+\infty} y_{01}(x) dx < \infty$. Определим параметры

$$\lambda_0 \equiv \lambda_0(p, d, n) := \left(\frac{2n\kappa_{01}}{(2+p)d} \right)^{(2+p)/p}, \quad \lambda_{01} = \lambda_0(p, 1, 1) = \left(\frac{2\kappa_{01}}{2+p} \right)^{(2+p)/p}, \quad (1.26)$$

$$b \equiv b(p, n, d) := p \left(\frac{n\kappa_{01}}{2+p} \right)^{(2+p)/p} \left(\frac{2}{d} \right)^{2/p} \quad (1.27)$$

и функции

$$\begin{aligned} v_{01}(t) &:= \lambda_0^{1/[2(2+p)]} y_{01}(\lambda_0^{1/(2+p)} t), & \tilde{v}_{01}(t) &:= \lambda_{01}^{1/[2(2+p)]} y_{01}(\lambda_{01}^{1/(2+p)} t), \\ V_{01}(t) &:= \lambda_{01} \left[\frac{2+p}{2} - |t|^p \right], & \psi_{01}(t) &:= |t|^p - 1, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Пусть $(\Lambda f)(t) = \frac{1}{2} f''(t)$, $f \in D_\Lambda$, – производящий оператор одномерного винеровского процесса. Обозначим

$$\sigma_1^2 := -2\lambda_{01}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (\Lambda + V_{01})^{-1} [\tilde{v}_{01} \psi_{01}](t) |t|^p \tilde{v}_{01}(t) dt, \quad (1.29)$$

где обратный элемент $(\Lambda + V_{01})^{-1} [\tilde{v}_{01} \psi_{01}](t)$ таков, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\Lambda + V_{01})^{-1} [\tilde{v}_{01} \psi_{01}](t) \tilde{v}_{01}(t) dt = 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. Для фиксированного $p > 0$ справедливо равенство

$$\sigma_1^2 = \frac{p\lambda_{01}}{2+p}. \quad (1.30)$$

Формула (1.30), отсутствующая в работе [4], доказана в [31, § 4]. Положим также

$$\sigma_n(d) := \frac{n^{(2+p)/(2p)}}{d^{1/p}} \left(\frac{p\lambda_{01}}{2+p} \right)^{1/2}. \quad (1.31)$$

На основе теоремы 1.2 мы докажем следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.3 (точная асимптотика для степенного потенциала). Пусть фиксированы числа $p > 0$, $d > 0$, целое n и векторы $a = (a_1, \dots, a_n)$, $c = (c_1, \dots, c_n)$. Тогда при $T \rightarrow \infty$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} P_a \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{j=1}^n |w_j(t)|^p dt < d \right\} \\ = \frac{1}{\sigma_n(d) \sqrt{2\pi T}} \exp\{-Tb\} \prod_{j=1}^n v_{01}(a_j) \left[\int_{\mathbb{R}} v_{01}(t) dt \right]^n (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned} P_{a,c} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{j=1}^n |w_j(t)|^p dt < d \right\} \\ = \frac{(2\pi T)^{(n-1)/2}}{\sigma_n(d)} \exp\{-Tb\} \prod_{j=1}^n [v_{01}(a_j) v_{01}(c_j)] (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.33)$$

где постоянные b , $\sigma_n(d)$ и функция $v_{01}(t)$ заданы соответственно формулами (1.27), (1.31) и (1.28).

В процессе доказательства теоремы 1.3 был получен следующий результат, представляющий самостоятельный интерес.

ТЕОРЕМА 1.4 (точная асимптотика для малых уклонений). Пусть фиксированы число $p > 0$, целое n и вектор $c = (c_1, \dots, c_n)$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеют

место соотношения

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_0 \left\{ \int_0^1 \sum_{j=1}^n |w_j(t)|^p dt < \varepsilon^p \right\} \\ &= \frac{\varepsilon}{\sigma_n(1)\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{b_0}{\varepsilon^2} \right\} \left[v_{01}(0) \int_{\mathbb{R}} v_{01}(t) dt \right]^n (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.34)$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_0 \left\{ \int_0^1 \sum_{j=1}^n |w_j(t)|^p dt < \varepsilon^p \mid \mathbf{w}(1) = \varepsilon c \right\} \\ &= \frac{(2\pi)^{(n-1)/2}}{\varepsilon^{n-1}\sigma_n(1)} \exp \left\{ -\frac{b_0}{\varepsilon^2} \right\} [\widehat{v}_{01}(0)]^n \prod_{j=1}^n \widehat{v}_{01}(c_j) (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.35)$$

где

$$\begin{aligned} b_0 &:= b(p, n, 1) = p 2^{2/p} \left(\frac{n\kappa_{01}}{2+p} \right)^{(2+p)/p}, \quad \sigma_n(1) = n^{(2+p)/(2p)} \left(\frac{p\lambda_{01}}{2+p} \right)^{1/2}, \\ \widehat{v}_{01}(t) &:= [\lambda_0(p, 1, n)]^{1/[2(2+p)]} y_{01}([\lambda_0(p, 1, n)]^{1/(2+p)} t), \end{aligned} \quad (1.36)$$

т. е. функция $\widehat{v}_{01}(t)$ совпадает с функцией $v_{01}(t)$ в случае, когда $d = 1$.

Отметим, что в силу автомодельности n -мерного винеровского процесса $\mathbf{w}(t)$, выходящего из нуля (см. предложение 5.1 ниже), соотношения (1.32), (1.33) при $a = 0$ и $d = 1$ эквивалентны соответственно соотношениям (1.34), (1.35), если положить $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{T}} \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$. Некоторые результаты и задачи теории малых уклонений гауссовских процессов изложены в работах [4], [5], [31], [32, § 18], [33]–[38].

Для значений $p = 1$ и $p = 2$ величины (1.26)–(1.29) вычислены в [4, § 4] при $n = 1$ и $d = 1$. Используя значения, приведенные в [4, § 4], мы получаем на основе теорем 1.3, 1.4 следующие утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 1.1 (точная асимптотика для степенного потенциала при $p = 2$). Пусть фиксированы числа $d > 0$, целое n и векторы $a = (a_1, \dots, a_n)$, $c = (c_1, \dots, c_n)$. Тогда при $T \rightarrow \infty$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_a \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{j=1}^n w_j^2(t) dt < d \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{n^2}{8d} T \right\} \frac{2^{(n+3)/2} \sqrt{d}}{n \sqrt{\pi T}} \exp \left\{ -\frac{n}{4d} \sum_{j=1}^n a_j^2 \right\} (1 + o(1)), \\ & \mathbb{P}_{a,c} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{j=1}^n w_j^2(t) dt < d \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{n^2}{8d} T \right\} \frac{4n^{(n-2)/2}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{T}{d} \right)^{(n-1)/2} \exp \left\{ -\frac{n}{4d} \sum_{j=1}^n (a_j^2 + c_j^2) \right\} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 1.2 (точная асимптотика для малых уклонений при $p = 2$). Пусть фиксированы целое число n и вектор $c = (c_1, \dots, c_n)$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$

справедливы соотношения

$$\begin{aligned} P_0 \left\{ \int_0^1 \sum_{j=1}^n w_j^2(t) dt < \varepsilon^2 \right\} &= \varepsilon \exp \left\{ -\frac{n^2}{8\varepsilon^2} \right\} \frac{2^{(n+3)/2}}{n\sqrt{\pi}} (1 + o(1)), \\ P_0 \left\{ \int_0^1 \sum_{j=1}^n w_j^2(t) dt < \varepsilon^2 \mid \mathbf{w}(1) = \varepsilon c \right\} \\ &= \varepsilon^{1-n} \exp \left\{ -\frac{n^2}{8\varepsilon^2} \right\} \frac{4n^{(n-2)/2}}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{n}{4d} \sum_{j=1}^n c_j^2 \right\} (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (1.37)$$

Формула (1.37) согласуется с неасимптотической формулой 1.9.4(1) из [41, с. 364] (см. также конец § 1). Аналогичные формулы можно написать и для случая $p = 1$. Пусть $\text{Ai}(x)$ – функция Эйри (см. [30, гл. 11], [39, § 10.4]), $\text{Ai}'(x)$ – ее производная, $\alpha'_1 \approx 1.0188$ – первый нуль функции $\text{Ai}'(-x)$. Положим

$$M = \frac{1}{3\alpha'_1 \text{Ai}(-\alpha'_1)} \left(1 + 3 \int_0^{\alpha'_1} \text{Ai}(-y) dy \right) \approx 1.48257.$$

Постоянная M впервые появилась и была вычислена в статье [40], где она обозначена через C_1 (см. [40, формула (4) и табл. 1] при $j = 1$).

СЛЕДСТВИЕ 1.3 (точная асимптотика для степенного потенциала при $p = 1$). Пусть фиксированы числа $d > 0$, целое n и векторы $a = (a_1, \dots, a_n)$, $c = (c_1, \dots, c_n)$. Тогда при $T \rightarrow \infty$ выполнены соотношение

$$P_a \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{j=1}^n |w_j(t)| dt < d \right\} = \exp\{-Tb_1\} \frac{b_0}{\sqrt{T}} (1 + o(1)),$$

где

$$\begin{aligned} b_1 &:= b(1, n, d) = \frac{2n^3}{27d^2} (\alpha'_1)^3, \\ b_0 &:= \frac{9dM^n}{2\sqrt{2\pi}n^{3/2}(\alpha'_1)^{3/2}[\text{Ai}(-\alpha'_1)]^n} \prod_{j=1}^n \text{Ai} \left(\frac{2na_j}{3d} \alpha'_1 - \alpha'_1 \right), \end{aligned}$$

и соотношение

$$P_{a,c} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{j=1}^n |w_j(t)| dt < d \right\} = \exp\{-Tb_1\} T^{(n-1)/2} \tilde{b}_0 (1 + o(1)),$$

где

$$\tilde{b}_0 := \frac{(2\pi)^{(n-1)/2} n^{n-3/2}}{2d^{n-1}(\alpha'_1)^{3/2} 3^{n-2} [\text{Ai}(-\alpha'_1)]^{2n}} \prod_{j=1}^n \left[\text{Ai} \left(\frac{2na_j}{3d} \alpha'_1 - \alpha'_1 \right) \text{Ai} \left(\frac{2nc_j}{3d} \alpha'_1 - \alpha'_1 \right) \right].$$

СЛЕДСТВИЕ 1.4 (точная асимптотика для малых уклонений при $p = 1$). Пусть фиксированы целое число n и вектор $c = (c_1, \dots, c_n)$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ выполнены соотношение

$$P_0 \left\{ \int_0^1 \sum_{j=1}^n |w_j(t)| dt < \varepsilon \right\} = \varepsilon \exp \left\{ -\frac{b_2}{\varepsilon^2} \right\} b_3 (1 + o(1)),$$

где

$$b_2 := b(1, n, 1) = \frac{2n^3}{27} (\alpha'_1)^3, \quad b_3 := \frac{9M^n}{2\sqrt{2\pi}n^{3/2}(\alpha'_1)^{3/2}},$$

и соотношение

$$P_0 \left\{ \int_0^1 \sum_{j=1}^n |w_j(t)| dt < \varepsilon \mid \mathbf{w}(1) = \varepsilon c \right\} = \varepsilon^{1-n} \exp \left\{ -\frac{b_2}{\varepsilon^2} \right\} \tilde{b}_3 (1 + o(1)),$$

где

$$\tilde{b}_3 := \frac{(2\pi)^{(n-1)/2} n^{n-3/2}}{2(\alpha'_1)^{3/2} 3^{n-2} [\text{Ai}(-\alpha'_1)]^n} \prod_{j=1}^n \text{Ai} \left(\frac{2nc_j}{3d} \alpha'_1 - \alpha'_1 \right).$$

1.5. Дальнейшие примеры. Рассмотрим частный случай примера 1.1.

