Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Никольская, Об алгебраических циклах на рас-
слоенном произведении семейств КЗ-поверхностей, *Изв.*
РАН. Сер. матем., 2013, том 77, выпуск 1, 145–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7939>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 16:29:24

УДК 512.6

О. В. Никольская

Об алгебраических циклах на расслоенном произведении семейств КЗ-поверхностей

Доказаны гипотеза Ходжа и стандартная гипотеза типа Лефшеца для расслоенного квадрата гладкого проективного неизотривиального семейства КЗ-поверхностей над гладкой проективной кривой при условии, что ранг решетки трансцендентных циклов на общем геометрическом слое семейства является нечетным простым числом. Гипотеза Ходжа доказана для расслоенного произведения двух неизотривиальных семейств КЗ-поверхностей (возможно, с вырождениями) при условии, что для любой точки кривой хотя бы один из слоев семейства над этой точкой не имеет особенностей, ранг решетки трансцендентных циклов на общем геометрическом слое 1-го семейства является нечетным числом, не совпадающим с соответствующим рангом для 2-го семейства.

Библиография: 18 наименований.

Ключевые слова: гипотеза Ходжа, стандартная гипотеза типа Лефшеца, КЗ-поверхность.

DOI: 10.4213/im7939

Введение

Гладкая комплексная проективная поверхность S называется КЗ-поверхностью, если $\Omega_S^2 \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_S$ и $H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$.

В дальнейшем $\pi_k: X_k \rightarrow C$ ($k = 1, 2$) – сюръективный морфизм гладкого проективного 3-мерного многообразия X_k на гладкую проективную кривую C , причем общий геометрический слой морфизма π_k является КЗ-поверхностью. Мы называем семейство $\pi_k: X_k \rightarrow C$ *неизотривиальным*, если существуют хотя бы два неизоморфных гладких геометрических слоя морфизма π_k .

В настоящей работе мы докажем следующие основные результаты.

0.1. ТЕОРЕМА. Пусть $\pi_k: X_k \rightarrow C$, $k = 1, 2$, – проективные неизотривиальные семейства КЗ-поверхностей (возможно, с вырождениями) над гладкой проективной кривой C . Предположим, что множества $\Delta_k = \{\delta \in C \mid \text{Sing}(X_{k\delta}) \neq \emptyset\}$, $k = 1, 2$, не пересекаются. Если для общих геометрических слоев X_{1s} и X_{2s} выполнены условия:

- (i) $\text{rank NS}(X_{1s})$ является нечетным числом,
- (ii) $\text{rank NS}(X_{1s}) \neq \text{rank NS}(X_{2s})$,

то для любой гладкой проективной модели X расслоенного произведения $X_1 \times_C X_2$ верна гипотеза Ходжа об алгебраических циклах.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-01-00132) и при частичной финансовой поддержке фонда Д. Зимины “Династия”.

Если, кроме того, морфизмы π_1 и π_2 гладкие, $p_k = 22 - \text{rank NS}(X_{ks})$, $k = 1, 2$, – нечетные простые числа и $p_1 \neq p_2$, то для $X_1 \times_C X_2$ верна стандартная гипотеза Гротендика об алгебраичности операторов $*$ и Λ теории Ходжа.

Здесь общность точки $s \in C$ означает, что она принадлежит множеству $C \setminus \Delta_{\text{countable}}$, где $\Delta_{\text{countable}}$ – счетное подмножество, зависящее от семейств π_k ; мы можем также предполагать, что функции $s \mapsto \text{rank NS}(X_{ks})$, $k = 1, 2$, постоянны на множестве $C \setminus \Delta_{\text{countable}}$ (см. замечание в п. 4.6).

0.2. ТЕОРЕМА. Пусть C – гладкая проективная кривая над полем комплексных чисел, $\pi_1: X_1 \rightarrow C$ – гладкое проективное неизотривиальное семейство КЗ-поверхностей, причем для общего геометрического слоя X_{1s} число $22 - \text{rank NS}(X_{1s}) = p_1$ является нечетным и простым. Тогда для расслоенного квадрата $X = X_1 \times_C X_1$ верны гипотеза Ходжа и стандартная гипотеза Гротендика $B(X)$ типа Лефшеца об алгебраичности операторов $*$ и Λ теории Ходжа.

Напомним, что алгебраичность оператора

$$*: H^{10-i}(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^i(X, \mathbb{Q}), \quad i \leq 5,$$

эквивалентна существованию такого алгебраического цикла $Z = \sum_p n_p Z_p$ коразмерности i на $X \times X$ с коэффициентами $n_p \in \mathbb{Q}$, что оператор $*$ можно представить в виде композиции

$$\begin{aligned} H^{10-i}(X, \mathbb{Q}) &\xrightarrow{\text{pr}_1^*} H^{10-i}(X, \mathbb{Q}) \otimes H^0(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim \text{cl}_{X \times X}(Z)} H^{10+i}(X \times X, \mathbb{Q}) \\ &\xrightarrow{\text{pr}_{2*}} H^i(X, \mathbb{Q}), \end{aligned}$$

где $\text{pr}_k: X \times X \rightarrow X$, $k = 1, 2$, – канонические проекции.

Если гипотеза $B(X)$ верна, то хорошо известно, что численная эквивалентность алгебраических циклов на X совпадает с гомологической, компоненты Кюннета класса диагонали $\Delta_X \subset X \times X$ алгебраические, $\mathbb{Q}$ -алгебра алгебраических самосоответствий на X является полупростой.

Автор благодарит С. Г. Танкеева за постановку задачи и внимание к работе.

§ 1. Некоторые замечания о группе Ходжа КЗ-поверхности

1.1. Пусть S – гладкая проективная поверхность типа КЗ. Рассмотрим разложение Ходжа

$$H^2(S, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = H^{2,0}(S, \mathbb{C}) \oplus H^{1,1}(S, \mathbb{C}) \oplus H^{0,2}(S, \mathbb{C}),$$

где $H^{p,q}(S, \mathbb{C})$ – пространство гармонических форм типа (p, q) . Известно, что $H^{2,0}(S, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^0(S, \Omega_S^2)$ и $H^{0,2}(S, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^2(S, \mathcal{O}_S)$ являются одномерными пространствами над $\mathbb{C}$.

Пусть $U^1 = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ – единичная окружность. Определим ее действие в $H^2(S, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ следующим образом: $e^{i\theta}$ действует на $H^{p,q}(S, \mathbb{C})$ как умножение на число $e^{i\theta(p-q)}$. В итоге мы получаем морфизм групп

$$U^1 \xrightarrow{h} \text{GL}(H^2(S, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}),$$

где $h(e^{i\theta})(w_{2,0} + w_{1,1} + w_{0,2}) = e^{2i\theta}w_{2,0} + w_{1,1} + e^{-2i\theta}w_{0,2}$ на пространстве $H^2(S, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$.

Группой Ходжа КЗ-поверхности S называется наименьшая алгебраическая $\mathbb{Q}$ -подгруппа $\mathrm{Hg}(S) \hookrightarrow \mathrm{GL}(H^2(S, \mathbb{Q}))$, группа $\mathbb{R}$ -точек которой содержит $h(U^1)$.

По теореме Лефшеца о дивизорах имеем

$$H^2(S, \mathbb{Q})^{\mathrm{Hg}(S)} = H^2(S, \mathbb{Q}) \cap H^{1,1}(S, \mathbb{C}) = \mathrm{NS}(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S),$$

где $\mathrm{NS}(S)$ – группа Нерона–Севери поверхности S , совпадающая с группой Пикара $\mathrm{Pic}(S)$.

1.2. Пусть $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp}$ – ортогональное дополнение к $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)$ в $H^2(S, \mathbb{Q})$ относительно билинейного спаривания

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: H^2(S, \mathbb{Q}) \times H^2(S, \mathbb{Q}) \xrightarrow{x \times y \mapsto x \smile y} H^4(S, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}(-2) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}.$$

Из результатов Ю. Г. Зархина известно, что $\mathrm{Hg}(S)$ -модуль $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp}$ простой и $E = E(S) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(S)} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp}$ – вполне вещественное поле $E_0 = E_0(S)$ или мнимое квадратичное расширение вполне вещественного поля E_0 [1, теоремы 1.4.1, 1.6, 1.5.1]. Пусть

$$\Phi: \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp} \times \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp} \xrightarrow{x \times y \mapsto \alpha} E$$

– спаривание, определяемое формулой

$$\langle ex, y \rangle = \mathrm{tr}_{E/\mathbb{Q}}(e\alpha) \quad \forall e \in E.$$

1.3. Если $E = E_0$, то группа $\mathrm{Hg}(S)$ полупростая [1, замечание 1.5.3.b],

$$\mathrm{Hg}(S) = \mathrm{Res}_{E_0/\mathbb{Q}}(\mathrm{SO}(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp}, \Phi)),$$

где $\mathrm{Res}_{E_0/\mathbb{Q}}(\mathrm{SO}(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp}, \Phi))$ получается из E_0 -группы $\mathrm{SO}(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp}, \Phi)$ ограничением поля скаляров до $\mathbb{Q}$ [1, теорема 2.2.1]. Согласно лемме Шура и равенству

$$E \otimes \overline{\mathbb{Q}} = \mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(S)} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp} \otimes \overline{\mathbb{Q}}$$

получаем разложение

$$\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp} \otimes \overline{\mathbb{Q}} = V_1 \oplus \cdots \oplus V_e,$$

где $e = [E : \mathbb{Q}]$, $V_i = V_i(S)$ – неприводимые попарно неизоморфные ортогональные $(\mathrm{Hg}(S) \otimes \overline{\mathbb{Q}})$ -модули, образ канонического морфизма $\mathrm{Hg}(S) \otimes \overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}(V_i)$ совпадает с группой $\mathrm{SO}(V_i)$, группа Галуа $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ транзитивно переставляет $V_1, \dots, V_e$. Следовательно,

$$\mathrm{Hg}(S) \otimes \overline{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^e \mathrm{SO}(V_i).$$

Пара (тип $\text{Lie Hg}(S) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$, $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp} \otimes \overline{\mathbb{Q}}$) принимает одно из следующих значений:

$$(A_1 \times \cdots \times A_1 = A_1^e, E(2\omega_1^{(1)}) \oplus \cdots \oplus E(2\omega_1^{(e)})), \quad \text{если } \dim V_i = 3, \quad (1.1)$$

$$(A_1 \times \cdots \times A_1 = A_1^{2e}, E(\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)}) \oplus \cdots \oplus E(\omega_1^{(2e-1)} + \omega_1^{(2e)})), \quad (1.2)$$

если $\dim V_i = 4$,

$$(B_n \times \cdots \times B_n = B_n^e, E(\omega_1^{(1)}) \oplus \cdots \oplus E(\omega_1^{(e)})), \quad \text{если } \dim V_i = 2n + 1, \quad n \geq 2, \quad (1.3)$$

$$(D_n \times \cdots \times D_n = D_n^e, E(\omega_1^{(1)}) \oplus \cdots \oplus E(\omega_1^{(e)})), \quad \text{если } \dim V_i = 2n, \quad n \geq 3, \quad (1.4)$$

где через $E(\omega_1^{(i)})$ обозначается стандартное неприводимое представление со старшим весом $\omega_1^{(i)}$ (в обозначениях Н. Бурбаки [2]) i -го простого фактора типа A_1 , B_n или D_n полупростой алгебры Ли $\text{Lie Hg}(S) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$.