ПРИМЕР 1.3. Пусть $n = 2$ и потенциал g имеет вид

$$g(x) = |x_1|^{p_1} + |x_2|^{p_2}, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (1.38)$$

где $p_1 > 0$, $p_2 > 0$ – некоторые фиксированные числа. Здесь, очевидно, выполнено условие (A2) с $g_j(t) = |t|^{p_j}$ для $t \in \mathbb{R}$ и $j = 1, 2$. Применение теоремы 1.2 позволяет получить следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.5 (точная асимптотика для двучленного неоднородного степенного потенциала). Пусть фиксированы числа $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, $d > 0$ и векторы $a = (a_1, a_2)$, $c = (c_1, c_2)$. Тогда при $T \rightarrow \infty$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} P_a \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T [|w_1(t)|^{p_1} + |w_2(t)|^{p_2}] dt < d \right\} \\ = \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi T}} \exp\{-T(\beta_0 - d\lambda_0)\} v_0(a) \int_{\mathbb{R}^2} v_0(x) dx (1 + o(1)), \\ P_{a,c} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T [|w_1(t)|^{p_1} + |w_2(t)|^{p_2}] dt < d \right\} \\ = \frac{\sqrt{2\pi T}}{\sigma_2} \exp\{-T(\beta_0 - d\lambda_0)\} v_0(a) v_0(c) (1 + o(1)), \end{aligned}$$

где величины $\beta_0 > 0$, $\lambda_0 > 0$, $v_0(x) \geq 0$, $\sigma_2 > 0$ определяются по формулам (1.21)–(1.23), (1.16) с $n = 2$ и функцией $g(x)$, заданной в (1.38).

На основе формулы полной вероятности и одномерного метода Лапласа величины β_0 , λ_0 , $v_0(x)$, σ_2 из формулировки теоремы 1.5 вычислены автором в явном виде. Ответ записывается посредством корня одного трансцендентного уравнения и имеет довольно громоздкий вид, поэтому здесь он не приводится.

ПРИМЕР 1.4 (радиальный потенциал). Введем следующее условие.

(A3) Пусть потенциал $g(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, имеет следующий радиальный вид:

$$g(x) = h(|x|), \quad |x| = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{1/2}, \quad (1.39)$$

где $h(t) \geq 0$, $t \geq 0$, — непрерывная функция такая, что для некоторого $\tau > 0$ выполнено соотношение

$$\frac{h(t)}{t^\tau} \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Радиальные потенциалы рассмотрены, например, в [26, т. 4], [28, гл. 9, § 2], [27], [29]. В частности, при $n = 2$ для решения эллиптических уравнений (1.5) и (1.12) применим метод разделения переменных [29, п. 7.4.1, пример 7]. Поэтому возможны точные вычисления в теоремах 1.1, 1.2.

Отметим, что в случае радиального потенциала (1.39) существует второй метод вычисления точных асимптотик интегралов типа (1.6), (1.7) и вероятностей типа (1.18), (1.19) — это метод *бесселевских* марковских процессов. Напомним (см. [41, гл. 4, § 6, с. 91]), что *бесселевский процесс* $\xi_q(t)$, $t \geq 0$, совпадает по распределению с евклидовой нормой (радиальной частью) n -мерного винеровского процесса $\mathbf{w}(t)$:

$$\{\xi_q(t), t \geq 0\} \stackrel{(d)}{=} \{[w_1^2(t) + \dots + w_n^2(t)]^{1/2}, t \geq 0\}, \quad q = \frac{n}{2} - 1.$$

В силу этого факта, в частности, имеют место равенства для $a \geq 0$

$$\mathbb{E} \exp \left\{ - \int_0^T h(|\mathbf{w}(t)|) dt \mid |\mathbf{w}(0)| = a \right\} = \mathbb{E} \exp \left\{ - \int_0^T h(\xi_q(t)) dt \mid \xi_q(0) = a \right\}, \quad (1.40)$$

$$\mathbb{P} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T h(|\mathbf{w}(t)|) dt < d \mid |\mathbf{w}(0)| = a \right\} = \mathbb{P} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T h(\xi_q(t)) dt < d \mid \xi_q(0) = a \right\}, \quad (1.41)$$

а также соответствующие равенства для условных версий. Для степенного потенциала $h(t) = |t|^p$, $p > 0$, точные асимптотики вероятностей из правой части формулы (1.41) вычислены в статье [5] методом бесселевских процессов. В [5] также доказаны и другие асимптотические формулы, в том числе и для малых уклонений.

Отметим, что в формулах (1.6), (1.7), (1.18), (1.19) и (1.40), (1.41) использованы, вообще говоря, различные условия: $\mathbf{w}(0) = (a_1, \dots, a_n)$ и $|\mathbf{w}(0)| = a$ соответственно. Эти два условия совпадают только в том случае, когда $a_1 = \dots = a_n = a = 0$. В частности, как легко проверить, формула (1.37) совпадает с формулой (1.16) из [5] при $q = \frac{n}{2} - 1$, и при этом указанные формулы получены разными методами.

§ 2. Доказательство соотношения (1.6) при помощи формулы Фейнмана–Каца

Приведем два доказательства формулы (1.6). Изложим первое доказательство.

Для $t > 0$ и $x \in \mathbb{R}^n$ рассмотрим функцию

$$u_0(t, x) := \mathbb{E}_x \exp \left\{ - \int_0^t g(\mathbf{w}(s)) ds \right\}. \quad (2.1)$$

Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.1 (формула Фейнмана–Каца). Пусть для потенциала $g(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, выполнено условие (A1). Тогда функция $u_0(t, x)$, заданная в (2.1), является единственным решением следующей параболической граничной задачи в области $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) &= \frac{1}{2} \Delta u(t, x) - g(x) u(t, x), \\ \lim_{t \downarrow 0} u(t, x) &= 1, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(t, x) = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Утверждение теоремы 2.1 при $n = 1$ можно получить, используя [42, гл. 2, § 2, теоремы 2.1, 2.2], для общего $n \geq 1$ – используя результаты из [23, гл. 5, теорема 3.2] (или [43, § 8.2]) и [26, т. 4]. Близкие утверждения имеются также в [21, § 6], [24, гл. 8, предложение 3.10], [25, формула (91)], [41, гл. 6, § 1].

Докажем соотношение (1.6). Решим параболическую задачу (2.2), применяя метод разделения переменных аналогично тому, как это было сделано в [44, формула (3.9) и гл. 5, § 6]. В результате, учитывая предложение 1.1, убеждаемся в том, что единственное решение задачи (2.2) можно записать в виде следующего ряда:

$$u_0(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} \exp\{-\kappa_j t\} y_j(x) \int_{\mathbb{R}^n} y_j(z) dz, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Отсюда согласно теореме 2.1 вытекает неасимптотическое равенство

$$\mathbb{E}_x \exp\left\{-\int_0^t g(\mathbf{w}(s)) ds\right\} = \sum_{j=0}^{\infty} \exp\{-\kappa_j t\} y_j(x) \int_{\mathbb{R}^n} y_j(z) dz, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.3)$$

Из формулы (2.3) при $x = a$, $t = T$, очевидно, следует асимптотическое равенство (1.6). Соотношение (1.6) доказано.

Отметим, что при $n = 1$ и $a = 0$ равенство (2.3) получено в книге [25, формула (105)].

§ 3. Доказательство теоремы 1.1 методом времени пребывания

Простого аналога теоремы 2.1 для условного среднего из формулы (1.7), по-видимому, не существует. Поэтому здесь мы изложим иной метод вычисления точных асимптотик для средних из формул (1.6) и (1.7) – метод Лапласа для времени пребывания. Этот метод пригоден и для вычисления точных асимптотик вероятностей из формул (1.18), (1.19), а также в случае иных марковских однородных процессов.

3.1. Связь асимптотического поведения эргодических средних с теорией больших уклонений для времени пребывания. Доказательство утверждений типа теорем 1.1, 1.2 основано на использовании содержательной и эффективной теории больших уклонений, построенной для функционала времени пребывания однородных марковских процессов (см. [1], [2], [3, § 5.1], [4]–[6]). Приведем соответствующие определения и результаты применительно к случаю n -мерного винеровского процесса $\mathbf{w}$, траектории которого, как известно, непрерывны п. н.

Пусть $C[0, \infty)$ – множество непрерывных векторных функций, определенных на $[0, \infty)$ со значениями в $\mathbb{R}^n$. Для любых $t > 0$, $z \in C[0, \infty)$ и борелевского множества B из $\mathbb{R}^n$ обозначим через $L_t(z, B) = \frac{1}{t} \int_0^t I_B(z(s)) ds$ часть времени из отрезка $[0, t]$, которую фиксированная траектория $z = z(\cdot)$ проводит в множестве B ; здесь $I_B(\cdot)$ – индикатор множества B . Функционал $L_t(z, B)$ кратко называют (*нормированным*) *временем пребывания*. Как функция от B этот функционал представляет собой вероятностную меру на $\mathbb{R}^n$. Имеет место следующее важное свойство, вытекающее из определения (см. [24, гл. 6], [42, гл. 1, формула (4.1)] для случая $n = 1$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть действительная функция $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ измерима по Борелю и интегрируема на любом компактном множестве из $\mathbb{R}^n$. Тогда для каждого $T > 0$ и всех $\omega \in \Omega$ выполнено равенство

$$\frac{1}{T} \int_0^T g(\mathbf{w}(s)) ds = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) L_T(\mathbf{w}, dx). \quad (3.1)$$

В формуле (3.1) процесс $\mathbf{w}$ можно рассматривать как марковский процесс с тем или иным начальным распределением. Как видим, формула (3.1) устанавливает связь асимптотического поведения эргодических средних с теорией больших уклонений для времени пребывания. Заметим, что в (3.1) слева стоит *нелинейный* функционал от процесса $\mathbf{w}$, в то время как справа присутствует *линейный* функционал от времени пребывания этого процесса. Отмеченное свойство линейности будет использовано ниже.

Перейдем к описанию метода доказательства теорем 1.1, 1.2. Приведем некоторые сведения, которые нам понадобятся для изложения метода Лапласа для времени пребывания.

3.2. Форма Дирихле, компактный принцип больших уклонений и логарифмическая асимптотика. Как известно, переходная плотность n -мерного винеровского процесса $\mathbf{w}$ относительно меры Лебега имеет вид

$$p(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{|x - y|^2}{2t}\right\}, \quad t \in [0, \infty), \quad x, y \in \mathbb{R}^n \quad (3.2)$$

(см., например, [23, гл. 1, формула (7.1)]). Используя формулу (3.2), несложно подсчитать, что

$$p(T, x, y) = \frac{1}{(2\pi T)^{n/2}} (1 + o(1)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad T \rightarrow \infty. \quad (3.3)$$

Как видим, переходная плотность – симметричная функция по переменным x, y , т.е. $p(t, x, y) = p(t, y, x)$. Таким образом, винеровский процесс $\mathbf{w}$ принадлежит классу так называемых *m -симметричных марковских процессов* (m – мера скорости) [2, с. 533], [45, с. 311], [46], т.е. для него выполнено определяющее соотношение

$$\langle P_t g, h \rangle = \langle g, P_t h \rangle, \quad g, h \in C_K(\mathbb{R}^n),$$

где $P_t h(x) := \int_{\mathbb{R}^n} p(t, x, y) h(y) dy$ – полугрупповой оператор и $C_K(\mathbb{R}^n)$ – пространство непрерывных действительных функций на $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем.

Как известно, производящий оператор $\mathcal{A}$ винеровского процесса, заданный в (1.2), является симметричным и отрицательным. Следуя [45] и используя обозначение (1.3), определим билинейную *форму Дирихле*

$$\mathcal{E}(h, v) := \langle \sqrt{-\mathcal{A}}h, \sqrt{-\mathcal{A}}v \rangle, \quad h, v \in D(\mathcal{E}) \equiv D(\sqrt{-\mathcal{A}}), \quad (3.4)$$

где $\sqrt{-\mathcal{A}}$ – квадратный корень из симметрического положительного оператора $-\mathcal{A}$, $D(\sqrt{-\mathcal{A}})$ – область определения оператора $\sqrt{-\mathcal{A}}$ (см. также [47]). Имеет место равенство (см. [45, § 1.3])

$$\mathcal{E}(h, v) = -\langle \mathcal{A}h, v \rangle, \quad h \in D_{\mathcal{A}}, \quad v \in D(\mathcal{E}). \quad (3.5)$$

Приведем некоторые результаты о больших отклонениях из работы [2] для случая винеровского процесса. Обозначим через $\mathcal{M}$ метрическое пространство вероятностных мер на $\mathbb{R}^n$, снабженное метрикой Прохорова ρ и борелевской σ -алгеброй.

Определим *функционал действия* $I(\nu)$, заданный на $(\mathcal{M}, \rho)$ следующим образом:

$$I(\nu) := \begin{cases} \mathcal{E}(v, v), & \text{если } v \in D(\mathcal{E}) \text{ и } \nu(dx) = v^2(x) dx, \\ +\infty & \text{иначе.} \end{cases} \quad (3.6)$$

Определение *ограниченного* (restricted), или *компактного*, принципа больших отклонений дано в статье [13, с. 911]. Следующее ниже утверждение будет полезно иметь в виду и при исследовании асимптотик вероятностей.

ТЕОРЕМА 3.1 (компактный принцип больших отклонений для времени пребывания винеровского процесса). *Справедливы следующие утверждения:*

(i) *семейства $[P_a\{L_T(\mathbf{w}, \cdot) \in (\cdot)\}]_{T>0}$, $[P_{a,c}\{L_T(\mathbf{w}, \cdot) \in (\cdot)\}]_{T>0}$ вероятностных мер удовлетворяют в пространстве $(\mathcal{M}, \rho)$ при $T \rightarrow \infty$ компактному принципу больших отклонений с одними и теми же функционалом действия $I(\nu)$ и скоростью T ;*

(ii) *для любого открытого в $\mathcal{M}$ множества G и любого компактного множества K выполнены неравенства*

$$\begin{aligned} -\inf_{\nu \in G} I(\nu) &\leq \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log P_a\{L_T(\mathbf{w}, \cdot) \in G\}, \\ \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log P_a\{L_T(\mathbf{w}, \cdot) \in K\} &\leq -\inf_{\nu \in K} I(\nu), \\ -\inf_{\nu \in G} I(\nu) &\leq \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log P_{a,c}\{L_T(\mathbf{w}, \cdot) \in G\}, \\ \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log P_{a,c}\{L_T(\mathbf{w}, \cdot) \in K\} &\leq -\inf_{\nu \in K} I(\nu); \end{aligned}$$

(iii) *для слабо непрерывного функционала F на $\mathcal{M}$ имеют место равенства*

$$\begin{aligned} &\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log E_a\{\exp[-TF(L_T(\mathbf{w}, \cdot))]\} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log E_{a,c}\{\exp[-TF(L_T(\mathbf{w}, \cdot))]\} = -\inf_{\nu \in \mathcal{M}} [F(\nu) + I(\nu)]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Утверждение теоремы 3.1 можно получить, используя результаты работы [1], данный факт упомянут в статье [13, с. 912] (см. также [45]). Напомним, что в утверждениях о выполнении *полного* (full) принципа больших уклонений термин “компактное множество K ” заменено на термин “замкнутое множество K ” (см. [13, с. 911]). Полный принцип больших уклонений часто называют просто *принципом больших уклонений*.

Точные асимптотики двух интегралов из формулы (3.7) уже различны, указанные асимптотики можно вычислить, используя результаты работы [2] (см. теорему 3.2 ниже в случае линейного функционала F).

В зависимости от ситуации нам будет удобно использовать или пространство функций L^2 , или пространство мер $\mathcal{M}$. Так, хотя основная теорема 3.1 сформулирована в пространстве мер, решать экстремальные задачи типа (3.7) легче в пространстве функций, где можно использовать развитые методы вариационного исчисления.

Отметим, что функционал действия $I(\nu)$, заданный в (3.6), является неотрицательным и полунепрерывным снизу (см. [13, с. 912]).

3.3. Точные асимптотики интегралов. Полное метрическое пространство $(\mathcal{M}, \rho)$ не обладает линейной структурой. Учитывая, что производные по Фреше определяются, как правило, для линейных нормированных пространств (см. [48, § 2.2]); мы, следуя работе [2, с. 534], введем еще одно пространство мер.

Пусть $C_b \equiv C_b(\mathbb{R}^n)$ – банахово пространство ограниченных непрерывных действительных функций на $\mathbb{R}^n$ с нормой супремума

$$\|h\|_{C_b} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |h(x)|.$$

Выберем последовательность элементов $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty \subset C_b(\mathbb{R}^n)$ и последовательность чисел $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset (0, \infty)$ так, чтобы выполнялись следующие условия (см. (1.3)):

- 1) $\phi_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$, и $\|\phi_n\|_{C_b} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;
- 2) $\{\|\phi_n\|_{L^2}^{-1} \phi_n\}_{n=1}^\infty$ – полный ортонормированный базис в L^2 ;
- 3) $\sum_{n=1}^\infty a_n \|\phi_n\|_{L^2}^{-2} < \infty$.

Обозначим через $\mathcal{M}_A$ линейное нормированное пространство знакопеременных мер μ на $\mathbb{R}^n$ с конечной полной вариацией и нормой

$$\|\mu\|_A := \left[\sum_{n=1}^\infty a_n \|\phi_n\|_{L^2}^{-2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \phi_n d\mu \right)^2 \right]^{1/2}$$

(см. [2, с. 534]). Определим множество

$$\tilde{\mathcal{H}} := \{v \in D(\mathcal{E}) : \langle v, v \rangle = 1\}. \quad (3.8)$$

Учитывая формулы (3.6) и (3.8), убеждаемся в том, что экстремальная задача

$$F(\nu) + I(\nu) \rightarrow \inf, \quad \nu \in \mathcal{M}$$

(см. формулу (3.7)), эквивалентна следующей экстремальной задаче:

$$F(v^2 dx) + \mathcal{E}(v, v) \rightarrow \inf, \quad v \in \tilde{\mathcal{H}}. \quad (3.9)$$

Для формы Дирихле $\mathcal{E}(u, v)$, определенной в (3.4), имеет место следующее важное свойство (см. [2, с. 543]):

$$v \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \Rightarrow |v| \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \quad \text{и} \quad \mathcal{E}(v, v) \geq \mathcal{E}(|v|, |v|). \quad (3.10)$$

Таким образом, в силу (3.10) задача (3.9) эквивалентна экстремальной задаче

$$F(v^2 dx) + \mathcal{E}(v, v) \rightarrow \inf, \quad v \in \tilde{\mathcal{H}}, \quad v \geq 0.$$

Имеет место следующий асимптотический результат для функционала времени пребывания $L_T(\mathbf{w}, dx)$ винеровского процесса.

ТЕОРЕМА 3.2 [2] (точные асимптотики типа Лапласа для линейного функционала). Пусть для ограниченного линейного функционала $\Psi: \mathcal{M}_A \rightarrow \mathbb{R}^n$ экстремальная задача

$$\Psi(v^2 dx) + \mathcal{E}(v, v) \rightarrow \inf, \quad v \in \tilde{\mathcal{H}}, \quad v \geq 0, \quad (3.11)$$

имеет единственное решение $v_0 > 0$. Тогда для $a \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$ при $T \rightarrow \infty$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_a \exp\{-T\Psi(L_T(\mathbf{w}, \cdot))\} \\ &= \exp\{-T[\Psi(v_0^2 dx) + \mathcal{E}(v_0, v_0)]\} v_0(a) \int_{\mathbb{R}^n} v_0(x) dx (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{a,c} \exp\{-T\Psi(L_T(\mathbf{w}, \cdot))\} \\ &= \exp\{-T[\Psi(v_0^2 dx) + \mathcal{E}(v_0, v_0)]\} (2\pi T)^{n/2} v_0(a) v_0(c) (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Асимптотические формулы (3.12), (3.13) мы получаем, учитывая теорему 3.1 и рассуждая так же, как в [2, доказательство теорем 2.19, 2.20, (1)], где исследованы общие нелинейные функционалы. Отметим, что в [2] рассмотрен случай m -симметричных марковских процессов, для которых переходные вероятности имеют плотность относительно некоторой вероятностной референтной меры на $\mathbb{R}^n$ (так называемой меры скорости). Внимательный анализ доказательства результатов из работы [2] показывает, что в случае линейного функционала указанные результаты справедливы и для винеровского процесса $\mathbf{w}$, мерой скорости которого является мера Лебега. Формула (3.13) получается на основе утверждения, аналогичного [2, теорема 2.19], с учетом того, что переходная плотность (3.2) винеровского процесса $\mathbf{w}$ удовлетворяет соотношению (3.3).

Введем функционал, посредством которого можно легко записать интегралы из формул (1.6) и (1.7):

$$F_0(\nu) := \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \nu(dx), \quad \nu \in \mathcal{M}_A. \quad (3.14)$$

Как видим, справедливы формулы

$$F_0(\nu) = U(v), \quad \text{если} \quad \nu(dx) = v^2(x) dx \in \mathcal{M}, \quad (3.15)$$

где функционал $U(v)$ определен формулой (1.8).

3.4. Решение экстремальной задачи. Функционал F_0 является линейным и, вообще говоря, неограниченным, заданным на $(\mathcal{M}_A, \|\cdot\|_A)$, при этом F_0 не является ограниченным уже на множестве $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_A$. Тем не менее, пара объектов – функционал F_0 и случайная вероятностная мера $L_T(\mathbf{w}, \cdot)$ – обладают рядом хороших свойств, вследствие чего для них справедливо утверждение теоремы 3.2. В самом деле, используя п. н. непрерывность траекторий винеровского процесса и формулы (3.1), (3.14), получаем соотношение

$$F_0(L_T(\mathbf{w})) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) L_T(\mathbf{w}, dx) = \frac{1}{T} \int_0^T g(\mathbf{w}(t)) dt < \infty \quad \text{п. н.} \quad (3.16)$$

Учитывая соотношение (3.16), несложно показать, что к линейному функционалу $\Psi(\nu) = F_0(\nu)$ применима теорема 3.2 при условии единственности решения указанной в ней экстремальной задачи. Покажем, что для линейного функционала $\Psi(\nu) \equiv F_0(\nu)$ выполнено условие единственности из теоремы 3.2.

ЛЕММА 3.1. *Экстремальная задача для неотрицательного квадратичного функционала*

$$U(y) + \mathcal{E}(y, y) \rightarrow \inf, \quad y \in \tilde{\mathcal{H}}, \quad y > 0, \quad (3.17)$$

имеет единственное решение – функцию $y_0(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, которая является единственным решением граничной задачи (1.5). При этом выполнены равенства

$$\begin{aligned} \inf [U(y) + \mathcal{E}(y, y) : y \in \tilde{\mathcal{H}}, y > 0] &= \inf [U(y) - \langle \mathcal{A}y, y \rangle : y \in \tilde{\mathcal{H}}, y > 0] \\ &= U(y_0) - \langle \mathcal{A}y_0, y_0 \rangle = \kappa_0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно первой теореме Вейерштрасса (см. [49, § 9, теорема 9.2]) минимум в задаче (3.17) достигается. Рассуждая так же, как в работе [2, предложение 2.1], можно показать, что точки, доставляющие минимум в задаче (3.17), принадлежат области определения $D_{\mathcal{A}}$ производящего оператора $\mathcal{A}$. Поэтому в силу формулы (3.5) задача (3.17) эквивалентна следующей задаче:

$$U(y) - \langle \mathcal{A}y, y \rangle \rightarrow \inf, \quad y \in D, \quad \langle y, y \rangle = 1, \quad y > 0. \quad (3.19)$$

Применяя метод множителей Лагранжа [48, п. 3.2.1], найдем все локальные экстремумы задачи (3.19), затем выделим из них тот, который доставляет глобальный минимум в данной задаче. Функция Лагранжа задается формулой

$$\mathcal{L}(y) = \lambda_1 [U(y) - \langle \mathcal{A}y, y \rangle] + \lambda_2 [\langle y, y \rangle - 1], \quad y \in D, \quad (3.20)$$

где $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$, – множители Лагранжа. Дифференцируя в (3.20) квадратичные функционалы, заключаем, что для того, чтобы точка y доставляла минимум в задаче (3.19), необходимо выполнение условия стационарности

$$\mathcal{L}'(y) \equiv 2\lambda_1 [g(x)y - \mathcal{A}y] + 2\lambda_2 y = 0, \quad y \in D, \quad (3.21)$$

и условия дополняющей нежесткости $\lambda_2 [\langle y, y \rangle - 1] = 0$. Легко проверить, что в нашей задаче $\lambda_1 > 0$; обозначим $\kappa = -\lambda_2/\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Исследуя соотношение (3.21), несложно убедиться в том, что для функции y , доставляющей локальный экстремум в задаче (3.19), найдется число $\kappa = \kappa(y)$ такое, что пара

(y, κ) будет удовлетворять следующей граничной задаче:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\Delta y(x) + g(x)y(x) &= \kappa y(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} y(x) &= 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} y^2(x) dx = 1. \end{aligned} \quad (3.22)$$

В силу предложения 1.1 задача (3.22) имеет счетное число решений (y_n, κ_n) , $n = 0, 1, 2, \dots$. Следовательно, с учетом формул (1.2), (1.5) и (1.8) получаем $U(y_n) - \langle Ay_n, y_n \rangle = \langle Sy_n, y_n \rangle = \kappa_n$. Таким образом, минимум в экстремальной задаче (3.19) достигается в единственной точке y_0 , причем $\inf[U(y) - \langle Ay, y \rangle : y \in \tilde{\mathcal{H}}, y > 0] = \langle Sy_0, y_0 \rangle = \kappa_0 > 0$. Отсюда, принимая во внимание эквивалентность задач (3.17) и (3.19), получаем оба утверждения леммы. Лемма доказана.