1.4. ЛЕММА (Г. А. Мустафин [3, § 4, лемма 3]). Пусть $\rho: g \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Q}} V$ – точное $\mathbb{Q}$ -неприводимое представление $\mathbb{Q}$ -полупростой алгебры Ли g , и пусть $g_{\mathbb{C}} = g_1 \times \cdots \times g_e$ – разложение на простые факторы комплексификации g , где $e = \dim_{\mathbb{Q}}(\text{Cent}(\text{End}_g V))$, $\text{Cent}(\text{End}_g V)$ – центр алгебры $\text{End}_g V$. Тогда алгебра Ли g $\mathbb{Q}$ -проста.

Если $E = E_0$, то в силу леммы Мустафина алгебра Ли $\text{Lie Hg}(S)$ является $\mathbb{Q}$ -простой в случаях (1.1), (1.3), (1.4) (другими словами, если $\dim V_k \neq 4$).

1.5. Предположим, что $E \neq E_0$; тогда

$$\text{Hg}(S) = \text{Res}_{E_0/\mathbb{Q}}(\text{U}(\text{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp}, \Phi)),$$

где $\text{U}(\text{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp}, \Phi)$ – унитарная группа E -векторного пространства $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp}$ относительно эрмитовой формы Φ [1, теорема 2.3.1]. В этом случае легко проверить, что полупростая часть $\text{Lie Hg}(S)^{\text{ss}} \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ редуктивной алгебры Ли $\text{Lie Hg}(S) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ является произведением $e_0 = e/2$ экземпляров простой алгебры Ли типа A_n , $n \geq 1$, и $(\text{Lie Hg}(S)^{\text{ss}} \otimes \overline{\mathbb{Q}})$ -модуль $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp} \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ допускает разложение

$$\text{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp} \otimes \overline{\mathbb{Q}} = E(\omega_1^{(1)}) \oplus E(\omega_n^{(1)}) \oplus \cdots \oplus E(\omega_1^{(e_0)}) \oplus E(\omega_n^{(e_0)}), \quad (1.5)$$

где $E(\omega_1^{(i)})$ – стандартное неприводимое представление алгебры Ли типа A_n в $(n+1)$ -мерном пространстве над $\overline{\mathbb{Q}}$ и $E(\omega_n^{(i)}) = E(\omega_1^{(i)})^{\vee}$ – представление, двойственное стандартному (оно изоморфно n -й внешней степени стандартного представления).

Действительно, поскольку E_0 является вполне вещественным полем, то алгебра $E_0 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ – прямая сумма полей $\mathbb{R}_{\sigma} = \mathbb{R}$, индексированных вложениями $\sigma: E_0 \hookrightarrow \mathbb{R}$, где

$$\mathbb{R}_{\sigma} = \{a \in E_0 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \mid ea = \sigma(e)a, \quad e \in E_0\} = E_0 \otimes_{E_0, \sigma} \mathbb{R}.$$

Поэтому $(E_0 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$ -модуль $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \text{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp} \otimes_{E_0} (E_0 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$ является прямой суммой таких $\mathbb{R}_{\sigma}$ -векторных пространств W_{σ} , что

$$W_{\sigma} = \text{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp} \otimes_{E_0, \sigma} \mathbb{R}$$

и $\dim_{\mathbb{R}} W_{\sigma} = \dim_{E_0} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp}$ для любого σ . Аналогично, $(E_0 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$ -алгебра Ли $\mathrm{Lie} \, \mathrm{Hg}(S) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ является прямой суммой таких $\mathbb{R}_{\sigma}$ -алгебр Ли $hg_{\sigma} \subset \mathrm{End}_{\mathbb{R}} W_{\sigma}$, что

$$hg_{\sigma} = \mathrm{Lie} \, \mathrm{Hg}(S) \otimes_{E_0, \sigma} \mathbb{R}$$

и $\dim_{\mathbb{R}} hg_{\sigma} = \dim_{E_0} \mathrm{Lie} \, \mathrm{Hg}(S)$. Более того, $(\mathrm{Lie} \, \mathrm{Hg}(S) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$ -модуль $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ является прямой суммой точных (hg_{σ}) -модулей W_{σ} , и

$$\mathrm{End}_{hg_{\sigma}} W_{\sigma} = \mathbb{C}. \quad (1.6)$$

В частности, hg_{σ} – неприводимая подалгебра в $\mathrm{End}_{\mathbb{R}} W_{\sigma}$ [1, замечание 1.9.4], поэтому остается проверить, что существует разложение

$$W_{\sigma} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = V_{\sigma} \oplus \overset{\vee}{V}_{\sigma}, \quad (1.7)$$

где V_{σ} – неприводимый $(hg_{\sigma} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ -модуль.

В силу (1.6) и леммы Шура имеется разложение $W_{\sigma} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = V_{\sigma} \oplus U_{\sigma}$, где V_{σ} и U_{σ} – неизоморфные неприводимые $(hg_{\sigma} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ -модули. Введем обозначения

$$V_{\sigma} = E(\omega_{\sigma}^{(1)})(\chi_{\sigma}^{(1)}), \quad U_{\sigma} = E(\omega_{\sigma}^{(2)})(\chi_{\sigma}^{(2)}),$$

где $\omega_{\sigma}^{(1)}$ – старший вес пространства V_{σ} , рассматриваемого как модуль над полупростой частью $[hg_{\sigma} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}]^{\mathrm{ss}}$ алгебры Ли $hg_{\sigma} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, и $\chi_{\sigma}^{(1)}$ – вес $(\mathrm{Cent}(hg_{\sigma} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}))$ -модуля V_{σ} ; аналогичные обозначения используются для U_{σ} . Хорошо известно, что для невырожденной эрмитовой формы Ψ на $(n+1)$ -мерном комплексном векторном пространстве $V_{\mathbb{C}}$ существует каноническая точная последовательность вещественных групп Ли [4, гл. IX, § 6, предложение 3]:

$$1 \rightarrow \mathrm{SU}(\Psi) \rightarrow \mathrm{U}(\Psi) \rightarrow \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\} \rightarrow 1.$$

где $\mathrm{SU}(\Psi)$ – компактная вещественная форма комплексной группы Ли $\mathrm{SL}(V_{\mathbb{C}})$ типа A_n [5, гл. IX, § 4, табл. I]. Следовательно, $\chi_{\sigma}^{(1)} \neq 0$ или $\chi_{\sigma}^{(2)} \neq 0$. Мы можем (и будем) считать, что $\chi_{\sigma}^{(1)} \neq 0$. Тогда

$$[\mathrm{Sym}^2(V_{\sigma})]^{hg_{\sigma} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}} = [[\mathrm{Sym}^2(E(\omega_{\sigma}^{(1)}))](2\chi_{\sigma}^{(1)})]^{hg_{\sigma} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}} = 0. \quad (1.8)$$

Поскольку ограничение формы поляризации на неприводимую $\mathbb{R}$ -структуру Ходжа W_{σ} веса 2 невырождено и (hg_{σ}) -инвариантно [1, пп. 0.3.1.1, 0.3.1.2, 0.3.2], из разложения

$$\begin{aligned} [\mathrm{Sym}^2(W_{\sigma} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})]^{hg_{\sigma} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}} &= [\mathrm{Sym}^2(V_{\sigma} \oplus U_{\sigma})]^{hg_{\sigma} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}} \\ &= [\mathrm{Sym}^2(V_{\sigma})]^{hg_{\sigma} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}} \oplus [V_{\sigma} \otimes_{\mathbb{C}} U_{\sigma}]^{hg_{\sigma} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}} \oplus [\mathrm{Sym}^2(U_{\sigma})]^{hg_{\sigma} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}}, \end{aligned}$$

леммы Шура и (1.8) следует, что имеется ненулевой элемент $\mathbb{C}$ -пространств $[V_{\sigma} \otimes_{\mathbb{C}} U_{\sigma}]^{hg_{\sigma} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}}$, определяющий некоторый изоморфизм $(hg_{\sigma} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ -модулей $U_{\sigma} \xrightarrow{\vee} V_{\sigma}$. Формула (1.7) доказана.

В дальнейшем мы будем обозначать i -е слагаемое в разложении (1.5) через $V_i = V_i(S)$.