3.5. Доказательство теоремы 1.1. Учитывая лемму 3.1 и формулу (3.1), применим теорему 3.2 к интегралам, стоящим слева в (1.6) и (1.7), положив $\Psi(\nu) = F_0(\nu)$, $v_0 = y_0$. Тогда, используя формулы (3.12)–(3.14), (3.18), убеждаемся в том, что при $T \rightarrow \infty$ справедливы соотношения (1.6) и (1.7). Теорема доказана.

§ 4. Метод Лапласа для времени пребывания. Доказательство теоремы 1.2

Здесь мы покажем, как от асимптотик интегралов (1.5) и (1.6) можно перейти к вычислению точных асимптотик вероятностей (1.18) и (1.19). Этот переход основан частично на результатах из § 3 и частично на приведенной ниже центральной предельной теореме для одномерных проекций.

4.1. Логарифмическая асимптотика. Пусть фиксированы число $d > 0$, векторы $a, c \in \mathbb{R}^n$ и потенциал g , удовлетворяющий условию (A1). Напомним, что для линейного функционала F_0 справедливо равенство (3.16).

ЛЕММА 4.1 (логарифмическая асимптотика для вероятностей). *Справедливы соотношения*

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log P_a \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} g(x) L_T(\mathbf{w}, dx) < d \right\} \\ = \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log P_{a,c} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} g(x) L_T(\mathbf{w}, dx) < d \right\} \\ = -\inf \{ I(\nu) : F_0(\nu) < d \} = -\inf \{ I(\nu) : F_0(\nu) \leq d \}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Утверждение леммы 4.1 будет вытекать из результатов, доказанных ниже. Соотношение (4.1) является аналогом известного результата, справедливого при выполнении принципа больших уклонений (см. [3, § 2, формула (2.2)] и [6, § 2, формула (2.14)]). Кроме того, соотношение (4.1) поясняет, с какой экстремальной задачей связано вычисление асимптотик вероятностей больших уклонений.

Учитывая формулы (1.9), (1.10), (3.5), (3.6), несложно видеть, что выполнено равенство

$$I(\nu) = J(v), \quad \text{если} \quad \nu(dx) = v^2(x) dx, \quad v \in \mathcal{H}.$$

Итак, согласно формуле (4.1) нужно решить следующую экстремальную задачу:

$$I(\nu) \rightarrow \inf, \quad F_0(\nu) \leq d. \quad (4.2)$$

4.2. Решение экстремальной задачи (4.2). Доказательство предложения 1.2. Учитывая формулы (3.6) и (3.15), убеждаемся в том, что задача (4.2) эквивалентна экстремальной задаче:

$$\mathcal{E}(v, v) \rightarrow \inf, \quad v \in D(\mathcal{E}), \quad \langle v, v \rangle = 1, \quad U(v) \leq d. \quad (4.3)$$

Покажем, что экстремальные задачи (4.3) и (1.11) эквивалентны. В силу свойства (3.10) задача (4.3) эквивалентна экстремальной задаче

$$\mathcal{E}(v, v) \rightarrow \inf, \quad v \in D(\mathcal{E}), \quad \langle v, v \rangle = 1, \quad U(v) \leq d, \quad v \geq 0. \quad (4.4)$$

Согласно первой теореме Вейерштрасса (см. [49, § 9, теорема 9.2]) минимум в задаче (4.4) достигается. Рассуждая так же, как в работе [2, предложение (2.1)], можно показать, что точки, доставляющие минимум в задаче (4.4), принадлежат области определения $D_{\mathcal{A}}$ производящего оператора $\mathcal{A}$. Поэтому задачи (4.4) и (1.11) эквивалентны, следовательно, эквивалентны и задачи (4.3), (1.11). В частности, минимум в задаче (1.11) достигается.

Решим задачу (1.11) методом множителей Лагранжа с привлечением теоремы Куна–Таккера (см. [48, гл. 1, п. 1.3.3 и гл. 3, п. 3.2.1]). Функция Лагранжа задается формулой

$$\mathcal{L}(v) = -\lambda_1 \langle \mathcal{A}v, v \rangle + \lambda_2 [U(v) - d] + \lambda_3 [\langle v, v \rangle - 1], \quad v \in D, \quad v \geq 0, \quad (4.5)$$

где

$$\lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_3 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 > 0. \quad (4.6)$$

Дифференцируя квадратичные функционалы с учетом (1.8), получаем, что для того, чтобы точка v доставляла минимум в задаче (1.11), необходимо выполнение условия стационарности

$$\mathcal{L}'(v) \equiv -2\lambda_1 \mathcal{A}v + 2\lambda_2 gv + 2\lambda_3 v = 0, \quad v \in D, \quad v \geq 0, \quad (4.7)$$

и условия дополняющей нежесткости

$$\lambda_2 [U(v) - d] = 0, \quad \lambda_3 [\langle v, v \rangle - 1] = 0. \quad (4.8)$$

Легко проверить, что в нашей задаче $\lambda_1 > 0$; обозначим $\lambda = \lambda_2/\lambda_1 > 0$, $\beta = -\lambda_3/\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Исследуя соотношения (4.5)–(4.8) и зная, что минимум в задаче (1.11) достигается, несложно убедиться на основании принципа Лагранжа в том, что справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 4.2. *Существуют функция $v_0 > 0$ и множители Лагранжа $\lambda_0 > 0$, $\beta_0 \in \mathbb{R}$ такие, что v_0 доставляет минимум в задаче (1.11), v_0 является граничной точкой и для нее выполнены соотношения*

$$\begin{aligned} -\mathcal{A}v + \lambda gv - \beta v &= 0, & x \in \mathbb{R}^n, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} v(x) &= 0, & \int_{\mathbb{R}^n} v^2(x) dx = 1, & \int_{\mathbb{R}^n} g(x) v^2(x) dx = d \end{aligned} \quad (4.9)$$

при $\lambda = \lambda_0$, $\beta = \beta_0$, т. е. соотношения (1.12).

Покажем, что в наших условиях описанная выше экстремальная тройка $(\lambda_0, \beta_0, v_0)$ единственная, т. е. не существует функции $v_1 \neq v_0$ и множителей Лагранжа $\lambda_1 > 0$, $\beta_1 \in \mathbb{R}$ таких, что v_1 доставляет минимум в задаче (1.11), кроме того, v_1 является граничной точкой и для нее выполнены соотношения (4.9) при $\lambda = \lambda_1$, $\beta = \beta_1$.

Предположим противное, а именно пусть существует описанная выше вторая экстремальная тройка $(\lambda_1, \beta_1, v_1)$, при этом $v_1 \neq v_0$.

Рассмотрим доказательство теоремы Куна–Таккера в [48, п. 1.3.3], основанное на конечномерной теореме отделимости [48, п. 1.3.3]. В п. В) доказательства теоремы отделимости в [48, п. 1.3.4] имеется произвол в выборе точки из множества K_1 . Используя этот факт, а также учитывая применение теоремы отделимости в п. Б) доказательства теоремы Куна–Таккера из [48, п. 1.3.3], приходим к следующему утверждению.

ЛЕММА 4.3. *В наших условиях для указанной выше пары чисел (λ_0, β_0) выполнено равенство*

$$\begin{aligned} \min \{ J(z) : z \in \mathcal{H}, U(z) \leq d, z \geq 0 \} \\ = \min \{ -\langle Az, z \rangle + \lambda_0[U(z) - d] - \beta_0[\langle z, z \rangle - 1] : z \in D, z \geq 0 \}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

при этом для любой точки v , доставляющей минимум справа в (4.10), выполнены соотношения (4.9) при $\lambda = \lambda_0$ и $\beta = \beta_0$, т. е. соотношения (1.12).

Из леммы 4.3 следует, что в наших условиях можно полагать, что $\lambda_1 = \lambda_0$ и $\beta_1 = \beta_0$. Таким образом, вторая экстремальная тройка имеет следующий вид: $(\lambda_0, \beta_0, v_1)$, при этом $v_1 \neq v_0$. Из доказанной ниже леммы 4.4 будет следовать противоречие с существованием подобной второй экстремальной тройки.

Опишем подробнее экстремальную функцию v_0 .

Для положительного числа $\lambda > 0$ рассмотрим n -мерный линейный дифференциальный оператор Шрёдингера $S_\lambda : L^2 \rightarrow L^2$, действующий по правилу

$$(S_\lambda v)(x) = -\frac{1}{2}\Delta v(x) + \lambda g(x)v(x)$$

и определенный на всюду плотном множестве $D_\lambda := \{v \in L^2 \cap D_A : S_\lambda v \in L^2\}$. Очевидно, оператор S_λ является простым аналогом оператора Шрёдингера S из предложения 1.1; в частности, отметим, что $S_1 = S$. Справедливо следующее утверждение, которое доказывается точно так же, как предложение 1.1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Для любого $\lambda > 0$ оператор Шрёдингера S_λ является существенно самосопряженным положительным оператором и имеет чисто дискретный простой спектр, т. е. уравнение $S_\lambda z = \mu z$ обладает счетным числом решений $(\mu_j(\lambda), z_j(\lambda))$, $j = 0, 1, 2, \dots$, где $0 < \mu_0(\lambda) < \dots < \mu_j(\lambda) < \dots$ – собственные значения, $\{z_j(\lambda)\}$ – соответствующие им нормированные собственные функции, $\|z_j\| = 1$. Основная собственная функция $z_0(\lambda, x)$ является строго положительной, а система собственных функций $\{z_j\}_{j=0}^\infty$ образует ортонормированный базис в L^2 .*

Положим для краткости записи

$$S_0 := S_{\lambda_0}, \quad D_{S_0} := D_{\lambda_0}. \quad (4.11)$$

Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 4.4. *Граничная задача (1.12) имеет единственное решение – положительную функцию $v_0(x) \equiv v_0(\lambda_0, x)$, описанную в предложении 1.2. При этом справедливо включение*

$$(\beta_0, v_0) \in \{(\mu_j(\lambda_0), z_j(\lambda_0, x))\}_{j=0}^{\infty}, \quad (4.12)$$

следовательно,

$$\beta_0 \geq \mu_0(\lambda_0) > 0. \quad (4.13)$$

В частности, если известно, что все собственные функции $z_j(\lambda_0, x)$, $j \geq 1$, кроме основной, являются знакопеременными, то выполнены равенства

$$\beta_0 = \mu_0(\lambda_0), \quad v_0(x) \equiv z_0(\lambda_0, x),$$

а число $\lambda_0 > 0$ является корнем уравнения

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) z_0^2(\lambda, x) dx = d.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя оператор (4.11), дифференциальное уравнение из задачи (1.12) вместе с условием нормировки можно записать в следующем виде:

$$S_0 v = \beta_0 v, \quad v \in D_{S_0}, \quad \|v\| = 1. \quad (4.14)$$

По предложению 4.1 при фиксированных $\lambda_0 > 0$ и β_0 уравнение (4.14) имеет не более одного решения, причем единственное решение существует только при

$$\beta_0 \in \{\mu_j(\lambda_0)\}_{j=0}^{\infty}. \quad (4.15)$$

Отсюда в силу леммы 4.2 следует, что уравнение (4.14) имеет только одно решение, при этом выполнено условие (4.15) и, очевидно, справедливо включение (4.12). Первая часть леммы доказана. Вторая часть очевидна, так как искомая экстремаль v_0 является положительной. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.5. *Производящий оператор $\mathcal{A}$, рассматриваемый на множестве $D_{\mathcal{A}} \cap L^2$, является инъективным, т. е. для элементов из этого множества имеем $\mathcal{A}v = 0$ тогда и только тогда, когда $v = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем некоторые известные факты, приведенные в книге [26, т. 2, гл. IX]. Следуя [26, т. 2, § IX.1], для функций f из пространства Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ определим преобразование Фурье следующим образом:

$$(\mathcal{F}f)(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,y)} f(y) dy, \quad (4.16)$$

где $(x, y) := \sum_{k=1}^n x_k y_k$ – обычное скалярное произведение векторов x и y из $\mathbb{R}^n$ и $i = \sqrt{-1}$. Согласно [26, т. 2, теорема IX.1] преобразование Фурье (4.16) – линейная взаимно непрерывная биекция $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, при этом обратное отображение имеет вид

$$(\mathcal{F}^{-1}h)(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,y)} h(y) dy.$$

В силу [26, т. 2, теорема IX.6] преобразование Фурье однозначно продолжается до унитарного отображения $L^2(\mathbb{R}^n)$ на $L^2(\mathbb{R}^n)$. Используя указанные факты и формулу (IX.1) с $\alpha = 0$ из [26, т. 2, с. 12], мы получаем следующее представление оператора $-\Delta$ в виде композиции трех инъективных операторов:

$$-\Delta = \mathcal{F}^{-1}|x|^2\mathcal{F}; \quad (4.17)$$

здесь через $|x|^2$ обозначен оператор умножения на функцию $|x|^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2$. Формула (4.17) приведена также в книге [26, т. 2, с. 71] после доказательства теоремы IX.28 в следующем виде: $H_0 = \mathcal{F}^{-1}|x|^2\mathcal{F}$, где $H_0 = -\Delta$. В силу формул (1.2) и (4.17) имеет место равенство

$$\mathcal{A}v = -\frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}|x|^2\mathcal{F}v, \quad v \in D_{\mathcal{A}} \cap L^2.$$

Отсюда следует инъективность оператора $\mathcal{A}$ на множестве $D_{\mathcal{A}} \cap L^2$ как композиции трех инъективных операторов. Лемма доказана.