§ 2. Алгебраические циклы на расслоенном произведении

2.1. Мы начинаем доказательство теоремы из п. 0.1 (пп. 2.1–2.9 содержат доказательство гипотезы Ходжа для многообразия X , пп. 4.1–4.4 содержат доказательство стандартной гипотезы $B(X)$ в случае, когда морфизмы π_1 и π_2 гладкие, числа $p_k = 22 - \text{rank NS}(X_{ks})$ нечетные простые и $p_1 \neq p_2$). Прежде всего, если 5-мерные гладкие проективные многообразия X и $\tilde{X}$ бирационально эквивалентны, то гипотезы Ходжа для X и $\tilde{X}$ эквивалентны в силу [6, следствие 1.8]. С другой стороны, если $f: X \rightarrow Y$ – сюръективный морфизм гладких проективных многообразий, то из гипотезы Ходжа для X следует гипотеза Ходжа для Y [7, следствие 1.2]. Поэтому в силу теоремы Мамфорда о полустабильных редукциях [8, с. 53, 54] мы можем (и будем) предполагать, что любой особый слой морфизма $\pi_k: X_k \rightarrow C$ является объединением гладких поверхностей кратности 1 с нормальными пересечениями и $X = X_1 \times_C X_2$ (очевидно, что условие $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$ сохраняется при замене базы; с другой стороны, многообразие X не имеет особенностей, так как можно считать в силу формулы $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$, что π_1 локально задается формулой $t = z_1$ и π_2 локально задается одной из формул $t = z_4$, $t = z_4 z_5$, $t = z_4 z_5 z_6$ в терминах подходящих голоморфных координат t , (z_1, z_2, z_3) , (z_4, z_5, z_6) на C , X_1 , X_2 соответственно, так что подмногообразие $X = X_1 \times_C X_2$ локально задается в гладком многообразии $X_1 \times X_2$ одним из уравнений $z_1 = z_4$, $z_1 = z_4 z_5$, $z_1 = z_4 z_5 z_6$ и поэтому не имеет особых точек).

Пусть

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta_1 \cup \Delta_2, \\ C' &= C \setminus \Delta, \quad X'_k = \pi_k^{-1}(C'), \quad \pi'_k = \pi_k|_{X'_k}: X'_k \rightarrow C', \\ X' &= X'_1 \times_{C'} X'_2, \quad \pi' = \pi'_1 \times_{C'} \pi'_2: X' \rightarrow C', \end{aligned}$$

кроме того, пусть $\pi = \pi_1 \times_C \pi_2: X \rightarrow C$ – структурный морфизм.

Фиксируем точку $s \in C'$. Тогда X_{1s} и X_{2s} – поверхности типа КЗ. Пусть

$$\rho^{(i)}: \pi_1(C', s) \longrightarrow \text{GL}(H^i(X_s, \mathbb{Q}))$$

– представление монодромии, $G^{(i)} = \overline{\rho^{(i)}(\pi_1(C', s))} \subset \text{GL}(H^i(X_s, \mathbb{Q}))$ – замыкание группы $\rho^{(i)}(\pi_1(C', s))$ в топологии Зариского группы $\text{GL}(H^i(X_s, \mathbb{Q}))$. Аналогично определяются группы $G_k^{(i)}$, связанные с представлениями $\rho_k^{(i)}: \pi_1(C', s) \rightarrow \text{GL}(H^i(X_{ks}, \mathbb{Q}))$.

Пусть $(G^{(i)})^0$ – связная компонента единицы группы $G^{(i)}$. Рассматривая в случае необходимости конечное разветвленное накрытие $\tilde{C} \rightarrow C$ и соответствующие гладкие модели $\tilde{X}_k$ многообразий $X_k \otimes_C \tilde{C}$, мы можем (и будем) считать, что $\tilde{X} = \tilde{X}_1 \times_{\tilde{C}} \tilde{X}_2$ гладкое и $G^{(i)} = (G^{(i)})^0$, потому что $B(\tilde{X}) \Rightarrow B(X)$ [9, теорема 1.6] и из гипотезы Ходжа для $\tilde{X}$ следует гипотеза Ходжа для X [7, следствие 1.2]. Группа $G^{(i)}$ полупростая [10, следствие 4.2.9] и не зависит от выбора точки $s \in C'$.

Согласно одной теореме Делиня [11, теорема 7.3] можно считать, что существует такое счетное подмножество $\Delta_{\text{countable}} \subset C$, что для любой точки $s \in C \setminus \Delta_{\text{countable}}$ группа $G_k^{(2)}$ является нормальной подгруппой в группе

Ходжа $\mathrm{Hg}(X_{ks})$, $k = 1, 2$. Точки $s \in C \setminus \Delta_{\text{countable}}$ мы будем называть *общими* в смысле Ходжа. Для таких s алгебра Ли $\mathrm{Lie} G_k^{(2)}$ является идеалом в $\mathrm{Lie} \mathrm{Hg}(X_{ks})$.

2.2. ЛЕММА. Пусть $\pi_k: X_k \rightarrow C$ – проективное неизотривиальное семейство КЗ-поверхностей (возможно, с вырождениями) над гладкой проективной кривой, причем для точки $s \in C'$, общей в смысле Ходжа для каждого из семейств $\pi_k: X_k \rightarrow C$, выполнены следующие условия:

- (i) $\mathrm{rank} \mathrm{NS}(X_{1s})$ является нечетным числом;
- (ii) $\mathrm{rank} \mathrm{NS}(X_{1s}) \neq \mathrm{rank} \mathrm{NS}(X_{2s})$.

Тогда

$$\mathrm{Hom}_{\pi_1(C', s)}(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}, \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассматривая, в случае необходимости, подходящее разветвленное накрытие $\tilde{C} \rightarrow C$, мы можем считать, что группы $G_k^{(2)}$, $k = 1, 2$, связны.

В силу теоремы Делиня о полупростоте представления монодромии [10, теорема 4.2.6], $H^2(X_{ks}, \mathbb{Q})$ является прямой суммой простых (неприводимых) $\pi_1(C', s)$ -модулей W_i . По лемме Шура имеем $\mathrm{Hom}_{\pi_1(C', s)}(W_i, W_j) = 0$, если и только если W_i, W_j – неизоморфные $\pi_1(C', s)$ -модули, и $\mathrm{End}_{\pi_1(C', s)} W_i$ – алгебра с делением над $\mathbb{Q}$ (другими словами, любой ненулевой элемент в $\mathrm{End}_{\pi_1(C', s)} W_i$ обратим). Более того, $\mathrm{End}_{\pi_1(C', s)} W_i = \mathbb{Q}$, если и только если W_i – абсолютно неприводимый (абсолютно простой) $\pi_1(C', s)$ -модуль (другими словами, $W_i \otimes \mathbb{Q}$ – неприводимый $\pi_1(C', s)$ -модуль).

Из условия (i) следует, что для КЗ-поверхности X_{1s} выполнено равенство $E(X_{1s}) = E_0(X_{1s})$, причем случай (1.2) невозможен. Поэтому в силу леммы из п. 1.4 алгебра Ли $\mathrm{Lie} \mathrm{Hg}(X_{1s})$ является $\mathbb{Q}$ -простой. С другой стороны, точка $s \in C$ является общей в смысле Ходжа, поэтому $G_1^{(2)}$ является нетривиальной (в силу неизотривиальности семейства КЗ-поверхностей $\pi_1: X_1 \rightarrow C$) нормальной подгруппой $\mathbb{Q}$ -простой связной алгебраической группы $\mathrm{Hg}(X_{1s})$. Поэтому

$$G_1^{(2)} = \mathrm{Hg}(X_{1s}) \quad (2.1)$$

и, следовательно, $\pi_1(C', s)$ -модуль $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}$ является простым, так как он является простым $\mathrm{Hg}(X_{1s})$ -модулем по теореме Зархина [1, теорема 1.6].

Будем предполагать далее, что $\mathrm{Hom}_{\pi_1(C', s)}(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}, \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}) \neq 0$. Тогда простой $\pi_1(C', s)$ -модуль $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}$ является прямым слагаемым полупростого $\pi_1(C', s)$ -модуля $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}$ [10, теорема 4.2.6].

Если $E(X_{2s}) = E_0(X_{2s})$ и для КЗ-поверхности X_{2s} выполнено одно из условий (1.1), (1.3), (1.4), то по лемме Мустафина алгебра Ли $\mathrm{Lie} \mathrm{Hg}(X_{2s})$ является $\mathbb{Q}$ -простой и, следовательно, $\pi_1(C', s)$ -модуль $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}$ является простым, причем он содержит простой $\pi_1(C', s)$ -модуль $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}$. Поэтому $\dim \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} = \dim \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}$, что противоречит условию (ii). Если для КЗ-поверхности X_{2s} выполнено условие (1.2), то $V_k(X_{2s})$ является неприводимым $\pi_1(C, s)$ -модулем степени 4 или прямой суммой $\pi_1(C, s)$ -модулей степени 1 или 2 (потому что $G_2^{(2)}$ является связной нормальной подгруппой в группе Ходжа $\mathrm{Hg}(X_{2s})$), в то время как $V_k(X_{1s})$ является неприводимым $\pi_1(C, s)$ -модулем степени 3, $2n + 1$ (при $n \geq 2$) и $2n$ (при $n \geq 3$). В этом случае утверждение леммы следует из леммы Шура.

Если $E(X_{2s}) \neq E_0(X_{2s})$, то из (1.5) следует, что $V_k(X_{2s})$ является прямой суммой 1-мерных модулей (с тривиальным действием $\pi_1(C', s)$) или неприводимым $\pi_1(C', s)$ -модулем степени $n+1$ (потому что $G_2^{(2)}$ является связной нормальной подгруппой в группе Ходжа $\text{Hg}(X_{2s})$ с полупростой частью $\text{Hg}(X_{2s})^{\text{ss}}$ типа $A_n \times \cdots \times A_n = A_n^{e_0}$, $n \geq 1$). Поскольку для КЗ-поверхности X_{1s} выполнено одно из условий (1.1), (1.3), (1.4) и включение $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} \hookrightarrow \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}$ индуцирует сюръективный морфизм алгебраических $\mathbb{Q}$ -групп $G_2^{(2)} \rightarrow G_1^{(2)}$, то из (2.1) следует, что простые факторы алгебры Ли $\text{Lie Hg}(X_{1s}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ имеют тип A_n , $n \geq 1$. Если $n \geq 2$, то неприводимые представления $V_i(X_{1s})$ не являются автодуальными (другими словами, двойственное представление $V_i(X_{1s})^{\vee}$ не изоморфно $V_i(X_{1s})$ над алгеброй Ли $\text{Lie Hg}(X_{1s}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$); это противоречит хорошо известной автодуальности $V_i(X_{1s})$ при выполнении одного из условий (1.1), (1.3), (1.4) для КЗ-поверхности X_{1s} . Если $n = 1$, то (1.1) выполняется для КЗ-поверхности X_{1s} , поэтому $(\pi_1(C', s))$ -модуль $V_i(X_{1s})$ является абсолютно неприводимым 3-мерным представлением, в то же время из (1.5) следует, что $\dim V_i(X_{2s}) = 2$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\pi_1(C', s)}(\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp} \otimes \overline{\mathbb{Q}}) \\ = \text{Hom}_{\pi_1(C', s)}\left(\bigoplus_i V_i(X_{1s}), \bigoplus_j V_j(X_{2s})\right) = 0 \end{aligned}$$

в силу леммы Шура. Лемма доказана.