Завершим доказательство предложения 1.2. Докажем второе равенство в формуле (1.13). В силу уже доказанной части предложения 1.2 для экстремали $v_0(x)$ выполнены равенства

$$-\frac{1}{2}\Delta v_0(x) = \beta_0 v_0(x) - \lambda_0 g(x) v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (4.18)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} v_0^2(x) dx = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^n} g(x) v_0^2(x) dx = d. \quad (4.19)$$

Умножим равенство (4.18) почленно на функцию $v_0(x)$ и проинтегрируем полученное равенство по всему пространству $\mathbb{R}^n$. В результате с учетом формул (1.10), (4.19) получаем

$$J(v_0) = -\langle \mathcal{A}v_0, v_0 \rangle = \beta_0 \langle v_0, v_0 \rangle - \lambda_0 \langle g v_0, v_0 \rangle = \beta_0 - d\lambda_0 \geq 0, \quad (4.20)$$

где последнее неравенство вытекает из свойства отрицательности оператора $\mathcal{A}$. Таким образом, мы показали, что $\beta_0 \geq d\lambda_0 > 0$. Покажем, что выполнена более точная оценка

$$\beta_0 > d\lambda_0 > 0, \quad (4.21)$$

эта оценка дополняет формулы (4.13) и (4.15).

Докажем, что $J(v_0) > 0$. Из леммы 4.5 вытекает, что оператор $-\mathcal{A}$, рассматриваемый на множестве D , является симметрическим, положительным и инъективным. Отсюда согласно [26, гл. 3, предложение 1.3] следует, что квадратическая форма $\langle \mathcal{A}v, v \rangle$ равна нулю тогда и только тогда, когда $v = 0$. Таким образом, $J(v_0) > 0$, и справедлива оценка (4.21). Формула (1.13), а вместе с ней и предложение 1.2 полностью доказаны.

4.3. Доказательство формулы (1.18). Пусть фиксированы число $d > 0$ и вектор $a \in \mathbb{R}^n$. Обозначим для краткости

$$K(T) = \mathbb{P}_a\{F_0(L_T(\mathbf{w})) < d\}, \quad T > 0. \quad (4.22)$$

Очевидно, что в силу равенства (3.16) выражение $K(T)$ совпадает с левой частью формулы (1.18). Точную асимптотику вероятности $K(T)$ при $T \rightarrow \infty$

будем вычислять, используя аналогию между теорией больших уклонений времени пребывания марковских процессов [1], [2] и теорией больших уклонений сумм независимых одинаково распределенных банаховозначных элементов (см. [3, § 4], [50]); при этом, как известно, вторую теорию можно рассматривать как частный случай первой (см. [1, § 5]).

4.3.1. *Использование экспоненциального преобразования типа Крамера.* Принимая во внимание указанную выше связь двух теорий и следуя работе [2, с. 545, 556], введем с учетом (1.14) следующее экспоненциальное преобразование типа Крамера. Для фиксированного $T > 0$ определим вероятностную меру

$$Q_T(d\omega) = Q_{T,a}(d\omega) := \frac{1}{K_1(T)} \exp \left\{ T \int_{\mathbb{R}^n} V(x) L_T(\mathbf{w}, dx) \right\} P_a(d\omega) \quad (4.23)$$

на основном вероятностном пространстве, где

$$K_1(T) = E_a \exp \left\{ T \int_{\mathbb{R}^n} V(x) L_T(\mathbf{w}, dx) \right\}.$$

Формула (4.23) представляет собой аналог формулы (1.6) из [50, с. 513]. В результате замены меры (4.23) получаем для вероятности (4.22) равенство

$$K(T) = K_1(T) K_2(T), \quad (4.24)$$

где

$$K_2(T) = \int_{\mathcal{O}(T)} \exp \left\{ -T \int_{\mathbb{R}^n} V(x) L_T(\mathbf{w}, dx) \right\} Q_T(d\omega), \quad (4.25)$$

$$\mathcal{O}(T) := \{\omega : F_0(L_T(\mathbf{w})) < d\}. \quad (4.26)$$

Найдем точные асимптотики интегралов $K_1(T)$ и $K_2(T)$.

4.3.2. *Точная асимптотика интеграла $K_1(T)$.* Запишем среднее $K_1(T)$ в следующем виде:

$$K_1(T) = E_a \exp \{ T F_1(L_T(\mathbf{w}, \cdot)) \}, \quad (4.27)$$

где

$$F_1(\nu) := \int_{\mathbb{R}^n} V(x) \nu(dx) \equiv \beta_0 \nu(\mathbb{R}^n) - \lambda_0 F_0(\nu), \quad \nu \in \mathcal{M}_A. \quad (4.28)$$

Здесь мы использовали определение функции V и формулу (3.14). Заметим, что $|\nu(\mathbb{R}^n)| < \infty$ для $\nu \in \mathcal{M}_A$ и $\nu(\mathbb{R}^n) = 1$ для $\nu \in \mathcal{M}$.

Функционал F_1 является линейным и, вообще говоря, неограниченным функционалом, заданным на $(\mathcal{M}_A, \|\cdot\|_A)$, при этом F_1 не является ограниченным уже на множестве $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_A$. Тем не менее, здесь, как и в § 3, пара объектов – функционал F_1 и случайная вероятностная мера $L_T(\mathbf{w}, \cdot)$ – обладают рядом хороших свойств, вследствие чего для них справедливо утверждение теоремы 3.2. В частности, используя п. н. непрерывность траекторий винеровского процесса, определение функции V и формулы (3.1), (4.28), получаем соотношение (ср. с (3.16))

$$F_1(L_T(\mathbf{w})) = \int_{\mathbb{R}^n} V(x) L_T(\mathbf{w}, dx) = \frac{1}{T} \int_0^T V(\mathbf{w}(t)) dt < \infty \quad \text{п. н.}$$

Учитывая это соотношение, несложно показать, что к линейному функционалу $\Psi(\nu) = F_1(\nu)$ применима теорема 3.2 при условии единственности решения указанной в ней экстремальной задачи. Имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 4.6. *При $T \rightarrow \infty$ выполнено соотношение*

$$K_1(T) = v_0(a) \int_{\mathbb{R}^n} v_0(x) dx (1 + o(1)). \quad (4.29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая вышеизложенное, применим теорему 3.2 к интегралу (4.27), положив в указанной теореме $\Psi = -F_1$. Для этого решим экстремальную задачу (3.11), т. е. задачу

$$-F_1(v^2 dx) + \mathcal{E}(v, v) \rightarrow \inf, \quad v \in \tilde{\mathcal{H}}, \quad v \geq 0, \quad (4.30)$$

где $\tilde{\mathcal{H}}$ задано формулой (3.8). Как и в § 3, несложно убедиться в том, что задача (4.30) эквивалентна следующей экстремальной задаче:

$$-\int_{\mathbb{R}^n} V(x) v^2(x) dx - \langle \mathcal{A}v, v \rangle \rightarrow \inf, \quad v \in \tilde{\mathcal{H}}. \quad (4.31)$$

Используя метод множителей Лагранжа, заключаем, что задача (4.31) имеет единственное решение v_0 , т. е. то же самое, что и основная экстремальная задача (1.11). При этом в силу (1.14) выполнены равенства

$$\inf_{u \in \tilde{\mathcal{H}}} \left[-\int_{\mathbb{R}^n} V(x) u^2(x) dx - \langle \mathcal{A}u, u \rangle \right] = -\int_{\mathbb{R}^n} V(x) v_0^2(x) dx - \langle \mathcal{A}v_0, v_0 \rangle = 0. \quad (4.32)$$

Применяя формулу (3.16) с $\Psi = -F_1$ и учитывая (4.32), получаем соотношение (4.29). Лемма доказана.

4.3.3. *Точная асимптотика интеграла $K_2(T)$.* Вычисления здесь более сложные. Введем новую вероятностную меру на $\mathbb{R}^n$

$$\nu_0(dx) := v_0^2(x) dx. \quad (4.33)$$

Несложно видеть, что в силу предложения 1.2 вероятностная мера ν_0 является единственным решением экстремальной задачи (4.2). Используя формулы (4.38), (4.33) и последнее равенство в (4.32), получаем

$$K_2(T) = \exp\{T \langle \mathcal{A}v_0, v_0 \rangle\} K_3(T), \quad (4.34)$$

где

$$K_3(T) := \int_{\mathcal{O}(T)} \exp\left\{-T \int_{\mathbb{R}^n} V(x) d(L_T(\mathbf{w}) - \nu_0)\right\} dQ_T. \quad (4.35)$$

Заметим, что в силу (1.10), (1.13) в формуле (4.34) уже получен главный экспоненциальный член $\exp\{-T(\beta_0 - d\lambda_0)\}$ соотношения (1.18). Найдём точную асимптотику интеграла $K_3(T)$ при $T \rightarrow \infty$.

Учитывая формулы (3.14), (4.19), (4.33) и определение функции $V(x)$ перед соотношением (1.14), получаем тождество

$$-\lambda_0[F_0(L_T(\mathbf{w})) - d] = \int_{\mathbb{R}^n} V(x) d(L_T(\mathbf{w}) - \nu_0), \quad \omega \in \Omega. \quad (4.36)$$

Используя (4.26), (4.36), запишем интеграл (4.35) в следующем виде:

$$K_3(T) = \int_{\mathcal{O}_1(T)} \exp \left\{ -T \int_{\mathbb{R}^n} V(x) d(L_T(\mathbf{w}) - \nu_0) \right\} dQ_T, \quad (4.37)$$

где

$$\mathcal{O}_1(T) := \left\{ \omega : \int_{\mathbb{R}^n} V(x) d(L_T(\mathbf{w}) - \nu_0) > 0 \right\} \equiv \mathcal{O}(T)$$

– иная форма записи множества $\mathcal{O}(T)$ из (4.26).

Для нахождения асимптотики интеграла $K_3(T)$ применим следующую лемму. Необходимые сведения о случайных мерах можно найти в [51].

ЛЕММА 4.7 (центральная предельная теорема). (i) *Случайная мера*

$$\sqrt{T}(L_T(\mathbf{w}) - \nu_0)$$

при $T \rightarrow \infty$ слабо сходится относительно меры Q_T к гауссовской случайной мере γ на $\mathbb{R}^n$ с нулевым средним.

(ii) Для любого $s \in \mathbb{R}$ выполнено соотношение

$$\lim_{T \rightarrow \infty} Q_T \left\{ \omega : \sqrt{T} \int_{\mathbb{R}^n} V(x) d(L_T(\mathbf{w}) - \nu_0) < s \right\} = \Phi \left(\frac{s}{\sigma} \right), \quad (4.38)$$

где Φ – стандартная нормальная функция распределения и σ определено формулой (1.16).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) выводится с помощью [2, лемма 2.12]. Соотношение (4.38) с некоторым σ вытекает непосредственно из п. (i) леммы. Здесь мы докажем формулу (1.16) для σ^2 , отсутствующую в [2], а также докажем конечность и положительность этой величины. Обозначим через $L^2(d\nu_0)$ гильбертово пространство функций, заданных на $\mathbb{R}^n$, со скалярным произведением

$$\langle y, z \rangle_{L^2(d\nu_0)} := \int_{\mathbb{R}^n} y(x)z(x)v_0^2(x) dx.$$

Используя п. (i) леммы, определение меры Q_T в (4.28) и учитывая вид характеристической функции меры γ (см. [2, с. 557]), а также формулу (4.38), получаем равенство

$$\sigma^2 = \int_{\mathbb{R}^n} [\mathcal{G}V](x)V(x)v_0^2(x) dx, \quad (4.39)$$

где, как следует из [2, с. 545], линейный оператор $\mathcal{G}$ отображает гильбертово пространство $L^2(d\nu_0)$ в себя по правилу

$$\begin{aligned} [\mathcal{G}y](x) = 2 \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{v_0(x)} \exp\{t(\mathcal{A} + V)\}[v_0y](x) \right. \\ \left. - \int_{\mathbb{R}^n} v_0(s) \exp\{t(\mathcal{A} + V)\}[v_0y](s) ds \right\} dt. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Несложно видеть, что в силу (1.14) имеет место равенство

$$[\mathcal{G}y](x) = [\mathcal{G}(y + c_0)](x), \quad y \in L^2(d\nu_0), \quad c_0 \in \mathbb{R}. \quad (4.41)$$

Используя (4.40), (4.41) и (1.15), получаем

$$[\mathcal{G}V](x) = -\lambda_0 d[\mathcal{G}\psi](x) = -2\lambda_0 d \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{v_0(x)} \exp\{t(\mathcal{A} + V)\} [v_0\psi](x) - \int_{\mathbb{R}^n} v_0(s) \exp\{t(\mathcal{A} + V)\} [v_0\psi](s) ds \right\} dt, \quad (4.42)$$

где, напомним, $v_0\psi \in E_1$.

Пусть Π – действующий в L^2 оператор проектирования на подпространство E_1 , т. е. для $z = z_0 + z_1 \in L^2$, $z_0 \in E_0$, $z_1 \in E_1$, выполнено $\Pi z = z_1$. Тогда из формулы (1.14) следует равенство

$$(\mathcal{A} + V)z = (\mathcal{A} + V)\Pi z, \quad z \in L^2. \quad (4.43)$$

Определим линейный оператор $\mathcal{S}: E_1 \rightarrow E_1$ по правилу

$$(\mathcal{S}y)(x) := [(\mathcal{A} + V)y](x) - v_0(x) \int_{\mathbb{R}^n} [(\mathcal{A} + V)y](s) v_0(s) ds, \quad y \in E_1. \quad (4.44)$$

Легко проверить, используя (1.14) и равенство $\langle v_0, v_0 \rangle = 1$, что

$$\mathcal{S}y = \Pi(\mathcal{A} + V)y, \quad y \in E_1. \quad (4.45)$$

Из формул (4.43)–(4.45) следуют соотношения

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}^n y)(x) &= (\Pi(\mathcal{A} + V)^n y)(x) = [\Pi(\mathcal{A} + V)^n y](x) \\ &= [(\mathcal{A} + V)^n y](x) - v_0(x) \int_{\mathbb{R}^n} [(\mathcal{A} + V)^n y](s) v_0(s) ds, \quad y \in E_1, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.46)$$

Разлагая в формуле (4.42) операторную экспоненту в ряд и используя соотношение (4.46), получаем равенство

$$[\mathcal{G}V](x) = -\frac{2\lambda_0 d}{v_0(x)} \int_0^\infty \exp\{t\mathcal{S}\} [v_0\psi](x) dt, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.47)$$

Из предложения 1.2 и доказательства леммы 4.6 следует, что спектр оператора $\mathcal{S}: E_1 \rightarrow E_1$ лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} z \leq \tau_0$ при некотором $\tau_0 < 0$. Таким образом, с учетом того, что полугруппа многомерного винеровского процесса является феллеровской (см. [24], [43, лемма 8.1.4]) с C_0 -условием, приходим к выводу, что в наших условиях применима известная формула теории полугрупп (см. [28, гл. 3, § 3, п. 5]), согласно которой из (4.47) и (1.17) получаем

$$[\mathcal{G}V](x) = \frac{2\lambda_0 d}{v_0(x)} (\mathcal{A} + V)^{-1} [v_0\psi](x). \quad (4.48)$$

Из формул (4.39), (4.48), (1.17) следует соотношение (1.16). Используя формулы (1.15)–(1.17), получаем равенство

$$\sigma^2 = -2\lambda_0^2 d^2 \langle (\mathcal{A} + V)^{-1} [v_0\psi], v_0\psi \rangle. \quad (4.49)$$

Из предложения 4.1 при $\lambda = \lambda_0$ и формулы (4.13) вытекает, что оператор $-(\mathcal{A} + V)^{-1}$ является строго положительным на E_1 . Учитывая этот факт и формулу (4.49), убеждаемся в том, что число σ^2 конечно и положительно, так как $v_0\psi \in E_1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.8. При $T \rightarrow \infty$ выполнено соотношение

$$K_2(T) = \exp\{T\langle \mathcal{A}v_0, v_0 \rangle\} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}}(1 + o(1)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя лемму 4.7 к интегралу (4.37), получаем соотношение

$$K_3(T) = K_4(T)(1 + o(1)), \quad T \rightarrow \infty, \quad (4.50)$$

где $K_4(T) := \int_0^\infty e^{-\sqrt{T}s} d\Phi\left(\frac{s}{\sigma}\right)$. Используя асимптотику (см. [52, гл. 2, формула (2.10.1)])

$$1 - \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x^2/2}(1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty,$$

находим

$$K_4(T) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}}(1 + o(1)), \quad T \rightarrow \infty. \quad (4.51)$$

Утверждение леммы следует из формул (4.34), (4.50) и (4.51).

4.3.4. *Вывод формулы (1.18)*. Используя формулы (4.20), (4.22), (4.24) и учитывая леммы 4.6, 4.8, получаем соотношение (1.18). Первое утверждение теоремы 1.2 доказано.

4.4. **Доказательство формулы (1.19)**. Формула (1.19) доказывается по той же схеме, что и (1.18). При этом вместо соотношения (3.12) используется соотношение (3.13). Отличие в асимптотиках формул (3.12) и (3.13) влечет за собой отличие в поведении степенных членов в асимптотиках (1.18) и (1.19). Формула (1.19), а вместе с ней и теорема 1.2 доказаны.

§ 5. Доказательство теорем 1.3, 1.4

5.1. **Точная асимптотика малых уклонений для суммы двух независимых случайных величин**. Нам понадобится следующий результат из теории малых уклонений.

ТЕОРЕМА 5.1 (М. А. Лифшиц). Пусть η_1, η_2 – независимые положительные случайные величины с известным поведением малых уклонений, а именно пусть выполнены соотношения при $r \rightarrow 0$

$$P\{\eta_1 \leq r\} = C_1 r^{\alpha_1} \exp\left\{-\frac{\gamma_1}{r^\delta}\right\}(1 + o(1)), \quad (5.1)$$

$$P\{\eta_2 \leq r\} = C_2 r^{\alpha_2} \exp\left\{-\frac{\gamma_2}{r^\delta}\right\}(1 + o(1)) \quad (5.2)$$

для некоторых $C_j > 0, \gamma_j > 0, \alpha_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2$, и $\delta > 0$. Тогда при $r \rightarrow 0$ имеет место следующая асимптотика малых уклонений для их суммы

$$P\{\eta_1 + \eta_2 \leq r\} = K r^{\alpha_1 + \alpha_2 - \delta/2} \exp\left\{-\frac{Q^{\delta+1}}{r^\delta}\right\}(1 + o(1)), \quad (5.3)$$

где

$$Q = \gamma_1^{1/(\delta+1)} + \gamma_2^{1/(\delta+1)}, \quad (5.4)$$

$$K = C_1 C_2 \sqrt{\frac{2\pi\delta}{\delta+1}} Q^{(\delta-1)/2 - \alpha_1 - \alpha_2} \gamma_1^{(2\alpha_1+1)/(2\delta+2)} \gamma_2^{(2\alpha_2+1)/(2\delta+2)}. \quad (5.5)$$

Формулировка теоремы 5.1 без доказательства приведена в статьях [38, теорема 2], [53, теорема 2]. Ниже мы приводим наше оригинальное доказательство этого результата, основанное на формуле полной вероятности и классическом методе Лапласа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.1. Обозначим асимптотики в правых частях формул (5.1), (5.2) соответственно через $\Psi_1(r)$ и $\Psi_2(r)$:

$$\Psi_1(x) := C_1 x^{\alpha_1} \exp\left\{-\frac{\gamma_1}{x^\delta}\right\}, \quad \Psi_2(x) := C_2 x^{\alpha_2} \exp\left\{-\frac{\gamma_2}{x^\delta}\right\}, \quad 0 < x < \varepsilon, \quad (5.6)$$

где $\varepsilon > 0$ – некоторое малое число. Дифференцируя обе части последнего равенства в (5.6), легко получаем выражение для второй производной

$$\psi_2(x) := \Psi_2'(x) = C_2 x^{\alpha_2} \exp\left\{-\frac{\gamma_2}{x^\delta}\right\} \left[\frac{\alpha_2}{x} + \frac{\delta\gamma_2}{x^{\delta+1}}\right], \quad 0 < x < \varepsilon. \quad (5.7)$$

Обозначим

$$F_2(x) := P\{\eta_2 \leq x\}, \quad 0 < x < \varepsilon. \quad (5.8)$$

Очевидно, что в силу (5.2), (5.6), (5.8) выполнено соотношение

$$F_2(x) = \Psi_2(x)(1 + o(1)), \quad x \rightarrow 0. \quad (5.9)$$

Применяя формулу полной вероятности и используя независимость случайных величин η_1 и η_2 , получаем следующие равенства для малых $0 < r < \varepsilon$:

$$\begin{aligned} G(r) &:= P\{\eta_1 + \eta_2 \leq r\} \\ &= \int_0^r P\{\eta_1 + \eta_2 \leq r \mid \eta_2 = x\} dF_2(x) = \int_0^r P\{\eta_1 \leq r - x\} dF_2(x). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Известно, что асимптотические соотношения можно интегрировать (см., например, [30, п. 8.2], [54, гл. 1, § 1]). Учитывая этот факт и используя формулы (5.1), (5.6), (5.10), приходим к следующему асимптотическому соотношению при $r \rightarrow 0$:

$$G(r) = \int_0^r \Psi_1(r - x) dF_2(x)(1 + o(1)). \quad (5.11)$$

Дважды интегрируя по частям интеграл из (5.11), учитывая упомянутую выше возможность интегрировать асимптотические соотношения и применяя формулы (5.7), (5.9), (5.11), получаем следующие асимптотические соотношения при $r \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} G(r) &= - \int_0^r F_2(x) d_x \Psi_1(r - x)(1 + o(1)) = - \int_0^r \Psi_2(x) d_x \Psi_1(r - x)(1 + o(1)) \\ &= \int_0^r \Psi_1(r - x) \psi_2(x) dx(1 + o(1)). \end{aligned} \quad (5.12)$$

В силу формул (5.6), (5.7) и (5.12) справедливо следующее асимптотическое равенство при $r \rightarrow 0$:

$$G(r) = C_1 C_2 \delta \gamma_2 G_1(r)(1 + o(1)), \quad (5.13)$$

где

$$G_1(r) := \int_0^r x^{\alpha_2 - \delta - 1} (r - x)^{\alpha_1} \exp \left\{ -\frac{\gamma_2}{x^\delta} - \frac{\gamma_1}{(r - x)^\delta} \right\} dx. \quad (5.14)$$

Сделаем в интеграле (5.14) замену переменной $x = rt$, получаем равенство

$$G_1(r) = r^{\alpha_1 + \alpha_2 - \delta} G_2(r), \quad (5.15)$$

где

$$G_2(r) := \int_0^1 t^{\alpha_2 - \delta - 1} (1 - t)^{\alpha_1} \exp \left\{ -\frac{1}{r^\delta} \left[\frac{\gamma_2}{t^\delta} + \frac{\gamma_1}{(1 - t)^\delta} \right] \right\} dt. \quad (5.16)$$

Интеграл (5.16) представляет собой модельный интеграл типа Лапласа с большим параметром

$$u = \frac{1}{r^\delta} \rightarrow \infty \quad \text{при } r \rightarrow 0 \quad (5.17)$$