2.3. Спектральная последовательность Лере $E_2^{p,q} = H^p(C, R^q \pi_{k*} \mathbb{Q}) \Rightarrow H^*(X_k, \mathbb{Q})$, $k = 1, 2$, вырождена [12, следствие (15.15)], причем краевое отображение

$$H^{2i}(X_k, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^{2i} \pi_{k*} \mathbb{Q})$$

сюръективно [12, следствие (15.14)], поэтому имеется точная последовательность $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа [12, теорема (15.11), следствие (15.15), теорема (15.16)]

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^2(C, R^{2i-2} \pi_{k*} \mathbb{Q}) \rightarrow \text{Ker}[H^{2i}(X_k, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^{2i} \pi_{k*} \mathbb{Q})] \\ \rightarrow H^1(C, R^{2i-1} \pi_{k*} \mathbb{Q}) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Поскольку X_{ks} является КЗ-поверхностью для всех $s \in C'$, то для $s \in C'$ имеем

$$H^1(X_{ks}, \mathbb{Q}) = H^3(X_{ks}, \mathbb{Q}) = 0.$$

Поэтому пучок $R^{2i-1} \pi_{k*} \mathbb{Q}$ сосредоточен на конечном множестве $\Delta = C \setminus C'$ и, следовательно, $H^1(C, R^{2i-1} \pi_{k*} \mathbb{Q}) = 0$. Из (2.2) следует точность последовательности

$$0 \rightarrow H^2(C, R^{2i-2} \pi_{k*} \mathbb{Q}) \rightarrow H^{2i}(X_k, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^{2i} \pi_{k*} \mathbb{Q}) \rightarrow 0. \quad (2.3)$$

В случае $i = 1$ получаем из (2.3) точную последовательность $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа

$$0 \rightarrow H^2(C, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(X_k, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^2 \pi_{k*} \mathbb{Q}) \rightarrow 0, \quad (2.4)$$

где $H^2(C, \mathbb{Q})$ порождается алгебраическим классом $\text{cl}_{X_k}(X_{ks})$ слоя X_{ks} (и, следовательно, имеет тип Ходжа $(1, 1)$).

2.4. ЛЕММА. *Рациональная структура Ходжа $H^0(C, R^2\pi_{k*}\mathbb{Q})$ имеет тип $(1, 1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу неизотривияльности гладкого семейства КЗ-поверхностей $\pi'_k: X'_k \rightarrow C'$ и одного из результатов Ю.Г. Зархина [1, следствие 4.1.1] имеем

$$H^0(C', R^2\pi'_{k*}\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(X_{ks}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C', s)} \hookrightarrow \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks}). \quad (2.5)$$

При использовании алгоритма из [13, п. 1.4] легко получить из теории смешанных структур Ходжа, что

$$\begin{aligned} \mathrm{Coker}[H^1(C, R^1\pi_{k*}\mathbb{Q}) \hookrightarrow H^1(C', R^1\pi'_{k*}\mathbb{Q}) \cap \mathrm{Im}[H^2(X_k, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(X'_k, \mathbb{Q})]] \\ \stackrel{\mathrm{def}}{=} [H^1(C', R^1\pi'_{k*}\mathbb{Q}) \cap \mathrm{Im}[H^2(X_k, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(X'_k, \mathbb{Q})]] / H^1(C, R^1\pi_{k*}\mathbb{Q}) \end{aligned}$$

– чистая $\mathbb{Q}$ -структура Ходжа типа $(1, 1)$. Поскольку из (2.5) следует, что $H^0(C', R^2\pi'_{k*}\mathbb{Q})$ – рациональная структура Ходжа типа $(1, 1)$, то $H^0(C, R^2\pi_{k*}\mathbb{Q})$ является $\mathbb{Q}$ -структурой Ходжа типа $(1, 1)$ в силу [14, п. 2.3]. Лемма доказана.

2.5. ЛЕММА. *Имеем $H^2(X_k, \mathbb{Q}) = \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_k)$, $H^2(X, \mathbb{Q}) = \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое равенство следует из (2.4), леммы из п. 2.4 и теоремы Лефшеца о дивизорах. Спектральная последовательность Лере $E_2^{p,q} = H^p(C, R^q\pi_*\mathbb{Q}) \Rightarrow H^*(X, \mathbb{Q})$ вырождена [12, следствие (15.15)], причем краевое отображение

$$H^{2i}(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^{2i}\pi_*\mathbb{Q})$$

сюръективно [12, следствие (15.14)], поэтому имеется точная последовательность $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа [12, теорема (15.11), следствие (15.15), теорема (15.16)]

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^2(C, R^{2i-2}\pi_*\mathbb{Q}) \rightarrow \mathrm{Ker}[H^{2i}(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^{2i}\pi_*\mathbb{Q})] \\ \rightarrow H^1(C, R^{2i-1}\pi_*\mathbb{Q}) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Поскольку X_{ks} является КЗ-поверхностью для всех $s \in C \setminus \Delta_k$, пучок $R^{2j-1}\pi_{k*}\mathbb{Q}$ сосредоточен на конечном множестве Δ_k и, следовательно,

$$H^1(C, R^{2i-1}\pi_*\mathbb{Q}) = 0 \quad (2.7)$$

в силу формулы Кюннета

$$R^{2i-1}\pi_*\mathbb{Q} = \bigoplus_{p+q=2i-1} R^p\pi_{1*}\mathbb{Q} \otimes R^q\pi_{2*}\mathbb{Q}.$$

Из (2.6), (2.7) следует точность последовательности

$$0 \rightarrow H^2(C, R^{2i-2}\pi_*\mathbb{Q}) \rightarrow H^{2i}(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^{2i}\pi_*\mathbb{Q}) \rightarrow 0. \quad (2.8)$$

В случае $i = 1$ получаем из (2.8) точную последовательность $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа

$$0 \rightarrow H^2(C, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) \rightarrow 0, \quad (2.9)$$

где в силу условия $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$ имеем $R^1\pi_{1*}\mathbb{Q} \otimes R^1\pi_{2*}\mathbb{Q} = 0$, поэтому из формулы Кюннета следует, что

$$R^2\pi_*\mathbb{Q} = R^2\pi_{1*}\mathbb{Q} \oplus [R^1\pi_{1*}\mathbb{Q} \otimes R^1\pi_{2*}\mathbb{Q}] \oplus R^2\pi_{2*}\mathbb{Q} = R^2\pi_{1*}\mathbb{Q} \oplus R^2\pi_{2*}\mathbb{Q}. \quad (2.10)$$

Остается применить (2.9), лемму из п. 2.4 и теорему Лефшеца о дивизорах. Лемма доказана.

2.6. Согласно сильной теореме Лефшеца имеем $H^4(X_k, \mathbb{Q}) = H^2(X_k, \mathbb{Q}) \cup \text{cl}_{X_k}(H_k)$, где H_k – гиперплоское сечение многообразия X_k . Поэтому в силу леммы из п. 2.5 следует, что пространство $H^4(X_k, \mathbb{Q})$ порождается алгебраическими классами когомологий.

2.7. Пусть $f: Z \rightarrow \pi^{-1}(\Delta)$ – нормализация схемы $\pi^{-1}(\Delta)$. Тогда Z – несвязное объединение гладких неприводимых компонент дивизора $\pi^{-1}(\Delta)$. Поскольку $f: Z \rightarrow \pi^{-1}(\Delta)$ – разрешение особенностей замкнутой подсхемы $i_\Delta: \pi^{-1}(\Delta) \hookrightarrow X$, имеется точная последовательность смешанных $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа [15, следствие (8.2.8)]

$$H^2(Z, \mathbb{Q}) \xrightarrow{(i_\Delta f)_*} H^4(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^4(X', \mathbb{Q}),$$

где $(i_\Delta f)_*$ – морфизм типа $(1, 1)$ рациональных структур Ходжа. Поэтому

$$(i_\Delta f)_* H^2(Z, \mathbb{Q}) = \text{Ker}[H^4(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^4(X', \mathbb{Q})]. \quad (2.11)$$

Хорошо известно, что имеется канонический сюръективный морфизм $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа $H^4(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^4 \pi_* \mathbb{Q})$ [12, следствие (15.14)], включенный в коммутативную диаграмму с точными строками [12, диаграмма (15.1) для случая $m = 3$]

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L_4 & \longrightarrow & H^4(X, \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H^0(C, R^4 \pi_* \mathbb{Q}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha_4 & & \downarrow & & \downarrow \\ & & H^1(C, R^3 \pi_* \mathbb{Q}) & & \downarrow \varphi_4 & & \downarrow \psi_4 \\ & & \simeq \downarrow \gamma_4 & & \downarrow & & \downarrow \\ & & H^1(C, j_* R^3 \pi'_* \mathbb{Q}) & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \cap & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^1(C', R^3 \pi'_* \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\beta_4} & H^4(X', \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H^0(C', R^4 \pi'_* \mathbb{Q}) \longrightarrow 0 \end{array} \quad (2.12)$$

где $\gamma_4 \circ \alpha_4$ – морфизм $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа и β_4 – морфизм смешанных структур Ходжа [12, теоремы (15.3), (15.4)].

По теореме Делиня каноническое отображение $H^4(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C', R^4 \pi'_* \mathbb{Q})$ является сюръективным морфизмом рациональных структур Ходжа (см. [10, пп. 4.1.1, 4.1.2]). Поэтому диаграмма (2.12) дает коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L_4 & \longrightarrow & H^4(X, \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H^0(C, R^4 \pi_* \mathbb{Q}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha_4 & & \downarrow & & \downarrow \\ & & H^1(C, R^3 \pi_* \mathbb{Q}) & & \downarrow \varphi_4 & & \downarrow \psi_4 \\ & & \cap & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^1(C', R^3 \pi'_* \mathbb{Q}) \cap \text{Im}(\varphi_4) & \longrightarrow & \text{Im}(\varphi_4) & \longrightarrow & H^0(C', R^4 \pi'_* \mathbb{Q}) \longrightarrow 0 \end{array} \quad (2.13)$$

Спектральная последовательность Лере $E_2^{p,q} = H^p(C, R^q \pi_* \mathbb{Q})$ вырождается и дает точную последовательность $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа [12, теорема (15.11),

предложение (15.12), следствие (15.15), теорема (15.16)]

$$0 \rightarrow H^2(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) \rightarrow \text{Ker}[H^4(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^4\pi_*\mathbb{Q})] \xrightarrow{\alpha_4} H^1(C, R^3\pi_*\mathbb{Q}) \rightarrow 0. \quad (2.14)$$

Поэтому, учитывая (2.11) и присоединяя канонические отображения ядер и коядер к диаграмме (2.13), мы получим коммутативную диаграмму с точными строками и столбцами

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^2(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) & \longrightarrow & (i_{\Delta}f)_*H^2(Z, \mathbb{Q}) & \longrightarrow & \text{Ker}(\psi_4) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & L_4 & \longrightarrow & H^4(X, \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H^0(C, R^4\pi_*\mathbb{Q}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha_4 & & \downarrow \varphi_4 & & \downarrow \psi_4 \\ 0 & \longrightarrow & H^1(C', R^3\pi'_*\mathbb{Q}) \cap \text{Im}(\varphi_4) & \longrightarrow & \text{Im}(\varphi_4) & \longrightarrow & H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \frac{H^1(C', R^3\pi'_*\mathbb{Q}) \cap \text{Im}(\varphi_4)}{H^1(C, R^3\pi_*\mathbb{Q})} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (2.15)$$

Поскольку $R^3\pi'_*\mathbb{Q} = 0$ в силу формулы Кюннета, диаграмма (2.15) дает точную последовательность рациональных структур Ходжа

$$0 \rightarrow (i_{\Delta}f)_*H^2(Z, \mathbb{Q}) \rightarrow H^4(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q}) \rightarrow 0. \quad (2.16)$$

С другой стороны,

$$R^4\pi'_*\mathbb{Q} = R^4\pi'_{1*}\mathbb{Q} \oplus [R^2\pi'_{1*}\mathbb{Q} \otimes R^2\pi'_{2*}\mathbb{Q}] \oplus R^4\pi'_{2*}\mathbb{Q}.$$

Пусть $s \in C'$ – общая точка в смысле Ходжа для семейств $\pi'_k: X'_k \rightarrow C'$, $k = 1, 2$. Тогда можно считать (переходя в случае необходимости к разветвленному накрытию $\tilde{C} \rightarrow C$ и подходящей гладкой модели многообразия $X_k \times_C \tilde{C}$ над $\tilde{C}$), что $G_k^{(2)} \hookrightarrow \text{Hg}(X_{ks})$, $k = 1, 2$, – нормальные связные подгруппы. В этом случае

$$\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks}) = H^2(X_{ks}, \mathbb{Q})^{\text{Hg}(X_{ks})} = \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks})^{\pi_1(C', s)} \quad (2.17)$$

по теореме Лефшеца о дивизорах. В силу (2.5) имеем

$$[\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks}) \oplus \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks})^{\perp}]^{\pi_1(C', s)} \hookrightarrow \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks}),$$

поэтому

$$[\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks})^{\perp}]^{\pi_1(C', s)} = 0. \quad (2.18)$$

Из (2.17), (2.18) следует, что

$$\begin{aligned} H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q}) &\xrightarrow{\sim} H^4(X_{1s} \times X_{2s}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C', s)} \\ &= H^4(X_{1s}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C', s)} \oplus [H^2(X_{1s}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{2s}, \mathbb{Q})]^{\pi_1(C', s)} \oplus H^4(X_{2s}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C', s)}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где

$$\begin{aligned}
 & [H^2(X_{1s}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{2s}, \mathbb{Q})]^{\pi_1(C', s)} \\
 &= [[\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s}) \oplus \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}] \otimes [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s}) \oplus \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}]]^{\pi_1(C', s)} \\
 &= [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s}) \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})] \oplus [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}]^{\pi_1(C', s)} \\
 &\xrightarrow{\sim} [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s}) \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})] \oplus \mathrm{Hom}_{\pi_1(C', s)}[\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}, \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}] \\
 &= \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s}) \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

согласно лемме из п. 2.2.

2.8. В силу леммы из п. 2.5, формул (2.17), (2.18) и теоремы Делиня [10, теорема 4.1.1] существует каноническое сюръективное отображение ограничения

$$\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_k) = H^2(X_k, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C', R^2\pi'_{k*}\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(X_{ks}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C', s)} = \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks}).$$

Поэтому элементы из $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks})$ поднимаются до алгебраических классов из $H^2(X_k, \mathbb{Q})$. Очевидно, что элементы 1-мерного пространства $H^4(X_{ks}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C', s)}$ поднимаются до алгебраических классов из $H^4(X_k, \mathbb{Q})$, потому что каноническое отображение ограничения

$$H^4(X_k, \mathbb{Q}) \rightarrow H^4(X_{ks}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C', s)}$$

сюръективно по теореме Делиня [10, теорема 4.1.1].

2.9. Согласно (2.16), (2.19), (2.20) пространство $H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q})$ порождается образами при краевом отображении алгебраических классов в $H^4(X, \mathbb{Q})$, лежащих в $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_1) \cup \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_2)$, $H^4(X_1, \mathbb{Q})$, $H^4(X_2, \mathbb{Q})$, где $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_k)$ отождествляется с образом $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_k)$ при каноническом отображении $q_k^*: H^2(X_k, \mathbb{Q}) \hookrightarrow H^2(X, \mathbb{Q})$, определенном проекцией $X = X_1 \times_C X_2 \xrightarrow{q_k} X_k$, и $H^4(X_k, \mathbb{Q})$ отождествляется с образом $H^4(X_k, \mathbb{Q})$ при отображении

$$q_k^*: H^4(X_k, \mathbb{Q}) \hookrightarrow H^4(X, \mathbb{Q}).$$

В частности, точная последовательность (2.16) рациональных структур Ходжа дает точную последовательность $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow (i_{\Delta}f)_*[H^2(Z, \mathbb{Q}) \cap H^{1,1}(Z, \mathbb{C})] &\rightarrow [H^4(X, \mathbb{Q}) \cap H^{2,2}(X, \mathbb{C})] \\
 &\rightarrow H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q}) \rightarrow 0.
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Теорема Лефшеца о дивизорах на гладком (возможно, несвязном) многообразии Z показывает, что (2.21) имеет вид

$$0 \rightarrow (i_{\Delta}f)_*\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(Z) \rightarrow [H^4(X, \mathbb{Q}) \cap H^{2,2}(X, \mathbb{C})] \rightarrow H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q}) \rightarrow 0.$$

Поскольку $H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q})$ порождается образами алгебраических классов на X , то $H^4(X, \mathbb{Q}) \cap H^{2,2}(X, \mathbb{C})$ порождается классами когомологий алгебраических циклов коразмерности 2 на X . Значит, для X верна гипотеза Ходжа об алгебраических циклах.

§ 3. О геометрии расслоенного квадрата гладкого семейства КЗ-поверхностей

3.1. В этом параграфе мы докажем гипотезу Ходжа для $X = X_1 \times_C X_1$ при выполнении условий теоремы из п. 0.2.

Согласно [7, следствие 0.9] для общей в смысле Ходжа точки $s \in C$ пространство $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}$ является абсолютно неприводимым $\mathrm{Hg}(X_{1s})$ -модулем, поэтому группа

$$\mathrm{Hg}(X_{1s}) = \mathrm{SO}(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}, \Phi)$$

– простая алгебраическая группа типа $B_{\frac{p_1-1}{2}}$. Можно считать, что выполнено условие (2.1), так что $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}$ является абсолютно неприводимым $\pi_1(C, s)$ -модулем степени p_1 .

Из результатов, полученных в § 2, имеем $H^2(X_1, \mathbb{Q}) = \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_1)$, $H^4(X_1, \mathbb{Q})$, $H^2(C, \mathbb{R}^2 \pi_{1*} \mathbb{Q})$ и $H^2(X, \mathbb{Q})$ порождены классами алгебраических циклов.