(см. [54, гл. 2, формула (1.1)]). Вычисляя производные, легко убедиться в том, что функция

$$S(t) := \frac{\gamma_2}{t^\delta} + \frac{\gamma_1}{(1 - t)^\delta}, \quad t \in [0, 1], \quad (5.18)$$

из показателя экспоненты в интеграле (5.16) достигает своего максимума на $[0, 1]$ в единственной точке

$$t_0 = \frac{\gamma_2^{1/(\delta+1)}}{\gamma_1^{1/(\delta+1)} + \gamma_2^{1/(\delta+1)}}. \quad (5.19)$$

Учитывая этот факт, применим к интегралу (5.16) метод Лапласа в форме из [54, гл. 2, теорема 1.3] с большим параметром (5.17). Вычисляя производные функции (5.18) и используя [54, гл. 2, формула (1.2)], получаем следующее асимптотическое соотношение при $r \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} G_2(r) &= r^{\delta/2} \exp \left\{ -\frac{S(t_0)}{r^\delta} \right\} \sqrt{\frac{2\pi}{\delta(\delta+1)}} \\ &\times Q^{(\delta-1)/2 - \alpha_1 - \alpha_2} \gamma_1^{(2\alpha_1+1)/(2\delta+2)} \gamma_2^{(2\alpha_2-2\delta-1)/(2\delta+2)} (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (5.20)$$

где постоянная Q задана формулой (5.4). Легко видеть, что согласно соотношениям (5.4), (5.18), (5.19) выполнено равенство

$$S(t_0) = Q^{\delta+1}. \quad (5.21)$$

Итак, в силу формул (5.10), (5.13), (5.15) справедливо асимптотическое соотношение при $r \rightarrow 0$

$$P\{\eta_1 + \eta_2 \leq r\} = C_1 C_2 \delta \gamma_2 r^{\alpha_1 + \alpha_2 - \delta} G_2(r) (1 + o(1)). \quad (5.22)$$

Несложно убедиться в том, что из формул (5.5), (5.20)–(5.22) вытекает соотношение (5.3). Теорема доказана.

5.2. Доказательства теоремы 1.3. Докажем на основе (1.18) соотношение (1.32). Аналогично доказывается при помощи формулы (1.19) соотношение (1.33). Используя формулу (1.18) с функцией $g(x)$, заданной в (1.24), и предложение 1.4, мы получаем следующее асимптотическое соотношение при $T \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} P_a \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{j=1}^n |w_j(t)|^p dt < d \right\} \\ = \frac{\exp\{-T(\beta_0 - d\lambda_0)\}}{\sigma \sqrt{2\pi T}} \prod_{j=1}^n v_{01}(a_j) \left[\int_{\mathbb{R}} v_{01}(t) dt \right]^n (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (5.23)$$

где положительные постоянные β_0 , λ_0 , $\sigma^2 \equiv \sigma_n^2(d)$ и функция $v_{01}(t)$ определяются по формулам (1.21)–(1.23) и (1.16). Мы получим соотношение (1.32) из формулы (5.23), если докажем равенство (1.31) и равенство

$$\beta_0 - d\lambda_0 = b, \quad (5.24)$$

где $b \equiv b(p, n, d)$ задано формулой (1.27).

Докажем (5.24). Формулы (1.21)–(1.23) при $g_j(t) = |t|^p$, $j = 1, \dots, n$, принимают вид

$$-\frac{1}{2}v_{01}''(t) + \lambda_0 |t|^p v_{01}(t) = \beta_{01} v_{01}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} v_{01}^2(t) dt &= 1, \\ \int_{\mathbb{R}} |t|^p v_{01}^2(\lambda_0, t) dt &= \frac{d}{n}, \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\beta_0 = n\beta_{01}(\lambda_0), \quad v_0(x) = \prod_{j=1}^n v_{01}(\lambda_0, x_j), \quad x = (x_1, \dots, x_n). \quad (5.27)$$

Система уравнений (5.25), (5.26) аналогична системе уравнений (3.19) из работы [4], где фактически рассмотрен частный случай, когда $d = n$. Рассуждая так же, как при выводе формул (3.32)–(3.34) в [4], мы получаем следующие соотношения для величин β_{01} , λ_0 , $v_{01}(t)$:

$$\begin{aligned} \beta_{01} &= \kappa_{01}^{(2+p)/p} \left(\frac{2n}{(2+p)d} \right)^{2/p}, \quad \lambda_0 = \left(\frac{2n \kappa_{01}}{(2+p)d} \right)^{(2+p)/p}, \\ v_{01}(t) &= \lambda_0^{1/[2(2+p)]} y_{01}(\lambda_0^{1/(2+p)} t). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Отметим, что формула (5.28) согласуется с обозначениями (1.26), (1.28). Используя соотношения (5.27), (5.28) и (1.27), мы получаем равенство (5.24).

5.3. Доказательство равенства (1.31) и формулы (1.34). Записывая формулу (5.23) при $a = 0$, получаем следующее соотношение при $T \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} P_0 \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{j=1}^n |w_j(t)|^p dt < d \right\} \\ = \frac{\exp\{-T(\beta_0 - d\lambda_0)\}}{\sigma_n(d) \sqrt{2\pi T}} \left[v_{01}(0) \int_{\mathbb{R}} v_{01}(t) dt \right]^n (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Как известно, имеет место следующее свойство *автомодельности*, или *масштабной инвариантности*, n -мерного винеровского процесса, *выходящего из нуля*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Для любого фиксированного $T > 0$ процессы $\{\mathbf{w}(s) \mid \mathbf{w}(0) = 0\}$, $s \geq 0$ и $\{[T^{-1/2}\mathbf{w}(Ts) \mid \mathbf{w}(0) = 0\}$, $s \geq 0$ имеют одинаковые распределения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО можно легко получить из [24, гл. 1, предложение 1.10].

Несложно убедиться в том, что в силу автомодельности выполнено следующее равенство для любого фиксированного $T > 0$:

$$P_0 \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{j=1}^n |w_j(t)|^p dt < d \right\} = P_0 \left\{ \int_0^1 \sum_{j=1}^n |w_j(t)|^p dt < \varepsilon^p \right\}, \quad (5.30)$$

где

$$\varepsilon = \frac{d^{1/p}}{\sqrt{T}} \rightarrow 0 \quad \text{при } T \rightarrow \infty. \quad (5.31)$$

Из формул (5.29)–(5.31) вытекает следующее асимптотическое соотношение при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} & P_0 \left\{ \int_0^1 \sum_{j=1}^n |w_j(t)|^p dt < \varepsilon^p \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{d^{2/p}(\beta_0 - d\lambda_0)}{\varepsilon^2} \right\} \frac{\varepsilon}{\sigma_n(d)d^{1/p}\sqrt{2\pi}} \left[v_{01}(0) \int_{\mathbb{R}} v_{01}(t) dt \right]^n (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Полагая $d = 1$ в (5.32), получаем с учетом (1.36) асимптотическое соотношение при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} & P_0 \left\{ \int_0^1 \sum_{j=1}^n |w_j(t)|^p dt < \varepsilon^p \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{b_0}{\varepsilon^2} \right\} \frac{\varepsilon}{\sigma_n(1)\sqrt{2\pi}} \left[\widehat{v}_{01}(0) \int_{\mathbb{R}} \widehat{v}_{01}(t) dt \right]^n (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Используя теорему 5.1, вычислим вторым способом точную асимптотику вероятности в (5.33) при $\varepsilon \rightarrow 0$ и сравним оба результата. Справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Для $j = 1, \dots, n$ выполнены соотношения при $\varepsilon \rightarrow 0$*

$$P_0 \left\{ \int_0^1 |w_j(t)|^p dt < \varepsilon^p \right\} = \frac{\varepsilon}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{b_{01}}{\varepsilon^2} \right\} \widehat{v}_{01}(0) \int_{\mathbb{R}} \widehat{v}_{01}(t) dt (1 + o(1)), \quad (5.34)$$

где σ_1 задано формулой (1.30) и

$$b_{01} := b(p, 1, 1) := 2^{2/p} p \left(\frac{\kappa_{01}}{2+p} \right)^{(2+p)/p}. \quad (5.35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение (5.34) вытекает непосредственно из [4, теорема 1] и предложения 1.5.

Докажем формулу (1.31). Введем положительные случайные величины

$$\eta_j := \int_0^1 |w_j(t)|^p dt \quad (5.36)$$

при условии, что $w_j(0) = 0$, $j = 1, \dots, n$. Согласно предложению 5.2 независимые одинаково распределенные случайные величины η_1, η_2 , заданные в формуле (5.36), удовлетворяют условиям теоремы 5.1 с $r = \varepsilon^p$ и одинаковыми параметрами

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \widehat{v}_{01}(0) \int_{\mathbb{R}} \widehat{v}_{01}(t) dt, \quad (5.37)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{p}, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = b_{01}, \quad \delta = \frac{2}{p}. \quad (5.38)$$

Положим

$$K_n := C_1^n \left(\frac{4\pi b_{01}}{p+2} \right)^{(n-1)/2} n^{-(2+p)/(2p)}, \quad n \geq 1. \quad (5.39)$$

Применяя теорему 5.1 с учетом (5.37), (5.38), получаем следующее асимптотическое соотношение при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\mathbf{P}\{\eta_1 + \eta_2 \leq \varepsilon^p\} = K_2 \varepsilon \exp\left\{-\frac{2^{(2+p)/p} b_{01}}{\varepsilon^2}\right\} (1 + o(1)). \quad (5.40)$$

Учитывая (5.40), применим последовательно теорему 5.1 к независимым случайным величинам $\eta_1 + \eta_2$ и η_3 , а затем – к независимым случайным величинам $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3$ и η_4 и т. д. Используя метод математической индукции, докажем следующее асимптотическое соотношение при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{j=1}^n \eta_j \leq \varepsilon^p\right\} = K_n \varepsilon \exp\left\{-\frac{n^{(2+p)/p} b_{01}}{\varepsilon^2}\right\} (1 + o(1)). \quad (5.41)$$

Сравнивая соотношения (5.33) и (5.41), мы с учетом формул (1.36), (5.35) и (5.36), (5.39) получаем равенство (1.31) при $d = 1$.

В случае общего $d > 0$ из соотношений (5.32), (5.33) вытекает равенство

$$\frac{1}{\sigma_n(d) d^{1/p}} \left[v_{01}(0) \int_{\mathbb{R}} v_{01}(t) dt \right]^n = \frac{1}{\sigma_n(1)} \left[\widehat{v}_{01}(0) \int_{\mathbb{R}} \widehat{v}_{01}(t) dt \right]^n. \quad (5.42)$$

Используя определения (1.28), (1.36), получаем равенство

$$v_{01}(0) \int_{\mathbb{R}} v_{01}(t) dt = \widehat{v}_{01}(0) \int_{\mathbb{R}} \widehat{v}_{01}(t) dt. \quad (5.43)$$

Из соотношений (5.42) и (5.43) следует, что для $d > 0$ выполнено равенство

$$\sigma_n(d) = \frac{\sigma_n(1)}{d^{1/p}}. \quad (5.44)$$

Используя (5.44) и уже доказанную формулу (1.31) при $d = 1$, получаем равенство (1.31) в случае общего $d > 0$. Итак, первое утверждение теоремы 1.3 доказано.

Формулу (1.34) можно получить теперь двумя способами. Во-первых, она следует из соотношений (5.36), (5.41), (5.43) и (1.31). Во-вторых, формула (1.34) вытекает из формул (5.30), (5.43) и соотношения (1.32) при $a = 0$ и $d = 1$.

Доказательство соотношений (1.33), (1.35) проводится при помощи формулы (1.19), предложения 5.1 и уже доказанного равенства (1.31).