3.2. Группа $\pi_1(C, s)$ оставляет неподвижными элементы из $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})$ в силу включения $G_1^{(2)} \hookrightarrow \mathrm{Hg}(X_{1s})$. Значит, из (2.18) следует, что

$$\begin{aligned} H^0(C, R^2 \pi_{1*} \mathbb{Q} \otimes R^2 \pi_{1*} \mathbb{Q}) &\simeq [H^2(X_{1s}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{1s}, \mathbb{Q})]^{\pi_1(C, s)} \\ &= [[\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s}) \oplus \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}]^{\otimes 2}]^{\pi_1(C, s)} \\ &= [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s}) \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})]^{\pi_1(C, s)} \oplus [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})]^{\pi_1(C, s)} \\ &\quad \oplus [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s}) \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}]^{\pi_1(C, s)} \oplus [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}]^{\pi_1(C, s)} \\ &= [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s}) \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})] \oplus [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}]^{\pi_1(C, s)}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Очевидно, что

$$[\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}]^{\pi_1(C, s)} \simeq \mathrm{Hom}_{\pi_1(C, s)}(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}, \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}).$$

Поскольку $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}$ является абсолютно неприводимым $\pi_1(C, s)$ -модулем степени p_1 , то в силу леммы Шура имеем

$$\mathrm{Hom}_{\pi_1(C, s)}(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}, \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}) = \mathbb{Q}.$$

В итоге получаем

$$\dim_{\mathbb{Q}} [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}]^{\pi_1(C, s)} = 1. \quad (3.2)$$

В силу (2.1) имеем

$$\begin{aligned} G_1^{(2)} &= \mathrm{Hg}(X_{1s}), \\ H^0(C, R^2 \pi_{1*} \mathbb{Q}) &\simeq H^2(X_{1s}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C, s)} = H^2(X_{1s}, \mathbb{Q})^{\mathrm{Hg}(X_{1s})} = \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s}), \end{aligned} \quad (3.3)$$

поэтому

$$\begin{aligned} [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}]^{\pi_1(C, s)} &= [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}]^{G_1^{(2)}} \\ &= [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}]^{\mathrm{Hg}(X_{1s})} \hookrightarrow [H^2(X_{1s}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{1s}, \mathbb{Q})]^{\mathrm{Hg}(X_{1s})} \\ &\hookrightarrow H^4(X_{1s} \times X_{1s}, \mathbb{Q}) \cap H^{2,2}(X_{1s} \times X_{1s}, \mathbb{C}). \end{aligned}$$

Согласно [7, теорема 0.8] пространство $H^4(X_{1s} \times X_{1s}, \mathbb{Q}) \cap H^{2,2}(X_{1s} \times X_{1s}, \mathbb{C})$ порождается классами пересечений дивизоров и классом диагонали $\Delta_{X_{1s}} \hookrightarrow X_{1s} \times X_{1s}$ (в частности, гипотеза Ходжа выполнена для $X_{1s} \times X_{1s}$), потому что для общей в смысле Ходжа точки $s \in C$ пространство $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}$ является абсолютно неприводимым $\mathrm{Hg}(X_{1s})$ -модулем [7, следствие 0.9].

Заметим, что в силу результатов Окамото [16, следствие 2.5] класс

$$\mathrm{cl}_{X_{1s} \times X_{1s}}(\Delta_{X_{1s}}) \in H^4(X_{1s} \times X_{1s}, \mathbb{Q})$$

не когомологичен сумме пересечений дивизоров с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Значит, образ класса

$$\mathrm{cl}_{X_1 \times_C X_1}(\Delta_{X_1}) \in H^4(X_1 \times_C X_1, \mathbb{Q}) = H^4(X, \mathbb{Q})$$

диагонали $\Delta_{X_1} \hookrightarrow X_1 \times_C X_1 = X$ при каноническом сюръективном морфизме $H^4(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^4\pi_*\mathbb{Q})$ не когомологичен сумме пересечений дивизоров, потому что

$$H^0(C, R^4\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^4(X_{1s} \times X_{1s}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C, s)} \subset H^4(X_{1s} \times X_{1s}, \mathbb{Q})$$

– образ $H^4(X, \mathbb{Q})$ при каноническом морфизме ограничения

$$H^4(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^4(X_{1s} \times X_{1s}, \mathbb{Q}).$$

Мы имеем точную последовательность $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа

$$0 \rightarrow H^2(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) \rightarrow \mathrm{Ker}[H^4(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^4\pi_*\mathbb{Q})] \rightarrow H^1(C, R^3\pi_*\mathbb{Q}) \rightarrow 0$$

(формула (2.6) при $i = 2$). Поэтому

$$H^2(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) = \mathrm{Ker}[H^4(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^4\pi_*\mathbb{Q})]$$

и имеется точная последовательность

$$0 \rightarrow H^2(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) \rightarrow H^4(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^4\pi_*\mathbb{Q}) \rightarrow 0. \quad (3.4)$$

Отображение $H^4(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^4\pi_*\mathbb{Q})$ сюръективно по теореме Делиня [10, теорема 4.1.1]. Кроме того,

$$H^0(C, R^4\pi_*\mathbb{Q}) = H^0(C, R^4\pi_{1*}\mathbb{Q}) \oplus H^0(C, R^2\pi_{1*}\mathbb{Q} \otimes R^2\pi_{1*}\mathbb{Q}) \oplus H^0(C, R^4\pi_{1*}\mathbb{Q});$$

при этом $H^0(C, R^4\pi_{1*}\mathbb{Q})$ входит в точную последовательность

$$0 \rightarrow H^2(C, R^2\pi_{1*}\mathbb{Q}) \rightarrow H^4(X_1, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^4\pi_{1*}\mathbb{Q}) \rightarrow 0$$

(формула (2.3) при $i = 2$), пространство $H^4(X_1, \mathbb{Q})$ порождено алгебраическими циклами и даже классами пересечений дивизоров (п. 2.6). В частности, $H^0(C, R^4\pi_{1*}\mathbb{Q})$ порождается образами классов пересечений дивизоров на X_1 и, следовательно, на X .

Из (3.1)–(3.3) следует, что $H^0(C, R^4\pi_*\mathbb{Q})$ порождено образами пересечений дивизоров на X и образом класса $\mathrm{cl}_{X_1 \times_C X_1}(\Delta_{X_1}) = \mathrm{cl}_X(\Delta_{X_1})$ в $H^0(C, R^4\pi_*\mathbb{Q})$.

Осталось заметить, что по формуле Кюннета

$$R^2\pi_*\mathbb{Q} = R^2\pi_{1*}\mathbb{Q} \oplus R^2\pi_{1*}\mathbb{Q},$$

поэтому $H^2(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) = H^2(C, R^2\pi_{1*}\mathbb{Q}) \oplus H^2(C, R^2\pi_{1*}\mathbb{Q})$ порождается классами пересечений дивизоров на множителях расслоенного произведения $X = X_1 \times_C X_1$ и, следовательно, на X . Гипотеза Ходжа для $X = X_1 \times_C X_1$ доказана.

§ 4. Доказательство стандартной гипотезы $B(X)$

4.1. Сначала докажем стандартную гипотезу Гротендика $B(X)$ [17] типа Лефшеца в случае, когда морфизмы π_1 и π_2 гладкие, числа $p_k = 22 - \text{rank NS}(X_{ks})$ нечетные простые и $p_1 \neq p_2$ (пп. 4.1–4.4).

Пусть $\pi \times_C \pi: X \times_C X \rightarrow C$ – структурный морфизм расслоенного произведения. Легко видеть, что имеется каноническая точная последовательность $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа

$$0 \rightarrow H^2(C, R^2(\pi \times_C \pi)_* \mathbb{Q}) \rightarrow H^4(X \times_C X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^4(\pi \times_C \pi)_* \mathbb{Q}) \rightarrow 0, \quad (4.1)$$

которая является аналогом (3.4). По формуле Кюннета имеем

$$R^2(\pi \times_C \pi)_* \mathbb{Q} = R^2 \pi_* \mathbb{Q} \oplus R^2 \pi_* \mathbb{Q}; \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} R^4(\pi \times_C \pi)_* \mathbb{Q} &= R^4 \pi_* \mathbb{Q} \oplus [R^2 \pi_* \mathbb{Q} \otimes R^2 \pi_* \mathbb{Q}] \oplus R^4 \pi_* \mathbb{Q} \\ &= R^4 \pi_* \mathbb{Q} \oplus [R^2 \pi_{1*} \mathbb{Q} \oplus R^2 \pi_{2*} \mathbb{Q}]^{\otimes 2} \oplus R^4 \pi_* \mathbb{Q} \\ &\simeq R^4 \pi_* \mathbb{Q} \oplus [R^2 \pi_{1*} \mathbb{Q} \otimes R^2 \pi_{1*} \mathbb{Q}] \oplus [R^2 \pi_{1*} \mathbb{Q} \otimes R^2 \pi_{2*} \mathbb{Q}] \\ &\quad \oplus [R^2 \pi_{2*} \mathbb{Q} \otimes R^2 \pi_{1*} \mathbb{Q}] \oplus [R^2 \pi_{2*} \mathbb{Q} \otimes R^2 \pi_{2*} \mathbb{Q}] \oplus R^4 \pi_* \mathbb{Q}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

В силу (2.20) имеем

$$\begin{aligned} H^0(C, R^2 \pi_{1*} \mathbb{Q} \otimes R^2 \pi_{2*} \mathbb{Q}) &\simeq [H^2(X_{1s}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{2s}, \mathbb{Q})]^{\pi_1(C, s)} \\ &= \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s}) \otimes \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s}). \end{aligned} \quad (4.4)$$

С другой стороны, из (3.1) следует, что

$$\begin{aligned} H^0(C, R^2 \pi_{k*} \mathbb{Q} \otimes R^2 \pi_{k*} \mathbb{Q}) &\simeq [\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks}) \otimes \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks})] \\ &\quad \oplus [\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks})^{\perp} \otimes \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks})^{\perp}]^{\pi_1(C, s)}, \end{aligned}$$

где $[\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks})^{\perp} \otimes \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks})^{\perp}]^{\pi_1(C, s)}$ является 1-мерным пространством, порожденным рациональной линейной комбинацией классов пересечений дивизоров и класса диагонали $\Delta_{X_{ks}} \hookrightarrow X_{ks} \times X_{ks}$. Поэтому из результатов, полученных в пп. 2.8, 3.1, 3.2, и (4.1)–(4.4) следует, что пространство $H^4(X \times_C X, \mathbb{Q})$ порождается классами пересечений дивизоров на $X \times_C X$ и образами классов когомологий диагоналей $\Delta_{X_k} \hookrightarrow X_k \times_C X_k$ относительно композиции канонических отображений

$$\begin{aligned} \text{cl}_{X_k \times_C X_k}(\Delta_{X_k}) &\in H^4(X_k \times_C X_k, \mathbb{Q}) \xrightarrow{q_k^*} H^4([X_1 \times_C X_1] \times_C [X_2 \times_C X_2], \mathbb{Q}) \\ &\xrightarrow{\sigma^*} H^4([X_1 \times_C X_2] \times_C [X_1 \times_C X_2], \mathbb{Q}) = H^4(X \times_C X, \mathbb{Q}), \end{aligned}$$

индуцированных каноническими проекциями

$$q_k: [X_1 \times_C X_1] \times_C [X_2 \times_C X_2] \rightarrow X_k \times_C X_k$$

и перестановкой

$$\sigma: [X_1 \times_C X_2] \times_C [X_1 \times_C X_2] \rightarrow [X_1 \times_C X_1] \times_C [X_2 \times_C X_2]$$

множителей расслоенного произведения. В частности, $H^4(X \times_C X, \mathbb{Q})$ порождается классами алгебраических циклов на $X \times_C X$.

4.2. Будем использовать некоторые свойства циклов Пуанкаре [14, § 1], ассоциированных с $\mathbb{Q}$ -структурами Ходжа.

По определению для любой точки $t \in C$ цикл Пуанкаре $\wp(H^2(X_t, \mathbb{Q}))$ является образующей 1-мерного пространства $[H^2(X_t, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_t, \mathbb{Q})]^{\text{SO}(H^2(X_t, \mathbb{Q}), \Psi_t)}$ инвариантов диагонального действия $x \otimes y \xrightarrow{\sigma} \sigma x \otimes \sigma y$ алгебраической группы $\text{SO}(H^2(X_t, \mathbb{Q}), \Psi_t)$, где Ψ_t – симметрическая форма поляризации на $H^2(X_t, \mathbb{Q})$. Это цикл Ходжа; другими словами, он принадлежит пространству

$$[H^2(X_t, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_t, \mathbb{Q})]^{\text{Hg}(H^2(X_t, \mathbb{Q}))} = [H^2(X_t, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_t, \mathbb{Q})] \cap H^{2,2}(X_t \times X_t, \mathbb{C}).$$

Более того, $\wp(H^2(X_t, \mathbb{Q}))$ определяет изоморфизм $H^6(X_t, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(X_t, \mathbb{Q})$, являющийся композицией

$$\begin{aligned} H^6(X_t, \mathbb{Q}) &\xrightarrow{\text{pr}_{1t}^*} H^6(X_t, \mathbb{Q}) \otimes H^0(X_t, \mathbb{Q}) \\ &\xrightarrow{\sim \wp(H^2(X_t, \mathbb{Q}))} H^8(X_t, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_t, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\text{pr}_{2t*}} H^2(X_t, \mathbb{Q}), \end{aligned} \quad (4.5)$$

где pr_{1t} и pr_{2t} – канонические проекции $X_t \times X_t \rightarrow X_t$ [14, лемма 1.5].

4.3. Используя идею доказательства теоремы 2.3 в [14], покажем, что существует алгебраический изоморфизм

$$H^1(C, R^6\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^1(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}), \quad (4.6)$$

определенный алгебраическим классом $\iota_*(\text{cl}_{X \times_C X}(Z))$, где $\iota: X \times_C X \hookrightarrow X \times X$ – каноническое вложение.

Действительно, фиксируем точку $s \in C$, общую в смысле Ходжа для семейств $\pi_k: X_k \rightarrow C$, $k = 1, 2$. Так как $H^2(X_{ks}, \mathbb{Q})$ – рациональная подструктура Ходжа в $H^2(X_s, \mathbb{Q})$, из определения группы Ходжа структуры Ходжа $H^2(X_s, \mathbb{Q})$ следует, что имеются канонические сюръективные проекции

$$\text{Hg}(H^2(X_s, \mathbb{Q})) = \text{Hg}(H^2(X_{1s}, \mathbb{Q}) \oplus H^2(X_{2s}, \mathbb{Q})) \rightarrow \text{Hg}(H^2(X_{ks}, \mathbb{Q})).$$

Поскольку $\text{Hg}(X_{ks})$ – простая алгебраическая группа типа $B_{\frac{p_k-1}{2}}$ в силу [7, следствие 0.9] и $p_1 \neq p_2$, то из (2.1) следует, что

$$\text{Hg}(H^2(X_s, \mathbb{Q})) = \text{Hg}(X_{1s}) \times \text{Hg}(X_{2s}) = G_1^{(2)} \times G_2^{(2)} = G^{(2)} \quad (4.7)$$

в обозначениях из п. 2.1.

Образ канонического отображения ограничения $H^4(X \times_C X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^4(X_s \times X_s, \mathbb{Q})$ совпадает с $H^4(X_s \times X_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C, s)}$ [10, теорема 4.1.1]. Поэтому из соотношения (4.7) следует, что класс Пуанкаре

$$\begin{aligned} \wp(H^2(X_s, \mathbb{Q})) &\in [H^2(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_s, \mathbb{Q})]^{\text{Hg}(H^2(X_s, \mathbb{Q}))} \\ &\subset [H^2(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_s, \mathbb{Q})]^{G^{(2)}} = [H^2(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_s, \mathbb{Q})]^{\pi_1(C, s)} \\ &\subset H^4(X_s \times X_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C, s)} \end{aligned}$$

принадлежит образу отображения ограничения

$$H^4(X \times_C X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^4(X_s \times X_s, \mathbb{Q}).$$

Поскольку $H^4(X \times_C X, \mathbb{Q})$ порождается классами алгебраических циклов на $X \times_C X$ в силу результатов из п. 4.1, можно считать, что класс когомологий некоторого алгебраического цикла Z на $X \times_C X$ коразмерности 2 (с коэффициентами из поля $\mathbb{Q}$) индуцирует $\wp(H^2(X_s, \mathbb{Q}))$ при каноническом отображении ограничения $H^4(X \times_C X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^4(X_s \times X_s, \mathbb{Q})$. Тогда в силу (4.5) класс $\text{cl}_{X \times_C X}(Z)$ определяет изоморфизм локальных систем $R^6\pi_*\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} R^2\pi_*\mathbb{Q}$, который является композицией

$$\begin{aligned} R^6\pi_*\mathbb{Q} &\xrightarrow{q_1^*} R^6\pi_*\mathbb{Q} \otimes \pi_*\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim \text{cl}_{X \times_C X}(Z)} R^{10}\tau_*\mathbb{Q} = \bigoplus_{i=0}^{10} R^i\pi_*\mathbb{Q} \otimes R^{10-i}\pi_*\mathbb{Q} \\ &\rightarrow R^8\pi_*\mathbb{Q} \otimes R^2\pi_*\mathbb{Q} \xrightarrow{q_2^*} R^2\pi_*\mathbb{Q}, \end{aligned}$$

где q_1, q_2 – канонические проекции $X \times_C X \rightarrow X$ и $\tau = \pi q_i: X \times_C X \rightarrow C$ – структурный морфизм расслоенного произведения. Поскольку $q_{2*}(R^i\pi_*\mathbb{Q} \otimes R^{10-i}\pi_*\mathbb{Q}) = 0$ для всех $i \neq 8$ [14, формула (1.2)], мы видим, что имеется изоморфизм

$$H^1(C, R^6\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow[\sim]{x \mapsto q_{2*}(q_1^*(x) \smile \text{cl}_{X \times_C X}(Z))} H^1(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}).$$

Заметим, что $q_k = \text{pr}_k \iota$, где $\text{pr}_k: X \times X \rightarrow X$ – каноническая проекция и $\iota: X \times_C X \hookrightarrow X \times X$ – каноническое вложение. В силу формулы проекции имеем

$$\begin{aligned} q_{2*}(q_1^*(x) \smile \text{cl}_{X \times_C X}(Z)) &= [\text{pr}_2 \iota]_*((\text{pr}_1 \iota)^*x \smile \text{cl}_{X \times_C X}(Z)) \\ &= \text{pr}_{2*} \iota_* (\iota^* \text{pr}_1^* x \smile \text{cl}_{X \times_C X}(Z)) = \text{pr}_{2*}(\text{pr}_1^* x \smile \iota_*(\text{cl}_{X \times_C X}(Z))), \end{aligned}$$

поэтому алгебраический класс $\iota_*(\text{cl}_{X \times_C X}(Z))$ определяет алгебраический изоморфизм (4.6).

4.4. Вырожденная спектральная последовательность Лере $E_2^{p,q} = H^p(C, R^q\pi_*\mathbb{Q}) \Rightarrow H^*(X, \mathbb{Q})$ дает точные последовательности

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^2(C, R^1\pi_*\mathbb{Q}) \rightarrow \text{Ker}[H^3(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^3\pi_*\mathbb{Q})] \rightarrow H^1(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow H^2(C, R^5\pi_*\mathbb{Q}) \rightarrow \text{Ker}[H^7(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^7\pi_*\mathbb{Q})] \rightarrow H^1(C, R^6\pi_*\mathbb{Q}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Поскольку $R^1\pi_*\mathbb{Q} = R^3\pi_*\mathbb{Q} = R^7\pi_*\mathbb{Q} = 0$, мы получаем канонические изоморфизмы

$$H^3(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^1(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}), \quad H^7(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^1(C, R^6\pi_*\mathbb{Q}).$$

Поэтому из (4.6) следует, что алгебраический класс $\iota_*(\text{cl}_{X \times_C X}(Z))$ дает алгебраический изоморфизм

$$H^7(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^3(X, \mathbb{Q}).$$

Кроме того, в силу [14, лемма 1.5] существуют алгебраические изоморфизмы

$$\begin{aligned} H^{10}(X, \mathbb{Q}) &\xrightarrow{\sim} H^0(X, \mathbb{Q}), & H^9(X, \mathbb{Q}) &\xrightarrow{\sim} H^1(X, \mathbb{Q}), \\ H^8(X, \mathbb{Q}) &\xrightarrow{\sim} H^2(X, \mathbb{Q}), & H^6(X, \mathbb{Q}) &\xrightarrow{\sim} H^4(X, \mathbb{Q}), \end{aligned}$$

определенные соответственно алгебраическими циклами Пуанкаре

$$\begin{aligned}\wp(H^0(X, \mathbb{Q})) &\in H^0(X, \mathbb{Q}) \otimes H^0(X, \mathbb{Q}), \\ \wp(H^1(X, \mathbb{Q})) &\in H^1(X, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X, \mathbb{Q})\end{aligned}$$

(цикл $\wp(H^1(X, \mathbb{Q}))$ алгебраический, потому что $\wp(H^1(X, \mathbb{Q})) \in [H^1(X, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X, \mathbb{Q})] \cap H^{1,1}(X \times X, \mathbb{C})$ – цикл Ходжа [14, п. 1.4] и $[H^1(X, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X, \mathbb{Q})] \cap H^{1,1}(X \times X, \mathbb{C}) \hookrightarrow \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X \times X)$ по теореме Лефшеца о дивизорах на многообразии $X \times X$),

$$\begin{aligned}\wp(H^2(X, \mathbb{Q})) &\in H^2(X, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X, \mathbb{Q}), \\ \wp(H^4(X, \mathbb{Q})) &\in H^4(X, \mathbb{Q}) \otimes H^4(X, \mathbb{Q})\end{aligned}$$

(напомним, что в силу результатов из § 2 пространства $H^2(X, \mathbb{Q})$ и $H^4(X, \mathbb{Q})$ порождаются алгебраическими классами). Значит, в силу [18, теорема 2.9] гипотеза $B(X)$ верна. Теорема из п. 0.1 доказана.