Список литературы

1. M. D. Donsker, S. R. S. Varadhan, "Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time. III", *Comm. Pure Appl. Math.*, **29**:4 (1976), 389–461.
2. Sh. Kusuoka, Y. Tamura, "Precise estimate for large deviation of Donsker–Varadhan type", *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **38**:3 (1991), 533–565.
3. В. И. Питербарг, В. Р. Фаталов, "Метод Лапласа для вероятностных мер в банаховых пространствах", *УМН*, **50**:6 (1995), 57–150; англ. пер.: V. I. Piterbarg, V. R. Fatalov, "The Laplace method for probability measures in Banach spaces", *Russian Math. Surveys*, **50**:6 (1995), 1151–1239.
4. В. Р. Фаталов, "Метод Лапласа для малых отклонений гауссовских процессов типа винеровского", *Матем. сб.*, **196**:4 (2005), 135–160; англ. пер.: V. R. Fatalov, "The Laplace method for small deviations of Gaussian processes of Wiener type", *Sb. Math.*, **196**:4 (2005), 595–620.
5. В. Р. Фаталов, "Времена пребывания и точные асимптотики малых отклонений бесселевских процессов для L^p -норм, $p > 0$ ", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71**:4 (2007), 69–102; англ. пер.: V. R. Fatalov, "Occupation times and exact asymptotics of small deviations of Bessel processes for L^p -norms with $p > 0$ ", *Izv. Math.*, **71**:4 (2007), 721–752.
6. В. Р. Фаталов, "Времена пребывания и точные асимптотики распределений L^p -функционалов от процессов Орнштейна–Уленбека, $p > 0$ ", *Теория вероятн. и ее примен.*, **53**:1 (2008), 72–99; англ. пер.: V. R. Fatalov, "Occupation time and exact asymptotics of distributions of L^p -functionals of the Ornstein–Uhlenbeck processes, $p > 0$ ", *Probl. Inf. Transm.*, **53**:1 (2009), 13–36.
7. S. Albeverio, V. Fatalov, V. Piterbarg, "Asymptotic behavior of the sample mean of a function of the Wiener process and the MacDonald function", *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, **16**:1 (2009), 55–93.
8. В. Р. Фаталов, "Точные асимптотики винеровских интегралов типа Лапласа для L^p -функционалов", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:1 (2010), 197–224; англ. пер.: V. R. Fatalov, "Exact asymptotics of Laplace-type Wiener integrals for L^p -functionals", *Izv. Math.*, **74**:1 (2010), 189–216.
9. В. Р. Фаталов, "Большие отклонения для распределений сумм случайных величин: метод цепей Маркова", *Пробл. передачи информ.*, **46**:2 (2010), 66–90; англ. пер.: V. R. Fatalov, "Large deviations for distributions of sums of random variables: Markov chain method", *Probl. Inf. Transm.*, **46**:2 (2010), 160–183.
10. В. Р. Фаталов, "Точные асимптотики вероятностей больших отклонений для цепей Маркова: метод Лапласа", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:4 (2011), 189–223; англ. пер.: V. R. Fatalov, "Exact asymptotics of probabilities of large deviations for Markov chains: the Laplace method", *Izv. Math.*, **75**:4 (2011), 837–868.
11. L. M. Wu, "Uniformly integrable operators and large deviations for Markov processes", *J. Funct. Anal.*, **172**:2 (2000), 301–376.

12. N. Jain, N. Krylov, "Large deviations for occupation times of Markov processes, with L_2 semigroups," *Ann. Prob.*, **36**:5 (2008), 1611–1641.
13. J. R. Baxter, N. C. Jain, S. R. S. Varadhan, "Some familiar examples for which the large deviation principle does not hold", *Comm. Pure Appl. Math.*, **44**:8–9 (1991), 911–923.
14. S. R. S. Varadhan, "Large deviations", *Ann. Probab.*, **36**:2 (2008), 397–419.
15. А. Д. Вентцель, *Предельные теоремы о больших отклонениях для марковских случайных процессов*, Наука, М., 1986.
16. А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин, *Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений*, Наука, М., 1979; англ. пер.: M. I. Freidlin, A. D. Wentzell, *Random perturbations of dynamical systems*, Grundlehren Math. Wiss., **260**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1984.
17. E. Bolthausen, J.-D. Deuschel, Y. Tazawa, "Laplace approximations for large deviations of nonreversible Markov processes. The nondegenerate case", *Ann. Probab.*, **23**:1 (1995), 236–267.
18. S. Liang, J. Liu, "On the precise Laplace approximation for large deviations of Markov chain. The nondegenerate case", *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, **10**:2 (2003), 421–454.
19. S. Liang, "Laplace approximations for large deviations of diffusion processes on Euclidean spaces", *J. Math. Soc. Japan*, **57**:2 (2005), 557–592.
20. А. А. Пухальский, *Большие отклонения стохастических динамических систем. Теория и приложения*, Физматлит, М., 2005.
21. B. Simon, *Functional integration and quantum physics*, Pure Appl. Math., **86**, Academic Press, New York–London, 1979.
22. J. Feng, T. G. Kurtz, *Large deviations for stochastic processes*, Math. Surveys Monogr., **131**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
23. Н. Икэда, С. Ватанабэ, *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы*, Наука, М., 1986; пер. с англ.: N. Ikeda, Sh. Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion processes*, North-Holland Math. Library, **24**, North-Holland, Amsterdam–Oxford–New York, 1981.
24. D. Revuz, M. Yor, *Continuous martingales and Brownian motion*, Grundlehren Math. Wiss., **293**, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
25. М. Кац, *Несколько вероятностных задач физики и математики*, Наука, М., 1967.
26. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 2: Гармонический анализ. Самосопряженность, Мир, М., 1977; т. 4: Анализ операторов, 1978; пер. с англ.: M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics*. II. *Fourier analysis, self-adjointness*, Academic Press, New York–London, 1972; IV. *Analysis of operators*, 1978.
27. Г. В. Розенблум, М. З. Соломяк, М. А. Шубин, "Спектральная теория дифференциальных операторов", *Дифференциальные уравнения с частными производными* – 7, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **64**, ВИНИТИ, М., 1989, 5–242; пер. с англ.: G. V. Rozenblum, M. A. Shubin, M. Z. Solomyak, "Spectral theory of differential operators", *Partial differential equations VII*, *Encycl. Math. Sci.*, **64**, 1994, 1–261.
28. *Функциональный анализ*, 2-е изд., ред. С. Г. Крейн, Наука, М., 1972; англ. пер. 1-го изд.: G. F. Votruba, L. F. Boron (eds.), *Functional analysis*, Wolters-Noordhoff Publ., Groningen, 1972.
29. А. Д. Полянин, *Справочник по линейным уравнениям математической физики*, Физматлит, М., 2001.
30. Ф. Олвер, *Асимптотики и специальные функции*, Наука, М., 1990; пер. с англ.: F. W. J. Olver, *Asymptotics and special functions*, Academic Press, New York–London, 1974.

31. В. Р. Фаталов, “Малые отклонения для двух классов гауссовских стационарных процессов и L^p -функционалов, $0 < p \leq \infty$ ”, *Пробл. передачи информ.*, **46**:1 (2010), 68–93; англ. пер.: V. R. Fatalov, “Small deviations for two classes of Gaussian stationary processes and L^p -functionals, $0 < p \leq \infty$ ”, *Problems Inform. Transmission*, **46**:1 (2010), 62–85.
32. М. А. Лифшиц, *Гауссовские случайные функции*, ТВИМС, Киев, 1995; англ. пер.: M. A. Lifshits, *Gaussian random functions*, Math. Appl., **322**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995.
33. M. Lifshits, T. Simon, “Small deviations for fractional stable processes”, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, **41**:4 (2005), 725–752.
34. W. V. Li, Q.-M. Shao, “Gaussian processes: Inequalities, small ball probabilities and applications”, *Stochastic processes: Theory and methods*, Handbook of Statist., **19**, North-Holland, Amsterdam, 2001, 533–597.
35. В. Р. Фаталов, “Константы в асимптотиках вероятностей малых отклонений для гауссовских процессов и полей”, *УМН*, **58**:4 (2003), 89–134; англ. пер.: V. R. Fatalov, “Constants in the asymptotics of small deviation probabilities for Gaussian processes and fields”, *Russian Math. Surveys*, **58**:4 (2003), 725–772.
36. В. Р. Фаталов, “Точные асимптотики малых отклонений для стационарного процесса Орнштейна–Уленбека и некоторых гауссовских диффузий в L^p -норме, $2 \leq p \leq \infty$ ”, *Пробл. передачи информ.*, **44**:2 (2008), 75–95; англ. пер.: V. R. Fatalov, “Exact asymptotics of small deviations for a stationary Ornstein–Uhlenbeck process and some Gaussian diffusion processes in the L^p -norm, $2 \leq p \leq \infty$ ”, *Problems Inform. Transmission*, **44**:2 (2008), 138–155.
37. A. I. Nazarov, Ya. Yu. Nikitin, “Exact L_2 -small ball behavior of integrated Gaussian processes and spectral asymptotics of boundary value problems”, *Probab. Theory Related Fields*, **129**:4 (2004), 469–494.
38. Я. Ю. Никитин, Э. Орсингер, “Точная асимптотика малых отклонений процессов Слепьяна и Ватсона в гильбертовой норме”, *Вероятность и статистика*. 8, Зап. научн. сем. ПОМИ, **320**, ПОМИ, СПб., 2004, 120–128; англ. пер.: Ya. Yu. Nikitin, E. Orsingher, “Exact small deviation asymptotics for the Slepian and Watson processes in the Hilbert norm”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **137**:1 (2006), 4555–4560.
39. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, ред. М. Абрамовиц, И. А. Стиган, Наука, М., 1979; пер. с англ.: *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, eds. M. Abramowitz, I. A. Stegun, U.S. Government Printing Office, Washington, 1964.
40. L. Takács, “On the distribution of the integral of the absolute value of the Brownian motion”, *Ann. Appl. Probab.*, **3**:1 (1993), 186–197.
41. А. Н. Бородин, П. Салминен, *Справочник по броуновскому движению*, Лань, СПб, 2000; пер. с англ.: A. N. Borodin, P. Salminen, *Handbook of Brownian motion – facts and formulae*, Probab. Appl., Birkhäuser, Basel, 1996.
42. А. Н. Бородин, И. А. Ибрагимов, *Предельные теоремы для функционалов от случайных блужданий*, Тр. МИАН, **195**, Наука, М., 1994; англ. пер.: A. N. Borodin, I. A. Ibragimov, *Limit theorems for functionals of random walks*, Proc. Steklov Inst. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
43. Б. Оксендаль, *Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения*, Мир, М., 2003; пер. с англ.: B. Øksendal, *Stochastic differential equations*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
44. С. Мизохата, *Теория уравнений с частными производными*, Мир, М., 1977; пер. с англ.: S. Mizohata, *The theory of partial differential equations*, Cambridge Univ. Press, London, 1973.
45. M. Fukushima, M. Takeda, “A transformation of a symmetric Markov process and the Donsker–Varadhan theory”, *Osaka J. Math.*, **21**:2 (1984), 311–326.

46. M. Fukushima, Y. Oshima, M. Takeda, *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, de Gruyter, **19**, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
47. S. Albeverio, R. Hoegh-Krohn, “Dirichlet forms and diffusion processes on rigged Hilbert spaces”, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, **40**:1 (1977), 1–57.
48. В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, *Оптимальное управление*, Наука, М., 1979; англ. пер.: V. M. Alekseev, V. M. Tikhomirov, S. V. Fomin, *Optimal control*, Contemp. Soviet Math., Consultants Bureau, New York, 1987.
49. М. М. Вайнберг, *Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений*, Наука, М., 1972; англ. пер.: M. M. Vainberg, *Variational method and method of monotone operators in the theory of nonlinear equations*, Halsted Press, New York–Toronto, 1973.
50. V. R. Fatalov, “The Laplace method for computing exact asymptotics of distributions of integral statistics”, *Math. Methods Statist.*, **8**:4 (1999), 510–535.
51. Й. Керстан, К. Маттес, Й. Мекке, *Безгранично делимые точечные процессы*, Наука, М., 1982; пер. с нем.: J. Kerstan, K. Matthes, J. Mecke, *Unbegrenzt teilbare Punktprozesse*, Akademie-Verlag, Berlin, 1974.
52. Г. Крамер, М. Р. Лидбеттер, *Стационарные случайные процессы*, Мир, М., 1969; пер. с англ.: H. Cramer, M. R. Leadbetter, *Stationary and related stochastic processes. Sample function properties and their applications*, Wiley, New York–London–Sydney, 1967.
53. L. Beghin, Ya. Yu. Nikitin, E. Orsingher, “Exact small ball constants for some Gaussian processes under L^2 -norm”, *Вероятность и статистика*. 6, Зап. научн. сем. ПОМИ, **298**, ПОМИ, СПб., 2003, 5–21; англ. пер.: L. Beghin, Ya. Yu. Nikulin, E. Orsingher, “Exact small ball constants for some Gaussian processes under the L_2 -norm”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **128**:1 (2005), 2493–2502.
54. М. В. Федорюк, *Асимптотика: интегралы и ряды*, Наука, М., 1987.

В. Р. ФАТАЛОВ

(V. R. FATALOV)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова,

механико-математический факультет

E-mail: vrfatalov@yandex.ru

Поступило в редакцию

22.11.2011

18.12.2012