4.5. Здесь мы докажем стандартную гипотезу $B(X)$ при выполнении условий теоремы из п. 0.2. Таким образом, с учетом результатов, полученных в § 3, теорема из п. 0.2 будет полностью доказана.

Фиксируем точку $s \in C$, общую в смысле Ходжа для семейства $\pi_1: X_1 \rightarrow C$. Тогда $\text{Hg}(X_{1s})$ – простая алгебраическая группа типа $B_{\frac{p_1-1}{2}}$ в силу [7, следствие 0.9] и из (2.1) следует, что

$$\text{Hg}(H^2(X_s, \mathbb{Q})) = \text{Hg}(X_{1s}) = G_1^{(2)} = G^{(2)}$$

в обозначениях из п. 2.1. Поэтому гипотеза $B(X)$ может быть доказана рассуждениями из пп. 4.3, 4.4, потому что в рассматриваемом случае пространство $H^4(X \times_C X, \mathbb{Q}) = H^4(C, X_1 \times_C X_1 \times_C X_1 \times_C X_1, \mathbb{Q})$ порождается классами алгебраических циклов на $X \times_C X$ и класс Пуанкаре

$$\begin{aligned}\wp(H^2(X_s, \mathbb{Q})) &\in [H^2(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_s, \mathbb{Q})]^{\text{Hg}(H^2(X_s, \mathbb{Q}))} \\ &\subset [H^2(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_s, \mathbb{Q})]^{G^{(2)}} = [H^2(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_s, \mathbb{Q})]^{\pi_1(C, s)} \\ &\subset H^4(X_s \times X_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C, s)}\end{aligned}$$

принадлежит образу отображения ограничения $H^4(X \times_C X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^4(X_s \times X_s, \mathbb{Q})$. Теорема из п. 0.2 доказана.

4.6. ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $\pi_k: X_k \rightarrow C$, $k = 1, 2$, – проективные семейства КЗ-поверхностей (возможно, с вырождениями) над гладкой проективной кривой C . Тогда существует такое счетное подмножество $\Delta_{\text{countable}} \hookrightarrow C$, что функция $s \mapsto \text{rank NS}(X_{ks})$ постоянна на множестве $C \setminus \Delta_{\text{countable}}$.

Действительно, используя замену базы, мы можем (и будем считать), что группа $G_k^{(2)}$ связна. По теореме Делиня для любой точки $s \in C$ вне некоторого счетного подмножества $\Delta_{\text{countable}}$ группа $G_k^{(2)}$ – нормальная подгруппа в группе Ходжа $\text{Hg}(X_{ks})$ поверхности X_{ks} [11, теорема 7.3]. Для таких точек s , называемых общими в смысле Ходжа, согласно [1, следствие 4.1.1] и теореме Лефшеца

о дивизорах имеем

$$\begin{aligned} H^2(X_{ks}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C', s)} &= H^2(X_{ks}, \mathbb{Q})^{G_k^{(2)}} \hookrightarrow \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks}) \\ &= H^2(X_{ks}, \mathbb{Q})^{\mathrm{Hg}(X_{ks})} \hookrightarrow H^2(X_{ks}, \mathbb{Q})^{G_k^{(2)}}, \end{aligned}$$

поэтому $H^2(X_{ks}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C', s)} = \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks})$ и, следовательно, $\mathrm{rank} \mathrm{NS}(X_{ks}) = \dim_{\mathbb{Q}} H^0(C', R^2\pi_{k*}\mathbb{Q})$ не зависит от выбора точки $s \in C \setminus \Delta_{\text{countable}}$.

Приведенное выше замечание позволяет заменять выражение "точка, общая в смысле Ходжа" на выражение "общая геометрическая точка", где "общность" точки означает ее принадлежность множеству $C \setminus \Delta_{\text{countable}}$ для некоторого счетного подмножества $\Delta_{\text{countable}} \hookrightarrow C$.

Список литературы

1. Yu. G. Zarhin, "Hodge groups of K3 surfaces", *J. Reine Angew. Math.*, **341** (1983), 193–220.
2. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли*, гл. 1–3: *Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли*, Мир, М., 1976; гл. 4–6: *Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней*, 1972; гл. 7–8: *Подалгебры Картана, регулярные элементы, расщепляемые полупростые алгебры Ли*, 1978; пер. с фр.: N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Groupes et algèbres de Lie*. Chap. I: *Algèbres de Lie.*, Hermann & Cie, Paris, 1971; Chap. II: *Algèbres de Lie libres*. Chap. III: *Groupes de Lie*, 1972; Chap. IV: *Groupes de Coxeter et systèmes de Tits*. Chap. V: *Groupes engendrés par des réflexions*. Chap. VI: *Systèmes de racines*, 1968; Chap. VII: *Sous-algèbres de Cartan, éléments réguliers*. Chap. VIII: *Algèbres de Lie semi-simples déployées*, 1975.
3. Г. А. Мустафин, "Семейства алгебраических многообразий и инвариантные циклы", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **49**:5 (1985), 948–978; англ. пер.: G. A. Mustafin, "Families of algebraic varieties and invariant cycles", *Math. USSR-Izv.*, **27**:2 (1986), 251–278.
4. Н. Бурбаки, *Элементы математики. Алгебра*, гл. VII–IX: *Модули, кольца, формы*, Наука, М., 1966; пер. с фр.: N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Algèbre*. Chap. VII: *Modules sur les anneaux principaux*, Hermann, Paris, 1952; Chap. VIII: *Modules et anneaux semi-simples*, 1958; Chap. IX: *Formes sesquilineaires et formes quadratiques*, 1959.
5. С. Хелгасон, *Дифференциальная геометрия и симметрические пространства*, Мир, М., 1964; пер. с англ.: S. Helgason, *Differential geometry and symmetric spaces*, Pure Appl. Math., **12**, Academic Press, New York–London, 1962.
6. С. Г. Танкеев, "Моноидальные преобразования и гипотезы об алгебраических циклах", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71**:3 (2007), 197–224; англ. пер.: S. G. Tankeev, "Monoidal transformations and conjectures on algebraic cycles", *Izv. Math.*, **71**:3 (2007), 629–655.
7. С. Г. Танкеев, "Об арифметике и геометрии общего гиперповерхностного сечения", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:2 (2002), 173–204; англ. пер.: S. G. Tankeev, "The arithmetic and geometry of a generic hypersurface section", *Izv. Math.*, **66**:2 (2002), 393–424.
8. G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat, *Toroidal embeddings*, v. I, Lecture Notes in Math., **339**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1973.
9. С. Г. Танкеев, "О стандартной гипотезе для комплексных абелевых схем над гладкими проективными кривыми", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:3 (2003), 183–224;

- англ. пер.: S. G. Tankeev, “On the standard conjecture for complex Abelian schemes over smooth projective curves”, *Izv. Math.*, **67**:3 (2003), 597–635.
10. П. Делинь, “Теория Ходжа. II”, *Математика. Сб. пер.*, **17**:5 (1973), 3–56; пер. с фр.: P. Deligne, “Théorie de Hodge. II”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **40**:1 (1971), 5–57.
 11. Ю. Г. Зархин, “Веса простых алгебр Ли в когомологиях алгебраических многообразий”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48**:2 (1984), 264–304; англ. пер.: Yu. G. Zarhin, “Weights of simple Lie algebras in the cohomology of algebraic varieties”, *Math. USSR-Izv.*, **24**:2 (1985), 245–281.
 12. S. Zucker, “Hodge theory with degenerating coefficients: L_2 cohomology in the Poincaré metric”, *Ann. of Math. (2)*, **109**:3 (1979), 415–476.
 13. С. Г. Танкеев, “О стандартной гипотезе типа Лефшеца для комплексных проективных трехмерных многообразий. II”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:5 (2011), 177–194; англ. пер.: S. G. Tankeev, “On the standard conjecture of Lefschetz type for complex projective threefolds. II”, *Izv. Math.*, **75**:5 (2011), 1047–1062.
 14. С. Г. Танкеев, “О стандартной гипотезе типа Лефшеца для комплексных проективных трехмерных многообразий”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:1 (2010), 175–196; англ. пер.: S. G. Tankeev, “On the standard conjecture of Lefschetz type for complex projective threefolds”, *Izv. Math.*, **74**:1 (2010), 167–187.
 15. P. Deligne, “Théorie de Hodge. III”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **44**:1 (1974), 5–77.
 16. M. Okamoto, “On a certain decomposition of 2-dimensional cycles on a product of two algebraic surfaces”, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **57**:6 (1981), 321–325.
 17. A. Grothendieck, “Standard conjectures on algebraic cycles”, *Algebraic geometry* (Bombay, 1968), Oxford Univ. Press, London, 1969, 193–199.
 18. S. L. Kleiman, “Algebraic cycles and the Weil conjectures”, *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North-Holland, Amsterdam, 1968, 359–386.

О. В. НИКОЛЬСКАЯ (O. V. NIKOL'SKAYA)
 Владимирский государственный университет
 им. А. Г. и Н. Г. Столетовых
 E-mail: papichonok@yandex.ru

Поступило в редакцию
 28.11.2011